UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO EM EDUCAÇÃO

GABRIELA TEIXEIRA KLUPPEL

REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DA GEOMETRIA EM LIVROS DIDÁTICOS À LUZ DA TEORIA DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS SEGUNDO RAYMOND DUVAL

PONTA GROSSA
2012

GABRIELA TEIXEIRA KLUPPEL

REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DA GEOMETRIA EM LIVROS DIDÁTICOS À LUZ DA TEORIA DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS SEGUNDO RAYMOND DUVAL

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre na Universidade Estadual de Ponta Grossa, Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, Mestrado em Educação. Linha de pesquisa: Ensino e Aprendizagem,

Orientadora: Profª Dra. Célia Finck Brandt.

PONTA GROSSA
2012

Ficha Catalográfica Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

K66r

Kluppel, Gabriela Teixeira
Reflexões sobre o ensino da geometria em livros didáticos à luz da teoria de representações semióticas segundo Raymund Duval / Gabriela Teixeira Kluppel. Ponta Grossa, 2012.
109f.
Dissertação (Mestrado em Educação- Linha de pesquisa : Ensino e Aprendizagem) Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Orientadora: Profª Drª Célia Finck Brandt

1. Geometria. 2. Livro didático. 3. Representações Semióticas. 4. Ensino da Geometria. I. Brandt, Célia Finck. II. T.

CDD: 372.7

TERMO DE APROVAÇÃO

GABRIELA TEIXEIRA KLÜPPEL

REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DA GEOMETRIA EM LIVROS DIDÁTICOS À LUZ DA TEORIA DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS SEGUNDO RAYMOND DUVAL

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Educação, Setor de Ciências Humanas, Letras e Artes da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Orientadora Profa. Dra. Célia Finck Brandt
UEPG

Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti
UFSC

Profa. Dra. Mary Ângela Teixeira Brandalise
UEPG

Prof. Dr. Dionísio Burak
UNICENTRO/UEPG

Ponta Grossa, 15 de fevereiro de 2012

Dedico aos meus pais e as minhas irmãs, pelo apoio e incentivo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por sua presença constante em minha vida, por orientar os meus passos e por mais esta etapa realizada.

A minha orientadora Prof. Dr. Célia Finck Brandt, que me incentivou, me apoiou e acreditou no meu trabalho. Agradeço por me ensinar, por compartilhar seus conhecimentos, por se fazer sempre presente durante a elaboração desta dissertação. Sua dedicação, competência e compromisso com seu trabalho revelam a pessoa e a profissional admirável que é.

Aos professores Dr. Méricles Thadeu Moretti, Dr. Dionísio Burak, Dra. Mary Ângela Teixeira Brandalise, por suas valiosas e imprescindíveis contribuições.

Aos professores que fizeram parte da minha trajetória acadêmica, especialmente aos professores do PPGE/UEPG pelo comprometimento com a formação de pesquisadores.

À Capes, pela bolsa concedida.

Aos colegas do Mestrado, que compartilharam das minhas angústias.

Aos meus pais, pelo apoio, incentivo e amor.

À minha irmã Camila, pelo incentivo, exemplo e carinho.

À minha irmã Talita, ao meu cunhado Lourival e ao meu sobrinho Bernardo, pela alegria e carinho.

KLUPPEL, Gabriela Teixeira. **Reflexões sobre o ensino da Geometria em livros didáticos à luz da Teoria de Representações Semióticas segundo Raymond Duval**. 2012. 109 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2012.

RESUMO

A presente dissertação apresenta uma análise do conteúdo de Geometria de livros didáticos de Matemática. Os objetivos da pesquisa foram: explicitar as especificidades da Teoria de Representações Semióticas, segundo Raymond Duval, no tocante à Geometria, e desvelar em que medida essas especificidades são contempladas nos livros didáticos analisados. A questão central da pesquisa que procuramos responder foi: em que medida a abordagem do conteúdo de Geometria nos livros didáticos contempla aspectos da Teoria de Representações Semióticas segundo Raymond Duval? Como fundamentação teórica, utilizamos as contribuições de Raymond Duval (2003, 2004). A pesquisa envolveu a análise de livros didáticos do período de 2002 a 2009, e os procedimentos de coleta e análise dos dados foram subsidiados pela análise de conteúdo de Bardin (2010). Os resultados da pesquisa indicam que a Geometria analisada nos livros didáticos apresenta lacunas em relação a aspectos da teoria de Raymond Duval. Isso acontece no que concerne às possibilidades para o desenvolvimento de propostas para o ensino, considerando: as interações entre tratamentos figurais e discursivos; a articulação entre registro figural e discurso para minimizar o fenômeno da não congruência semântica (possibilitada por orientações para apresentação de definições, resolução de exercícios e demonstração de teoremas); as modificações mereológicas ou visuais responsáveis pela apreensão operatória das figuras; a resolução de exercícios, que exige a organização, em função de uma variação sistemática de fatores de visibilidade para facilitar a não utilização de definições ou teoremas.

Palavras-chave: Geometria. Livro Didático. Representações Semióticas. Ensino da Geometria.

KLUPPEL, Gabriela Teixeira. **Reflections on the teaching of geometry in textbooks in the light of Raymond Duval's semiotic representation theory**. 2012. 109 f. Dissertation (Master in Education) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa - Brazil, 2012.

ABSTRACT

This dissertation presents an analysis of the geometry content of Mathematics textbooks. The research objectives were: to explain the specifics of Raymond Duval's semiotic representation theory, with respect to geometry, and to reveal to what extent these specifics are covered in the analyzed textbooks. The central research question we seek to answer is: to what extent does the organization of the geometry content of textbooks consider aspects of Raymond Duval's semiotic representation theory? As a theoretical basis, we use Raymond Duval's works (2003, 2004). The research involved the analysis of textbooks published between 2002 and 2009, and the data collection and data analysis were supported by Bardin's content analysis (2010). The research results indicate that the geometry discussed in textbooks has gaps in relation to aspects of Duval's theory. These gaps relate to possibilities for the development of proposals for education. These are: the interaction between figural and discursive treatments; the linkage between figural register and discourse to minimize the phenomenon of non-congruent semantics (made possible by setting guidelines for submission, problem solving and the demonstration of theorems); mereological or visual modifications responsible for the operative capture of figures, and finally, the resolution of exercises which require organization to enable a systematic variation of visibility factors to facilitate the non-use of definitions or theorems.

Keywords: Geometry. Textbook. Semiotic Representations. Teaching of Geometry.

LISTA DE SIGLAS

CNLD	Comissão Nacional do Livro Didático
COLTED.	Comissão do Livro Técnico e Livro Didático
DCE	Diretrizes Curriculares da Educação Básica
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
EJA	Educação de Jovens e Adultos
FAE	Fundação de Assistência ao Estudante
FENAME	Fundação Nacional do Material Escolar
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
GEPAM	Grupo de Estudo e Pesquisa em Aprendizagem da Matemática
INL	Instituto Nacional do Livro
LD	Livros Didáticos
MEC	Ministério da Educação e Cultura
NIEM	Núcleo Integrado de Educação Matemática
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PLIDEF	Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental
PNBE	Programa Nacional Biblioteca da Escola
PNDL	Programa Nacional do Livro Didático
PNLEM	Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio
TRS	Teoria de Representações Semióticas
UEPG	Universidade Estadual de Ponta Grossa
USAID	Agência Norte-Americana para o Desenvolvimento Internacional

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Enquanto acadêmica do curso Licenciatura em Matemática, comecei a participar do Grupo de Estudo e Pesquisa em Aprendizagem da Matemática (GEPAM). Neste grupo realizamos estudos referentes à Teoria de Representações Semióticas (TRS), de Raymond Duval[1].

Nos estudos, a TRS se mostrou importante para entender como enfrentar a complexidade da aprendizagem da Matemática no que diz respeito às dificuldades que muitos alunos têm para a sua compreensão e também por proporcionar um embasamento teórico fascinante no que se refere ao ensino e à aprendizagem dessa disciplina.

Durante a realização dos estudos referentes à TRS, desenvolvi uma pesquisa a respeito do ensino e da aprendizagem da Geometria. Essa pesquisa foi subsidiada pela TRS no tocante ao planejamento e desenvolvimento de atividades propostas a alunos do Ensino Fundamental (séries finais) e, igualmente, para a análise dos dados empíricos (relativos às respostas apresentadas pelos alunos às questões propostas nas atividades). Os resultados desta pesquisa mostraram a contribuição fundamental da TRS para o ensino e aprendizagem da Geometria.

No entanto, além da importância da TRS para o ensino da Geometria, constatei, a partir de resultados de pesquisas de Perez (1995), Passos (2000) e Ferreira e Correia (2007), entre outros autores, que há um descaso em relação à Geometria nas salas de aula, metodologia não apropriada, o não conhecimento por parte dos professores de alguns conteúdos específicos, conteúdos deixados para o final do ano letivo, entre outros fatores relevantes.

A intenção é contribuir com as pesquisas sobre o ensino da Geometria e apresentar alternativas para a sua melhoria e, por essas razões, essa pesquisa tem por objetivo identificar aspectos da TRS para o trabalho com o ensino da Geometria nas salas de aula da Educação Básica.

Considerando que os livros didáticos nas salas de aula das escolas brasileiras cumprem importante função no processo educativo, devido à pluralidade

[1] Raymond Duval é filosofo e psicólogo de formação, desenvolveu fundamentais estudos relativos à Psicologia Cognitiva, que redundaram, dentre outras publicações, em sua obra *Sémiosis et pensée humaine*.

de interpretações e usos, além das informações acerca do processo de ensino e sua influência na organização do currículo (essenciais para a compreensão da Matemática), optamos por investigar as formas de abordagem dos conteúdos de Geometria presentes nesses livros didáticos.

Dado o exposto, a presente pesquisa volta-se para a análise da forma de abordagem dos conteúdos de Geometria dos livros didáticos de Matemática da Educação Básica (6° a 9° ano do Ensino Fundamental), do período de 2002 a 2009. Essa análise voltar-se-á para uma abordagem do ponto de vista cognitivo. O referencial teórico adotado para subsidiar a análise foi a Teoria de Representações Semióticas de Raymond Duval (2003, 2004), no tocante à Geometria.

Buscando contribuição para a superação das dificuldades no processo ensino da Geometria, e como consequência no processo de aprendizagem dos alunos, a pesquisa tem por objetivos explicitar as especificidades da Teoria de Representações Semióticas, segundo Raymond Duval, no tocante à Geometria e há também a intenção de desvelar em que medida essas especificidades são contempladas nos livros didáticos analisados.

A questão central da pesquisa que procuraremos responder é: a forma de abordagem do conteúdo de Geometria presente nos livros didáticos, relativa aos processos de ensino, contempla aspectos da Teoria de Representações Semióticas segundo Raymond Duval, relativos à Geometria? Para responder essa questão, precisaremos saber: quais são as especificidades da atividade Matemática em Geometria segundo a Teoria de Representações Semióticas de Raymond Duval?

Optou-se por uma abordagem qualitativa que utilizou como métodos de coleta de dados a pesquisa bibliográfica. Os dados empíricos serão organizados e analisados de acordo com os pressupostos teóricos da Análise de Conteúdo, de Laurence Bardin (2010), que se constitui no estudo do significado do discurso que os atores sociais exteriorizam, apontando a frequência ou ausência de determinadas características do conteúdo e analisados segundo o referencial teórico adotado.

O texto está organizado em quatro capítulos, de modo a apresentar, no primeiro capítulo, apontamentos quanto ao Livro Didático e à Geometria; no segundo capítulo, os subsídios teóricos relativos à Teoria de Representações Semióticas segundo Raymond Duval; no terceiro capítulo, os procedimentos utilizados para a coleta e análise dos dados, subsidiada pela análise de conteúdo de Laurence Bardin; e no quarto capítulo, as análises, os resultados obtidos e as discussões.

CAPÍTULO 1
LIVRO DIDÁTICO E GEOMETRIA

1.1 LIVRO DIDÁTICO

O livro didático é um material editorial elaborado para a utilização em situações de ensino e aprendizagem, que, segundo Galatti (2006, p. 18), é "legitimado por sistematizar o conhecimento a ser estudado em uma situação de aprendizado coletivo e orientado por um professor".

Para Lajolo (1996), o livro didático é um instrumento específico e importantíssimo para ensino e para aprendizagem. No entanto, o autor afirma que para o livro ser considerado didático ele precisa ser usado de forma sistemática, no ensino e na aprendizagem de um determinado objeto do conhecimento humano, geralmente já consolidado como disciplina escolar, e deve ser passível de uso na situação específica da escola, isto é, de aprendizado coletivo e orientado por um professor.

No Guia de Livros Didáticos, Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de Matemática (BRASIL, 2011), o livro didático é caracterizado como "um interlocutor que dialoga com o professor e com o aluno. Nesse diálogo, tal texto é portador de uma perspectiva sobre o saber a ser estudado e sobre o modo de se conseguir aprendê-lo mais eficazmente" (p.12).

Isto também é destacado por Munakata (1999), ao afirmar que o leitor do livro didático "deve se relacionar com este material mais numa perspectiva de uso do que de leitura e que seu uso se dá em uma situação particular, no "*ensino e aprendizagem*"" (p. 579, grifos do autor).

Na escola, o livro didático deve ser "lido do professor para o aluno, pelos alunos em conjunto, pelo aluno sozinho e pelo aluno na execução e exercícios e tarefas propostas". (MUNAKATA, 1999, p. 579).

Galatti considera os livros didáticos (LD) como,

> [...] um gênero textual, considerando que o LD é construído de forma sistematizada, por um autor tendo como alvo alunos e/ou professores, ou

> seja, há uma ação a partir do LD em um determinado contexto e uso. Assim, o LD não é um suporte, mas sim um gênero que se concretiza fisicamente através do suporte Livro. Mais que isso, o LD, em seu interior, não se limita a apenas um gênero, mas constitui-se em uma intercalação de gêneros, característica que consideramos positivas, uma vez que ainda que os textos escolares, em sua maioria, se apresentem suportados na forma impressa (como aponta Batista 2000), trazem diferentes gêneros ao longo de seus textos, proporcionando ao aluno conhecer e relacionar-se com os mesmos. (GALATTI, 2006, p. 80).

Diante das definições e dos apontamentos referentes ao livro didático, destacamos e concordamos com a afirmação de Galatti (2006, p. 82), para quem o livro didático é “um instrumento do processo de ensino e aprendizagem mediador da relação professor e aluno dentro de uma disciplina específica da educação formal, que é escolhido e mediado pelo professor e não apenas lido, mas usado pelo aluno”.

Esse instrumento, mediador da relação professor aluno, tem diferentes funções. Gérard e Roegiers (1998) destacam algumas funções importantes que o livro didático desempenha em relação ao professor e ao aluno.

Quadro 1 – Funções do livro didático

Em relação ao professor, o livro didático tem a função de:	**Em relação ao aluno, o livro didático tem a função de:**
• Auxiliar no planejamento e na gestão das aulas, seja pela explanação de conteúdos curriculares, seja pelas atividades, exercícios e trabalhos propostos. • Favorecer a aquisição dos conhecimentos, assumindo o papel de texto de referência. • Favorecer a formação didático-pedagógica. • Auxiliar na avaliação da aprendizagem do aluno.	• Favorecer a aquisição de conhecimentos socialmente relevantes. • Propiciar o desenvolvimento de competências cognitivas, que contribuam para aumentar a autonomia. • Consolidar, ampliar, aprofundar e integrar os conhecimentos adquiridos. • Auxiliar na autoavaliação da aprendizagem. • Contribuir para a formação social e cultural e desenvolver a capacidade de convivência e de exercício da cidadania.

Fonte: Gérard e Roegiers (1998), dados organizados pela autora.

Choppin (2004) apresenta quatro funções que o livro didático desempenha no ensino, que podem variar segundo o ambiente sociocultural, a época, as disciplinas, os níveis de ensino, os métodos e as formas de utilização: a função referencial, a função instrumental, a função ideológica e cultural e a função documental.

A **função referencial**, também chamada de curricular ou programática, caracteriza-se pelo fato de o livro didático ser apenas a fiel tradução do programa.

Ele constitui “o suporte privilegiado dos conteúdos educativos, o depositário dos conhecimentos, técnicas ou habilidades que um grupo social acredita que seja necessário transmitir às novas gerações”. (CHOPPIN, 2004, p. 553).

Diante desta afirmação de Choppin, referente à função referencial ou pragmática do livro didático, destacamos que os livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) seguem as orientações propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN); logo, os livros didáticos aprovados pelo PNLD apresentam aspectos do programa curricular. No entanto, quando nos referimos ao plano de trabalho docente, o livro didático muitas vezes propicia suporte ao docente, e este, por sua vez, determina o programa curricular, contrariando o que propõe Choppin (2004).

Segundo Choppin (2004, p.553), o livro didático também exerce a **função instrumental** e, de acordo com esta função, o livro didático “põe em prática métodos de aprendizagem, propõe exercícios ou atividades”. Esta função está presente nos livros didáticos, haja vista que atividades e exercícios são propostos nesses livros e sempre dão indícios das formas de trabalho com os conteúdos. Essas formas podem ou não enriquecer o ensino dos conteúdos matemáticos.

O livro didático, de acordo com Choppin (2004), desempenha a **função ideológica** e **cultural,** caracterizando a função mais antiga, e nela o livro didático se afirmou como

> [...] um dos vetores essenciais da língua, da cultura e dos valores das classes dirigentes. Instrumento privilegiado de construção de identidade, geralmente ele é reconhecido, assim como a moeda e a bandeira, como um símbolo da soberania nacional e, nesse sentido, assume um importante papel político. Essa função, que tende a aculturar — e, em certos casos, a doutrinar — as jovens gerações, pode se exercer de maneira explícita, até mesmo sistemática e ostensiva, ou, ainda, de maneira dissimulada, sub-reptícia, implícita, mas não menos eficaz. (CHOPPIN, 2004, p. 553).

Na **função documental**, o livro didático “pode fornecer, sem que sua leitura seja dirigida, um conjunto de documentos, textuais ou icônicos, cuja observação ou confrontação podem vir a desenvolver o espírito crítico do aluno”. (CHOPPIN, 2004, p. 553).

Dentre as funções do livro didático apresentadas, uma das principais funções desempenhadas pelo livro didático é a função de orientar os professores na preparação das aulas. Comenius[2], citado por Pina (2009), destaca essa função e reconhece que existe, por parte dos professores, falta de tempo, de condições financeiras, de formação para utilizarem outros materiais de pesquisa e a falta de atualização em relação a seu campo profissional, de modo que, diante desses apontamentos, destaca-se que o livro didático deve

> […] contribuir para que o professor organize sua prática e forneça sugestões de aprofundamento das concepções pedagógicas desenvolvidas na escola. O livro deve oferecer uma orientação para que o professor busque, de forma autônoma, outras fontes e experiências para complementar seu trabalho. Deve garantir ao professor liberdade de escolha e espaço para que ele possa agregar ao seu trabalho outros instrumentos. E o professor não pode se transformar em refém do livro, imaginando encontrar ali todo o saber verdadeiro e a narrativa e ideal. (PAVÃO, 2011, p.4).

Pelo fato de o livro didático ter a função de orientar os professores na preparação das aulas, temos como consequência que ele representa um dos referenciais mais significativos nas práticas pedágogicas dos professores e é uma fonte de pesquisa rica para a elaboração de conjecturas a respeito do tipo de ensino a ser desenvolvido, afirma Lauro (2007).

Imenes (1989, p. 66) reitera a afirmação Lauro (2007), ressaltando que os livros “podem ser considerados representativos de sua época também porque, via de regra, salvo raras exceções, os diversos livros didáticos de um mesmo período guardam entre si profundas semelhanças e pouquissimas diferenças”.

Imenes (1989, p. 65) também ressalta que a “precariedade das condições de trabalho do professor e do aluno, aliada aos problemas de formação do professor, faz com que, via de regra, as aulas se tornem simples reprodução de textos”, e o livro didático torna-se um “referencial indispensável para quem deseja saber como a matemática chega à sala de aula”.

Silva (2000)[3], citada por Lauro (2007, p. 157-158), declara que,

> [...] é possível pela análise dos livros-texto de uma época, conhecermos muito sobre o ensino ministrado, sobre as concepções de Matemática e ensino dos autores e, inclusive, as opiniões de pessoas que se manifestam sobre os livros-texto e forma de pareceres públicos. O livro pode ser

---

[2] COMENIUS. **Didática Magna**. Tradução de Ivone Castilho Benedetti. São Paulo: Martins Fontes. (1997).

[3] SILVA, C. M. S. O livro didático de Matemática no Brasil no século XIX. In: FOSSA, J. A. (Org.) **Facetas do diamante**: Ensaios sobre educação matemática e história da matemática. Rio Claro: Editora da SBHMat, 2000.

> considerado não apenas como um meio de transmitir conhecimento, mas também de preservá-los. Dessa forma, nós podemos, por meio de sua análise, saber um pouco mais sobre o tipo de conhecimento que era transmitido aos alunos das nossas escolas.

Porém, o universo de referências do professor e do aluno não pode esgotar-se no seu uso restrito. O professor tem fundamental importância neste processo, desde a escolha do livro didático, até a forma como o utiliza em sala de aula, tendo em vista que "é necessária uma formação adequada ao professor para que este possa utilizá-lo a partir de seu planejamento e ao longo da construção de sua prática, e não como o seu planejamento e a sua prática". (GALATTI, 2006, 82). Os livros didáticos apresentam problemas e o professor deve estar sempre atento para trabalhar eventuais incorreções.

Também é preciso destacar que o livro didático é uma mercadoria do mundo editorial, sujeito às influências sociais, econômicas, técnicas, políticas e culturais, como qualquer outra mercadoria que percorre os caminhos da produção, distribuição e consumo.

1.1.1 História do livro didático e as políticas no cenário brasileiro

O livro surgiu no Brasil no período do Império. De acordo com Bittencourt (1993, p. 64)[4], citado por Pina (2009, p. 26), o livro,

> [...] era entendido como a possibilidade de unificar a educação escolar em todo o território nacional, favorecendo a inserção de determinadas categorias de jovens em uma mesma comunidade cultural, determinando uma única e determinada forma de se expressar e de se comunicar.

Em 1929, para legislar sobre políticas do livro didático, o Estado cria o Instituto Nacional do Livro (INL), contribuindo para dar maior legitimidade ao livro didático nacional e, consequentemente, auxiliando no aumento de sua produção.

A partir da década de 1930, surge o movimento de renovação da educação e, segundo Pina (2009), houve uma maior atenção para com o livro didático em relação ao seu conteúdo, sua distribuição e seu uso pedagógico, e também para

4 BITTENCOURT, C.M.F. **Livro didático e conhecimento** histórico: Uma história do saber escolar. Tese (Doutorado) − FFLCH, Universidade de São Paulo, 1993.

com políticas educacionais. Por essa razão, cria-se o Ministério da Educação e da Saúde Pública, que implanta um Projeto Nacional para a educação.

Razzini (2000), citado por Bunzen Jr. (2009, p. 54), relata que, frutos da implantação de um Projeto Nacional,

> [...] programas oficiais e disciplinas específicas para cada série do secundário aparecem no decreto 19.890 de 1931, responsável também pela equiparação de todos os colégios secundários ao Colégio Pedro II e pela seriação e frequência obrigatória para ingresso nas faculdades.

A partir de então, outras políticas públicas[5] nacionais relativas ao livro didático foram adotadas, conforme o Quadro 2:

Quadro 2 – Políticas públicas nacionais relativas ao livro didático.

(continua)

Ano	Política	Descrição
1938	Por meio do Decreto-Lei nº 1.006, de 30/12/38, o estado institui a Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD).	Primeira política de legislação, controle de produção e circulação do livro didático no País.
1945	Por meio do Decreto-Lei nº 8.460, de 26/12/45. O estado consolida a legislação.	Legislação sobre as condições de produção, importação e utilização do livro didático, restringindo ao professor a escolha do livro a ser utilizado pelos alunos, conforme definido no art. 5º.
1966	Por meio de um acordo entre o Ministério da Educação (MEC) e a Agência Norte-Americana para o Desenvolvimento Internacional (Usaid) é permitida a criação da Comissão do Livro Técnico e Livro Didático (Colted).	Com o objetivo de coordenar as ações referentes à produção, edição e distribuição do livro didático.
1970	A Portaria nº 35, de 11/3/1970, o Ministério da Educação.	Implementa o sistema de co-edição de livros com as editoras nacionais.
1971	Criação do Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (Plidef).	Assume as atribuições administrativas e de gerenciamento dos recursos financeiros até então a cargo da Colted.
1976	Por meio do Decreto nº 77.107, de 4/2/76.	O governo assume a compra de boa parcela dos livros para distribuir a parte das escolas e das unidades federadas.

[5] Essas políticas voltam-se para questões de diferentes naturezas, mas não analisam concepções nas dimensões epistemológicas, psicológicas ou didático-metodológicas, segundo tendências da Educação Matemática e da forma como elas se refletem na organização dos livros e, como consequência, nos processos de ensino e da aprendizagem.

Quadro 2 – Políticas públicas nacionais relativas ao livro didático.

(continuação)

Ano	Política	Descrição
1976	Criação da Fundação Nacional do Material Escolar (Fename).	Responsável pela execução do programa do livro didático. Cujos recursos provêm do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) e das contrapartidas mínimas estabelecidas para participação das Unidades da Federação.
1983	Criação da Fundação de Assistência ao Estudante (FAE) que incorpora o Plidef.	Grupo de trabalho encarregado do exame dos problemas relativos aos livros didáticos, propõe a participação dos professores na escolha dos livros e a ampliação do programa, com a inclusão das demais séries do Ensino Fundamental.
1985	Com a edição do Decreto nº 91.542, de 19/8/85, o Plidef dá lugar ao Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).	O PNLD traz algumas mudanças: - Indicação do livro didático pelos professores; - Reutilização do livro, implicando a abolição do livro descartável. O que implicou um aperfeiçoamento das especificações técnicas para sua produção, visando maior durabilidade e possibilitando a implantação de bancos de livros didáticos; - Extensão da oferta aos alunos de 1ª e 2ª série das escolas públicas e comunitárias; - Fim da participação financeira dos estados, passando o controle do processo decisório para a FAE e garantindo o critério de escolha do livro pelos professores.
1992	Alterações no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)	A distribuição dos livros é comprometida pelas limitações orçamentárias e há um recuo na abrangência da distribuição, restringindo-se o atendimento até a 4ª série do Ensino Fundamental.
1993	Alterações no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)	Mais recursos são designados para a aquisição dos livros didáticos destinados aos alunos das redes públicas de ensino, estabelecendo-se, assim, um fluxo regular de verbas para a aquisição e distribuição do livro didático.
1996	Criação do Guia de Livros Didáticos (1ª a 4ª série)	É iniciado o processo de avaliação pedagógica dos livros inscritos para o PNLD, os quais foram avaliados pelo MEC conforme critérios previamente discutidos. Esse procedimento foi aperfeiçoado, sendo aplicado até hoje. Os livros que apresentam erros conceituais, indução a erros, desatualização, preconceito ou discriminação de qualquer tipo são excluídos do Guia do Livro Didático.
1997	Alterações no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)	O PNLD é ampliado e o Ministério da Educação passa a adquirir, de forma continuada, livros didáticos de alfabetização, língua portuguesa, matemática, ciências, estudos sociais, história e geografia para todos os alunos de 1ª a 8ª série do Ensino Fundamental público.

Quadro 2 – Políticas públicas nacionais relativas ao livro didático.

(conclusão)

2000	Alterações no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)	É inserida no PNLD a distribuição de dicionários da língua portuguesa para uso dos alunos de 1ª a 4ª série em 2001. E pela primeira vez na história do programa, os livros didáticos passam a ser entregues no ano anterior ao ano letivo de sua utilização.
2003	É publicada a resolução CD FNDE nº. 38, de 15/10/2003, que institui o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM).	O Ministério da Educação passa a adquirir, de forma continuada, livros didáticos para o Ensino Médio.
2009	A resolução CD FNDE nº. 51, de 16/09/2009, regulamentando o Programa Nacional do Livro Didático para a Educação de Jovens e Adultos (PNLD EJA).	O Ministério da Educação passa a adquirir, de forma continuada, livros didáticos para a Educação de Jovens e Adultos.
2009	A resolução CD FNDE nº. 60, de 20/11/2009.	Estabelece novas regras para participação no PNLD: a partir de 2010, as redes públicas de ensino e as escolas federais devem aderir ao programa para receber os livros didáticos. A resolução 60 inclui ainda as escolas de Ensino Médio no âmbito de atendimento do PNLD, além de adicionar a língua estrangeira (com livros de inglês ou de espanhol) aos componentes curriculares distribuídos aos alunos de 6º ao 9º ano. Para o Ensino Médio, também foi adicionado o componente curricular língua estrangeira (com livros de inglês e de espanhol), além dos livros de filosofia e sociologia (em volume único e consumível).
2010	O Decreto nº. 7.084, de 27/01/2010.	Dispõe sobre os procedimentos para execução dos programas de material didático: o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e o Programa Nacional Biblioteca da Escola (PNBE).

Fonte: A autora, de acordo com: http://www.fnde.gov.br/index.php/pnld-historico. (BRASIL, 2011)

Diante desta retomada histórica, nota-se um contínuo crescimento e fortalecimento das políticas públicas do livro didático.

Sabendo da amplitude da utilização do livro didático e de sua importância para o ensino, propõe-se aqui aproximar o contexto deste recurso ao ensino da Geometria, ou seja, focar a atenção sobre como a Geometria esta inserida no livro didático.

1.2 GEOMETRIA

A Geometria está presente em nossa vida sem que tenhamos muita consciência disso: nos logotipos das empresas, nas plantas de casas e terrenos, nos diferentes tipos de artesanato, nas coreografias de um balé, nas linhas demarcatórias da quadra de futebol, entre outros contextos. A Geometria é a parte da Matemática que contempla o estudo das formas, mas também as noções relativas à posição, localização de figuras e deslocamentos no plano e sistemas de coordenadas. (BRASIL, 1998, p.51).

