UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA

SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL - PROFMAT

CHRISTIAN BUENO CRUZ

LOGARITMOS DE NÚMEROS NEGATIVOS

PONTA GROSSA

2015

CHRISTIAN BUENO CRUZ

LOGARITMOS DE NÚMEROS NEGATIVOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática PROFMAT – UEPG como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Giuliano Gadioli La Guardia

PONTA GROSSA

2015

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

Cruz, Christian Bueno
C955 Logaritmos de números negativos/ Christian Bueno Cruz. Ponta Grossa, 2015.
43f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Orientador: Prof. Dr. Giuliano Gadioli La Guardia.

1.Logaritmos. 2.Números complexos. 3.Equação de Euler. I.La Guardia, Giuliano Gadioli. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. T.

CDD: 512.9

TERMO DE APROVAÇÃO

Christian Bueno Cruz

"LOGARITMOS DE NÚMEROS NEGATIVOS"

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador: Prof. Dr. Giuliano Gadioli La Guardia
Departamento de Matemática, UEPG/PR

Prof. Dr. Marcio Augusto Villela Pinto
Centro Politécnico, UFPR/PR

Profa. Dra. Luciane Grossi
Departamento de Matemática, UEPG/PR

Ponta Grossa, 20 de Março de 2015.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus que me capacita e me sustenta a cada dia dando sentido a minha vida.

Agradeço aos meus filhos Livia e Pedro Henrique, presentes de Deus.

Agradeço aos meus amados pais Pedro e Glaucia.

Agradeço ao meu orientador Giuliano Gadioli La Guardia pela orientação neste trabalho.

Agradeço aos professores do PROFMAT por compartilhar seus conhecimentos.

Agradeço aos colegas pelo tempo de caminhada compartilhado.

“Os conceitos mais simples são os mais abstratos.”

Friedrich Wilhelm Ostwald (1853 – 1932)

RESUMO

A grande importância na história da matemática no que concerne ao estudo dos logaritmos é consensual, tanto pela finalidade com que foram criados bem como devido às suas diversas aplicações. Quando este conteúdo é ensinado no ensino médio, são apresentadas sua definição e suas propriedades básicas para os números reais positivos, porém logaritmos para números negativos não são abordados. Este trabalho tem por objetivo principal o estudo aprofundado da obtenção dos logaritmos para números negativos: contextualização histórica, propriedades, exceções e particularidades, números complexos e um estudo sobre a equação de Euler. Com os resultados derivados do presente trabalho, espera-se fornecer subsídios para a obtenção de uma metodologia para o ensino de tal assunto, mesmo que superficialmente, no ensino médio.

Palavras-chave: logaritmos, números complexos, equação de Euler.

ABSTRACT

The great importance in the history of mathematics, concerning the study of logarithms, is consensual, both because the purpose for which they were created and because of their various applications. When this content is taught in high school, its definition and its basic properties to the positive real numbers are presented, but logarithms for negative numbers are not addressed. This work has as main objective the depth study of obtaining the logarithms for negative numbers: historical context, properties, exceptions and particularities, complex numbers and a study of the Euler equation. With the derived results of this study it is expected to provide input to obtain a methodology for teaching this subject,
even superficially, in high school.

Keywords: logarithms, complex numbers, Euler equation.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Vários conceitos matemáticos são apresentados no ensino médio de forma descontextualizada e sem um embasamento histórico, o que passa a ideia de que tais conceitos se desenvolveram de forma instantânea ou até mesmo “mágica”.

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação (PCN+, 2002, p.111).

Este trabalho visa contextualizar e estender o conceito de logaritmos visto no ensino médio apenas com números reais positivos, estendendo-o para os números negativos. Essa extensão surge da necessidade de definir logaritmos para números negativos e dos trâmites que envolvem tal conceito. Os números negativos foram introduzidos de forma livre pelos hindus em torno de 600 d.C. e levaram praticamente um milênio para que fossem formuladas propriedades para estes números, de forma apropriada. Devido a isso, surge a dificuldade em associá-los aos conceitos que efervesceram na Idade Média, dentre estes, o conceito de logaritmo. Grandes matemáticos, tais como Leibniz, Bernoulli, Euler entre outros, travaram discussões epistolares a respeito do porquê dos números negativos satisfazerem certas propriedades dos logaritmos e contradizerem outras.

No Capítulo 1 deste trabalho descreveremos o contexto histórico a que foi inserido o conceito de logaritmos, os precursores no seu estudo, suas primeiras aplicações e explicitaremos suas propriedades. O Capítulo 2 tratará dos impasses e controvérsias históricas para a obtenção dos logaritmos de números negativos. O Capítulo 3 focará nos estudos de Euler e sua famosa equação, chave para a resolução do problema em questão. Finalmente, no Capítulo 4, trataremos da resolução mediante calculadora científica de logaritmos de números negativos, os quais foram estudados algebricamente no capítulo anterior.

CAPÍTULO 1 – HISTÓRIA DOS LOGARITMOS

1.1- Breve Histórico dos Logaritmos

É fato que houve uma expansão significativa da ciência em diversas áreas nos séculos XVI e XVII, a saber, física mecânica, astronomia e navegação foram desenvolvidas e envolviam:

> (...) uma quantidade crescente de dados numéricos, forçando