De acordo com os PCN de 1997, a Geometria “parte do mundo sensível e o estrutura no mundo geométrico — dos volumes, das superfícies, das linhas e dos pontos”. (BRASIL, 1997, p. 81). Passa-se de um mundo sensível ao mundo geométrico,

> [...] multiplicando suas experiências sobre os objetos do espaço em que vive [...] a construir uma rede de conhecimentos relativos à localização, à orientação, que lhe permitirá penetrar no domínio da representação dos objetos e, assim, distanciar-se do espaço sensorial ou físico.
>
> É o aspecto experimental que colocará em relação esses dois espaços: o sensível e o geométrico. De um lado, a experimentação permite agir, antecipar, ver, explicar o que se passa no espaço sensível, e, de outro, possibilita o trabalho sobre as representações dos objetos do espaço geométrico e, assim, desprender-se da manipulação dos objetos reais para raciocinar sobre representações mentais. (BRASIL, 1997, p.81-82).

Essa maneira de descrever a Geometria encontra-se, em parte, na caracterização da Geometria proposta por Pavanello e Franco (2007), ao apresentá-la como disciplina cuja formalização ocorreu por meio de um processo crescente de mais de 2.200 anos; ainda, pode ser encarada como uma ferramenta que descreve e interage com o espaço em que vivemos e ser vista como uma parte da matemática mais intuitiva, concreta e ligada à realidade.

Os PCN de Matemática (BRASIL, 1998) referem-se ao estudo do espaço e das formas, o qual envolve três objetos de natureza diferente:

> [...] o espaço físico, ele próprio - ou seja, o domínio das materializações; a geometria, concebida como modelização desse espaço físico - domínio das figuras geométricas; o(s) sistema(s) de representação plana das figuras espaciais - domínio das representações gráficas. (p.122).

1.2.1 O currículo de Geometria

O currículo de Geometria foi determinado por meio dos PCN propostos de acordo o que preconiza o Parecer CEB 4/98, aprovado em 29/1/98 (Processo 23001.000062/98-76), que institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (DCN). De acordo com as DCN, para o ensino dos “Conteúdos Mínimos das Áreas de Conhecimento [...] divulgados inicialmente pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, a serem ensinados em cada área de conhecimento, é indispensável considerar [...] que aspectos serão contemplados [...]" (BRASIL, 1998).

Os PCN também relacionam a Geometria com o espaço e as formas, afirmando que ela é um campo de estudo que se refere a “questões relacionadas com as formas e relações entre elas, com as possibilidades de ocupação do espaço, com a localização e o deslocamento de objetos no espaço, vistos sob diferentes ângulos [...].” (BRASIL, 1998, p.122).

As orientações dos PCN de Matemática (BRASIL,1998) para o trabalho com os conteúdos de Geometria no Ensino Fundamental (6° e 7° ano) são:

- Interpretação, a partir de situações-problema (leitura de plantas, croquis, mapas), da posição de **pontos** e de seus deslocamentos no **plano**, pelo estudo das representações em um sistema de **coordenadas cartesianas**.
- Distinção, em contextos variados, de **figuras bidimensionais e tridimensionais**, descrevendo algumas de suas características, estabelecendo relações entre elas e utilizando nomenclatura própria.
- **Classificação de figuras tridimensionais e bidimensionais**, segundo critérios diversos, como: **corpos redondos e poliedros; poliedros regulares e não-regulares; prismas, pirâmides e outros poliedros; círculos, polígonos e outras figuras; número de lados dos polígonos; eixos de simetria de um polígono; paralelismo de lados, medidas de ângulos e de lados**.
- Composição e decomposição de **figuras planas**.
- Identificação de diferentes planificações de alguns poliedros.
- Transformação de uma figura no plano por meio de **reflexões, translações e rotações** e identificação de medidas que permanecem invariantes nessas transformações (medidas dos lados, dos ângulos, da superfície).
- Ampliação e redução de figuras planas segundo uma razão e identificação dos elementos que não se alteram (medidas de ângulos) e dos que se modificam (medidas dos lados, do **perímetro** e da **área**).
- Quantificação e estabelecimento de relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e de pirâmides, da relação desse número com o **polígono da base** e identificação de algumas propriedades, que caracterizam cada um desses sólidos, em função desses números.
- Construção da **noção de ângulo** associada à idéia de mudança de direção e pelo seu reconhecimento em figuras planas.

- Verificação de que a **soma dos ângulos internos de um triângulo** é 180º.(p.72-73, grifo nosso)

Os conteúdos de Geometria que devem ser trabalhados no Ensino Fundamental (8° e 9° ano), de acordo com PCN de Matemática, são:

- Representação e interpretação do **deslocamento de um ponto num plano cartesiano por um segmento de reta orientado**.
- **Secções de figuras tridimensionais** por um plano e análise das figuras obtidas.
- **Análise em poliedros da posição relativa de duas arestas (paralelas, perpendiculares, reversas) e de duas faces (paralelas, perpendiculares).**
- **Representação de diferentes vistas (lateral, frontal e superior) de figuras tridimensionais** e reconhecimento da figura representada por diferentes vistas.
- **Divisão de segmentos em partes proporcionais e construção de retas paralelas e retas perpendiculares** com régua e compasso.
- Identificação de **ângulos congruentes, complementares e suplementares** em **feixes de retas paralelas cortadas por retas transversais**.
- Estabelecimento da razão aproximada entre a medida do **comprimento de uma circunferência e seu diâmetro**.
- Determinação da **soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer**.
- Verificação da validade da **soma dos ângulos internos de** um polígono convexo para os **polígonos não-convexos**.
- Resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da **mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares** e de alguns **ângulos notáveis**, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Desenvolvimento do conceito de **congruência de figuras planas** a partir de t**ransformações (reflexões em retas, translações, rotações** e composições destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície).
- Verificar **propriedades de triângulos e quadriláteros** pelo reconhecimento dos **casos de congruência de triângulos**.
- Identificação e construção das **alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes de um triângulo** utilizando régua e compasso.
- Desenvolvimento da noção de **semelhança de figuras planas** a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro).
- Verificações experimentais e aplicações do **teorema de Tales**.
- Verificações experimentais, aplicações e demonstração do **teorema de Pitágoras**. (BRASIL,1998, p.88-89, grifo nosso)

Estas orientações, referentes ao trabalho com os conteúdos, acabam por definir o currículo de Geometria; no entanto, nada se pode afirmar quanto aos conteúdos contemplados nos currículos escolares e nas salas de aulas de Matemática. Para a constatação desse fato seria necessária a realização de uma pesquisa.

Esses conteúdos, de acordo com os PCN não abordam todos os aspectos dos conteúdos a serem desenvolvidos, portanto, devem ser complementadas e ampliadas com a leitura de documentos e trabalhos que discutam pesquisas, estudos e outras orientações didáticas, como por exemplo, o estudo de Raymond Duval em relação à aprendizagem da Geometria ou o estudo de Jean Piaget em relação a gêneses do espaço. Esses estudos não são contemplados nos PCN, mas podem subsidiar a organização curricular do ensino.

Por essa razão, os sistemas Estaduais, Particulares e Municipais de ensino podem propor esse currículo e ampliá-lo segundo suas crenças. É o caso das Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCE) do Estado do Paraná, que propõem o seguinte desdobramento para os conteúdos dessa parte da Matemática que estuda as formas e o espaço (em âmbito de 6º a 9º ano do Ensino Fundamental): Geometria Plana[6], Geometria Espacial[7], Geometria Analítica[8] e noções básicas de Geometria Não-Euclidiana[9]. (PARANÁ, 2008, p.55).

1.2.2 A importância do ensino da Geometria

De acordo com os PCN[10] de Matemática, o estudo da Geometria possibilita ao aluno ver e compreender as formas e desenvolver o raciocínio e a compreensão do espaço. Com o estudo da Geometria, o aluno desenvolve "um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive". (BRASIL, 1998, p. 51). É esse tipo de pensamento que permitirá organizar o mundo sensível em um mundo geométrico de volumes, superfícies, linhas e pontos.

---

[6] Conteúdos da Geometria Plana: ponto, reta e plano; paralelismo e perpendicularismo; estrutura e dimensões das figuras geométricas planas e seus elementos fundamentais; cálculos geométricos: perímetro e área, diferentes unidades de medidas e suas conversões; representação cartesiana e confecção de gráficos;

[7] Conteúdos da Geometria Espacial: nomenclatura, estrutura e dimensões dos sólidos geométricos e cálculos de medida de arestas, área das faces, área total e volume de prismas retangulares (paralelepípedo e cubo) e prismas triangulares (base triângulo retângulo), incluindo conversões;

[8] Conteúdos da Geometria Analítica: noções de geometria analítica, utilizando o sistema cartesiano;

[9] Conteúdos referentes a noções básicas de Geometria Não-Euclidiana: geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte); geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noção de geometria dos fractais.

[10] Nos PCN a Geometria é caracterizada por estudar o Espaço e a Forma.

Em relação à leitura de mundo, Lorenzato (1995, p. 5) afirma que “sem conhecer a Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida.”

> […] como interpretar um mapa, sem o auxílio da Geometria? E um gráfico estatístico? Como compreender conceitos de medida sem idéias geométricas? A história das civilizações está repleta de exemplos ilustrando o papel fundamental que a Geometria (que é carregada de imagens) teve na conquista de conhecimentos artísticos, científicos e, em especial, matemáticos. A imagem desempenha importante papel na aprendizagem e é por isso que a reapresentação de tabelas, fórmulas, enunciados, etc., sempre recebe uma interpretação mais fácil com o apoio geométrico. (LORENZATO, 1995, p.6)

Além dessas competências, a Geometria contribui para que o indivíduo possa “intuir, conjecturar, descobrir, projetar, representar quando lida com as formas e o espaço, aprimora a percepção espacial, favorece a compreensão e produção de desenhos, esquemas, mapas, gráficos etc.” (SANTOS, 2007, p. 3).

A importância da Geometria no desenvolvimento dessas competências é também ressaltada por Toledo e Toledo (1997, p.221), ao afirmarem que, antes mesmo do domínio da linguagem usual, a criança deve explorar e construir interpretações pessoais do espaço que a rodeia e das formas nele presentes. Isso porque as primeiras propriedades observadas e compreendidas são aquelas de natureza topológica, isto é, ligadas à sua localização e aos objetos em geral, no espaço.

Pavanello (1995) ressalta a importância da Geometria para a criatividade do aluno, ao afirmar sobre a possibilidade de um maior número de situações nas quais se pode exercitar a criatividade do aluno, que interage com as propriedades dos objetos, manipula e constrói figuras, observa suas características, compara-as, as associa de diferentes modos e, ainda, concebe maneiras de representá-las.

O desenvolvimento da habilidade de percepção visual é relacionado por Hoffer (1977, p.92), citado por Del Grande (1994), à aprendizagem da Geometria, ao afirmar que,

> [...] a habilidade de percepção visual e os conceitos de geometria podem ser aprendidos simultaneamente, uma vez que a geometria exige que o aluno reconheça figuras, suas relações e suas propriedades. A geometria informal poderia ser ensinada facilmente e incluída em programa de treinamento de percepção visual, de modo a melhorar a percepção visual do aluno.

De acordo com Del Grande (1994), a percepção espacial é a faculdade de reconhecer e discriminar estímulos no espaço, e a partir do espaço, interpretar esses estímulos, associando-os a experiências anteriores. A compreensão clara das habilidades de percepção espacial tornará possível preparar os programas de Geometria e selecionar atividades que irão melhorar a percepção visual dos alunos.

Os PCN de Matemática (BRASIL, 1998, p. 51) também destacam que a Geometria “contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades, etc.”

Diante de tais apontamentos, fica evidente que a Geometria é um campo de conhecimento reconhecido e de inquestionável importância para a formação dos alunos, pois além do desenvolvimento de um raciocínio geométrico, permite o desenvolvimento de outros tipos de raciocínio, de habilidades, em especial a capacidade de discriminação de formas e a manipulação destas.

Ponte (1994, apud FERREIRA; SOARES; LIMA, 2008) destaca a importância do conhecimento didático desse conteúdo. O autor dá ênfase aos recursos oferecidos pelas Tecnologias da Informação e da Comunicação, que vêm, nos últimos anos, provocando uma verdadeira revolução na maneira de se trabalhar e de se aprender.

No entanto, alguns fatores provocaram certo abandono do campo geométrico nos programas escolares. Esses fatores serão apontados na sequência.

1.2.3 Abandono do ensino da Geometria

Estudos referentes ao desenvolvimento do ensino da Geometria no Brasil, desenvolvidos por Pavanello (1993), Perez (1995), Passos (2000), Pereira (2001), entre outros autores, apontam a existência deste abandono do ensino da Geometria.

Existem fatores que podem ser considerados como sendo a origem desse abandono: falta de metodologia apropriada; generalização da Matemática tornando-se a Geometria um “parente pobre” da álgebra linear; programa de Matemática muito extenso (PEREZ,1995; BERONHA, 1989); lacunas deixadas pelo Movimento da Matemática Moderna (PAVANELLO, 1993; PEREZ, 1995); formação de professores de Matemática que não detêm os conhecimentos geométricos necessários para realização de suas práticas (PEREZ, 1995; PASSOS, 2000; PEREIRA, 2001; PAVANELLO, 1993); conteúdo de Geometria deixado para o final do ano letivo (GOUVÊA, 1998; LORENZATO,1995); omissão da Geometria nos livros didáticos (PEREIRA, 2001); exagerada importância aos livros didáticos entre os professores; conteúdo de Geometria como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, relegada aos capítulos finais dos livros ou planejamentos, nos quais o professor nunca consegue chegar (PEREZ,1995; PAVANELLO, 1993); preferência dos professores por Aritmética ou Álgebra ou quantidade de aulas semanais em cada série insuficiente para “cumprir” todo o programa; falta de tempo (PEREZ, 1995).

Buscando o retorno desse campo de conhecimento reconhecido e de inquestionável importância para a formação dos alunos, diversas experiências começam a ser divulgadas a partir da década de 70, todas com o objetivo comum de resgatar o ensino de Geometria.

1.2.4 Ensino da Geometria

A necessidade da volta da Geometria no ensino da Matemática é compartilhada entre os educadores matemáticos; no entanto, não existe um consenso quanto a propostas eficientes voltadas para o seu ensino, tanto nas salas de aula do ensino regular quanto nos cursos de formação inicial e continuada de professores que a ensinarão (em curso de Licenciatura em Matemática e em Cursos de Licenciatura em Pedagogia).

Buscando o retorno do ensino da Geometria, muitas dessas propostas basearam-se no modelo Van Hiele e no uso de materiais manipulativos em sala de aula. O modelo Van Hiele é um modelo de pensamento geométrico que pode ser usado para orientar a formação, assim como para avaliar habilidades do aluno. Esse modelo consiste em cinco níveis de compreensão. Níveis denominados: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. Esses níveis descrevem características do processo de pensamento. Crowley ressalta que apoiado em experiências educacionais apropriadas,

> [...] o modelo afirma que o aluno move-se sequencialmente a partir do nível inicial, ou básico (visualização), no qual o espaço é simplesmente observado – as propriedades das figuras não são explicitamente

> reconhecidas [...] até o nível mais elevado (rigor), que diz respeito aos aspectos abstratos formais da dedução. Poucos alunos experimentam, ou alcançam, o ultimo nível. (CROWLEY, 1994, p.2)

Além dos cinco níveis de compreensão os Van Hiele propuseram cinco fases sequenciais de aprendizagem: interrogação, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração.

O modelo de pensamento geométrico e as fases de aprendizagem desenvolvidos pelos Van Hiele são, segundo Crowley (1994), um meio de identificar o nível de maturidade geométrica dos alunos e indicam caminhos para ajudá-los a avançar de um nível para outro.

Além do modelo dos Van Hiele outras propostas de ensino foram desenvolvidas em relação ao ensino da Geometria. Para Pavanello (1994), no ensino da Geometria é necessário compreender como as crianças (re)constroem conceitos/noções/ideias, e também identificar as dificuldades que elas enfrentam nesse processo e, como utilizam esses conceitos para resolver problemas de maneira criativa na escola ou fora dela. O professor deve propor atividades que possibilitem ao aluno manipular objetos, observá-los, compará-los e representá-los de diferentes maneiras, para depois analisar suas características físicas e geométricas, afirma a autora.

O pensamento geométrico, de acordo com o Guia de Livros Didáticos PNLD 2011 de Matemática, surge da “interação espacial com os objetos e os movimentos no mundo físico e desenvolve-se por meio das competências de localização, de visualização, de representação e de construção de figuras geométricas” (BRASIL, 2011, p.16). O documento ainda destaca que a “organização e a síntese desse conhecimento também são importantes para a construção do pensamento geométrico” (p.16).

Os PCN de Matemática (BRASIL,1998) propõem que o ensino seja a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. O professor de Matemática deve explorar situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações. De acordo com os PCN (1998), o pensamento geométrico do aluno se desenvolve por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno no terceiro ciclo (6° e 7° ano do Ensino Fundamental) a:

> - Resolver situações-problema de localização e deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo nas noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo elementos fundamentais para a constituição de sistemas de coordenadas cartesianas;
> - Estabelecer relações entre figuras espaciais e suas representações planas, envolvendo a observação das figuras sob diferentes pontos de vista, construindo e interpretando suas representações;
> - Resolver situações-problema que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução. (p. 64-65)

E no quarto ciclo (8° e 9° ano do Ensino Fundamental) a:

> - Interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano;
> - Produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança;
> - Ampliar e aprofundar noções geométricas como incidência, paralelismo, perpendicularismo e ângulo para estabelecer relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais. (p.81-82)

As Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná de Matemática ressaltam que na Educação Básica os conhecimentos geométricos não devem ser rigidamente separados da aritmética e da álgebra (PARANÁ, 2008).

Esse conhecimento deve ser interligado com a aritmética e com a álgebra porque, segundo Lorenzato (1995, p. 7), “os objetos e relações dela correspondem aos das outras; assim sendo, conceitos, propriedades e questões aritméticas ou algébricas podem ser clarificados pela geometria, que realiza a tradução para o aprendiz”.

As pesquisas e teorias de Piaget contribuíram amplamente para o que se conhece a respeito da concepção que a criança tem de Geometria espacial e de transformações geométricas.

Mas, Piaget não se preocupou, no geral, em definir constructos e em enumerar habilidades. Piaget e Inhelder (1993) em seus estudos a respeito da gênese do espaço perceptivo e representativo e o desenvolvimento dessas relações, que se referem às formas, aos deslocamentos, aos pontos de vista, às distâncias, propiciaram o entendimento de como os conceitos e objetos da Geometria são construídos pelo sujeito.

Os resultados dos estudos de Piaget e Inhelder (1993) relacionados à gênese das representações espaciais esclarecem de que forma as percepções primeiras do espaço se manifestam. Essas percepções referem-se aos três períodos do desenvolvimento sensório-motor que vai desde o nascimento até os primórdios da representação. No primeiro período (de zero a dois anos), se assiste à manifestação de relações topológicas (vizinhança, separação, ordem, envolvimento e continuidade) de uma figura para depois construir, as projetivas e euclidianas.

No entanto, mesmo com tais estudos, teorias e propostas de ensino os estudos de Perez (1995), Passos (2000), Ferreira e Correia (2007), Almouloud et al. (2004), entre outros estudos, apontam dificuldades para a efetivação do ensino da Geometria.

Kallef (1998) apresenta uma questão muito importante No tocante à dificuldade para a efetivação do ensino da Geometria, ao relatar que,

> Apesar de, para os matemáticos, não haver dúvidas de que os elementos geométricos (ponto, reta, plano, sólidos, etc.) pertencem ao mundo das ideias matemáticas, estes elementos tiveram sua origem no mundo físico e representam abstrações de objetos materiais. Esta ambigüidade é um fator perturbador para o ensino da Geometria, pois ela se apresenta como uma grande dificuldade para os alunos, que não percebem que os objetos geométricos são abstratos e que mesmo ao observarem o desenho de uma figura geométrica no livro-texto ou no quadro-negro, ou mesmo sua imagem na tela do computador, estão, na realidade, vendo apenas uma representação do objeto geométrico. Embora a maioria das representações de objetos geométricos sejam perceptíveis visualmente, é importante não se confundir a habilidade de visualização, isto é, a habilidade de se perceber o objeto geométrico em sua totalidade, com a percepção visual das representações disponíveis deste objeto. (KALLEF, 1998, p.16).

Dificuldades para efetivação do ensino da Geometria, como essa apresentada por Kallef faz com que o ensino, quando realizado, limite-se, em geral, ao reconhecimento das principais figuras planas e à memorização de fórmulas para o cálculo de seu perímetro ou área, afirma Pavanello (1995).

Lorenzato (1995) afirma que, talvez, o maior de todos os fatores que justificam a dificuldade do ensino da Geometria, é o fato de exigir do aluno uma maneira específica de raciocinar. Isso quer dizer que ser bom conhecedor de Aritmética ou de Álgebra não é suficiente para resolver problemas de Geometria. As questões de Geometria exigem uma leitura diferente da Aritmética ou Algébrica, afirma Lorenzato (1995, p.5). O autor apresenta ainda outro argumento, para resolver um problema geométrico, “é preciso ter percepção geométrica, raciocínio geométrico e linguagem geométrica, fatores estes essenciais na relação real/formal e que pouco têm sido desenvolvido em nossas escolas devido à quase ausência do estudo da Geometria”. Segundo o autor, é muito comum, diante de problemas geométricos, as pessoas ficarem sem ação e se justificarem dizendo que não podem resolvê-las porque não foram dados números ou medidas.

Ou seja, é necessário o desenvolvimento do pensamento geométrico, pois

> […] o desenvolvimento do pensamento geométrico depende em parte da aprendizagem e de experiências que são favorecidas por atividades de natureza geométrica. O pensamento geométrico, no contexto de uma educação voltada ao exercício de uma cidadania ativa e visto sob o aspecto de leitura e interpretação de representações geométricas, também precisa ser desenvolvido na sala de aula a partir de um trabalho que privilegie a utilização de escalas. Freqüentemente em anúncios de vendas de apartamentos veiculados na mídia somos iludidos com relação à metragem de tais apartamentos, que apresentam em suas plantas tantos móveis que acabamos tendo a idéia de uma amplitude irreal. (ANTUNES, 1987, p.17-22).

Além de questões como o desenvolvimento do pensamento geométrico, Almouloud et al. (2004) identifica fatores que podem ser considerados origem de dificuldades que os professores encontram no processo de ensino e de saberes e de conhecimentos geométricos, o autor identifica como fator de dificuldades,

> [...] o nosso sistema educativo, que define a política da educação com recomendações e orientações gerais sobre os métodos, os conteúdos e o saber fazer, deixando para cada escola definir os conteúdos que julga importantes para a formação de seus alunos, o que faz com que a geometria seja freqüentemente esquecida. (ALMOULOUD et al., 2004, p. 99).

Outro fator identificado pelo autor referente ao ensino da Geometria refere-se à formação dos professores,

> [...] esta é muito precária quando se trata de geometria, pois os cursos de formação inicial não contribuem para que façam uma reflexão mais profunda a respeito do ensino e da aprendizagem dessa área da matemática. Por sua vez, a formação continuada não atende ainda aos objetivos esperados em relação à geometria. Assim, a maioria dos professores do Ensino Fundamental e do Ensino Médio não está preparada para trabalhar segundo as recomendações e orientações didáticas e pedagógicas dos PCN. (ALMOULOUD et al., 2004, p. 99).

E ainda, Almouloud et al. (2004. p. 99) destacam a quase não existência da passagem da geometria empírica para a geometria dedutiva, “além de poucos trabalhos focarem a leitura e a interpretação de textos matemáticos. Essas abordagens criam no aluno concepções inadequadas no que diz respeito ao aprimoramento dos conceitos geométricos”.

Morelatti e Souza (2006) apontam o livro didático como um fator que contribui para as dificuldades no processo de ensino da Geometria e tem como implicação a aprendizagem da Geometria,

> [...] o conteúdo de geometria vem quase sempre ao final dos mesmos e, muitas vezes, o professor usa o argumento de que não tem “tempo” de trabalhá-lo. Em outros casos a geometria vem diluída entre o conteúdo de álgebra e é possível observar ainda que o professor “pula” o capítulo. O que se percebe é que o aluno, ao se formar, na maioria das vezes não aprendeu geometria e não consegue perceber a relação deste conteúdo com a realidade vivida. (MORELATTI; SOUZA, 2006, p. 265).

Almouloud et al. (2004) também se refere aos livros didáticos como sendo um dos fatores de origem de dificuldades dos professores no processo de ensino. De acordo com autor,

> [...] as situações de ensino apresentadas naqueles que analisamos e que são propostas para os alunos, de maneira geral, pela maioria dos professores, não enfatizam suficientemente a coordenação de registros de representação semiótica e a importância da figura para a visualização e exploração. Os problemas geométricos propostos por esses livros privilegiam resoluções algébricas, e poucos exigem raciocínio dedutivo ou demonstração. (ALMOULOUD et al., 2004, p. 99).

Seguindo a linha de pensamento a Almouloud et al. (2004), em relação à presença de coordenação de registros de representação semiótica nos livros didáticos de Matemática, no tocante à Geometria, por buscar contribuição para a superação das dificuldades no processo ensino da Geometria, e como consequência no processo de aprendizagem dos alunos, essa pesquisa tem por intenção analisar o conteúdo de Geometria presente nos livros didáticos de Matemática, à luz da Teoria de Representações Semióticas.

CAPÍTULO 2

SUBSÍDIOS TEÓRICOS: TEORIA DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS SEGUNDO RAYMOND DUVAL

As dificuldades existentes no ensino da Matemática ocasionam uma busca contínua de métodos e técnicas que facilitem o processo de compreensão da Matemática pelo aluno. Uma alternativa para a efetivação da aprendizagem dos alunos em Matemática advém do modelo de funcionamento cognitivo de pensamento, relacionado a registros de representações semióticas, desenvolvido por Raymond Duval, na obra *Sémiosis et pensée humaine*.

Por meio da Teoria de Representações Semióticas, Raymond Duval apresenta um caminho para aprendizagem da Matemática, ressaltando a necessidade de utilização de diversos registros de representação para o mesmo objeto matemático.

As representações semióticas são os gráficos, os diagramas, os esquemas, as figuras geométricas, os variados tipos de escritura para os números, escrituras algébricas, para expressar relações e operações, entre outros. Em face disso, as representações semióticas podem parecer, apenas, ser o meio de que o individuo dispõe para exteriorizar suas representações mentais para fins de comunicação, ou seja, tornarem visíveis ou acessíveis ao outro. No entanto, mais que isso, as representações semióticas são essenciais para a atividade cognitiva do pensamento.

Em matemática as representações semióticas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática e da conceitualização. Há uma diversidade de representações semióticas que possuem conteúdos diferentes que se relacionam entre si pelo fato de serem referentes ao mesmo objeto matemático.

Por exemplo, o numeral 12 e a palavra doze, representam o mesmo objeto, no entanto conteúdos diferentes em relação à estrutura dos registros. Para a palavra temos sufixos e prefixos que constituem deformações dos algarismos criados para representar quantidades de 0 a 9: “do” é um deformação dos “dois” e “ze” é uma deformação do “dez”. Já a organização da notação arábica 12 é diferente, pois os algarismos são justapostos e cada um é uma potência de dez multiplicada pelo algarismo de uma determinada posição. Os valores desses produtos são adicionados. Nesse caso 12 significa $1 \times 10 + 2 \times 10^0 = 10 + 2 = 12$.

Segundo Duval (2004) a compreensão do objeto matemático, está diretamente ligada à capacidade de coordenação de, ao menos, dois registros de representação, e essa coordenação manifesta-se pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão. Por exemplo, converter uma expressão algébrica em um gráfico e reconhecer que tipo de variação num registro de representação “a” provoca no outro registro de representação “b”.

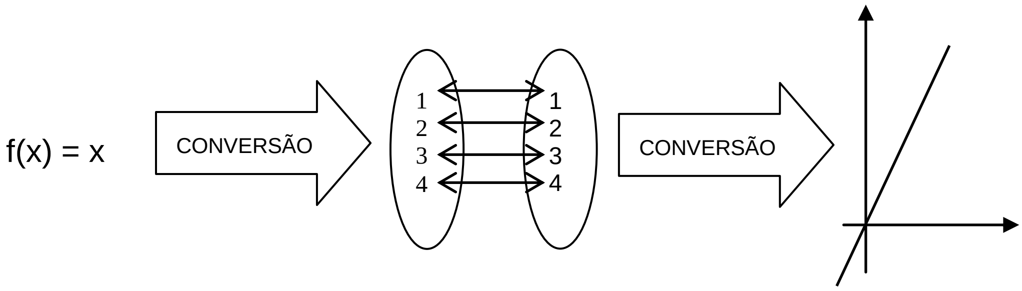
Para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, ele deve permitir as três atividades cognitivas fundamentais, a formação, o tratamento e a conversão.

A formação implica na seleção do conjunto de caracteres e determinações que queremos representar, seja para “exprimir” uma representação mental, seja para “evocar” um objeto real. A formação de uma representação identificável deve respeitar regras internas do sistema semiótico de representação usado. Estas regras são fundamentais para a construção das operações fundamentais. Por exemplo: gramatical para a composição de um texto; posicional e decimal (duas regras de conformidade básicas) para escrita da numeração decimal; posicional para o algoritmo da multiplicação; entre outras.

O tratamento é a transformação dessa representação no próprio registro em que ela foi formada. É uma transformação interna a um registro. Um tratamento é uma transformação do registro que se efetua no interior de um mesmo sistema semiótico, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas. Um tratamento mobiliza então apenas um registro de representação. Por exemplo:

$$2.x = 6 \xrightarrow{\text{TRATAMENTO}} x = 3$$

A conversão é a transformação desta representação em uma representação em outro sistema semiótico conservando a totalidade ou parte do objeto em questão. A conversão é uma transformação que faz passar de um registro a outro. Ela requer então a coordenação dos registros no sujeito que a efetua. Por exemplo:



Na conversão se conserva a referência ao mesmo objeto, mas não se conserva a explicitação das mesmas propriedades deste objeto, ou seja, o conteúdo da representação é diferente. “Esta mudança de conteúdo ou dos aspectos do objeto vai depender da natureza do registro”, afirma Brandt (2005, p.87).

A autora ainda ressalta que,

> A operação cognitiva de conversão é baseada no princípio de variação das unidades cognitivas pertinentes. Uma variação cognitiva sempre vai consistir numa mudança de sentido. Por vezes podemos ter registros que sofreram variações, mas, não provocam variações nos registros que lhes são associados. Isto provoca uma “decalagem” entre registros com sentidos diferentes e seus associados. Certas variações não levam a outro objeto. (BRANDT, 2005, p.89).

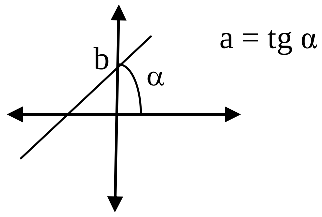
Na matemática isto sempre acontece, pois podemos ter diversos registros de representação do mesmo objeto matemático como, por exemplo, 0,5 e ½.

Duval (1999), citado por Brandt (2005, p.87) afirma que a compreensão do sentido provoca automaticamente a compreensão do objeto. Um dos problemas maiores da aprendizagem, segundo o autor é a discriminação das unidades que são cognitivamente pertinentes. Fazendo as variações estruturais, verifica-se qual delas provoca variações cognitivas e qual não provoca e desenvolve-se a capacidade de efetuar esta discriminação.

Para Brandt (2005, p.91) se houver uma variação em um dos registros que não provoque uma associação a outro objeto matemático, “ter-se-á um tratamento no interior do próprio registro e também estarão sendo envolvidas as unidades cognitivamente pertinentes obedecendo às regras específicas e próprias do registro de representação, de acordo com sua natureza”.

Para exemplificar essa operação de natureza cognitiva podemos citar uma função linear com registros discursivos (algébrico) e não discursivo (gráfico):

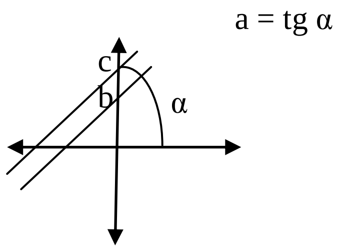
$y = ax + b$ α



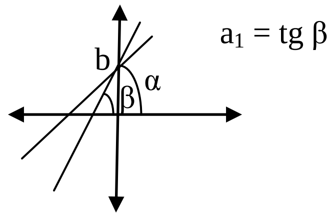
Identificação das unidades cognitivas pertinentes no registro algébrico: os coeficientes a e b.

Variações possíveis:

$y = ax + c$



$y = a_1x + b$



Para compreender as dificuldades que muitos alunos têm na compreensão da Matemática, Duval (1995) afirma que é preciso desenvolver um método que permita observar verdadeiramente os fenômenos cognitivos da atividade Matemática que concernem à mobilização de várias representações semióticas e à conversão dessas representações.

2.1 TEORIA DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NO TOCANTE À GEOMETRIA

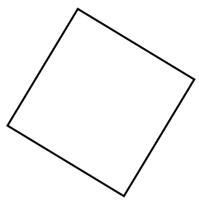
Duval (2003) afirma que a aprendizagem da Geometria envolve uma atividade cognitiva específica e sua aprendizagem não está ligada a uma situação de interação social, nem subordinada a um jogo de pressões internas de um objeto.

Com efeito, na figura nem sempre é fácil “ver” as relações ou as propriedades relativas às hipóteses dadas que correspondem à solução desejada.

Isso significa que as figuras podem impor resistências à aprendizagem, pois são subjacentes a fatores próprios da representação figural.

“É em função destes fatores que se pode analisar o grau do potencial heurístico de uma figura e que se pode organizar um ensino centrado na utilização heurística das figuras”. (PADILLA, 1992 apud DUVAL, 2004, p. 162, tradução nossa).

A Geometria exige um modo de processamento cognitivo autônomo, com características específicas, em relação a qualquer outra forma de funcionamento do raciocínio. Requer a utilização de registros figurais para designar as figuras e suas propriedades e registros em língua natural para enunciar definições, teoremas, hipóteses. Por exemplo:

 $\longrightarrow$ Registro figural (não discursivo)

QUADRADO $\longrightarrow$ Registro em língua natural (discursivo)

Para Duval (2004) a atividade cognitiva que a Geometria requer é mais exigente que as outras áreas de conhecimento, pois requer que os tratamentos discursivos e os tratamentos figurais sejam efetuados de maneira simultânea e de maneira interativa. Segundo o autor deve haver,

> [...] uma interação entre os tratamentos figurais que por abdução guiam a abordagem heurística, e os tratamentos discursivos que por dedução constituem a abordagem baseada nos objetos representados na figura. Naturalmente, esta interação pode ser bloqueada por fenômenos importantes de não congruência nas múltiplas idas e vindas que requerem a mobilização simultânea destes registros. (DUVAL, 2004, p. 168, tradução nossa).

Duval (2004, p. 172, tradução nossa) ressalta que,

> [...] um dos maiores problemas no ensino da matemática é que a coordenação necessária entre os tratamentos figurais e os tratamentos discursivos só acontece em pouquíssimos alunos, inclusive depois de muitos anos de educação básica e média.

No ensino da Geometria os tratamentos não são de mesma natureza dos tratamentos matemáticos. Esses são específicos para não caracterizar heuristicamente as figuras como acessórios, afirma Duval (2004).

A necessidade de coordenação entre os tratamentos em dois registros (figuras e discursivos) contrariam o que se pratica espontaneamente. E ainda, exige uma aprendizagem separada das operações demandadas em cada um destes registros, constituindo desta forma, as condições necessárias para a aprendizagem da Geometria.

Entre as principais fontes de dificuldades na aprendizagem da Geometria, Duval (2004) afirma que os conceitos não ocupam o primeiro lugar e o que dificulta a aprendizagem da Geometria, é a proximidade entre tratamentos relevantes e irrelevantes dentro de um mesmo registro, e a falta de coordenação entre tratamentos que provem de diferentes registros.

As condições prévias para a descrição dos tratamentos[11] pertinentes ao registro das figuras geométricas são dependentes de uma análise semiótica para a determinação de unidades de base constituintes deste registro, das possibilidades de sua articulação das figuras e da modificação das figuras obtidas. (DUVAL, 2004)

Esses tratamentos quando realizados de maneira inconsciente, permitem que a figura cumpra sua função heurística. A descrição desses tratamentos é importante para o ensino, pois a maioria dos alunos não conseguem dominá-los sem uma aprendizagem especifica.

2.2 UNIDADES CONSTITUINTES DE UMA FIGURA GEOMÉTRICA

Para determinar as unidades figurais elementares que constituem semioticamente uma figura geométrica, Duval (2004) classifica a representação visual de uma figura geométrica em dois tipos de variações visuais,

- Dimensional: relativa às variações ligado ao número de dimensões 0 (ponto), 1 (reta) e 2 (plano);
- Qualitativo: relativa às “variações de forma (linha reta ou linha curva; contorno aberto ou contorno fechado de uma área), variações de

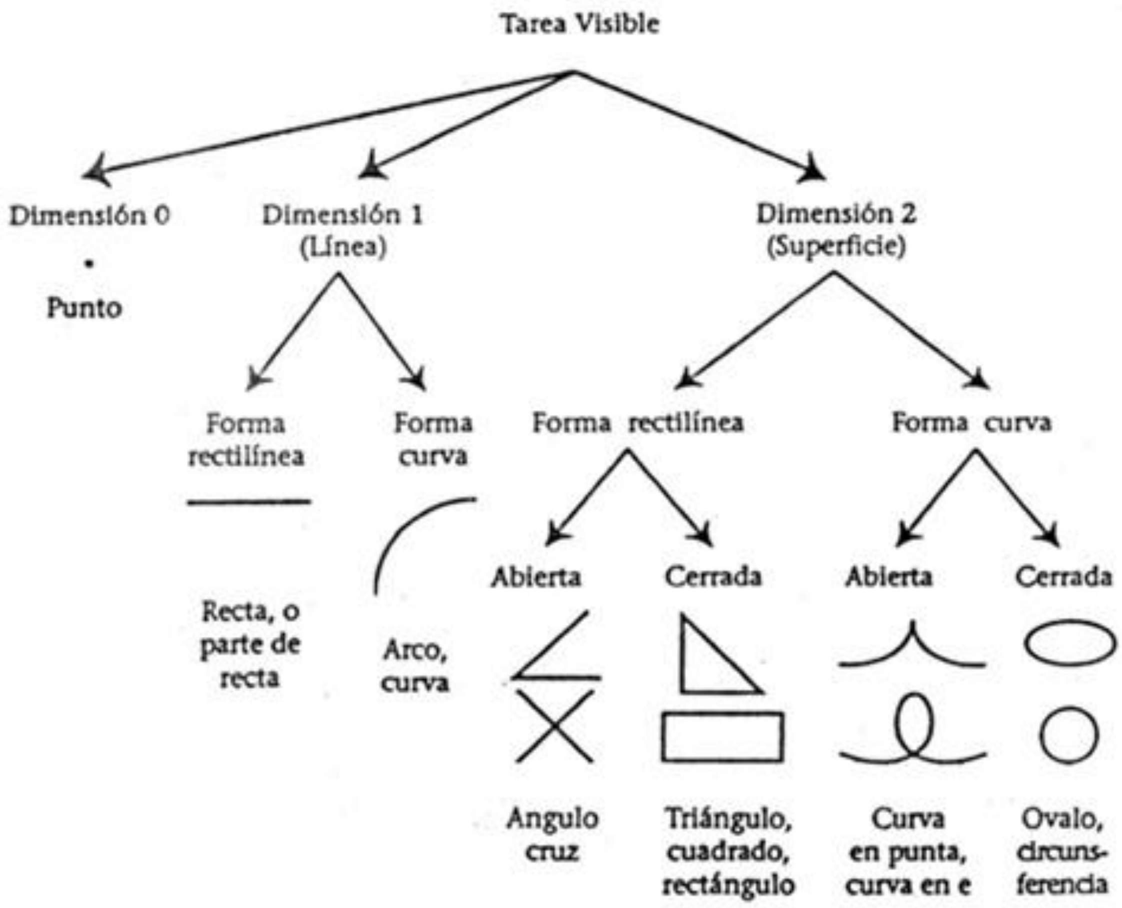
[11] Segundo o autor, cabe ao processo de ensino a aprendizagem específica desses tratamentos, que não ocorrerão de forma natural e são importantes para que a sua execução seja feita de forma consciente, permitindo que as figuras cumpram sua função heurística.

> tamanho, de orientação (em relação ao plano frontal-paralelo[12]), variações de granulação, de cor, etc. (DUVAL, 2004, p.157, tradução nossa).

As variações visuais, segundo o autor, permitem definir os elementos constitutivos de uma figura, que vão determinar os elementos que vão funcionar como unidades de base representativas, ou seja, como unidades figurais elementares.

Toda figura tem dois tipos de variação e o cruzamento dos valores da variável visual qualitativa com a variável de dimensão, define as unidades figurais elementares para o registro das representações geométricas, representadas na Figura 1, afirma Duval (2004).

Figura 1 – Classificação de unidades figurais elementares.



Fonte: Duval (2004, p.159).

12 Plano vertical e paralelo ou plano que contém a figura.

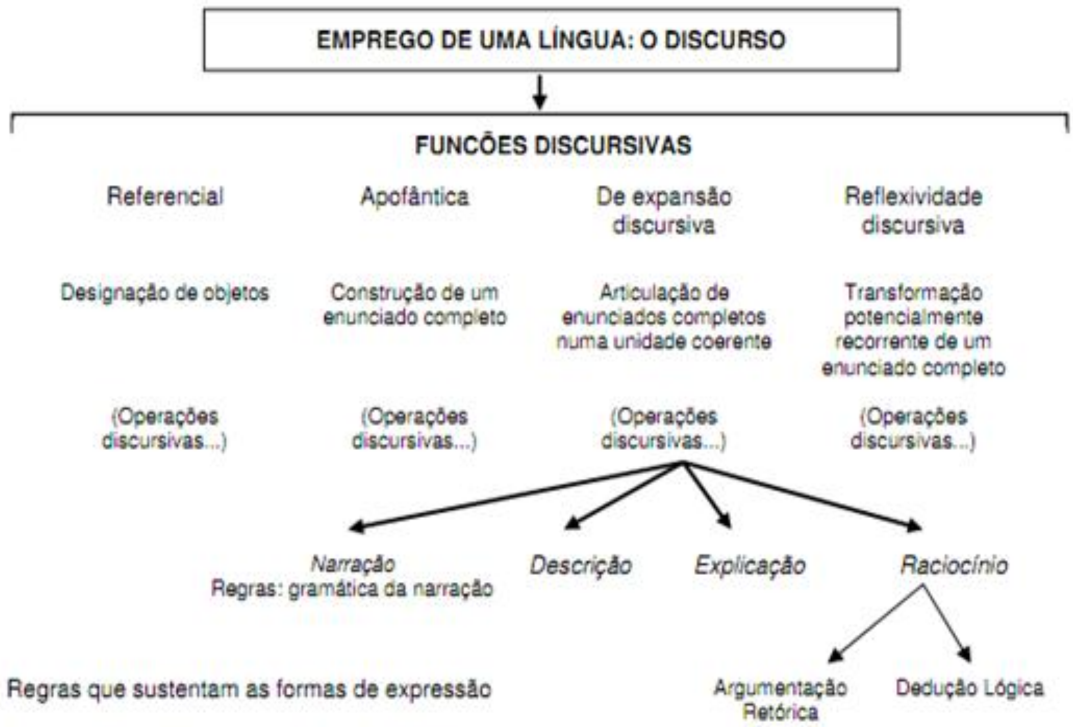
2.3 POSSIBILIDADES DE ARTICULAÇÃO DAS FIGURAS

Duval (2004) alerta para o fato de que, em Geometria, não há desenho que represente por si mesmo, ou seja, não há desenho “sem legenda”, pois uma figura representa uma situação geométrica somente quando as significações de certas unidades figurais (pontos, informações sobre as medidas de seus segmentos ou ângulos, polígonos) e de algumas de suas relações estão explicitamente definidas de entrada.

A indicação verbal é necessária para ancorar a figura como representação de objeto matemático e, portanto, a introdução de uma figura geométrica necessariamente é discursiva.

O registro discursivo, o qual deve interagir com os registros figurais, se caracteriza como um registro especializado, pois segundo o autor cumpre as funções discursivas (que por sua vez compreendem operações cognitivas) referencial, apofântica, de expansão discursiva e de reflexividade discursiva. A Figura 2, representada por um esquema, ilustra essas funções e operações.

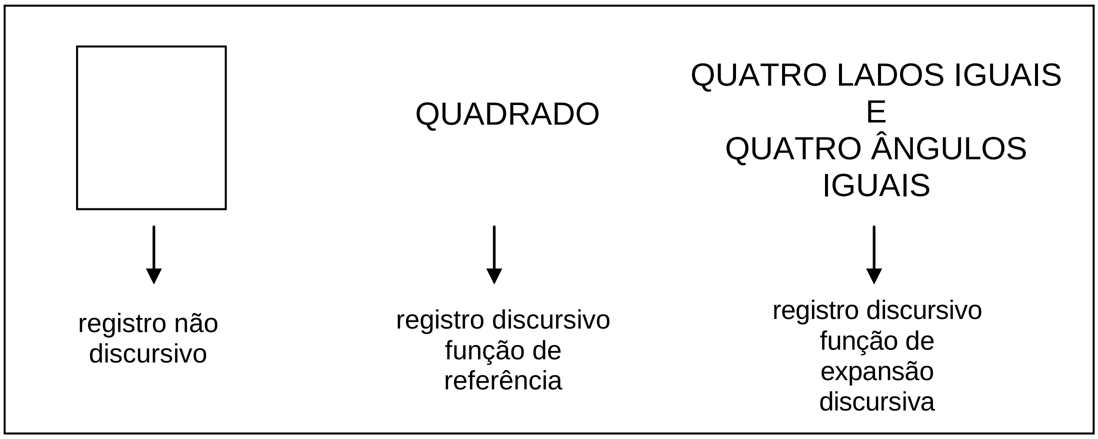
Figura 2 – Esquema das operações discursivas segundo Raymond Duval



Fonte: Duval (2004 apud TOZETTO, 2010, p.85)

No exemplo da Figura 3, podemos observar essas funções discursivas. A figura quadrado não diria nada se apresentada sozinha, mas quando associada à palavra quadrado, que a designa e com ela interage, podemos concluir a igualdade das medidas de seus lados e ângulos. As duas frases, no entanto, cumprem no discurso a função de expansão discursiva e, por essa razão, podemos inferir que se trata de um quadrado.

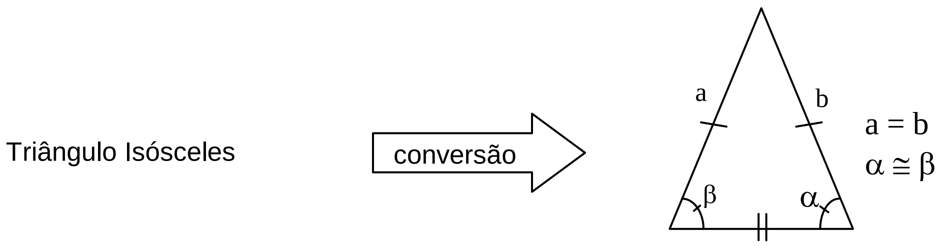
Figura 3 – Exemplos de funções discursivas



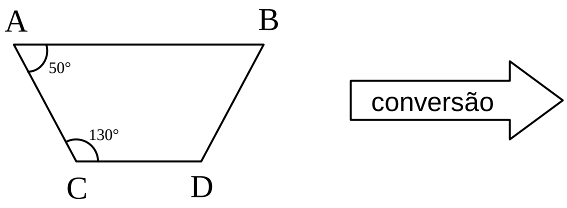
Fonte: A autora

O tipo de conversão mais natural na atividade geométrica é passar de um enunciado em língua natural a uma ou várias representações figurais.

No entanto, o autor ressalta que, na conversão do discurso em uma figura geométrica, não se devem abandonar os tratamentos vinculados ao registro de partida, isto é, os tratamentos discursivos (aplicação de definições, teoremas...). Por exemplo: Converter um triângulo isósceles (registro discursivo) em figura geométrica exige que consideremos todas as suas propriedades (um triângulo isósceles possui pelo menos dois lados de mesma medida e dois ângulos congruentes).



O tipo de conversão inversa exige colocar em prática situações e restrições extra-matemáticas relacionadas à comunicação de instruções elaboradas a partir de uma figura dada, ou de uma figura que se acaba de construir para que os destinatários possam reconstruí-las. Por exemplo:



- ✓ 4 lados
- ✓ AB paralelo a CD
- ✓ AC não é paralelo a BD

Logo: ABCD é um trapézio

A conversão de uma figura em um discurso, segundo Duval (2004, p. 182), não é de nenhuma maneira assimilável a uma descrição e sim a uma explicação, argumentação ou demonstração. É que “as conversões efetuadas no sentido figura → texto, exigem, portanto, que os diferentes tipos de expansão discursiva e as diferentes formas de funcionamento cognitivo do raciocínio sejam claramente diferenciados.”

Esse tipo de conversão, ao ser colocado em prática nas atividades didáticas, serve para,

> [...] observar a linguagem espontaneamente empregada pelos alunos [...] na apreensão das figuras, fazê-los compreender o jogo de restrições inerente a toda figura geométrica, ou fazê-los descobrir a necessidade de recorrer a uma linguagem que se baseia em definições e que permite formulação de interpretações unívoca. (DUVAL, 2004, p.182, tradução nossa).

Para permitir aos alunos tomar consciência de todas essas diferenças, Duval (2004, p. 183, tradução nossa) afirma que, “é necessário propor atividades especificas que levem em conta todas as possibilidades ofertadas pela diversidade de registro de representação”. Isso, segundo o autor, implica evidentemente que se disponha de uma análise cognitiva precisa dessas atividades complexas que se designam com as expressões raciocinar e compreender um texto.

A complexidade dessas atividades reside no fato de que a descrição da figura é utilizada para fins de comunicação e acaba por constituir o registro que é fixado na mensagem a ser transmitida pelo estudante em posição de emissor, por meio de um registro discursivo e, em posição de receptor, ele deve efetuar a conversão inversa.

Além desses aspectos o autor destaca que, ao contrastar as unidades figurais com as definições dos objetos matemáticos que elas representam, é possível perceber “**a mudança de dimensão que se deve efetuar quando se**

passa da representação figural ao discurso sobre objetos representados” (p. 160, tradução nossa, grifos do autor). Os exemplos anteriores também ilustram esse fato, pois a figura refere-se à unidade figural de dimensão 2 e o discurso refere-se à unidade figural de dimensão 1.

Segundo Duval (2004), a não congruência dimensional parece ser característica da coordenação entre figura e discurso e pode ocorrer porque a exploração heurística das figuras tende a privilegiar as unidades de dimensão 2 sobre as de dimensão inferior, e a aplicação de definições ou teoremas na sub-figura selecionada tende a privilegiar as unidades de dimensão 1 ou 0.

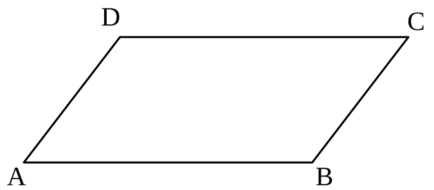
No entanto, segundo o autor, isso não introduz nenhuma heterogeneidade, o ir e vir constante entre as diferentes unidades figurais implica saltos na percepção da figura.

A especificidade da organização dedutiva do discurso, segundo Duval (2004), é outro fenômeno de não congruência. De acordo com o autor, “o discurso não só articula expressões que cumprem uma função referencial, como os nomes em posição de sujeito nas frases, mas também unidades que tem um valor lógico e epistêmico, como as proposições.” (DUVAL, 2004, p. 172, tradução nossa). Por exemplo:

Seja o quadrilátero:

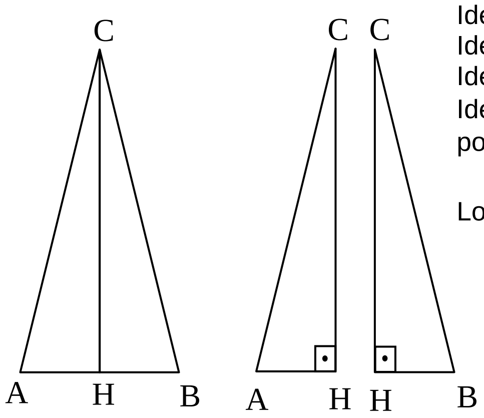
AD//BC

AB//DC



Nesse exemplo, o discurso refere-se o paralelismo dos lados. O mesmo ocorreria se as informações sobre a figura fossem relativas às medidas dos lados (m)AD ≅ (m)BC e (m)AB ≅ (m)DC. O registro discursivo que interagiria com a figura, provocando um maior poder heurístico, seria designar a figura por um registro discursivo de referência como, por exemplo, o paralelogramo.

A organização dedutiva do discurso se apoia exclusivamente em proposições e sobrepõe dois modos de funcionamento: um por substituição no interior de cada passo e um por reciclagem de uma proposição para encadear os diferentes passos (DUVAL, 2004, p. 172, tradução nossa). Por exemplo, para provar que num triângulo isósceles os ângulos da base são iguais organizamos o discurso da seguinte forma:



Demonstração:
Identificação das sub-figuras: ∆ AHC e ∆ BHC
Identificação da igualdade dos lados comum: CH
Identificação da igualdade dos ângulos de 90°
Identificação da congruência dos lados (m)AC ≅ (m)BC, pois o ∆ABC isósceles
Logo: $\hat{A} \cong \hat{B}$ (caso LLA de congruência de triângulo)

O raciocínio dedutivo, segundo Duval (2004), deve ser efetuado em dois níveis de funcionamento: de maneira local e global. A articulação local é a que se efetua nos limites de um passo dedutivo: se apoia na correspondência entre as unidades figurais de dimensão 0 ou 1 e as expressões referenciais. A articulação global, que consiste o processo de resolução de problemas, se apoia na correspondência entre a visão de uma sequência de sub-figuras e o encadeamento dos passos dedutivos, como apresentado no exemplo anterior.

Se o indivíduo toma consciência do funcionamento do registro figural e da organização dedutiva do discurso, e realiza a coordenação dos registros, estará efetuando a articulação global, que constitui o essencial da atividade geométrica, para a qual a heurística e a demonstração formam uma só abordagem.

2.4 NÍVEIS DE APRENDIZAGEM DAS FIGURAS GEOMÉTRICAS

Duval (2004) distingue os níveis de aprendizagem das figuras geométricas:

> [...] o primeiro nível é o que se opera o reconhecimento das diferentes unidades figurais que são discerníveis em uma dada figura e o segundo nível é o que se efetua as modificações possíveis das relações das partes com o todo (óptica ou posicional) das unidades figurais reconhecíveis e da figura dada. O primeiro nível corresponde ao que classicamente se entende e descreve como prazo para “percepção”; poderia ser, então, falar de

> apreensão gestáltica. O segundo nível corresponde a uma apreensão operatória das figuras. (DUVAL, 2004, p. 162, tradução nossa).

Vamos verificar separadamente os dois níveis de aprendizagem apontados por Duval (2004).

Primeiro nível de aprendizagem das figuras geométricas – O reconhecimento das unidades figurais de uma figura geométrica

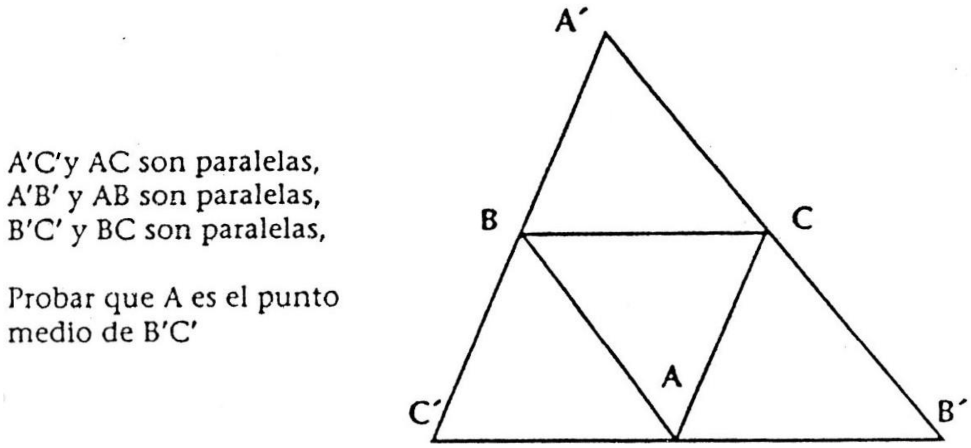
A utilização de uma figura é necessária para que a aprendizagem perceptiva das unidades figurais discerníveis ocorra. No entanto, essa aprendizagem requer uma mudança contínua do número de dimensões. Essa mudança contínua de dimensões contribuirá no tratamento dessa figura, para a aplicação de definição ou teorema, visto que a percepção se focaliza automaticamente sobre as unidades figurais de dimensão 2.

A organização perceptiva de uma figura, segundo Duval (2004), privilegia o reconhecimento de certas unidades figurais e tende a ocultar as outras. As unidades figurais que podem ser identificadas perceptivamente nem sempre concordam com as que estão designadas no enunciado, ou com as que são pertinentes para a resolução do problema proposto. A congruência entre a entrada discursiva e a organização perceptiva da figura pode constituir um obstáculo maior para resolução de um problema, se as unidades figurais que devem ser levadas em consideração não são aquelas diretamente visíveis na figura e designadas no enunciado.

Duval (2004) afirma que, quando as unidades figurais de dimensão 2 estão separadas, seu reconhecimento não tem nenhuma dificuldade, mas quando essas unidades estão integradas em uma configuração, as dificuldades são maiores. É que certas unidades figurais de dimensão 2 predominam sobre outras unidades também de dimensão 2 e, com frequência, uma figura geométrica possui mais unidades figurais elementares que as requeridas para construí-las.

Como exemplo, Duval (2004) apresenta um enunciado de um problema em que a figura comporta seis unidades figurais de dimensão 1 (os segmentos A’C’, AC, A’B’, AB, B’C’ e BC, uma de dimensão 0 (o ponto A) e estão designadas e enumeradas no enunciado. Esta figura também comporta oito unidades figurais de dimensão 2 (triângulos e paralelogramos). Essas são as unidades que devem ser observadas para os tratamentos que resolvem o problema. No entanto, duas unidades de dimensão 2 pertinentes para resolução são as menos imediatamente visíveis.

Figura 4 – Problema proposto em uma pesquisa.

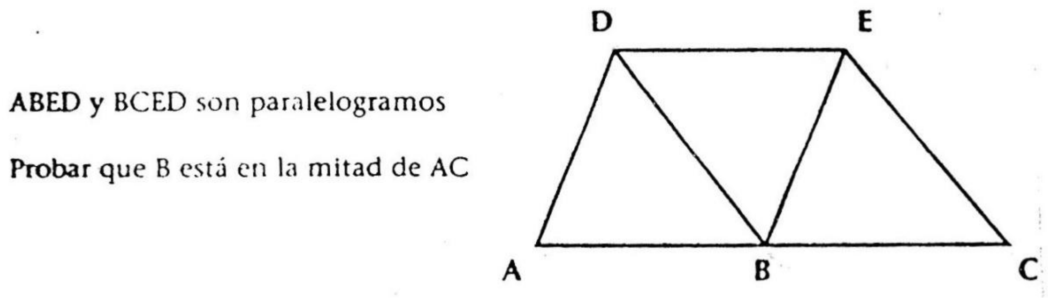


Fonte: Duval (2004, p.163).

> Em virtude da lei de fechamento, esta figura é vista espontaneamente como um triângulo pequeno inscrito em um triângulo grande, ou como um mosaico de quatro triângulos pequenos independentes. Para reconhecer três paralelogramos é necessário, de uma parte, neutralizar a organização perceptiva que faz predominar os contornos "triângulo" sobre os contornos "quadrilátero", e de outra parte, ver separadas unidades figurais que de fato se recobrem parcialmente e que por tanto tem parte de seu contorno em comum. Se não se tem presente na cabeça o objeto "paralelogramo", há poucas probabilidades de se reconhecer, sobre a figura, a unidade figural elementar que o representa. Obviamente, se pode supor que só a leitura do enunciado deveria conduzir a pensar simultaneamente na palavra e no objeto "paralelogramo", o qual é a condição para considerar a figura de maneira útil. Isto é evidente para um matemático. Mas, esta evidencia não se baseia na coordenação de dois registros, coordenação que está longe de existir para a grande maioria dos alunos em situações de aprendizagem. (DUVAL, 2004, p.163, tradução nossa).

A mesma situação matemática e a mesma pergunta matemática são apresentadas por Duval (2004) de outra maneira, mobilizando os mesmos conhecimentos utilizados na resolução do problema da Figura 3, mas com as unidades figurais de dimensão 2 pertinentes imediatamente visíveis na figura e no enunciado que faz referência ao objeto paralelogramo:

Figura 5 – Outra apresentação do mesmo problema.



Fonte: Duval (2004, p.164).

No enunciado apresentado na Figura 5, Duval (2004, p. 164, tradução nossa) destaca dois pontos.

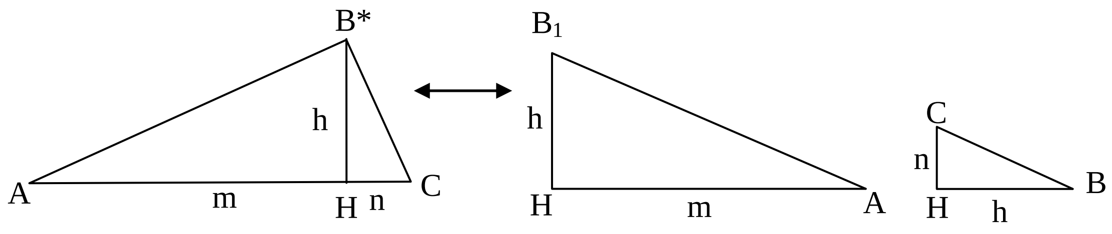
> [...] um, há congruência entre as unidades figurais diretamente visíveis e aquelas que “iniciaram” os tratamentos que permitem a resolução e, dois, há congruência entre as representações dos dois registros. Isto faz o problema muito mais fácil, não de um ponto de vista matemático, mas de um ponto de vista cognitivo!

A análise cognitiva da apresentação dos enunciados de um mesmo problema justifica a dificuldade maior de um em relação a outro, com base no fenômeno da congruência semântica oriunda da operação cognitiva de conversão.

Segundo nível de aprendizagem das figuras geométricas - Modificação das figuras e a apreensão operatória das modificações possíveis de uma figura geométrica

A modificação de uma figura pode ser feita de várias maneiras: separar as unidades figurais elementares de dimensão 2 que a compõem em outras unidades figurais, homogêneas ou heterogêneas, também de dimensão 2; recombinar para modificar o contorno global da figura; ampliar ou esticar a figura; deslocar por translação ou por rotação; etc. “Cada uma de todas estas modificações, que não são da mesma natureza, promovem operações específicas e constituem a produtividade heurística das figuras” (DUVAL, 1988, tradução nossa).

O exemplo a seguir ilustra uma modificação que promove operações específicas e constituem a produtividade heurística:



*B = $B_1 + B_2$

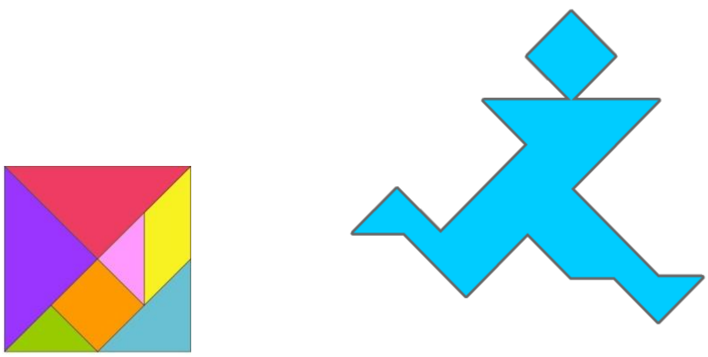
Os triângulos ABC, BHA e BHC sofreram modificações que servem para demonstrar as relações métricas nos triângulos retângulos.

Segundo Duval (2004), a utilização deste tipo de raciocínio para resolução de problema depende da distinção das formas de apreensão da figura. Almouloud (2003) descreve as possíveis modificações de uma figura pela apreensão operatória classificadas por Duval (2004):

- *modificação mereológica*: a figura pode separar-se em partes que são subfiguras da figura dada, fracionando-se e reagrupando-se, isto é, uma relação da parte e do todo;
- *modificação ótica*: é a transformação de uma figura em outra considerada sua imagem;
- *modificação posicional*: é o deslocamento em relação a um referencial. (ALMOULOUD, 2003, p. 127)

As três modificações são exemplificadas a seguir: modificação mereológica, as sete peças da subdivisão do quadrado foram utilizadas para a composição da figura de um homem correndo.

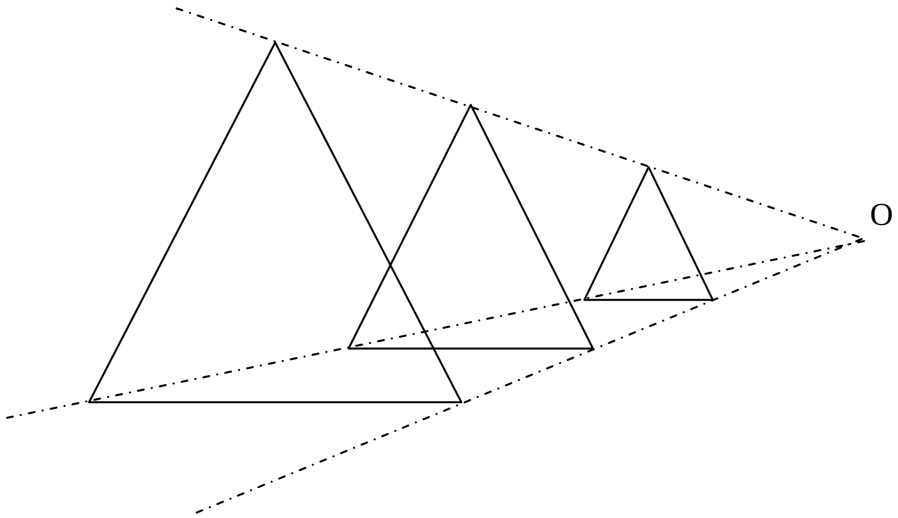
Figura 6 – Exemplo de modificação mereológica.



Fonte: A autora

A modificação ótica, transformação do triângulo em outro, que será denominada “imagem”.

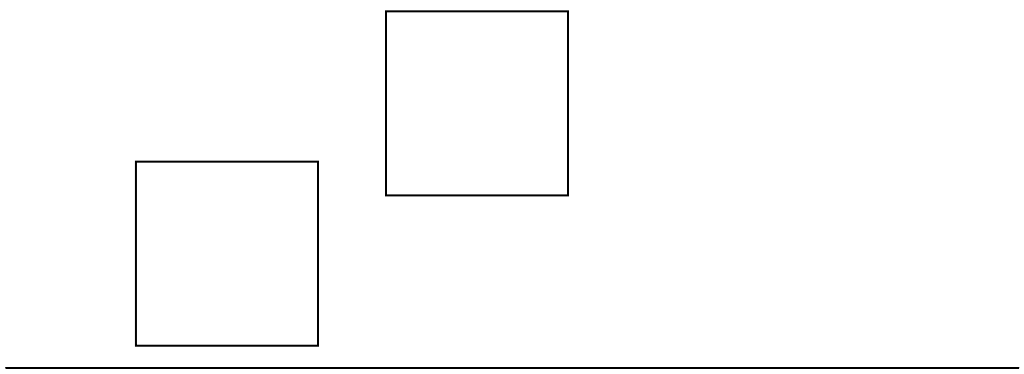
Figura 7 – Exemplo de modificação ótica



Fonte: A autora

A modificação posicional, o deslocamento do quadrilátero em relação a um referencial (linha).

Figura 8 – Exemplo de modificação posicional.



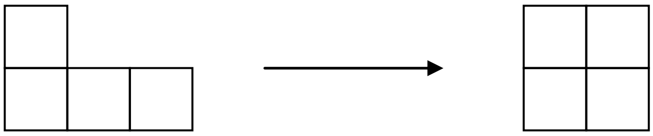
Fonte: A autora

As possibilidades de modificações de uma figura oriunda tanto das relações das partes com o todo, como das relações óticas (visuais) ou posicionais, efetuadas física ou mentalmente, são independentes de todo o conhecimento matemático. (DUVAL, 1988, p. 62-63, tradução nossa).

As modificações mereológicas estão ligadas à reconfiguração, e as modificações óticas estão ligadas à perspectiva, afirma Duval (2004).

A reconfiguração, segundo o autor, é a operação que consiste em reorganizar uma ou várias sub-figuras diferentes de uma figura dada em outra figura, e caracteriza um tratamento que consiste na divisão de uma figura em sub-figuras, em sua comparação e seu reagrupamento eventual numa figura de um contorno global diferente. Isto intervém na produtividade heurística e na apreensão matemática das figuras geométricas. Por exemplo, podemos afirmar que a figura a seguir é um quadrilátero, explicando que as mesmas peças foram dispostas de outra maneira e argumentamos que essa troca não altera os elementos e permite a modificação da figura.

Figura 9 – Exemplo de reconfiguração.



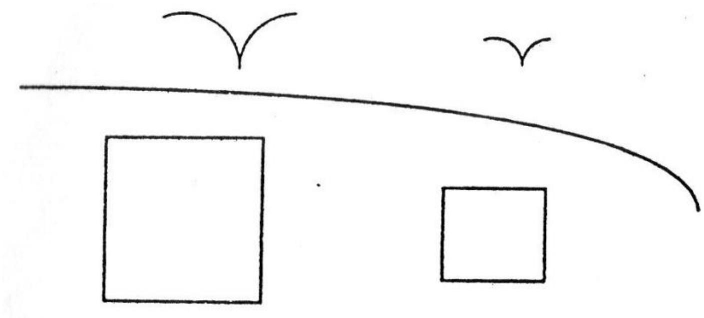
Fonte: A autora

Na reconfiguração, vários fatores incidem quando estamos falando "visibilidade da modificação mereológica": o caráter convexo ou não convexo da sub-figura obtida, o recobrimento parcial ou não recobrimento das unidades figurais que se devem levar em consideração para a reconfiguração, a saber, seu desdobramento, a necessidade ou não de fracionar uma das unidades figurais, etc. (DUVAL, 1988, p. 63-67, tradução nossa, grifo do autor). Todos estes fatores, de acordo com Duval (2004), podem facilitar a operação de reconfiguração, ou ao contrário, ocultar a possibilidade. Para o autor,

> Esta apreensão requer não só a neutralização da organização perceptiva espontânea da figura, mas também tem um custo temporal que varia consideravelmente de acordo com o número, a heterogeneidade e as posições respectivas das unidades figurais elementares que a compõem. (DUVAL, 2004, p. 175, tradução nossa).

Outra modificação figural importante refere-se a colocar a figura em perspectiva (mesma forma, mesma orientação, constância do tamanho apesar da variação da distância sem deformação) e consiste numa operação relacionada aos mecanismos perceptivos. Na Figura 10, há o exemplo de uma figura em perspectiva, dois quadrados com unidades figurais de mesmo tamanho: um mais próximo outro mais longe.

Figura 10 – Colocada em perspectiva duas unidades figurais por contextualização.



Fonte: Duval (2004, p. 167)

Ao permitir uma percepção em profundidade de uma representação plana, esta operação constitui a produtividade heurística do registro figural em relação com o discurso matemático tão útil para a compreensão da homotetia.

2.5 APREENSÃO OPERATÓRIA

A apreensão operatória das modificações possíveis é que vai, segundo Duval (2004), permitir a visualização de uma figura em uma variedade de sub-figuras que não são imediatamente perceptíveis ao "primeiro golpe de vista" e representam algumas (ou todas) unidades figurais elementares da figura inicial, são acessadas independentemente umas das outras, e não simultaneamente, e têm as mesmas unidades figurais, de dimensão 2, 1 ou 0, que a figura inicial. Frente e esse fato Duval (2004) questiona: como uma destas sequências de sub-figuras pode impor o caminho heurístico para a resolução de um problema?

Refletindo sobre essa questão o autor aponta que é o problema que determina, por seus dados e pela pergunta levantada, a figura de partida e a sub-figura de chegada e, se são identificadas, é possível ver a sequência de sub-figuras intermediárias que permitem passar de uma a outra. Mas, segundo o autor, não é só isso que torna possível a resolução do problema, é necessária a articulação entre a apreensão operatória da figura e a gestão discursiva de inferências que mobilizam uma rede de definições e de teoremas.

Se surgirem fenômenos de não congruência entre o que mostram as sub-figuras de uma sequência e os objetos aos quais se referem as definições e os teoremas a serem utilizados, não ocorre o êxito na solução do problema.

Duval (2004) esclarece que o fenômeno de não congruência pode se manifestar em virtude da heterogeneidade dimensional das unidades figurais, da correspondência entre o registro das figuras e o do discurso (as expressões referenciais), isto é, em um mesmo tipo de raciocino se pode fazer referência ao objeto que está representado por unidades figurais de dimensão 2, 1 ou 0.

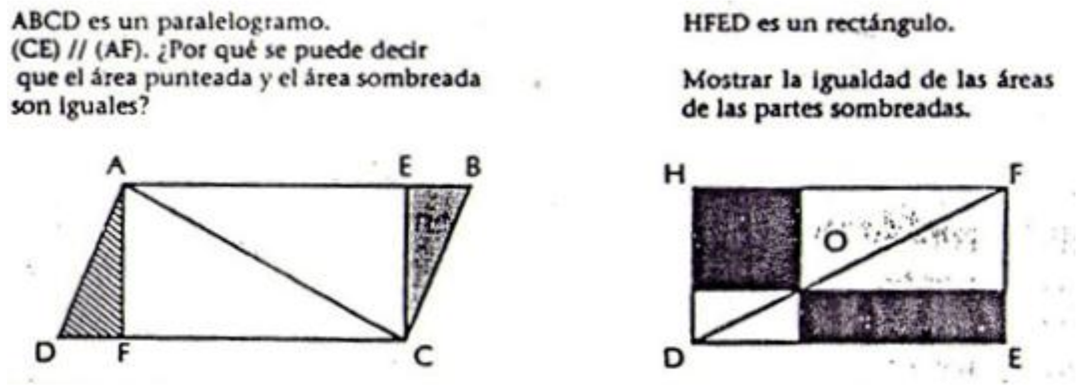
De acordo com Duval (2004), as operações relativas à modificação das figuras devem ser solicitadas de forma explícita e sistematicamente. Evidentemente, para isso é necessário propor exercícios cuja resolução pode ser obtida por meio de um tratamento figural. Além dessa condição necessária evidente, que parece não ser levada a sério no ensino da matemática, e está longe de ser suficiente, são três as condições que minimamente que devem ser levadas em consideração.

> A resolução do exercício proposto não deve implicar nenhum recurso de raciocínio que exigiria utilização de definições ou de teoremas. [...] A resolução do exercício proposto não deve implicar em nenhuma troca de dimensão na sequência de sub-figuras. De maneira mais geral o trabalho com unidades figurais de dimensão 2 parece que deve preceder o tratamento sobre as dimensões figurais de dimensão 1 e, a fortiori, de dimensão 0. Os exercícios para os quais a resolução pode ser obtida por meio da operação de reconfiguração cumprem perfeitamente a primeira e a segunda condição. [...] O exercício proposto deve ter lugar em uma série organizada *em função de uma variação sistemática dos fatores de visibilidade* que facilite ou retarde a apreensão operatória (Padilla, 1992). Este ponto é essencial para colocar em ação tratamentos figurais em todos os “casos de figura” e para reforçar a conduta de abdução. É justamente a consideração desta terceira condição que permite organizar uma aprendizagem especificamente centrada nos tratamentos próprios ao registro das figuras. (DUVAL, 2004, p. 176, tradução nossa, grifos do autor).

De maneira mais geral Duval (2004) afirma que estas três condições pressupõem que se disponha de uma classificação dos diferentes tipos de figura fundamentada em critérios semióticos e perceptivos da organização de unidades figurais elementares.

O exemplo apresentado a seguir ilustra a presença dessas condições e, portanto, importantes como propostas para o desenvolvimento de habilidades e competências voltadas para a apreensão operatória que se refletirão na aprendizagem da geometria. A Figura 11 faz a comparação de dois exercícios que requerem operação reconfiguração.

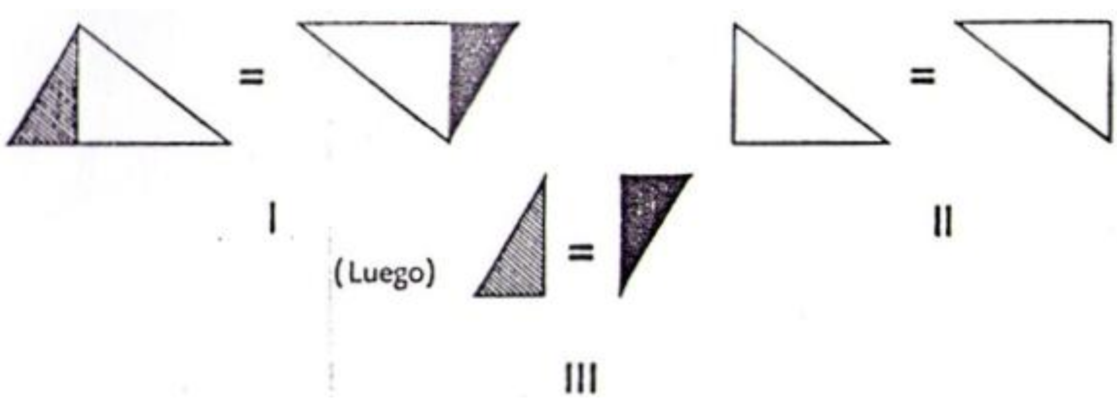
Figura 11 – Dois exercícios que requerem reconfiguração.



Fonte: Duval (2004, p.76).

O exercício que se refere ao paralelogramo ABCD pode ser resolvido de forma a cumprir as três condições a partir de reconfigurações da figura inicial e fornece a série de passos de raciocínio para expressar no registro discursivo ou descrever de forma explicativa ou de forma argumentativa, dependendo do tipo de justificativa os passos utilizados para a resolução do problema. Assim segundo Duval (2004), a função heurística da figura consiste precisamente nisto que a apreensão operatória permite ver em I e II, o qual constitui a justificativa III.

Figura 12 – Desenvolvimento da apreensão operatória do primeiro exercício.



Fonte: Duval (2004, p.77).

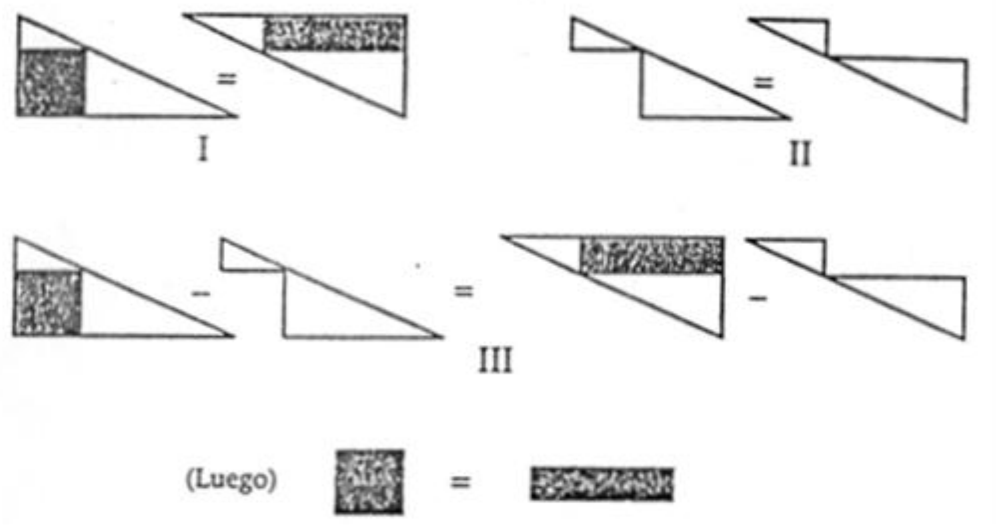
A solução também pode ser expressa utilizando as propriedades do paralelogramo e as hipóteses dadas no enunciado não caracterizando congruência entre a apreensão operatória e a trajetória discursiva.

> Há uma importante diferença entre estas duas versões discursivas, e esta diferença não é só do ponto de vista matemático. A versão dedutiva requer, para a explicitação de cada passo, que se efetue uma troca de dimensão: para aplicar as definições, as unidades figurais de dimensão 2 levadas em conta devem ser consideradas como configurações de unidades figurais de dimensão 1 (traços dos segmentos dos lados, traço da diagonal). A versão argumentativa não requer a troca de dimensão. (DUVAL, 2004, p. 177-178, tradução nossa).

Devemos considerar, no entanto, o que nos alerta Duval (2004) referente ao fato de que uma justificativa argumentativa pertinente fundamentada na apreensão operatória, não implica a demonstração do resultado. Trata-se de uma trajetória diferente da demonstração dedutiva, que exige duas condições suplementares: efetuar as trocas de dimensão na apreensão da figura e tomar consciência de que é uma organização dedutiva do discurso. Por isso é necessário haver uma aprendizagem separada da apreensão operatória e da organização dedutiva do discurso que são as condições prévias a sua coordenação. (DUVAL, 2004).

O exercício 2 pode ser resolvido segundo a mesma abordagem, isto é, por reconfiguração em sub-figuras e comparação.

Figura 13 – Desenvolvimento da apreensão do segundo exercício.



Fonte: Duval (2004, p.179).

Entretanto, esse exercício apresenta duas diferenças na abordagem heurística da figura: as duas partes (em pontilhado) não podem ser sobrepostas por recuperação mental (sua comparação é perceptivamente indecifrável); as unidades figurais que formam as partes complementares a serem comparadas não se fundem uma a outra unidade figural. A não convexidade da reconfiguração obtida constitui um fator que mascara a apreensão. É, portanto, sobre aplicação de tratamentos próprios ao registro das figuras que esse exercício se difere do procedente.

Para Duval (2004), é isso o que, de fato, interessa para a aprendizagem de uma apreensão operatória. Com esses dois exemplos apresentados, um depois do outro, pode-se ver como se cumpre a terceira condição enunciada anteriormente: para uma operação dada é necessário fazer variar os fatores de visibilidade. As análises das figuras se fazem a partir das operações de modificações figurais, e para cada uma dessas operações existem fatores específicos que se fazem mais ou menos visíveis. E essa diversidade de operações para uma mesma figura é que constitui a riqueza e a complexidade do registro das figuras geométricas, desde o ponto de vista dos procedimentos heurísticos.

CAPÍTULO 3

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS PARA COLETA E ANÁLISE DOS DADOS: TEORIA DA ANÁLISE DO CONTEÚDO DE BARDIN

A Geometria apresenta-se atualmente como um vasto campo de pesquisa, em função de sua importância para o desenvolvimento do aluno e das dificuldades apresentadas para efetivação de seu ensino. Diante desses aspectos chama-nos a atenção para as investigações sobre a Geometria nos livros didáticos. A opção por analisar o livro didático se deu, pois o livro didático é principal material utilizado pelos professores em sala de aula.

A partir disso, surgiu a ideia de pesquisar se os livros didáticos de Matemática apresentam aspectos da Teoria de Representações Semióticas de Raymond Duval. A preferência por essa teoria se deu pelo fato de Raymond Duval investigar como se dá o pensamento cognitivo dos alunos na aprendizagem da matemática, fator esse que consideramos importante para melhorar a qualidade do ensino da matemática especificamente de Geometria. Esse campo de estudo é essencial para o entendimento das condições cognitivas de aprendizagem da Geometria.

A pesquisa se deu por meio de estudo descritivo do tipo exploratório, com abordagem qualitativa. As técnicas utilizadas para coleta dos dados foi, análise do tipo pesquisa bibliográfica sobre os livros didáticos de Matemática.

A pesquisa bibliográfica, de acordo com Gil (2010), é elaborada com base em material já publicado,

> [...] essa modalidade de pesquisa inclui material impresso, como livros, revistas, jornais, teses, dissertações e anais de eventos científicos. Devido da disseminação de novos formatos de informação, estas pesquisas passaram a incluir outros tipos de fontes, como discos, fitas magnéticas, CDs, bem como o material disponibilizado na Internet.(p.29).

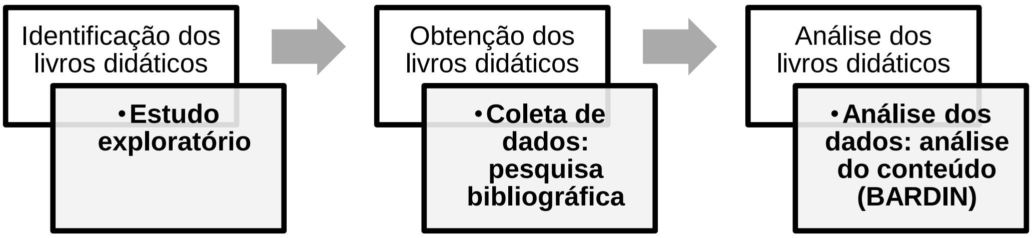
Por meio dessa análise, é possível identificar uma diversidade de informações, que podem servir de fundamento para a análise do objeto de estudo.

O método de análise dos dados foi a análise de conteúdo proposta por Laurence Bardin (2010). Os passos metodológicos e as referências teórico-metodológicas adotadas estão descritas na sequência.

3.1 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DE COLETA E ANÁLISE DE DADOS

De uma forma simplificada, pode-se afirmar que o estudo compõe-se nas seguintes etapas descritas pela Figura 14. Apesar dessa separação, é importante considerar que as etapas ocorreram muitas vezes simultaneamente e foram constantemente sendo reelaboradas, conforme necessário.

Figura 14 – Organograma das atividades desenvolvidas



Fonte: A autora

No estudo exploratório, foram necessárias algumas escolhas, a fim de delimitar quais livros didáticos e em qual nível de ensino esta investigação seria realizada. Diante do fato de o livro *Sémiosis et pensée humaine*, no qual Raymond Duval apresenta os aspectos da Teoria de Representações Semióticas, ter sido publicado no ano 1995, optamos por analisar livros didáticos posteriores a essa data.

Outro fator que levamos em consideração foi o fato de os PCN de Matemática terem sido publicados no ano de 1998, o que nos levou à opção por analisar livros didáticos posteriores a esta data.

Com base nisso, o problema da pesquisa foi sendo delimitado e optou-se por investigar se a forma de abordagem do conteúdo de Geometria presente nos livros didáticos, relativa aos processos de ensino, contempla aspectos da Teoria de Representações Semióticas segundo Raymond Duval, relativos à Geometria.

Definidos esses aspectos, iniciamos a busca por acervos de livros didáticos de Matemática.

Constatamos a presença de livros didáticos de Matemática no Núcleo Integrado de Educação Matemática (NIEM)[13] da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG).

Localizado esse acervo de livros didáticos de Matemática, iniciamos a coleta dos dados: pesquisa bibliográfica. Durante o período de agosto a setembro de 2010 realizamos a identificação dos livros didáticos presentes no NIEM, tabulamos as características dos livros didáticos, ano de publicação, título, autor, série e grau de ensino.

Com os dados tabulados, selecionamos coleções de livros didáticos completas com os livros do 6°, 7°, 8° e 9°ano do Ensino Fundamental, posteriores a 1998, aprovados pelo PNLD: Matemática hoje é feita assim (2002); NOVO Matemática na medida certa (2003); A conquista de Matemática (2002)[14].

No entanto, em busca de livros didáticos publicados posteriores a 2003. Entramos em contato com algumas professoras de Matemática que lecionam em colégios da rede pública do Estado do Paraná, colégios esses que fazem parte do Programa Nacional do Livro Didático.

As professoras nos emprestaram duas coleções de livros didáticos: uma utilizada durante os anos (2008, 2009 e 2010) e outra coleção utilizada durante o atual ano letivo e que será utilizada até 2013: Para saber Matemática (2006); Projeto Radix (2009)[15].

Desta forma, reunimos cinco coleções de livros didáticos de Matemática aprovados pelo PNLD. Conforme apresentado no Quadro 3, a seguir.

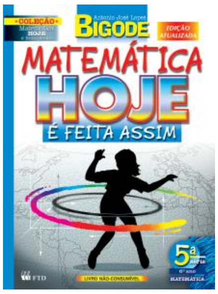
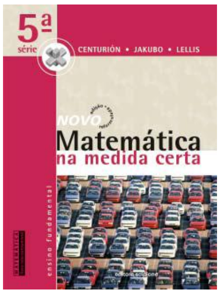
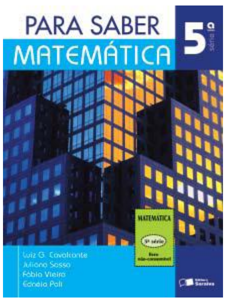
---

[13] Com atividades experimentadas pela primeira vez em 1994, e desde então reeditado com sucesso pelos departamentos de Métodos e Técnicas de Ensino e de Matemática e Estatística da UEPG, o projeto “Núcleo Integrado de Educação Matemática (NIEM)” constitui-se num espaço para estudos e reflexões sobre a prática docente vivenciada por acadêmicos estagiários do curso de Licenciatura em Matemática da instituição, conforme declara a professora e coordenadora Joseli Almeida Camargo. Esse espaço para estudos contém um acervo de livros didáticos e materiais de apoio para o ensino de Matemática; todo material é doado por professores e alunos de curso de Licenciatura em Matemática.

[14] BIGODE, A. J. L. **Matemática hoje é feita assim.** São Paulo: FTD, 2002**.** (foram analisados os quatro livros da coleção 5ª, 6ª, 7ª, 8ª série). CENTURIÓN, M. R.; JAKUBOVIC, J.; LELLIS, M. C. T. **NOVO Matemática na medida certa**. 10. ed. São Paulo: Scipione, 2003. (foram analisados os quatro livros da coleção 5ª, 6ª, 7ª, 8ª série). GIOVANNI J. R.; CASTRUCCI, B.; GIOVANNI JR., J. R. **A conquista da Matemática:** a + nova. São Paulo: FDT, 2002. (foram analisados os quatro livros da coleção 5ª, 6ª, 7ª, 8ª série).

[15] CAVALCANTE, L. G.; SOSSO, J.; VIEIRA, F.; POLI, E. **Para saber Matemática**. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2006. (foram analisados os quatro livros da coleção 5ª, 6ª, 7ª, 8ª série). RIBEIRO, J. S. **Projeto radix**: matemática. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2009. (foram analisados os quatro livros da coleção 6°, 7°, 8° e 9° ano).

Quadro 3 – Livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental adotados para análise dos dados

Livro Didático	Referência
	BIGODE, Antonio Jose Lopes. **Matemática hoje é feita assim.** São Paulo: FTD, 2002.
	GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B.; GIOVANNI JR, J. R. **A conquista da matemática:** a + nova. São Paulo: FDT, 2002.
	CENTURIÓN, M. R.; JAKUBOVIC, J.; LELLIS, M. C. T. **NOVO Matemática na medida certa**. 10. ed.. São Paulo: Scipione, 2003
	CAVALCANTE, L. G.; SOSSO, J.; VIEIRA, F.; POLI, E. **Para saber Matemática**. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2006.
	RIBEIRO, J. S. **Projeto radix**: matemática. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2009.

Fonte: A autora.

Assim, definiu-se que o objeto da investigação é o conteúdo de Geometria presente nos livros didáticos de Matemática da Educação Básica (6° a 9° ano do Ensino Fundamental) do período estudado e compreendido entre 2002 e 2009.

Depois de definidos os livros didáticos para análise, passamos a definir os conteúdos dos livros didáticos a serem analisados, para isso elencamos os conteúdos presente nos livros didáticos referentes à Geometria. Esses conteúdos estão apresentados no Quadro 4.

Quadro 4 – Conteúdos de Geometria presente nos livros didático

sólidos geométricos	mosaicos	polígonos	semelhança
figuras planas	ângulos	poliedros	simetria
paralelas e perpendiculares	planificações	círculo	inscritos e circunscritos
figuras espaciais	teorema de Pitágoras	circunferência	congruências
ladrilhos e pavimentos	proporcionalidades	mediatriz	bissetriz, altura e mediana
relações métricas no triângulo retângulo	trigonometria	teorema de Tales	reflexão
translação	vistas de um sólido geométrico	desenho em perspectiva	rotação
área	volume	ponto, reta e plano	homotetia

Fonte: A autora.

Depois de elencados os conteúdos, eliminamos os conteúdos referentes a medidas e trigonometria, e ainda, com base na Teoria de Representações Semióticas dividimos os conteúdos em três classes: uma classe contendo conteúdos referentes a figuras geométricas de dimensão 0 e 1, outra classe contendo conteúdos referentes a figuras geométricas de dimensão 2 e outra classe contendo conteúdos referentes a figuras geométricas de dimensão 3. Conforme o Quadro 5:

Quadro 5 – Divisão dos conteúdos.

Dimensão 0 e 1	Dimensão 2	Dimensão 3
Ponto e Reta	Figuras planas	Figuras espaciais
Paralelas e perpendiculares	Polígonos	Poliedros
Teorema de Tales	Teorema de Pitágoras	Vistas de um sólido geométrico
Circunferência	Círculo	Sólidos geométricos

Fonte: A autora.

Os conteúdos: proporcionalidades, inscritos e circunscritos, simetria, congruências, reflexão, translação, semelhança, rotação, homotetia, entre outros, não relacionamos de acordo com o número de dimensão, pois esses se referem aos conteúdos mencionados acima de dimensão 0, 1 e 2.

Depois de subdivididos os conteúdos por dimensão, constatamos que os conteúdos referentes a figuras geométricas de dimensão 2 estão presentes em qualquer ano do Ensino Fundamental, em qualquer uma das coleções escolhidas e tem relação com os conteúdos mencionados acima, optamos assim por analisar definições, demonstrações e exercícios apenas dos conteúdos relacionados a figuras geométricas de dimensão 2.

A opção por analisar as definições, as demonstrações e os exercícios se deu pelo fato de Duval referir-se, em sua teoria, a estes três aspectos no ensino da Geometria.

Definidos os livros didáticos e os conteúdos a serem analisados, passamos a realizar a terceira etapa da pesquisa, a análise do conteúdo.

A análise de conteúdo constitui,

> Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens. (BARDIN, 2010, p. 44).

Essa opção viabiliza a obtenção de indicadores qualitativos referente a organização do conteúdo explanado nos livros didáticos de Matemática, objetivo de nossa pesquisa. Com essa abordagem utilizaremos um enfoque diferenciado, por meio de análises descritivas, incidindo sobre o conteúdo, não somente sobre os resultados numéricos, mas sim sobre os sentidos que emergem na leitura dos livros didáticos, produzindo interpretações e explicitações (significados) sobre o conteúdo analisado.

A análise de conteúdo possui três pólos cronológicos, segundo Bardin (2010): a preanálise, a exploração do material e o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

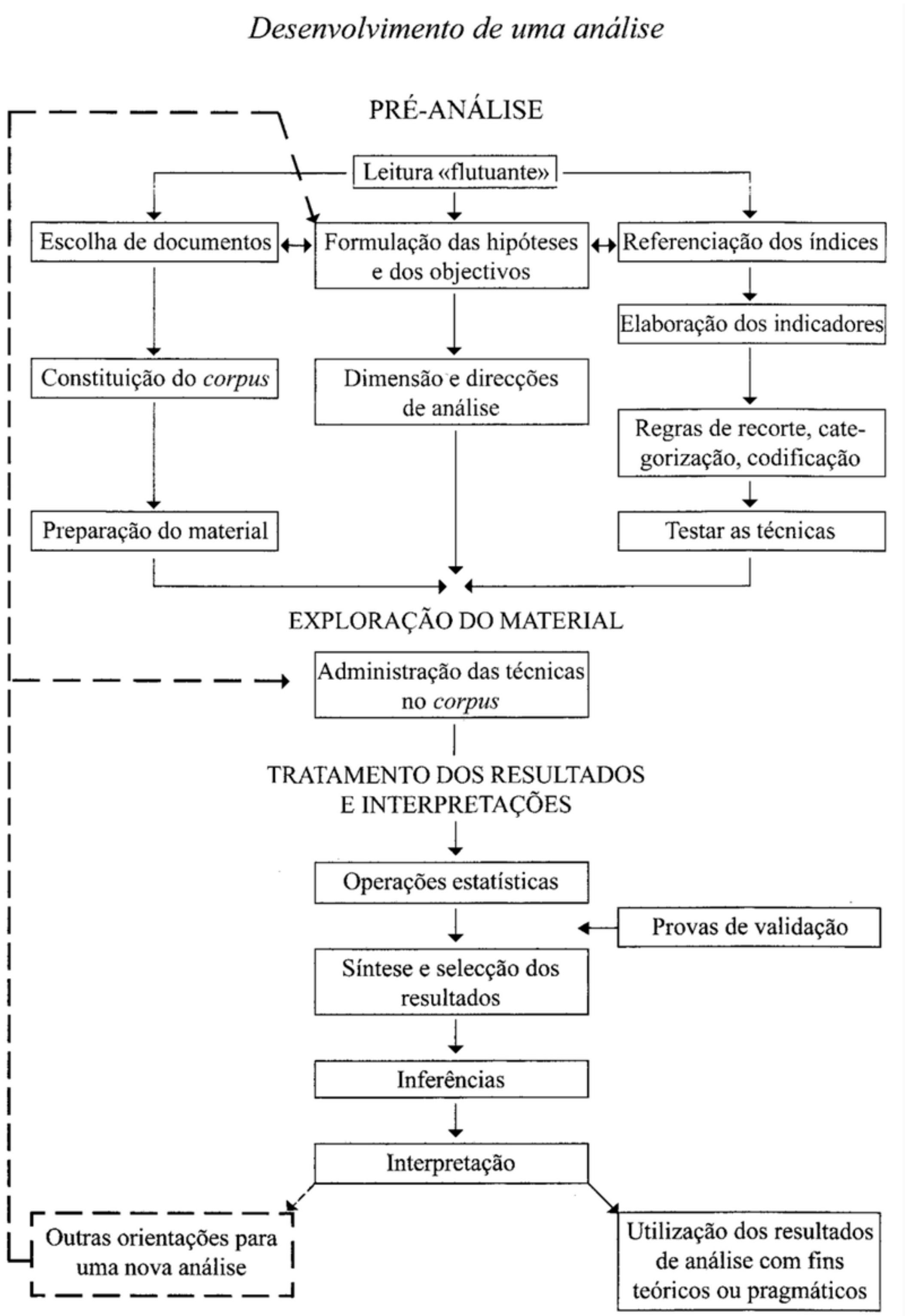
Para Bardin (2010) a **pré-análise** é a fase de organização propriamente dita. Corresponde a um período operacional, de sistematizar as ideias iniciais, de maneira a conduzir as operações sucessivas, no plano de análise. A pré-análise tem três missões: a escolha dos documentos a serem submetidos à análise, a formulação das hipóteses e dos objetivos e a elaboração dos indicadores que fundamentam a interpretação final.

A **exploração do material** e o **tratamento dos resultados obtidos,** segundo a autora, consistem essencialmente em operações de codificação, decomposição ou enumeração, em função de regras previamente formuladas.

A **inferência** e a **interpretação** consiste em tratar os resultados de maneira a torná-los significativos e válidos. Operações estatísticas simples ou mais complexas permitem estabelecer quadros de resultados, diagramas, figuras e modelos, os quais condensam e põem em relevo as informações fornecidas pela análise. Com os resultados significativos e fiéis, são propostas as inferências e adiantadas as interpretações, a propósito dos objetivos previstos, ou que digam respeito a outras descobertas inesperadas, conforme afirma Bardin (2010).

A Figura 15 descreve detalhadamente os três polos cronológicos da análise de conteúdo.

Figura 15 – Desenvolvimento de uma análise.



Fonte: Bardin (2010) p. 128

Diante do proposto por Bardin (2010) na pré-análise, foram feitas leituras na íntegra, sem a realização de análises dos documentos coletados: livros didáticos. Em seguida, foram selecionadas as unidades de análise – de acordo com a delimitação do objeto deste trabalho: conteúdo de Geometria dos livros didáticos relacionados a figuras geométricas de dimensão 2 (seleção detalhada anteriormente).

Na exploração do material foram lidos os textos novamente e realizados recortes das partes consideradas mais importantes. Nesse momento foram selecionados exercícios, demonstrações e definições, com base em aspectos da Teoria de Representações Semióticas, aspectos que supostamente poderiam proporcionar uma análise relevante quanto aos estudos realizados. Os exercícios, as demonstrações e as definições selecionados posteriormente foram relidos até o estabelecimento de agrupamentos (divergências e convergências) segundo as relações de aproximação e distanciamento entre a teoria.

Ainda na exploração do material para a delimitação de categorias de análise, estudou-se a Teoria de Representações Semiótica segundo Raymond Duval, no tocante à Geometria. Foram definidas as categorias a serem analisadas nas definições, demonstrações e exercícios.

No tratamento dos resultados e interpretações, foi realizada a análise em conjunto dos dados e apresentadas as conclusões sobre as informações acerca dos dados empíricos, norteados pelo quadro referencial, na qual são estabelecidas relações e aprofundadas as conexões das ideias.

3.2 DEFINIÇÃO DE CATEGORIAS ANALÍTICAS SEGUNDO A TEORIA DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS PARA O ENSINO DA GEOMETRIA

Os dados empíricos foram analisados segundo a Teoria de Representações Semióticas. Para definirmos as categorias elencamos os pontos principais da Teoria de Representações Semióticas no tocante à Geometria.

Quando elencados os pontos principais da Teoria de Representações Semióticas no tocante à Geometria, constatamos que esses pontos se relacionam com duas categorias mais gerais: uma categoria referente aos tratamentos figurais e outra referente aos tratamentos discursivos. Nessas duas categorias se encaixam sub-categorias que podem pertencer aos tratamentos figurais, aos tratamentos discursivos ou aos dois ao mesmo tempo.

Definimos assim as categorias e sub-categorias de análise segundo as quais foram analisados os exercícios propostos, as definições e as demonstrações:

Quadro 6 – Categorias e sub-categorias de análise

Categorias	**Sub-categorias**
Tratamentos Figurais	• Unidades figurais levadas em consideração na resolução de um problema, as diretamente visíveis ou as designadas no enunciado. • Significação a certas unidades figurais e de algumas relações figurais para representar uma situação geométrica. • A resolução do exercício proposto não deve implicar em nenhuma troca de dimensão na sequência de sub-figuras. • O exercício proposto deve ter lugar em uma série organizada em função de uma variação sistemática dos fatores de visibilidade que facilite o retardo a apreensão operatória. • Reconfiguração das figuras geométricas: modificações mereológicas e modificações óticas. • Unidades de base constituintes dos registros; articulação das figuras; modificação das figuras (óticas ou posicionais). • Tratamentos figurais e discursivos efetuados de maneira simultânea e interativa. • Articulação entre figura e discurso: raciocínio dedutivo de maneira local ou global. • Mudanças de dimensão ao passar de uma representação figural dos objetos representados ao discurso. • Congruência semântica entre o que mostra uma sequência de sub-figuras e o registro discursivo (objetos aos quais se referem as definições e os teoremas que devem ser utilizados para chegar a solução matemática do problema devido a heterogeneidade dimensional das unidades figurais).
Tratamentos Discursivos	• A resolução do exercício proposto não deve implicar nenhum recurso de raciocínio que exigiriam a utilização de definições ou de teoremas. • Tratamentos figurais e discursivos efetuados de maneira simultânea e interativa. • Articulação entre figura e discurso: raciocínio dedutivo de maneira local ou global. • Mudanças de dimensão ao passar de uma representação figural dos objetos representados ao discurso. • Congruência semântica entre o que mostra uma sequência de sub-figuras e o registro discursivo (objetos aos quais se referem as definições e os teoremas que devem ser utilizados para chegar a solução matemática do problema devido a heterogeneidade dimensional das unidades figurais).

Fonte: A autora.

Essas categorias mais gerais permitiram a definição de categorias mais específicas para análise dos dados.

Para análise do conteúdo de Geometria dos livros didáticos elencamos cinco categorias de análise, definidas a priori, extraídas da Teoria de Representações Semióticas segundo Raymond Duval, no tocante à Geometria. Trata-se de uma análise com abordagem cognitiva. O Quadro 7 apresenta as categorias seguidas de uma breve descrição.

Quadro 7 – Categorias de análise.

Categorias	Descrição
Tratamento figural e tratamento discursivo.	Identificação da interação e simultaneidade dos tratamentos figurais e discursivos.
Unidades de base constituintes dos registros.	Identificação das unidades de dimensão 0, 1 e 2.
Articulação entre registro discursivo e figural (congruência semântica ou não).	Identificação de mudança de dimensão ao converter um registro figural em discursivo ou vice- versa.
Modificação e apreensão operatória das modificações das figuras: mereológicas ou óticas.	Modificações das figuras tanto das partes com o todo (mereológicas) como as óticas (visuais ou posicionais)
Resolução de exercícios.	Utilização de definições ou teoremas, troca de dimensão, organização em função de uma variação sistemática de fatores de visibilidade.

Fonte: A autora.

A análise dos conteúdos dos livros didáticos foi realizada levando-se em conta os fenômenos intrínsecos aos registros de representação que influenciam no ensino da Geometria. Além disso, a partir das análises, apresentamos sugestões de alterações nos exercícios, nas demonstrações e nas definições, de modo a destacar aspectos relevantes na teoria de Raymond Duval, que levariam a tais modificações, sem a pretensão de categorizar os conteúdos em certos e errados.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE, RESULTADOS E DISCUSSÕES

Num primeiro momento antes de realizar as análises dos dados, vamos destacar a forma de apresentação do conteúdo de Geometria nas cinco coleções de livros didáticos selecionadas. As coleções não apresentam o conteúdo de Geometria no fim dos livros didáticos.

Na coleção “Matemática hoje é feita assim”, as definições são apresentadas em forma de histórias infantis (diálogos), depois são apresentadas as atividades. Nas coleções “A conquista da matemática: a + nova”, “NOVO Matemática na medida certa”, “Para saber Matemática” e “Projeto Radix: Matemática”, o conteúdo é organizado de forma a, primeiramente, apresentar as definições e, em seguida, os exercícios ou atividades. Nas cinco coleções, poucas vezes são apresentadas demonstrações.

4.1 ANÁLISE DO CONTEÚDO DE GEOMETRIA PRESENTE NO LIVRO DE DIDÁTICO À LUZ DA TEORIA DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Duval (2004) afirma que os tratamentos discursivos e os tratamentos figurais devem ser utilizados de maneira simultânea e de maneira interativa. No exemplo a seguir, Figura 16, observa-se a não realização dessa interação, pois é apresentado apenas o registro discursivo, diminuindo o potencial heurístico em relação á aprendizagem do aluno:

Figura 16 – Exemplo de definição de triângulo

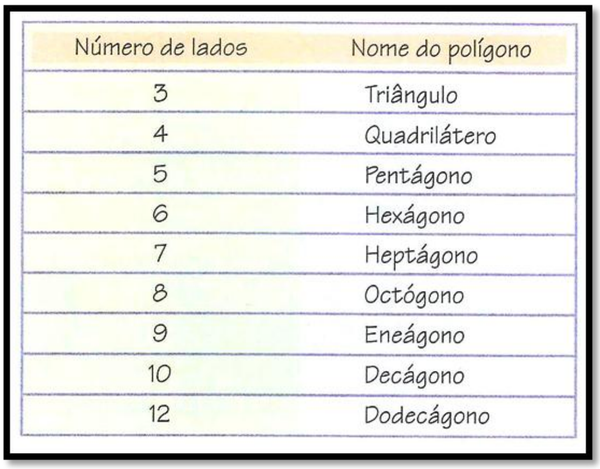
Fonte: Bigode (2002, p. 177, 5ª série).

Diante dessa definição, o aluno pode estar se referindo, por exemplo, a lados curvos, caso ele não atribua significação à palavra polígono (que deve possuir lados retos), pois as figuras podem ter formas curvas ou retilíneas. Duval (2004), ao se referir às unidades de base constituintes de uma figura, classifica-as em relação à forma curva ou retilínea e, também, em relação às dimensões 0, 1 e 2.

Apesar da explicitação no diálogo das características de um triângulo, falta a presença da figura para interagir com o discurso apresentado nesse diálogo. Essa explicitação poderia ser feita apresentando a figura no pensamento do professor ou solicitando o registro do polígono em forma de desenho pelo aluno.

Esse mesmo fato também ocorre na nomenclatura dos polígonos, pois os tratamentos figurais não são apresentados simultaneamente aos tratamentos discursivos.

Figura 17 – Exemplo de nomenclatura de polígonos



Número de lados	Nome do polígono
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
12	Dodecágono

Fonte: Bigode (2002, p. 130, 5ª série)

Quando os tratamentos figurais e discursivos interagem, há possibilidade de discriminação das unidades de base constituintes, importantes para a operação cognitiva de conversão, se impõe e, como consequência, as variações necessárias para as conversões também.

Essa falta de interação não acontece no exemplo apresentado na Figura 18. Além do mais, existe um tratamento discursivo que evidencia o prefixo da palavra que nomeia o polígono. Esse tratamento contribui heuristicamente para o reconhecimento das figuras. No entanto, falta um tratamento para as figuras apresentadas, pois não estão evidenciados os ângulos internos e o número de vértices.

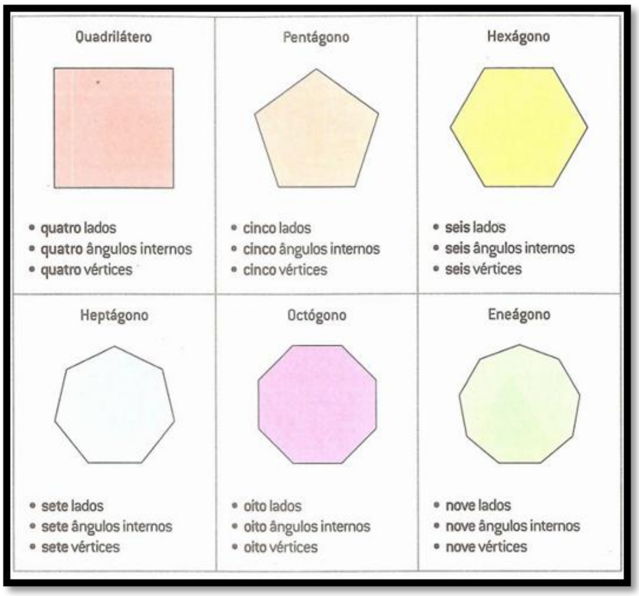
Figura 18 – Exemplo de definição de polígonos

Polígono	Número de lados do polígono	Nome do polígono	
	3	triângulo	tri = três
	4	quadrilátero	quadri = quatro
	5	pentágono	penta = cinco
	6	hexágono	hexa = seis
	7	heptágono	hepta = sete
	8	octógono	octo = oito
	9	eneágono	enea = nove
	10	decágono	deca = dez

Fonte: Giovanni et al. (2002, p.219, 7ª série)

Duval (2004) afirma que o discurso não deve só articular expressões que cumprem uma função referencial, como os nomes em posição de sujeito, mas também unidades que tem valor lógico epistêmico, como as proposições. Na Figura 19, o discurso não cumpre apenas a função referencial.

Figura 19 – Exemplo de definição de polígonos.



Fonte: Ribeiro (2009, p.187, 6° ano)

A função de expansão discursiva do discurso permite a articulação de enunciados completos (construídos graças à função apofântica) numa unidade coerente. O tratamento dado ao discurso, nesse caso, possibilita que o aluno construa os seguintes enunciados: quadrilátero é um polígono de quatro lados, quatro ângulos internos e quatro vértices. Ao interagir com o tratamento figural, manifesta-se a reflexividade discursiva (transformação potencialmente recorrente de um enunciado completo) da palavra polígono como sendo uma figura não aberta e de lados retilíneos. Além da interação entre os tratamentos figurais e discursivos, são utilizadas dimensões diferentes para designar o objeto.

Em certas definições, utiliza-se no registro figural dimensão 2 e no registro discursivo, também de dimensão 2, a função referencial de designação dos objetos. No entanto, o tratamento discursivo permite que se evidencie a função de expansão discursiva para se referir às medidas dos lados que são (de dimensão 1), dos ângulos (de dimensão 2) e do número de vértices (de dimensão 0). Isso implica em não congruência dimensional e, segundo Duval (2004), em saltos na percepção da figura.

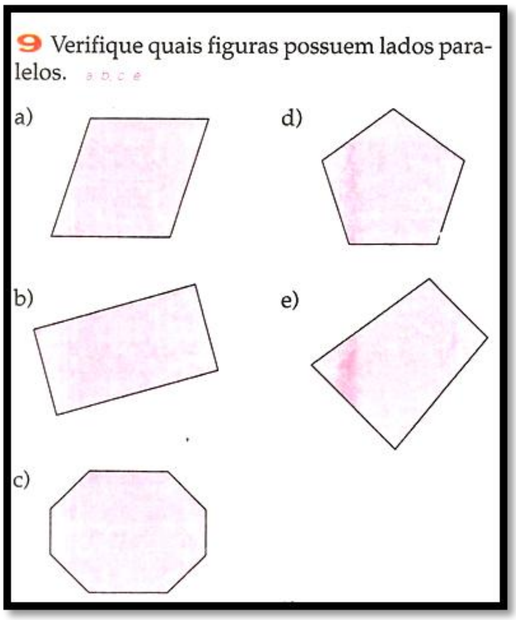
As definições apresentadas em livros didáticos precisam cumprir as quatro funções, no tratamento do discurso, e interagir com os tratamentos figurais para permitir, na resolução de exercícios e demonstrações de teoremas a utilização de operações discursivas (descrição, explicação, narração e raciocínio). Considera-se que a não congruência dimensional tem que ser explorada para aumentar a percepção das figuras. Uma boa complementação para a percepção de figuras poderá ser a apresentação de figuras para serem apalpadas sem serem visualizadas, pois contribui para a intuição espacial que, segundo Piaget e Inhelder (1993) citados por Scortegagna (2008, p. 39), vai,

> [...] causar efeitos nos sujeitos e esses efeitos estão situados, [...] no [...] domínio limite entre a percepção e a imagem [...] provocando reações que permitirão compreender como o sujeito traduz uma percepção tátil-cinestésica em uma percepção visual denominada percepção estereognóstica e como ele constrói uma imagem visual que expresse esses dados táteis.

Em se tratando das questões de natureza cognitiva, a interação apresentada, para apresentação das definições dos polígonos, não garante a percepção das figuras e seu reconhecimento por meio das palavras que as designam. Essa forma de apresentação tem que ser complementada, para não caracterizar uma visão cognitiva baseada no empirismo que significa mostrar a figura e falar sobre como sendo suficiente para o aluno apreendê-la operatoriamente. Além do aumento da percepção, a atividade de manipulação sugerida ainda propõe a operação cognitiva de conversão por compreender as variações das unidades de base e as modificações da figura.

Nos exercícios essa falta de interação também ocorre, como podemos observar no exemplo a seguir que apresenta apenas a figura. Segundo Duval (2004), a figura representa uma situação geométrica só na medida em que as significações de certas unidades figurais, e algumas de suas relações estão explicitamente definidas de entrada. A figura não diz nada por si só de suas características se não for acompanhada do discurso. Nada pode se afirmar no exercício apresentado na Figura 20, pois não são apresentadas relações definidas de entrada.

Figura 20 – Exemplo de exercício de propriedades de polígonos



Fonte: Giovanni et al. (2002, p. 138, 5ª série)

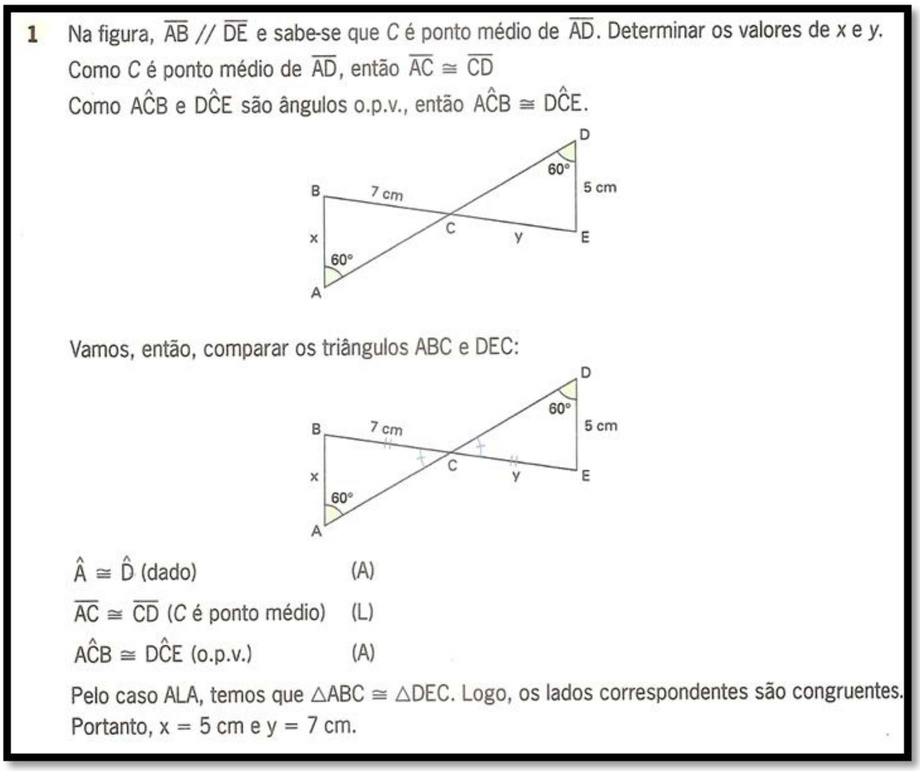
No exercício em questão, deveriam existir informações pertinentes para permitir a resolução do exercício. Em alguns casos essas informações poderiam ser relativas às medidas, em outro, aos ângulos. A medida dos ângulos vai exigir o conhecimento relacionado ao teorema de Tales. Outra forma de resolução do exercício seria encaminhar para uma decomposição mereológica a fim de aumentar o potencial heurístico e não necessitar de teoremas ou propriedades.

Essa forma de propor o exercício vai contra ao que afirma Duval sobre a não exigência de teoremas ou definições, como recurso de raciocínio, para a sua resolução. Por essa razão a decomposição mereológica, isto é, reconfiguração, atende a exigência de natureza cognitiva de não mudança de dimensão. Além disso, essa reconfiguração estaria contribuindo para a conduta de abdução ao propor variações sistemáticas dos fatores de visibilidade e, portanto, de uma apreensão operatória da figura.

A especificidade da organização dedutiva do discurso é outro fenômeno de não congruência. Segundo Duval (2004), “o discurso não só articula expressões que cumprem uma função referencial, como os nomes em posição de sujeito nas frases, mas também unidades que tem um valor lógico e epistêmico, como as proposições.” (DUVAL, 2004, p. 172, tradução nossa).

No exemplo da Figura 21, o discurso cumpre a função de expansão discursiva na demonstração da congruência dos triângulos ABC e DEC. A organização dedutiva do discurso se apoia em proposições e sobrepõe dois modos de funcionamento propostos por Duval (2004): um por substituição no interior de cada passo e um por reciclagem de uma proposição para encadear os diferentes passos.

Figura 21 – Exemplo de demonstração de congruência de triângulos



1 Na figura, $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ e sabe-se que *C* é ponto médio de $\overline{AD}$. Determinar os valores de *x* e *y*.

Como *C* é ponto médio de $\overline{AD}$, então $\overline{AC} \cong \overline{CD}$

Como $A\hat{C}B$ e $D\hat{C}E$ são ângulos o.p.v., então $A\hat{C}B \cong D\hat{C}E$.

Vamos, então, comparar os triângulos ABC e DEC:

$\hat{A} \cong \hat{D}$ (dado) (A)

$\overline{AC} \cong \overline{CD}$ (*C* é ponto médio) (L)

$A\hat{C}B \cong D\hat{C}E$ (o.p.v.) (A)

Pelo caso ALA, temos que $\triangle ABC \cong \triangle DEC$. Logo, os lados correspondentes são congruentes.

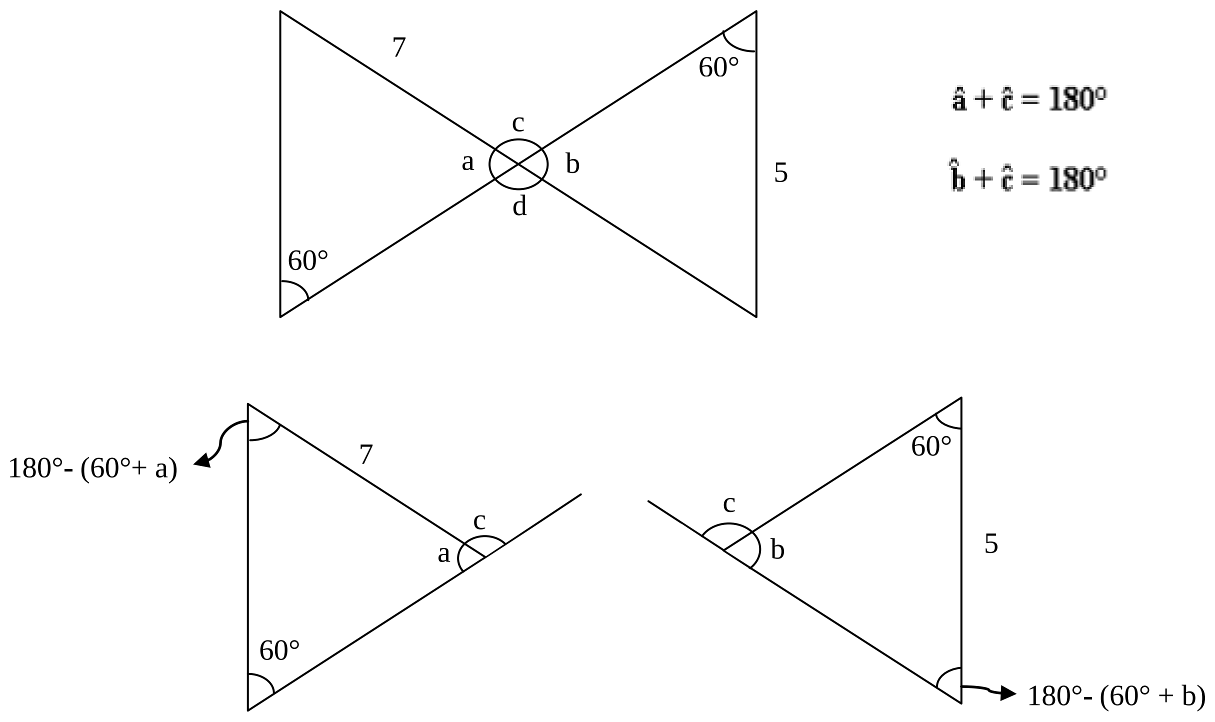
Portanto, x = 5 cm e y = 7 cm.

Fonte: Giovanni et al. (2002, p. 268, 7ª série)

O raciocínio dedutivo, segundo Duval (2004), deve ser efetuado em dois níveis de funcionamento: de maneira local, que se apoia na correspondência entre as unidades figurais de dimensão 0 ou 1 e as expressões referenciais, e de maneira global, que consiste no processo de resolução de problemas, que se apoia na correspondência entra a visão de uma sequência de sub-figuras e o encadeamento dos passos dedutivos.

No exemplo da Figura 21, a demonstração transita entre dimensões diferentes (0, 1 e 2) e articula o discurso apoiado nos teoremas da congruência de ângulos o.p.v (dimensão 2), na igualdade das medidas dos lados (dimensão 1) em função da posição do ponto C (dimensão 0) e volta para a dimensão 2 ao deduzir sobre a congruência dos dois triângulos pelo caso ALA. Esse encaminhamento é muito difícil para os alunos pelo fato deles terem que raciocinar sobre sub-figuras da figura dada.

Uma decomposição mereológica compreenderia um aumento do potencial heurístico para obtenção da solução.



Isso porque a reconfiguração permitiria permanecer na mesma dimensão ao se apoiar em teoremas relacionados aos ângulos que são de mesma dimensão que os triângulos.[16]

As visualizações são mais evidenciadas por causa dessa reconfiguração, isto é, mostram que:

$$\hat{a} + \hat{c} = 180°$$

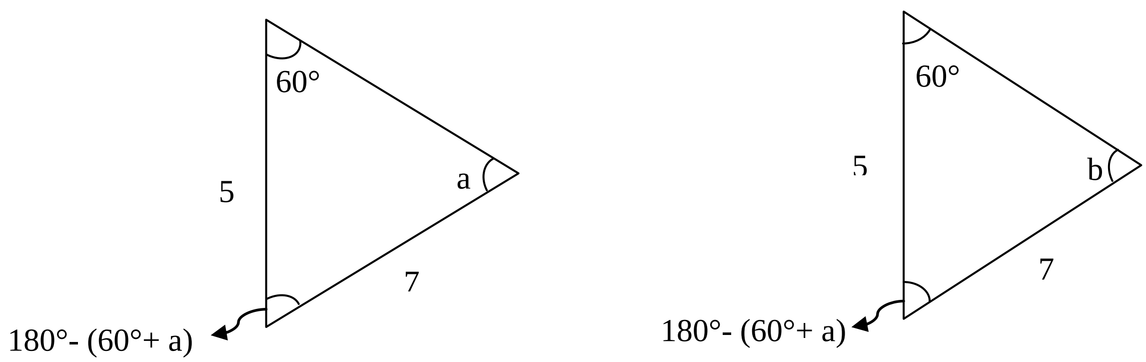
$$\hat{b} + \hat{c} = 180°$$

$$\hat{a} + \cancel{\hat{c}} = \hat{b} + \cancel{\hat{c}}$$

$$\hat{a} = \hat{b}$$

Da mesma forma permanecemos na dimensão 2 ao utilizar o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo.

A solução do problema é encontrada com apoio da percepção da figura e das medidas dos seus lados. Só agora mudando de dimensão.



Se o indivíduo toma consciência do funcionamento do registro figural e da organização dedutiva do discurso, e realiza a coordenação dos registros, estará efetuando a articulação global que constitui o essencial da atividade geométrica, para a qual a heurística e a demonstração formam uma só abordagem.

No tocante aos registros figurais e discursivos, no exemplo da Figura 22 é proposta a conversão do discurso em uma figura. Passar de um enunciado em língua natural a uma ou várias representações figurais é o tipo de conversão mais natural na atividade geométrica.

---

[16] Estamos considerando a definição de ângulo como sendo a região do plano compreendida entre duas semi-retas de mesma origem.

Figura 22 – Exemplo de exercício referente ao conteúdo de circunferência

4 No caderno, construa uma circunferência com 3,5 cm de raio e centro em um ponto **O**.
Depois, trace nessa circunferência:
a) o diâmetro $\overline{AB}$; b) a corda $\overline{BD}$; c) o raio $\overline{OE}$.

Fonte: Cavalcante et al. (2006, p. 41, 7ª série)

No entanto, esse exercício poderia explorar a atividade cognitiva de conversão fazendo variar as unidades de base. Nesse sentido, a interação entre discurso e figura deveria ser proposta. Enquanto conversão do discurso para a figura o raio deveria variar, as relações entre diâmetro e raio deveriam ser exploradas. A propriedade da mediatriz de uma corda poderia ser proposta, como uma verificação experimental seguida de uma demonstração dedutiva. Enquanto conversão da figura para o registro discursivo, as variações propostas poderiam compreender a variação do centro no plano e questionamentos relativos aos pontos da circunferência, obtenção do centro de uma circunferência, do diâmetro e do raio, poderia ser proposta a explicitação das propriedades do raio, da corda, do diâmetro e das relações entre eles por meio do registro discursivo. Outro tipo de variação das unidades de base poderia ser o que é apresentado no exemplo da Figura 23.

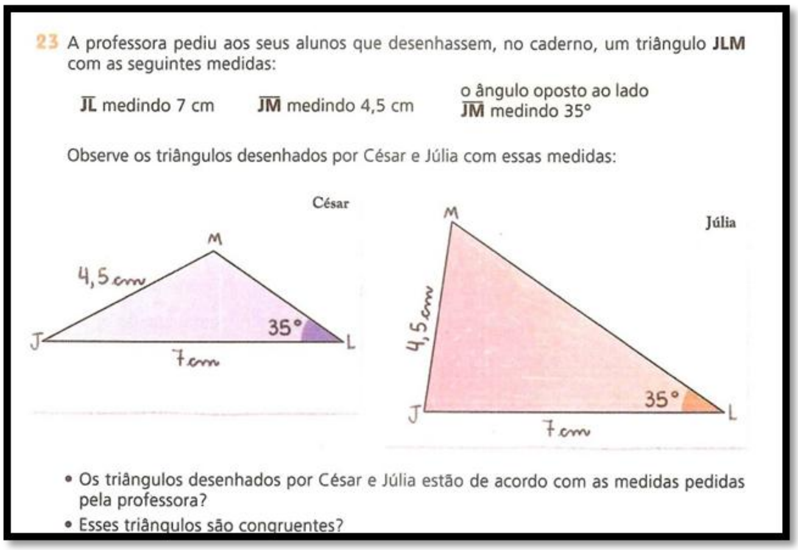
Figura 23 – Exemplo de exercício referente ao conteúdo circunferência com questionamentos.

66. Duas circunferências, uma com raio de 5 cm e outra com raio de 3 cm, têm o mesmo centro C. O ponto A está na circunferência maior.
a) Represente essa situação com uma figura.
b) Trace o raio $\overline{CA}$, que corta a circunferência menor no ponto B. Faça a figura correspondente.
c) Determine a medida do segmento $\overline{AB}$.

Fonte: Centurión et al.(2003, p. 83, 5ª série)

A conversão do discurso para figura, segundo Duval (2004), exige colocar em prática situações e restrições extra-matemáticas relacionadas à comunicação de instruções elaboradas a partir de uma figura dada, ou de uma figura que se acaba de construir para que os destinatários possam reconstruí-las. O exemplo da Figura 24 ilustra perfeitamente o que Duval (2004) propõe.

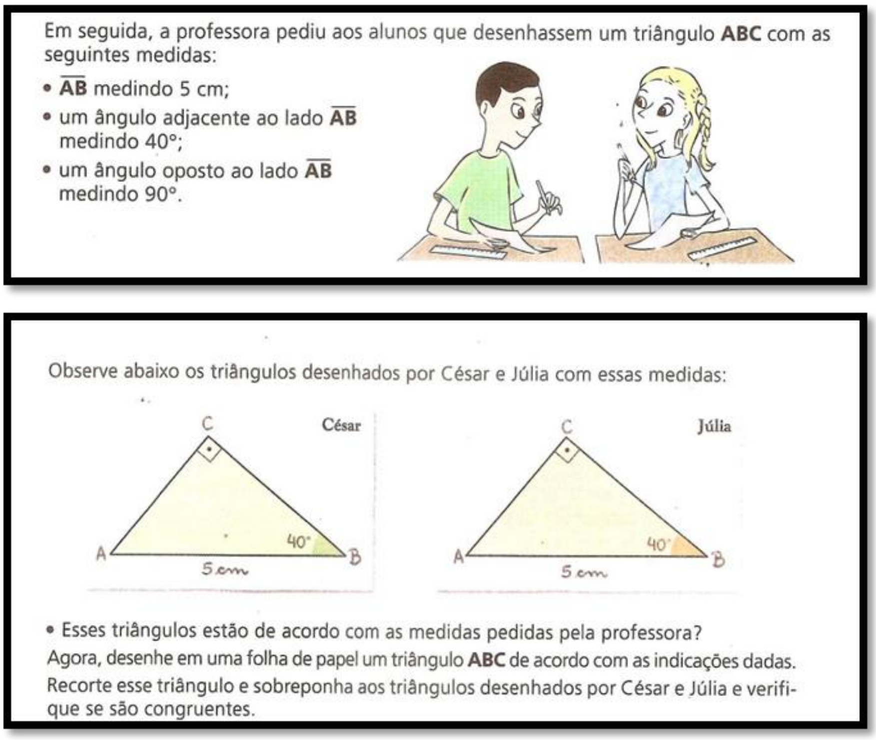
Figura 24 – Exemplo de exercício de congruência de triângulos.



Fonte: Cavalcante et al. (2006, p.182, 7ª série)

O discurso apresentado é o mesmo, no entanto a solução apresentada pelos alunos é diferente, o que significa que o destinatário não pode reconstruir a figura devido à falta de comunicação por meio de uma instrução elaborada. Já no exemplo da Figura 25, isso não ocorre, pois o discurso é apresentado de forma que a figura pode ser reconstruída.

Figura 25 – Exemplo de exercício de congruência de triângulos.



Fonte: Cavalcante et al. (2006, p.182-183, 7ª série)

Essas questões articulam registro discursivo e registro figural e centram a atenção do aluno nas unidades constituintes de base: medidas dos lados (dimensão 1), medidas dos ângulos (dimensão 2). A operação cognitiva de conversão é proposta na medida em que existe variação das unidades de base por meio da variação do discurso que provocam variações no registro figural. Essa conversão, por sua vez, articula os diferentes registros, pertencentes a sistemas semióticos distintos (figural e discursivo), ao possibilitar a congruência semântica: a cada unidade de base do registro discursivo existe uma só unidade de base no registro figural, na mesma ordem e com congruência semântica terminal devido aos formatos do discurso:

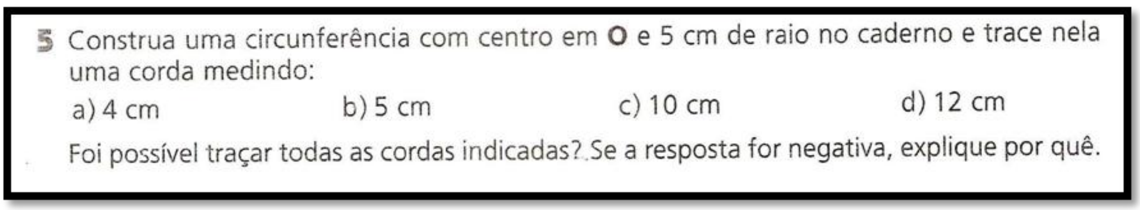
$\overline{AB}$ A ———————— B

Ângulos adjacente e oposto ao lado AB

As questões também poderiam explorar as modificações figurais visuais, propondo a resposta de Júlia com o ângulo $\hat{A}$ sendo o ângulo adjacente de 40° e a de César com o ângulo $\hat{B}$, seguidas de explicações ou argumentações baseadas em propriedades, definições ou teoremas que permitem ao aluno se expressar de forma espontânea.

Na questão a seguir, além da conversão do discurso para figura, propõe-se que seja realizada a conversão da figura para o discurso que permite uma explicação, argumentação ou demonstração e que exige, portanto, diferentes tipos de expansão discursiva e diferentes formas de funcionamento cognitivo do raciocínio. Entram em jogo, também, as funções discursivas apofânticas (ao permitir a elaboração de enunciados completos) e referencial (de designação dos objetos), a partir de seus elementos de base (raio e centro de dimensões 0 e 1).

Figura 26 – Exemplo de exercício referente ao conteúdo de circunferência


5 Construa uma circunferência com centro em O e 5 cm de raio no caderno e trace nela uma corda medindo:

a) 4 cm b) 5 cm c) 10 cm d) 12 cm

Foi possível traçar todas as cordas indicadas? Se a resposta for negativa, explique por quê.

Fonte: Cavalcante et al.(2006, p.41, 7ª série)

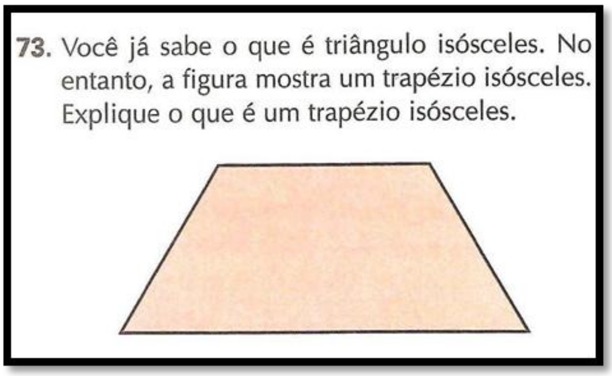
Além de exigir as operações cognitivas de expansão discursiva e as diferentes formas de funcionamento cognitivo do raciocínio, esse tipo de conversão, ao ser colocado em prática nas atividades didáticas, serve para

> [...] observar a linguagem espontaneamente empregada pelos alunos na apreensão das figuras, fazê-los compreender o jogo de restrições inerente a toda figura geométrica, ou fazê-los descobrir a necessidade de recorrer a uma linguagem que se baseia em definições e que permite formulação de interpretações unívoca. (DUVAL, 2004, p.182, tradução nossa).

No momento da resolução do exercício, os tratamentos figurais e discursivos interagem de maneira simultânea e a articulação entre esses diferentes registros, pertencentes a sistemas semióticos distintos, ocorre de forma congruente. A operação cognitiva de conversão entra em jogo quando se propõe a variação dos elementos de base no registro discursivo, que provoca variações no registro figural. A proposta da construção de cordas com medidas diferentes faz entrar em cena a operação cognitiva de argumentação pertencente à função de raciocínio do discurso, o que torna o exercício com alto potencial heurístico, de acordo com Duval (2004).

No entanto, no exemplo da Figura 27, interagem simultaneamente discurso e figural. Porém, faltam informações para permitir ao aluno apresentar as propriedades de um trapézio que permitem designá-lo como trapézio. Por exemplo: para garantir que os lados são paralelos, seria necessário indicar as medidas dos ângulos e dos lados não paralelos, permitindo ao mesmo tempo a identificação dos elementos de base de dimensões diferentes 1 e 2 (lado e ângulo). Se essas informações estivessem presentes, o registro discurso e o registro figural estariam interagindo simultaneamente antes da resolução do exercício e a conversão do discurso para o registro figural seria congruente. Ou ainda, esta figura poderia ser colocada em papel quadriculado, o qual garantiria a medida dos lados e do ângulo de 90°.

Figura 27 – Exemplo de exercício de trapézio e triângulo isósceles



Fonte: Centurión et al. (2003, p.85, 5ª série)

Faltou ainda a modificação visual que seria possível apresentando o trapézio em diferentes posições. As funções referencial, apofântica e de raciocínio fazem entrar em cena as operações cognitivas de narração, descrição, explicação e de raciocínio, que permitiriam argumentação de forma retórica, com o emprego de uma linguagem espontânea pelo aluno e, ainda, a identificação das condições necessárias para a designação de um quadrilátero denominado trapézio isósceles, que o levaria á sua definição.

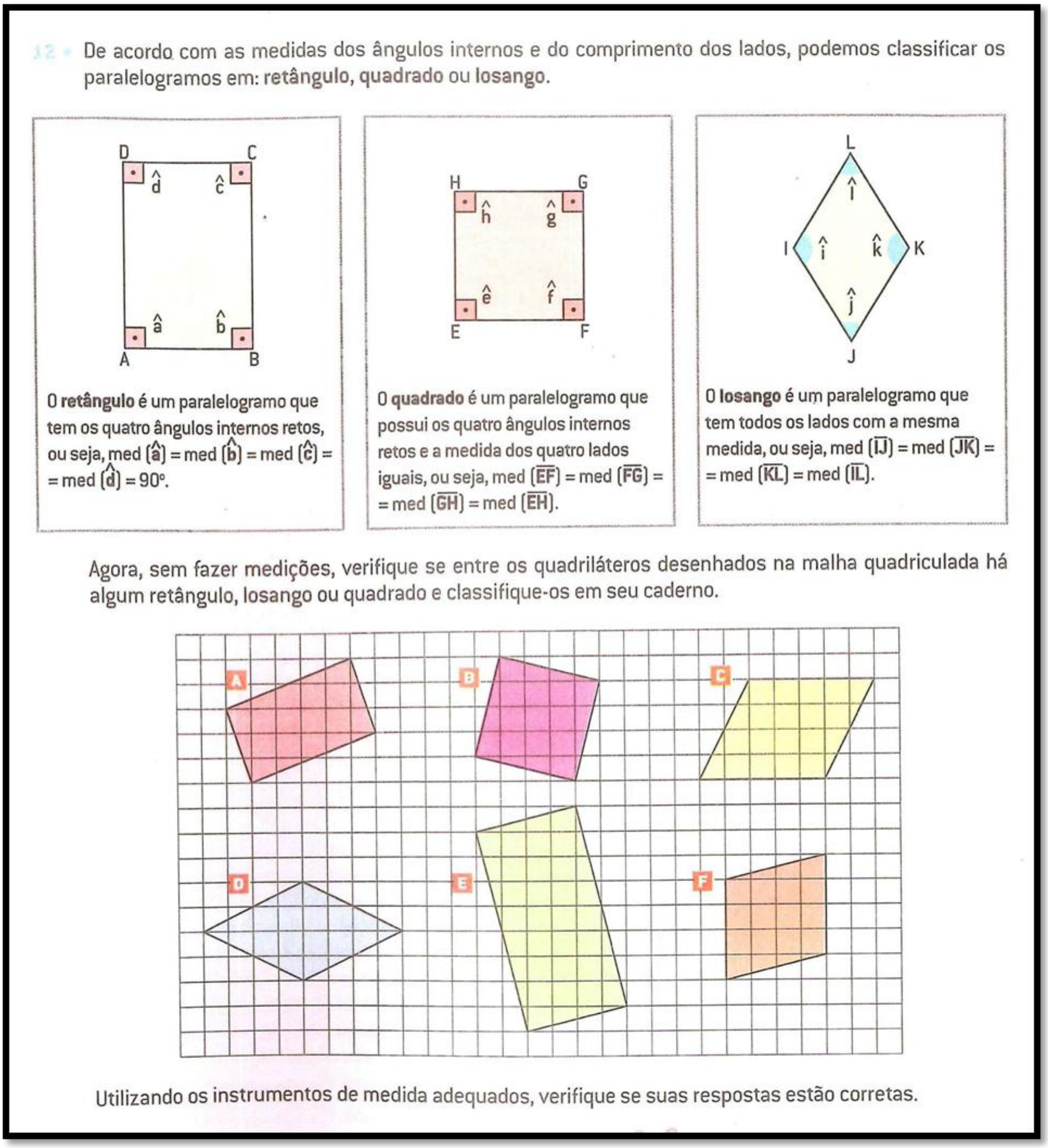
A forma como o exercício está proposto não permite sua resolução pelo aluno, em função de fatores de visibilidade, pois a referência ao triângulo isósceles é inapropriada (apesar do apelo aos lados de mesma medida).

Além dos fatores de visibilidade, podemos observar que nos exercícios apresentadas a conversão não é explorada para permitir o raciocínio do aluno e formulação de hipóteses e interpretações. Na realidade, essa conversão é mais tradução do que conversão propriamente dita. Para caracterizar atividade cognitiva de conversão, é necessário variar unidades de base no discurso e solicitar ao aluno a observação da variação provocada no registro figural.

Devemos recordar o que nos aponta Duval (2004), quando afirma que a conversão não é assimilável a uma descrição e sim a uma explicação, argumentação ou demonstração. Isso só entra em cena a partir das variações das unidades de base e da solicitação de narração das modificações observadas pelos alunos, que exigirão propriedades, teoremas ou mesmo hipótese.

No exercício da Figura 28, ocorre conversão da figura para o discurso e ainda são propostas variações, quando apresentados os quadriláteros na malha quadriculada.

Figura 28 – Exemplo de exercício de quadriláteros (retângulo, quadrado, losango)



12 • De acordo com as medidas dos ângulos internos e do comprimento dos lados, podemos classificar os paralelogramos em: **retângulo, quadrado** ou **losango**.

O **retângulo** é um paralelogramo que tem os quatro ângulos internos retos, ou seja, med $(\hat{a})$ = med $(\hat{b})$ = med $(\hat{c})$ = = med $(\hat{d})$ = 90°.

O **quadrado** é um paralelogramo que possui os quatro ângulos internos retos e a medida dos quatro lados iguais, ou seja, med $(\overline{EF})$ = med $(\overline{FG})$ = = med $(\overline{GH})$ = med $(\overline{EH})$.

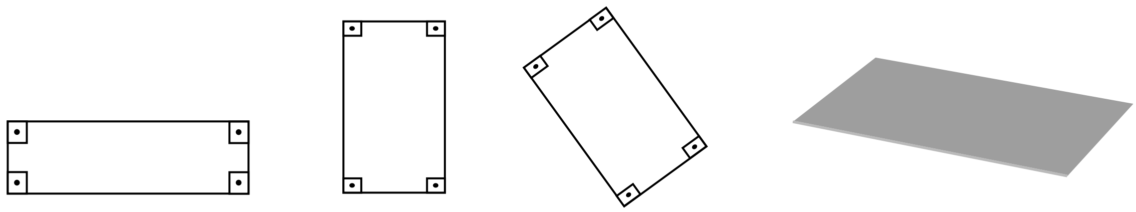
O **losango** é um paralelogramo que tem todos os lados com a mesma medida, ou seja, med $(\overline{IJ})$ = med $(\overline{JK})$ = = med $(\overline{KL})$ = med $(\overline{IL})$.

Agora, sem fazer medições, verifique se entre os quadriláteros desenhados na malha quadriculada há algum retângulo, losango ou quadrado e classifique-os em seu caderno.

Utilizando os instrumentos de medida adequados, verifique se suas respostas estão corretas.

Fonte: Ribeiro (2009, p. 217, 6° ano)

No entanto, podemos propor mais algumas, variações visuais e projetivas:

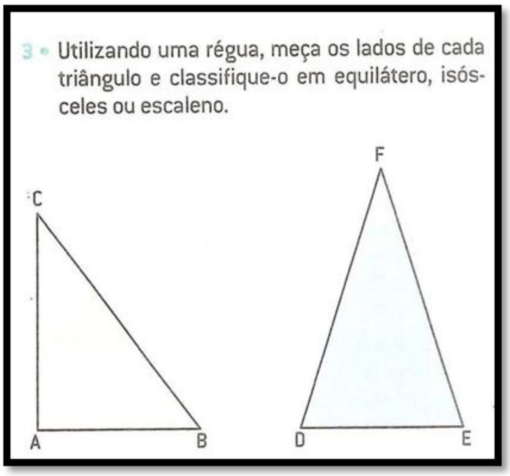


Essas variações visuais e projetivas vão provocar uma expansão do discurso, pois farão entrar em cena a variação da medida dos lados e do apoio do retângulo sobre uma linha de referência, sobre um plano (ora vertical e ora horizontal) e, como consequência, o funcionamento cognitivo. O mesmo pode ser feito para o quadrado e losango.

Como a diferença entre os quadriláteros centra-se nas unidades de base ângulos e medida dos lados, outras questões podem ser propostas, a exemplo de: Todo quadrado é retângulo? Todo retângulo é quadrado? Todo quadrado é losango? Todo losango é quadrado? Essa complementação explora a definição por meio do exercício proposto (perguntas feitas) e leva o aluno a utilizar as definições apresentadas e organizar o seu discurso em função dos fatores de visibilidade.

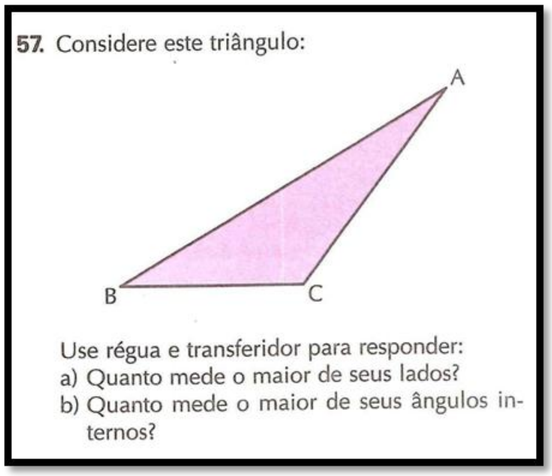
As atividades propostas nos livros didáticos não dispõem de uma análise cognitiva, muitas vezes evidenciam apenas os conteúdos de medida, deixando de lado a conversão figura → discurso e discurso → figura, como nos exemplos das figuras 29, 30 e 31.

Figura 29 – Exemplo de exercício de classificação triângulos



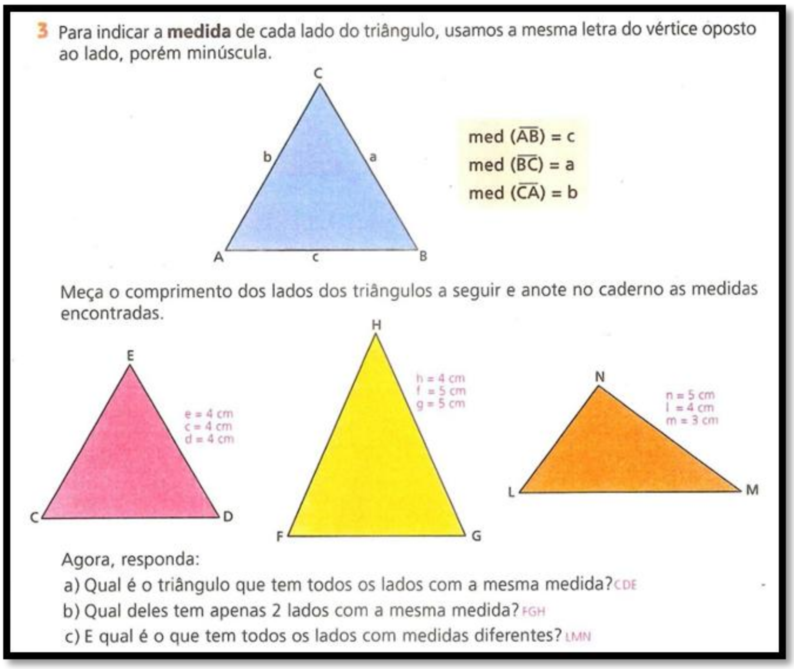
Fonte: Ribeiro (2009, p. 212, 6° ano)

Figura 30 – Exemplo de exercício referente às medidas do triângulo



Fonte: Centurión (2003, p.82, 5ª série)

Figura 31 – Exemplo de exercício de medida dos lados dos triângulos



Fonte: Cavalcante et al. (2006, p.195, 5ª série)

Apesar do tratamento figural e discursivo ocorrer de forma interativa e simultânea, falta a esses exercícios solicitar que o aluno argumente sobre sua resposta, o que permitiria observar a linguagem espontânea empregada por ele na apreensão das figuras, e evidenciaria as restrições inerentes das figuras geométricas e a utilização de definições que fundamentam suas interpretações explicitadas no discurso.

Outra questão a ser destacada é a utilização de instrumentos de medida para deduções sobre as figuras. Esse apelo visual também é inapropriado. Outras informações deveriam estar articulando discurso e registro figural.

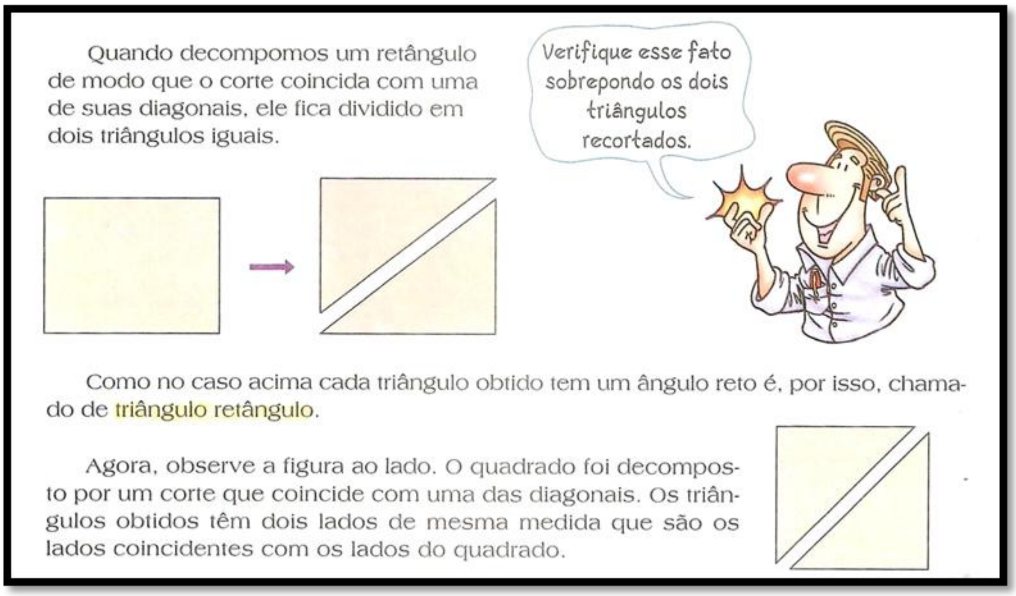
Os exercícios propostos poderiam também explorar as modificações visuais (mudando a figura de posição em relação a um eixo de referência, ora assentando a figura sobre os lados ou sobre os vértices) e, como consequência, a identificação das unidades de base dessas figuras (ângulos, medida dos lados e vértices e lados). Essas modificações fariam entrar em cena a operação cognitiva de conversão e tornariam possível a apreensão operatória da figura.

Cabe lembrar que essas modificações de uma figura podem ser oriundas tanto das relações das partes com o todo, como das relações óticas (visuais ou posicionais), efetuadas física ou mentalmente e não dependem de conhecimento matemático. (DUVAL, 2004).

A modificação da figura, segundo Duval (2004), pode ser de natureza diferente e ser feita separando as unidades figurais elementares de dimensão 2 em outras unidades figurais também de dimensão 2, recombinando, para modificar seu contorno global, ampliando-a ou esticando-a, deslocado-a por translação ou por rotação, assim promovendo operações específicas de modo a constituir a produtividade heurística das figuras.

As propriedades e relações entre os elementos de base dos quadriláteros, apresentados no exemplo da Figura 32 utilizam a modificação mereológica das figuras para explorar o conteúdo de triângulos retângulos. Nesse exemplo, ocorre a reconfiguração da figura, o que significa reorganizá-la em sub-figuras, modificando o seu contorno global. Essa operação intervém na produtividade heurística e na apreensão operatória das figuras geométricas, pois explicita as relações entre parte e todo.

Figura 32 – Exemplo de demonstração de decomposição de retângulo



Fonte: Bigode (2002, p. 177, 5ª série)

Na apresentação dessa propriedade, há interação entre o tratamento figural e o discursivo de forma simultânea e, igualmente, há articulação pela presença da congruência semântica, o que permite ao aluno identificar unidades de base constituintes de dimensão 0 e 1 (ao se referir à diagonal, que é o segmento que une dois vértices não consecutivos), e de dimensão 2 (ao se referir ao quadrilátero, ângulo reto e triângulos).

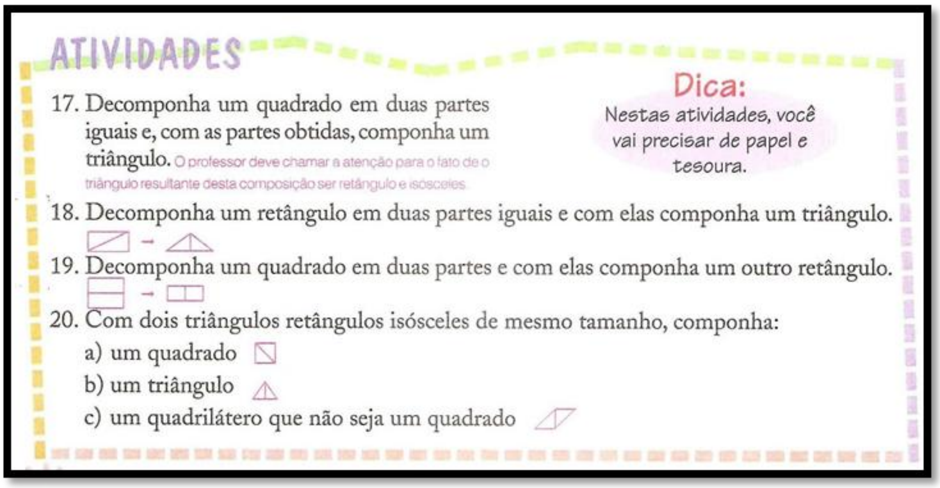
No entanto, essa propriedade deveria ser precedida de uma dedução e não se apoiar somente na visualização. Essa dedução é fácil, pois poderia ser proposta na forma de exercício, como por exemplo:

O que podemos afirmar em relação à medida dos lados AD e BC nos triângulos ADC e ABC? Justifique sua resposta. O que podemos afirmar em relação à medida do lado AC nos triângulos ADC e ABC? Justifique sua resposta. O que podemos afirmar em relação aos ângulos B e D nos triângulos ADC e ABC? Justifique sua resposta. Podemos afirmar que os triângulos ADC e ABC? Justifique sua resposta.

A proposta desse exercício coloca em cena a necessidade da utilização de definições (o que é um retângulo) e dos casos de congruência de triângulos que envolvem a troca de dimensões (1 e 2 para o caso de lados e ângulos) e compõe um discurso sistematizado obtido em função dos fatores de visibilidade proporcionados pela modificação mereológica da figura.

No exemplo da Figura 33, também são necessárias modificações mereológicas das figuras, enfocadas por Duval (2004), que consistem em separar em partes, ou seja, subfiguras da figura dada, fracionando e reagrupando, e propor uma relação parte-todo. A necessidade de fracionar a figura pode facilitar a operação de reconfiguração. Essas modificações promovem produtividade heurística das figuras, afirma Duval (2004). O exercício não propõe a interação entre tratamentos figurais e discursivos, anterior à resolução; no entanto, é proposta a conversão do discurso para a figura, utilizando as unidades de base de dimensão 2. Essa conversão é assegurada e é congruente, pois envolve variação de unidades de base do discurso que promove variações nas unidades de base do registro figural. Esse exercício tem alto potencial heurístico, pois a resolução não exige troca de dimensão, recorrência a definições ou teoremas e pode ser obtida por meio da organização da variação sistemática de fatores de visibilidade.

Figura 33 – Exemplo de exercício de decomposição de retângulo e de quadrado


ATIVIDADES

17. Decomponha um quadrado em duas partes iguais e, com as partes obtidas, componha um triângulo. O professor deve chamar a atenção para o fato de o triângulo resultante desta composição ser retângulo e isósceles.

Dica: Nestas atividades, você vai precisar de papel e tesoura.

18. Decomponha um retângulo em duas partes iguais e com elas componha um triângulo.

19. Decomponha um quadrado em duas partes e com elas componha um outro retângulo.

20. Com dois triângulos retângulos isósceles de mesmo tamanho, componha:

a) um quadrado

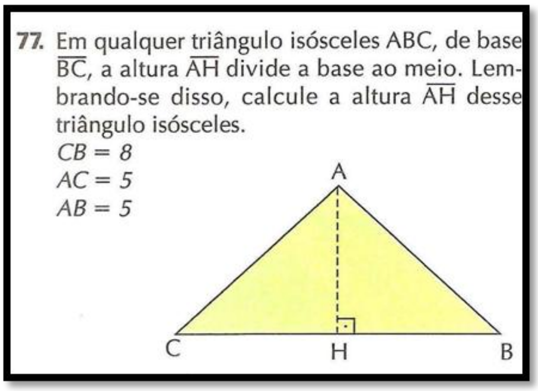
b) um triângulo

c) um quadrilátero que não seja um quadrado

Fonte: Bigode (2002, p. 178, 5ª série)

No exemplo da Figura 34, para resolução dos exercícios são necessárias modificações mereológicas das figuras, para calcular o valor da altura do triângulo.

Figura 34 – Exemplo de exercício de triângulo isósceles


77. Em qualquer triângulo isósceles ABC, de base $\overline{BC}$, a altura $\overline{AH}$ divide a base ao meio. Lembrando-se disso, calcule a altura $\overline{AH}$ desse triângulo isósceles.

$CB = 8$

$AC = 5$

$AB = 5$

Fonte: Centrurión et al. (2003, p. 103, 8ª série)

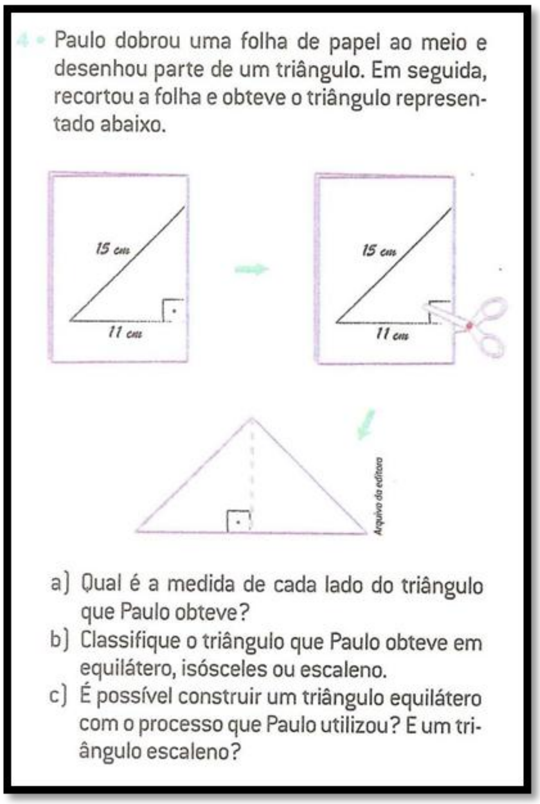
O aluno para resolver esse exercício pode decompor o triângulo ABC em dois triângulos AHC e AHB. Ao proceder dessa forma, ele pode optar por dois caminhos: indicar as medidas dos lados nos dois triângulos e marcar o ângulo reto concluindo sobre a congruência pelo caso LAL. Ou então, aplicar o teorema de Pitágoras para encontrar a medida da altura.

É um exercício que propõe interação entre discurso e registro figural de maneira simultânea e a articulação entre esses registros promove uma conversão congruente. É por meio dessa modificação mereológica que a apreensão operatória das figuras acontece e a resolução do exercício vai exigir o conhecimento dos casos de congruência ou do Teorema de Pitágoras. O exercício explora unidades de base de dimensão 1 e 2. Pela análise, conclui-se pelo alto poder heurístico e pela probabilidade de sucesso na resolução.

No exemplo da Figura 35, são exploradas modificações mereológicas para a proposta do exercício e questionamentos, diante dos quais o aluno é induzido a responder sobre as propriedades dos triângulos equilátero, isósceles e escaleno. O questionamento proposto pelo exercício caracteriza uma conversão da figura para o discurso com variações que aumentam o potencial heurístico da figura e favorece a apreensão operatória da figura.

Além desses fatores, o exercício contempla as unidades de base de dimensão 2 (retângulos e triângulos) e 1 (medidas dos lados), a interação entre os tratamento figurais e discursivos não implica em troca de dimensão para a resolução, pois a transformação mereológica proposta permite a conclusão em virtude dos fatores de visibilidade e não necessita da teoremas, mas somente da definição de triângulo equilátero, escaleno e isósceles, para identificação do triângulo construído por Paulo.

Figura 35 – Exemplo de exercício de classificação de triângulos


4 • Paulo dobrou uma folha de papel ao meio e desenhou parte de um triângulo. Em seguida, recortou a folha e obteve o triângulo representado abaixo.

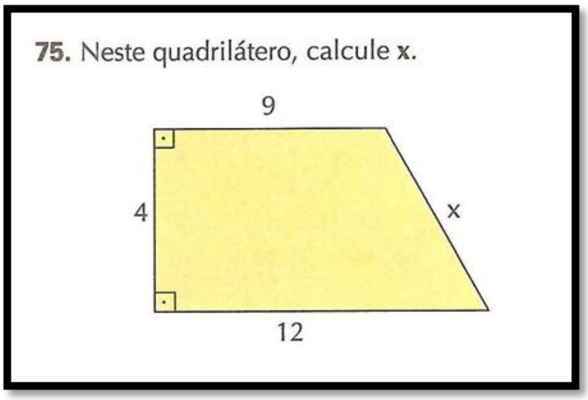
a) Qual é a medida de cada lado do triângulo que Paulo obteve?
b) Classifique o triângulo que Paulo obteve em equilátero, isósceles ou escaleno.
c) É possível construir um triângulo equilátero com o processo que Paulo utilizou? E um triângulo escaleno?

Fonte: Ribeiro (2009, p. 212, 6° ano)

No exemplo da Figura 36, o problema a ser resolvido é determinar o valor de x, ou seja, a medida do lado do quadrilátero. Para isso, é necessário fracionar a figura em sub-figuras (um triângulo e um retângulo), ou seja, realizar uma modificação mereológica e assim calcular o valor do x. Esse tipo de operação cognitiva exigida do aluno poderia intervir na produtividade heurística das figuras.

No entanto, essa modificação não é proposta e exigirá que o aluno trace uma paralela ao lado que mede 4, concluir que esse lado também mede 4, separar o triângulo e o retângulo obtidos e deduzir que a medida do lado menor do triângulo mede 3, e, por último, aplicar o teorema de Pitágoras para encontrar o valor de x. É um exercício em que ocorre a interação entre o tratamento figural e o tratamento discursivo, no entanto, o discurso tem apenas a função referencial para designar a figura. As unidades de base são de dimensão 1 e 2.

Figura 36 – Exemplo de exercício de quadrilátero



Fonte: Centrurión et al.(2003, p. 103, 8ª série)

Diante deste exemplo, devemos retomar a afirmação de Duval (2003) relativa à especificidade da atividade cognitiva para aprendizagem da Geometria, que não pode estar subordinada a um jogo de pressões internas de um objeto. Isso pelo fato de que nem sempre é fácil “ver” numa figura as relações existentes ou os que forneceriam a solução desejada, pois as figuras podem impor resistências à aprendizagem, que ocorrem em função de fatores próprios da representação figural. Como esses fatores podem aumentar ou diminuir o potencial heurístico de uma figura, eles podem ser previstos e considerados na organização do ensino e, como consequência, nos exercícios propostos.

A Geometria exige um modo de processamento cognitivo autônomo, com características específicas em relação a qualquer outra forma de funcionamento do raciocínio. Requer a utilização de registros discursivos (língua natural ou linguagem formal da matemática) e não discursivos (figuras) para apresentar definições, teoremas, hipóteses. Propor a separação das sub-figuras da figura dada a partir da introdução de um elemento a mais (o segmento paralelo) torna possível que as unidades figurais que formam as partes complementares a serem comparadas não se fundem na unidade figural de base.

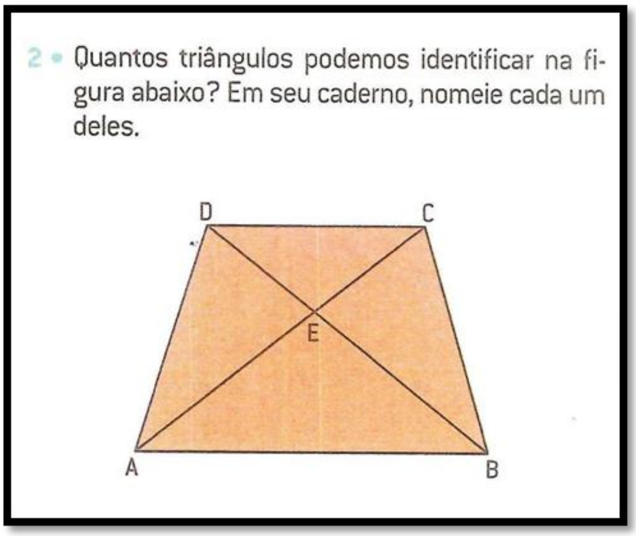
É preciso aplicar tratamentos próprios ao registro das figuras para possibilitar uma apreensão operatória. Essa forma de propor o exercício fazendo variar os fatores de visibilidade permite que o aluno faça as análises das figuras a partir das operações de modificações que possibilitam que fatores específicos tornem-se mais ou menos visíveis, tornando o registro figural mais rico, e diminui a complexidade do registro, em se tratando do ponto de vista dos procedimentos heurísticos. Isso é essencial para as condições cognitivas de aprendizagem da geometria (DUVAL, 2004). Devemos apontar o que nos alerta o autor:

> Os tratamentos figurais que dependem do nível de apreensão operatória das figuras podem ser favorecidos ou inibidos por fatores próprios ao registro figural e a cada uma das operações de modificação. Uma aprendizagem especifica desses tratamentos figurais é, pois, necessária e não pode efetuar-se por meio de tarefas de análise de figuras que se efetuem desde o ponto de vista de sua construtibilidade com ajuda de ferramentas de desenho ou lógica. (DUVAL, 2004, p.183, tradução nossa)

Para Duval (2004), quando há congruência entre as unidades figurais diretamente visíveis e aquelas que “iniciaram” os tratamentos que permitem a resolução, o problema fica mais fácil de ser resolvido de um ponto de vista cognitivo. No exemplo da Figura 37, as unidades figurais de dimensão 2 pertinentes são imediatamente visíveis na figura e, no enunciado e as representações dos dois registros, são congruentes.

O exercício apresenta interação entre tratamentos figurais e discursivos, unidades de base de dimensão 2. Para identificação das figuras geométricas (triângulos) solicitadas pelos exercícios são necessárias modificações das figuras, visto que são representadas em diferentes posições e diferentes tamanhos. Essas modificações necessárias para a resolução do exercício propiciam um aumento no potencial heurístico da figura. No entanto, Duval (2004) ressalta que as unidades figurais de dimensão 2, quando estão separadas, não causam dificuldade para seu reconhecimento, mas quando estão integradas seu reconhecimento é mais difícil.

Figura 37 – Exemplo de exercício de identificação de triângulos



Fonte: Ribeiro (2009, p. 212, 6° ano)

Por essa razão, o exercício poderia ser acompanhado por uma atividade de dobradura que aumentaria o potencial heurístico e a apreensão operatória.

As seguintes instruções poderiam ser propostas: a) Recorte o quadrilátero. b) Desenhe outro igual e recorte. c) Dobre o primeiro quadrilátero na diagonal BD e recorte. Que figuras você obteve? d) Dobre os triângulos BCD e ABD obtidos nos segmentos CE e AE, respectivamente. e) Dobre o segundo quadrilátero na diagonal AC. Que figuras você obteve? f) Dobre os triângulos ABC e ABC obtidos nos segmentos BE e DE, respectivamente.

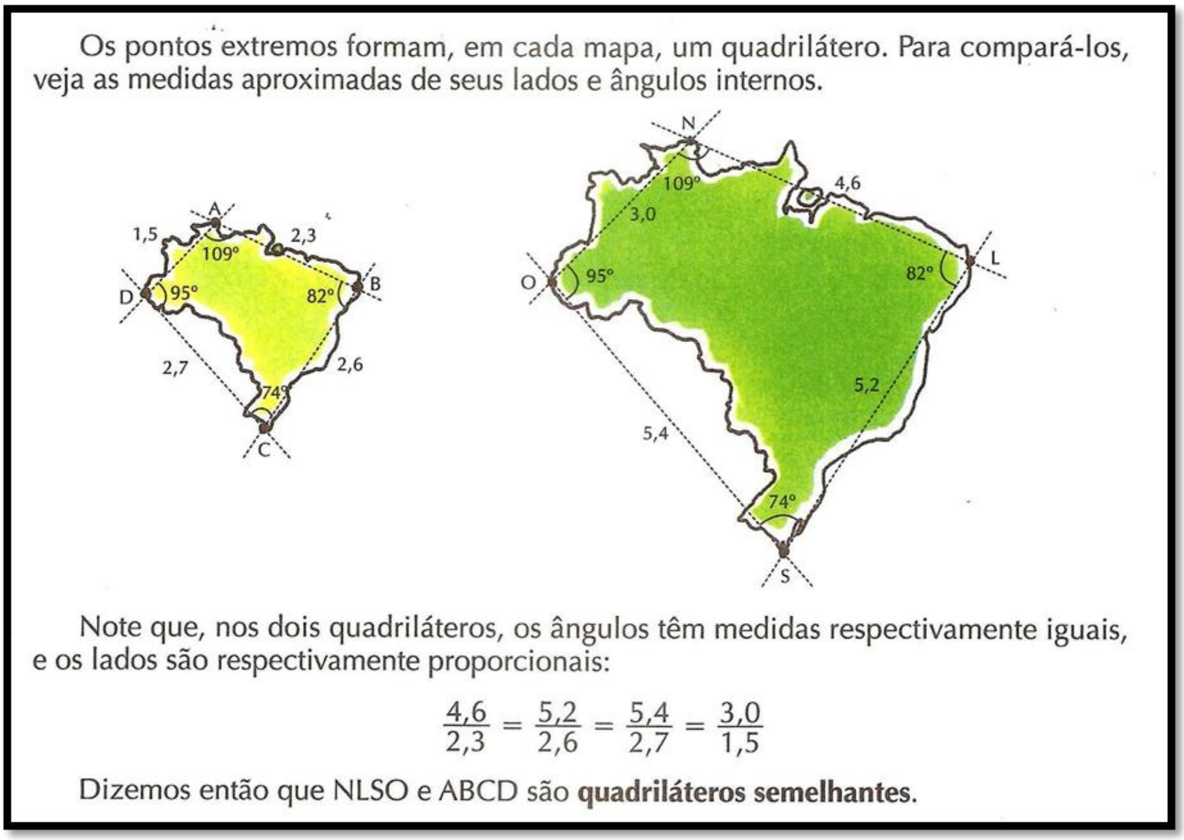
Além desses fatores, podemos constatar que, para resolução desse exercício, não é necessária utilização de definições ou teoremas, troca de dimensão, e ocorre uma organização em função de uma variação sistemática de fatores de visibilidade.

Outra operação que contribui para a produtividade heurística do registro figural é a forma de transformação da figura, que consiste em colocar a figura em perspectiva. No entanto, essa operação está presente poucas vezes nas propostas para o ensino do conteúdo de Geometria dos livros didáticos.

No exemplo da Figura 38, temos uma atividade na qual são explorados conteúdos de semelhanças. Aqui os tratamentos figurais e discursivos interagem, as unidades de base constituintes são de dimensão 0, 1 e 2. Ocorre uma modificação ótica da figura, pois o quadrilátero, formado pelos pontos extremos do mapa, se transforma em outro, e será denominada sua imagem pela transformação geométrica de homotetia. Essa transformação contribui para uma apreensão operatória da figura e da transformação geométrica de homotetia.

A utilização da proporcionalidade é necessária para provar a semelhança dos quadriláteros, a troca de dimensão ocorre, pois será necessário estabelecer a razão entre as medidas dos lados (dimensão 1) dos quadriláteros (dimensão 2) e ao citar os vértices do quadrilátero (dimensão 0). Essa conversão é congruente, significando haver articulação entre registro discursivo e registro figural. Existe uma organização em função de uma variação sistemática de fatores de visibilidade em função da troca de dimensão.

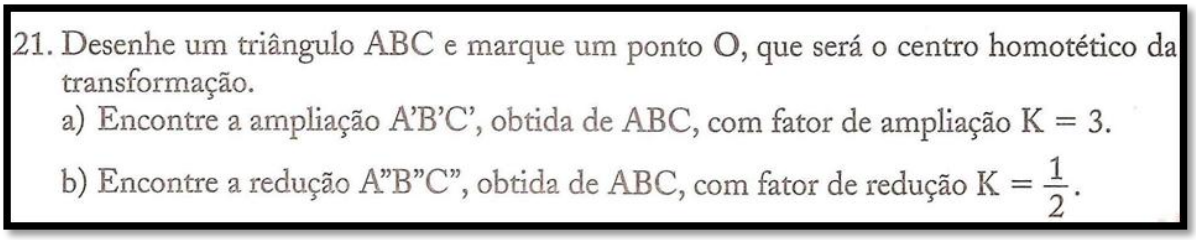
Figura 38 – Exemplo de demonstração de homotetia



Fonte: Centurión et al. (2003, p. 73, 8ª série)

No exemplo da Figura 39, temos uma homotetia, designada por Duval (2004) como uma modificação figural, que coloca a figura em perspectiva. Permitir uma percepção em profundidade de uma representação plana, segundo o autor, constitui a produtividade heurística do registro figural, com variações em relação à ampliação e redução da figural e utiliza unidades de base de dimensão 0 e 2. A resolução do exercício necessita do conhecimento da distância a ser guardada entre os vértices das duas figuras em relação ao ponto de homotetia, indicando uma troca de dimensão no momento da ampliação e redução do triângulo.

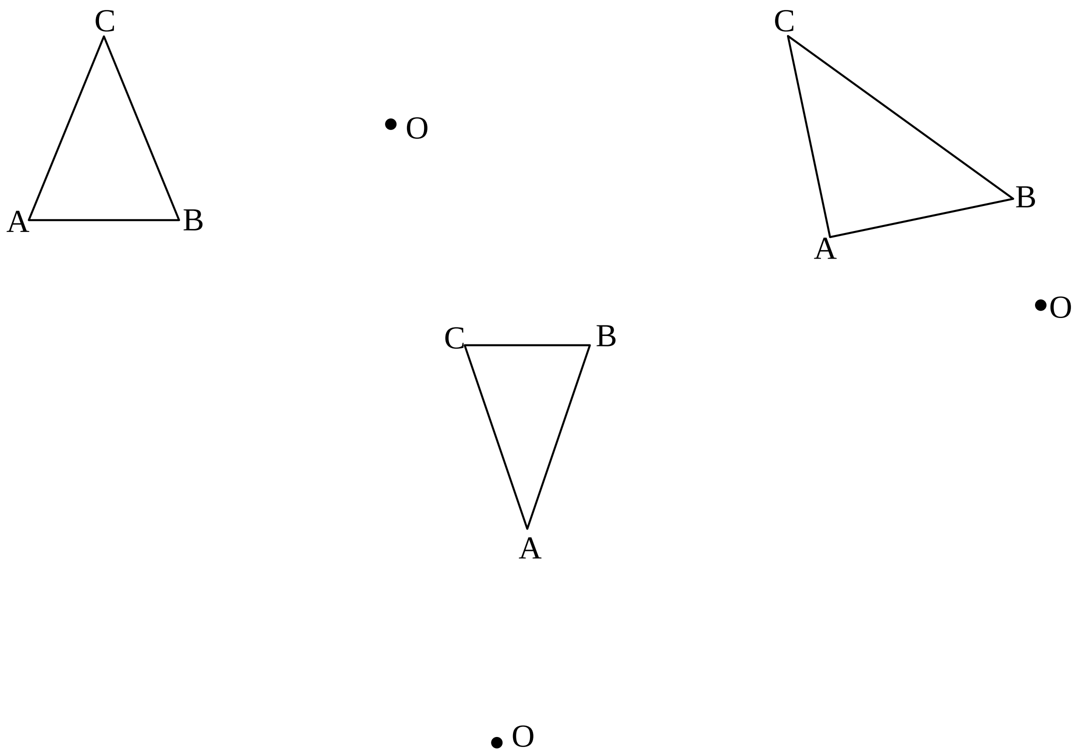
Figura 39 – Exemplo de exercício de homotetia



21. Desenhe um triângulo ABC e marque um ponto O, que será o centro homotético da transformação.
    a) Encontre a ampliação A'B'C', obtida de ABC, com fator de ampliação $K = 3$.
    b) Encontre a redução A"B"C", obtida de ABC, com fator de redução $K = \frac{1}{2}$.

Fonte: Bigode (2002, p.197, 8ª série)

A falta de interação entre discurso e registro figural poderia ser contornada pela apresentação do triângulo ABC e do ponto de homotetia. A operação de conversão poderia estar presente na variação das posições dos triângulos e do ponto de homotetia.



Ao propor a interação entre discurso e registro figural, é possível analisar se, na articulação entre os dois, se manifestará o fenômeno da não congruência semântica. Nesse caso específico, existe congruência entre discurso e registro figural. E ainda, a interação e a modificação visual compreendem uma forma de organização cuja variação sistemática estará em função de fatores de visibilidade.

4.2 ASPECTOS DA TEORIA DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NOS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DE MATEMÁTICA

Sabendo que os livros didáticos analisados baseiam-se na proposta do PNLD e este, por sua vez, baseia-se nas orientações curriculares presentes nos PCN de Matemática do Ensino Fundamental, em função da pesquisa desenvolvida, buscamos analisar algumas das orientações contidas nos PCN, a fim de identificar aspectos da Teoria de Representações Semióticas segundo Raymond Duval, no tocante à Matemática e à Geometria.

Em relação à Matemática, os PCN ressaltam que, no ensino,

> […] destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras, escritas numéricas); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a "falar" e a "escrever" sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados. (BRASIL, 1997, p.56,57)

Nesses dois aspectos básicos do ensino da Matemática destacados, observa-se a explicitação das representações dos objetos matemáticos. Quando abordada a questão referente ao processo de comunicação "levando-se o aluno a "falar" e a "escrever" sobre Matemática", nota-se a ausência da importância das representações para a conceitualização dos objetos, conforme nos aponta Raymond Duval. Segundo o autor, as representações semióticas, apesar de parecerem ser apenas o meio de que o indivíduo dispõe para exteriorizar suas representações mentais, são mais do que isso, são essenciais para a atividade cognitiva do pensamento. O documento também ressalta que a aprendizagem em Matemática,

> [...] está ligada à compreensão, isto é, à atribuição e apreensão de significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe identificar suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. (BRASIL, 1997, p.57)

Podemos afirmar que a atribuição e apreensão de significado vão ao encontro do que propõe Duval (2004). No entanto, esse significado depende das significações atribuídas pelo sujeito aos significantes, pois essa relação é triádica em se tratando da expressão. Essa tríade tem por referência um objeto e não somente sua representação. Pode-se exemplificar com a palavra razão. Ela pode significar “estar correto”, “racionalidade” ou “quociente entre duas grandezas de mesma natureza”. Essa significação só acontecerá em função da coordenação de mais de um registro de representação para o mesmo objeto matemático pelo sujeito aprendente. Só então será possível relacionar esse objeto com outros objetos e acontecimentos. Nesse sentido, o tratamento dos conteúdos pode dar lugar a esse tipo de abordagem proposto por Duval, desde que explicitado, pois assim as conexões importantes para a aprendizagem serão favorecidas.

No tocante à Geometria, os PCN de Matemática (BRASIL,1998) orientam sobre o currículo de Matemática, destacando, entre outros, o estudo do espaço e das formas; esse bloco de conteúdos refere-se ao estudo das formas, às noções relativas à posição, à localização de figuras, ao deslocamento no plano e sistema de coordenadas. É destacada a importância do trabalho com as transformações geométricas (isometrias, homotetias). Três objetos de natureza diferente são destacados pelos PCN:

> [...] o espaço físico, ele próprio - ou seja, o domínio das materializações; a geometria, concebida como modelização desse espaço físico - domínio das figuras geométricas; o(s) sistema(s) de representação plana das figuras espaciais - domínio das representações gráficas. (BRASIL, 1998, p.122).

Todas essas questões apontadas nos PCN são estudadas por Duval, que destaca a importância da interação e articulação entre discurso e registro figural, das modificações mereológicas ou visuais, as unidades de base de diferentes dimensões. O autor alerta sobre a utilização de definições ou teoremas e troca de dimensão em relação ao potencial heurístico de uma figura, para a resolução de exercícios, e a importância de uma organização sistemática em função de fatores de visibilidade.

Algumas dessas questões são contempladas no documento, como por exemplo, a representação plana das figuras espaciais (que propõe uma transformação do objeto representado por meio da perspectiva) ou representações gráficas (que propõem a transformação do registro discursivo em linguagem algébrica ou em língua natural para o registro gráfico). Essa transformação compreende a interação simultânea entre os dois tipos de discurso, no entanto, não explicita a necessidade de variações para caracterizar uma operação cognitiva de conversão necessária para a apreensão operatória dos registros figurais e para a conceitualização dos objetos geométricos.

Com isso, destaca-se a importância de explicitações entre o proposto por Duval (2004), no documento curricular oficial de referência, para a organização de propostas curriculares para o ensino da Geometria. Essas explicitações poderiam auxiliar nas propostas de organização das atividades, das definições e demonstrações de teoremas para a conceitualização dos objetos geométricos e desenvolvimento do pensamento geométrico.

Outro aspecto que destacamos refere-se ao que os PCN ressaltam no tocante à Geometria: "as questões relacionadas com as formas e relações entre elas, com as possibilidades de ocupação do espaço, com a localização e o deslocamento de objetos no espaço, vistos sob diferentes ângulos [...]." (BRASIL, 1998, p.122) Essas relações podem ser associadas ao que é proposto por Duval (2004) em relação às modificações mereológicas e óticas das figuras geométricas necessárias para a apreensão operatória das figuras.

Cabe ressaltar, no entanto, o que aponta Colombo (2008) em relação aos aspectos da Teoria de Representações Semióticas. Para a autora, os PCN,

> [...] não tratam explicitamente da noção teórica dos registros de representação semiótica. A representação não aparece como um modo de pensar e produzir o saber matemático. Não há nenhuma referência às operações cognitivas de tratamento e conversão que, segundo Duval, são essenciais para a compreensão em matemática. Contudo, o documento apresenta elementos que indicam uma abertura para o trabalho com essa noção na matemática escolar, quando consideram em algumas passagens a necessidade de trabalhar com "outras representações", e principalmente ao considerar a resolução de problemas como princípio para a organização das atividades escolares. (COLOMBO, 2008, p. 41)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muito há que saber sobre o que foi proposto investigar e o que fizemos foi apenas um início para novas pesquisas. Nas considerações finais, procuramos sintetizar o que discutimos nos capítulos que compuseram esta pesquisa, além de destacar os desmembramentos que podem surgir a partir da investigação.

A questão central da pesquisa que procuramos responder foi: a forma de abordagem do conteúdo de Geometria, presente nos livros didáticos, relativa aos processos de ensino, contempla aspectos da Teoria de Representações Semióticas segundo Raymond Duval relativos à Geometria? Com base na questão central da pesquisa, tivemos por objetivos explicitar as especificidades da Teoria de Representações Semióticas segundo Raymond Duval, no tocante à Geometria, e também houve a intenção de desvelar em que medida essas especificidades são contempladas nos livros didáticos analisados.

Os livros didáticos, material editorial elaborado para a utilização em situações de ensino, legitimado por sistematizar o conhecimento a ser estudado em uma situação de aprendizado, são um instrumento interlocutor que dialoga com o professor e com o aluno. Portador de uma perspectiva sobre o saber a ser estudado e sobre o modo de se conseguir aprendê-lo mais eficazmente. Esse instrumento do processo de ensino e aprendizagem é escolhido e mediado pelo professor, e não apenas lido, mas usado pelo aluno.

Sabe-se, com base nos apontamentos de Silva (2000), citada por Lauro (2007), que é possível, pela análise dos livros didáticos, conhecermos muito sobre o ensino ministrado e sobre as concepções de Matemática. Por meio de sua análise, é possível saber um pouco mais a respeito do tipo de conhecimento que foi transmitido aos alunos das escolas. O livro didático “constitui-se em referencial indispensável para quem deseja saber como a matemática chega à sala de aula.” (IMENES, 1989, p. 65).

As funções dadas para o livro didático por diversos autores também se referem a um tipo de material elaborado para ser utilizado em situações de ensino e aprendizagem, dentre as quais: auxiliar no planejamento e gestão das aulas; avaliação e formação didático-pedagógica; aquisição de conhecimentos (que só será possível se houver aprendizagem); propiciar o desenvolvimento de competências cognitivas para contribuir com o desenvolvimento da autonomia; referência para os currículos; propostas de métodos para a aprendizagem; vetor de disseminação da língua, cultura e valores de classes; instrumento para desenvolvimento do espírito crítico a partir da confrontação de documentos (desde que haja aprendizagem). (GALATTI, 2006; LAJOLO, 1996; MUNAKATA, 1999).

Destacamos a função do livro didático de auxiliar no planejamento e na gestão das aulas, seja pela explanação de conteúdos curriculares, seja pelas atividades, exercícios e trabalhos propostos.

Apesar de se referirem à aprendizagem, tais funções não se referem à dimensão epistemológica e filosófica do ato de aprender.

Sem esquecer que o livro didático é utilizado pelo professor e que a ação docente tem fundamental importância neste processo, que compreende desde a escolha do livro até a forma de sua utilização em sala de aula. Por essa razão, "é necessária uma formação adequada ao professor para que este possa utilizá-lo a partir de seu planejamento e ao longo da construção de sua prática, e não como o seu planejamento e a sua prática". (GALATTI, 2006, 82)

Reconhecemos que existe, por parte dos professores, falta de tempo, de condições financeiras, de formação, para utilizarem outros materiais de pesquisa e a falta de atualização em relação a seu campo profissional para contribuir na organização de sua prática e para fornecer sugestões de aprofundamento das concepções pedagógicas a serem desenvolvidas na escola (PAVÃO, 2011). Por essa razão, a autora afirma que,

> O livro deve oferecer uma orientação para que o professor busque, de forma autônoma, outras fontes e experiências para complementar seu trabalho. Deve garantir ao professor liberdade de escolha e espaço para que ele possa agregar ao seu trabalho outros instrumentos. E o professor não pode se transformar em refém do livro, imaginando encontrar ali todo o saber verdadeiro e a narrativa e ideal. (PAVÃO, 2011, p.4)

Em relação à afirmação de Pavão (2011, p. 4), sugerimos que a proposta de Raymond Duval pode ser uma opção para esse aprofundamento, em se tratando da dimensão cognitiva da prática educativa.

Muitas vezes, o livro didático é a única referência para o trabalho do professor, mas o universo de referências do professor e do aluno não pode esgotar-se no uso restrito do livro didático. Ele pode ser complementado por leituras das obras de Raymond Duval: livros, artigos, materiais de cursos ou palestras, dentre outros.

Também é preciso tomar cuidado, pois o livro é uma mercadoria do mundo editorial, sujeito a influências sociais, econômicas, técnicas, políticas e culturais, como qualquer outra mercadoria que percorre os caminhos da produção, distribuição e consumo. No entanto, quaisquer que sejam essas influências, a abordagem cognitiva não pode deixar de ser contemplada. O que pode acontecer é que essas abordagens cognitivas sejam sustentadas por concepções epistemológicas diferentes, apoiadas em correntes filosóficas também diferentes. Nossa crença e sugestão são voltadas para a opção da abordagem apontada por Raymond Duval, seguindo o quadro teórico por ele proposto.

Em relação à legislação sobre o livro didático, houve uma preocupação, de início, em unificar a educação escolar. Por essa razão, em 1929 foi criado o INL; em 1931, o Projeto Nacional para criação de programas oficiais e disciplinas específicas, além de outras políticas públicas por Decretos-Lei, Programas, Portarias, Comissões, Fundações, Resoluções; Guias para controle, produção, circulação do LD no país; escolha de ações referentes à produção, edição e distribuição; atribuições administrativas e de gerenciamento dos recursos financeiros; contrapartidas; exame de problemas de livros didáticos; avaliação de LD (erros conceituais, indução a erros, desatualização, preconceito ou discriminação de qualquer tipo).

A legislação foca diversos e diferentes aspectos em relação ao LD e a aprendizagem é focada nas avaliações dos LD, mas não são mais esclarecedoras em relação à dimensão epistemológica e filosófica para organizar o processo de ensino.

Os PCN são referências para a elaboração dos livros didáticos, pois são propostos para orientar a organização do currículo e do processo de ensino das disciplinas de acordo com as DNC para Ensino Fundamental (BRASIL, 1998).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL,1998), ressaltam que o estudo da Geometria, possibilita ao aluno ver e compreender as formas e desenvolver o raciocínio e a compreensão do espaço, e o desenvolvimento por parte do aluno de um tipo de “pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive”. (BRASIL, 1998, p. 51).

As orientações dos PCN referem-se ao desenvolvimento das capacidades e habilidades que o aluno pode adquirir com o aprendizado da Geometria, mas não se aprofundam de que forma o trabalho do professor, na organização do ensino, pode ser realizada, e que aspectos deverão ser contemplados. Como consequência, esses aspectos não são levados em consideração nas orientações do PNLD em relação à Geometria, apesar de o texto anunciar que o livro didático deverá ser elaborado para constituir um diálogo entre o saber sistematizado e o aluno e o professor. O texto anuncia, igualmente, que o livro didático a ser elaborado deverá ser portador do modo de aprender Geometria de uma forma mais eficaz, de uma forma generalizada, e não mais específica.

No tocante à Geometria, ressalta-se sua contribuição para a capacidade do aluno de intuir, conjecturar, descobrir, projetar e representar quando lida com as formas e o espaço, aprimora a percepção espacial, favorece a compreensão e a produção de desenhos, esquemas, mapas, gráficos, exercita a criatividade do aluno, ao interagir com as propriedades dos objetos, ao manipular e construir figuras, ao observar suas características, compará-las, associá-las de diferentes modos e ao conceber maneiras de representá-las, reconhecer e discriminar estímulos no espaço, e a partir do espaço, interpretar esses estímulos, associando-os a experiências anteriores, contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades.

Diante de tais apontamentos, fica evidente que a Geometria é um campo de conhecimento reconhecido e de inquestionável importância para a formação dos alunos. No entanto, constata-se a existência de dificuldades para a efetivação do ensino da Geometria. A efetivação do ensino da Geometria é compartilhada entre os educadores matemáticos, no entanto não existe um consenso quanto a propostas eficientes, cujas buscas se voltam a diversas pesquisas e teorias, que foram e estão sendo desenvolvidas.

O presente estudo apresentou a importância da Teoria de Representações Semióticas, segundo Duval (2003, 2004), para uma efetiva compreensão dos objetos geométricos e, para que isso aconteça, é necessário que o aluno consiga coordenar diversos registros de representação semiótica de forma espontânea, e utilizar o registro mais econômico para a resolução de uma determinada tarefa. Há que se considerar, no entanto, que o fato de um aluno utilizar o registro mais econômico na resolução de uma tarefa, não significa que ele realmente coordenou os demais registros e compreendeu o objeto matemático em estudo.

O estudo por nós desenvolvido apontou que a Geometria que estrutura no mundo geométrico dos volumes, das linhas, dos pontos, cuja existência não é real, parte de um mundo físico de objetos, formas, analisada nos livros didáticos, apresenta lacunas em relação a aspectos da teoria de Raymond Duval. Isso acontece no que concerne às possibilidades para o desenvolvimento de propostas para o ensino, considerando: as interações entre tratamentos figurais e discursivos; a articulação entre registro figural e discurso para minimizar o fenômeno da não congruência semântica (possibilitada por orientações para apresentação de definições, resolução de exercícios e demonstração de teoremas); as modificações mereológicas ou visuais responsáveis pela apreensão operatória das figuras; a resolução de exercícios, que exige a organização em função de uma variação sistemática de fatores de visibilidade para facilitar não a utilização de definições ou teoremas.

Como o livro didático é uma ferramenta preciosa para a organização do ensino pelo professor e constitui uma mediação entre sujeito e objeto de conhecimento, por meio de uma relação dialógica, acreditamos que os resultados apresentados constituem importante contribuição para a inclusão de aspectos relevantes para a aprendizagem da Geometria a serem contemplados nos LD. Isso pode ser feito se os autores apropriarem-se da Teoria de Representações Semióticas, segundo Raymond Duval, para terem a possibilidade de apresentar as definições, conduzir os alunos na demonstração de teoremas e para a resolução de exercícios.

A Geometria exige um modo de processamento cognitivo autônomo, com características específicas em relação a qualquer outra forma de funcionamento do raciocínio. Requer a utilização de registros discursivos (língua natural ou linguagem formal da matemática) e não discursivos (figuras) para apresentar definições, teoremas, hipóteses. Propor a separação das subfiguras da figura dada a partir da introdução de um elemento a mais (o segmento paralelo) torna possível que as unidades figurais que formam as partes complementares a serem comparadas não se fundam na unidade figural de base.

Podemos afirmar que a atribuição e apreensão de significado vão ao encontro do que propõe Duval (2004). No entanto, esse significado depende das significações atribuídas pelo sujeito aos significantes, pois essa relação é triádica em se tratando da expressão. Essa tríade tem por referência um objeto e não somente sua representação. Pode-se exemplificar com a palavra razão. Ela pode significar “estar correto”, “racionalidade” ou “quociente entre duas grandezas de mesma natureza”. Essa significação só acontecerá em função da coordenação de mais de um registro de representação para o mesmo objeto matemático pelo sujeito aprendente. Só então será possível relacionar esse objeto com outros objetos e acontecimentos. Nesse sentido, o tratamento dos conteúdos pode dar lugar a esse tipo de abordagem proposto por Duval, desde que explicitado, pois assim as conexões importantes para a aprendizagem serão favorecidas.

Nossas análises permitem retomar o que afirmou Lajolo (1996) em relação ao fato de o livro didático ser um instrumento específico e importantíssimo para o ensino e para a aprendizagem. No entanto, essa aprendizagem pode ficar comprometida conforme sua apresentação nesse livro, mesmo se utilizado de forma sistemática numa situação específica da escola, isto é, de aprendizado coletivo e orientado por um professor.

As mesmas reflexões também se voltam para o que aponta o Guia de Livros Didáticos do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de Matemática (BRASIL, 2011), em relação ao livro didático ser um interlocutor que dialoga com o professor e com o aluno, ambos leitores do livro didático, segundo Munakata (1999), que os utilizam numa situação específica de ensino e aprendizagem. No entanto, o guia afirma que esse diálogo tem que ser portador de uma perspectiva sobre o saber a ser ensinado e sobre o modo de se conseguir levar os alunos a aprendê-lo efetivamente. Os resultados de nosso estudo nos permitem afirmar sobre as possibilidades de fragilidade dessa interlocução, conforme a forma de apresentação dos exercícios, demonstrações ou definições. Essa fragilidade pode acontecer em função de aspectos relevantes relacionados à especificidade da aprendizagem da geometria numa dimensão cognitiva, conforme apontado por Raymond Duval. Ela pode tocar de perto na mediação entre sujeito e objeto de conhecimento, uma vez que, segundo Galatti (2006), o livro será usado pelo aluno e compromete as funções destacadas por Gérard e Roegiers (1998).

Isso significa que ele pode ser utilizado pelo professor, como texto de referência, para planejar suas aulas, mas pode não favorecer a aquisição de conhecimentos por parte dos alunos e não possibilitar a consolidação, ampliação, aprofundamento e integração dos conhecimentos adquiridos. Essa fragilidade pode comprometer igualmente a avaliação, por parte do professor, e a autoavaliação, por parte do aluno.

Nossas análises evidenciam que essa fragilidade é oriunda da falta de ênfase na coordenação de registros de representação semiótica e de importância para a visualização e exploração de figuras conforme nos apontou (ALMOULOUD et al., 2004).

Duval (2004) aponta que as principais fontes de dificuldades na aprendizagem da Geometria são a proximidade entre tratamentos relevantes e irrelevantes dentro de um mesmo registro e a falta de coordenação entre tratamentos que provem de diferentes registros. O autor destaca que existem condições prévias para a descrição dos tratamentos pertinentes ao registro das figuras geométricas e essas são dependentes de uma análise semiótica para a determinação de unidades de base constituintes dos registros, das possibilidades de articulação das figuras e da modificação das figuras obtidas. Nossas análises permitiram evidenciar a ausência de algumas dessas condições em exercício, definições ou demonstrações propostas nos livros didáticos analisados, impedindo que a figura cumpra sua função heurística. No ensino, esses tratamentos são importantes, pois a maioria dos alunos não conseguem dominá-los sem uma aprendizagem específica. O livro didático pode contribuir nessa direção.

Acreditamos ter contribuído para a organização do processo de ensino pelos professores com a utilização de LD, que pode ser complementado pelos aspectos relevantes da Teoria de Raymond Duval relativa à Geometria.

Essa contribuição diz respeito ao fato de que, segundo Duval (2004), em Geometria, não há desenho “sem legenda”, visto que as significações de certas unidades figurais (pontos, informações sobre as medidas de seus segmentos ou ângulos, polígonos) e de algumas de suas relações têm que ser explicitadas na entrada. A introdução de uma figura geométrica necessariamente é discursiva, pois a indicação verbal é necessária para ancorar a figura como representação de objeto matemático.

Esses registros, por sua vez, devem interagir com os registros figurais, pois eles se caracterizam como registros que cumprem funções discursivas e operações cognitivas

Outra contribuição importante oriunda de nossas análises subsidiadas pela teoria de Raymond Duval refere-se ao tipo de conversão encontrada nos livros: da língua natural para um enunciado em língua natural ou uma ou várias representações figurais. Essa conversão, no entanto, por vezes abandona os tratamentos vinculados ao registro de partida, isto é, os tratamentos discursivos (aplicação de definições, teoremas...). Também não considera que no tipo de conversão inversa existe a exigência de colocar em prática situações e restrições relacionadas à comunicação de instruções elaboradas a partir de uma figura dada, ou de uma figura que tem que ser construída para que os destinatários possam reconstruí-las. Essa conversão (de uma figura em um discurso), segundo Duval (2004), não exige simplesmente uma descrição e sim uma explicação, argumentação ou demonstração significando que os diferentes tipos de expansão discursiva e as diferentes formas de funcionamento cognitivo do raciocínio entram em jogo.

Importante foi perceber que a valorização desse tipo de conversão poderá permitir a observação da linguagem espontânea empregada pelos alunos e, como conseqüência, levá-los a valorizar uma linguagem baseada em definições. Se os livros didáticos auxiliam os professores na organização e planejamento de suas aulas, eles podem ser elaborados de forma a contemplar as orientações oriundas dos estudos de Raymond Duval, em especial para a aprendizagem da geometria. Isso implica evidentemente que se disponha de uma análise cognitiva precisa dessas atividades complexas.

Esse estudo abre caminhos para outras investigações sobre outros conteúdos da disciplina de matemática, dentre os quais a álgebra, a aritmética, grandezas e medidas, tratamento de informações e probabilidade à luz da Teoria de Representações Semióticas segundo Raymond Duval.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. Registros de representação semióticas e compreensão de conceitos geométricos. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. p. 125-147.

ALMOULOUD, S. A.; MANRIQUE, A. L.; SILVA, M. J. F. da; CAMPOS, T. M. M. A geometria no Ensino Fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 27, p. 94-108, set./dez. 2004.

ANTUNES, A.R.; SOIHET, R.; PAGANELLI, T. I. Como se constroem relações especiais. **Revista do professor**, Porto Alegre, 1987.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro, Lisboa. Edições 70, 2010.

BERONHA, R. A. **O ensino de geometria e o dia-a-dia na sala de aula**. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Campinas, UNICAMP, São Paulo, Faculdade de Educação. 1989.

BIGODE, A. J. L. **Matemática hoje é feita assim.** São Paulo: FTD, 2002**.**

BRANDT, C. F. **Contribuições dos registros de representação semiótica na conceituação do sistema de numeração decimal**. 2005. 246 f. Tese (Doutorado em Educação Científica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Santa Catarina, 2005, p. 87.

BRASIL. Ministério da Educação. **Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação**. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/index.php/pnld-historico>. Acesso em: 24 jun. 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental**. Parâmetros curriculares nacionais**: matemática – PCN. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática/Ensino de quinta a oitava séries. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BUNZEN JR., C. dos S. **Dinâmicas discursivas nas aulas de português**: os usos do livro didático autorais. 2009. 233 f. Tese (Doutorado em Linguística Aplicada) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

CAMARGO, B. V. ALCESTE: um programa informático de análise quantitativa de dados textuais. In: MOREIRA, A. S. P. (Org.) **Perspectivas teórico-metodológicas em representações sociais**. João Pessoa: UFPB, Editora Universitária, 2005.

CASTILHO, S. F. R. Geometria: até onde a vista alcança. **Revista AMAE Educando**, Belo Horizonte, n. 203, p. 24-26, 1989.

CAVALCANTE, L. G.; SOSSO, J.; VIEIRA, F.; POLI, E. **Para saber Matemática**. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2006.

CENTURIÓN, M. R.; JAKUBOVIC, J.; LELLIS, M. C. T. **NOVO Matemática na medida certa**. 10. ed. São Paulo: Scipione, 2003.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Revista Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, set./dez. 2004.

COLOMBO, J. A. A. **Representações Semióticas no Ensino:** Contribuições para reflexões acerca dos Currículos de Matemática Escolar. Tese (Doutorado) – Universidade Federal De Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Florianópolis, 2008.

CROWLEY, M. L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, M. M; SHULTE, A. P. (Org.). **Aprendendo e Ensinando Geometria**. São Paulo: Atual, 1994, p. 2.

DEL GRANDE, J. J. Percepção espacial e geometria primária. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Org.). **Aprendendo e Ensinando Geometria**. São Paulo: Atual, 1994.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano:** registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Ed. Peter Lang, 2004.

______. Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. p. 11-33.

FERREIRA, A. R.; CORREIA, W. M. Explorações Geométricas no Ensino Médio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais**... Belo Horizonte: SBEM, 2007. p. 1-19.

FERREIRA, E. B.; SOARES, A. B.; LIMA, J. C. O resgate das demonstrações: uma contribuição da Informática à formação do professor de Matemática. **Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional**, Maringá, v. 12, n. 2, p. 381-389, jul./dez. 2008.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, v. 3, n. 4, p. 1-38, nov. 1995.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

______. **O profissional em educação matemática**. Santos: Universidade Santa Cecília, 2001. p. 1-8. Disponível em: <http://sites.unisanta.br/teiadosaber/apostila/matematica/O_profissional_em_Educacao_Matematica-Erica2108.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2011.

GALATTI, L. R. **Pedagogia do esporte**: o livro didático como um mediador no processo de ensino e aprendizagem dos jogos esportivos coletivos. 2006. 141 f. Dissertação (Mestrado em Educação Física) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006.

GÉRARD, F.; ROEGIERS, X. **Conceber e avaliar manuais escolares**. Tradução de Júlia Ferreira e Helena Peralta. Porto: Porto Editora, 1998.

GIOVANNI J. R.; CASTRUCCI, B.; GIOVANNI JR., J. R. **A conquista da matemática:** a + nova. São Paulo: FDT, 2002.

GOUVÊA, F. A. T. **Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração**: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1998.

GUIA de livros didáticos: PNLD 2011: Matemática. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010. 96 p.

IMENES, L. M. P. **Um estudo sobre o fracasso do ensino e da aprendizagem da matemática**. 1989. 326 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1989.

KALEFF, Ana Maria M. R. **Vendo e entendendo poliedros**. Niterói: EdUFF, 1998.

KLÜBER, T. E. **Modelagem matemática e etnomatemática no contexto da educação matemática**: aspectos filosóficos e epistemológicos. 2007. 151 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2007.

LAJOLO, M. Livros didáticos: um (quase) manual de usuário. **Em Aberto**, Brasília, v. 16, n. 69, p. 3-9, jan./mar. 1996.

LAURO, M. M. **Percepção - construção - representação - concepção. Os quatro processos do ensino da Geometria**: uma proposta de articulação. 2007. 396 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista**, SBEM, n. 4, p. 3-13, 1995.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1986.

______. A constituição do paradigma do formalismo pedagógico clássico em educação matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 3, n. 3, p. 7-40, 1995.

MIGUEL, A. **Três estudos sobre História e Educação Matemática**. 1993. 274 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na educação matemática**: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MORELATTI, M. R. M.; SOUZA, L. H. G. Aprendizagem de conceitos geométricos pelo futuro professor das séries iniciais do Ensino Fundamental e as novas tecnologias. **Educar em Revista**, Curitiba, n. 28, p. 263-275, jul./dez. 2006.

MUNAKATA, K. Livro didático: produção e leituras. In: ABREU, M. (Org.). **Leitura, história e história da leitura**. Campinas: Mercado de Letras/ALB, 1999. p. 577-595.

NASCIMENTO-SCHULZE, C. M.; CAMARGO, B. V. Psicologia social, representações sociais e métodos. **Temas em Psicologia**, Ribeirão Preto, v. 8, n. 3, p. 287-299, 2000.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Departamento de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**: Matemática. Curitiba: SEED, 2008. Disponível em: <http://www.educacao.pr.gov.br>. Acesso em: 16 ago. 2011.

PASSOS, C. L. B. **Representações, Interpretações e Prática Pedagógicas**: A Geometria na Sala de Aula. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 2000.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Zetetiké**, Campinas, v. 1, n. 1, p. 7-39, mar. 1993.

______. Educação matemática e criatividade. **Educação Matemática em Revista**, SBEM, v. 2, n. 3, p. 5-11, 1994.

______. **Formação de possibilidades cognitivas em noções geométricas**. 288f. 1995. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 1995.,.

PAVANELLO, R. M.; FRANCO, V. S. **A Construção do Conhecimento Geométrico no Ensino Fundamental**: Análise de um Episódio de Ensino In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, IX., 2007, Belo Horizonte: SBEM, 2007.

PAVÃO, A. C. **Proposta pedagógica**. Disponível em: <http://tvbrasil.org.br/busca/?s=o+livro+em+quest%C3%A3o> Acesso em: 22 set. 2011. p. 4. (Série O livro didático em questão).

PEREIRA, M. R. O. **A Geometria escolar**: uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino. 2001. 74 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

PEREZ, G. A realidade sobre o ensino da Geometria no 1º. e 2º. graus, no Estado de São Paulo. **Educação Matemática em Revista**, SBEM, n. 4, p. 54-62, 1995.

PEREZ, M. **Grandezas e medidas**: representações sociais de professores do Ensino Fundamental. 2008. 202 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

PINA, M. C. **A escravidão no livro didático de História do Brasil**: três autores exemplares (1890-1930). 2009. 240 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

PITOMBEIRA, J. B. C. O que é educação matemática. **Temas e Debates**, Rio Claro, v. 4, n. 3, p. 17-26, jan. 1991.

RIBEIRO, J. S. **Projeto radix**: matemática. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2009.

SANTOS, M. R. dos. Teoria de Van Hiele: uma alternativa para o Ensino da Geometria no 2º ciclo. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., Belo Horizonte. **Anais**... Belo Horizonte: SBEM, 2007. p. 1-8.

SCORTEGAGNA, G. M. **A organização da prática educativa em geometria**: contribuições da teoria piagetana. 2008. 175 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2008.

SILVA, M. C. L. da; OLIVEIRA, M. C. A. de. O ensino de Geometria durante o Movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil: análise do arquivo pessoal de Sylvio Nepomuceno. In: CONGRESSO LUSO-BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO, 6., 2006, Uberlândia. **Anais**... Uberlândia: UFU, 2006. p. 4152-4160.

TOLEDO, Marilia; TOLEDO, Mauro. **Didática de matemática**: como dois e dois; a construção da matemática. São Paulo: FTD, 1997, p. 221.

TOZETTO, A. S. **Letramento para docência em matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. Ponta Grossa, 2010. 161f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2010.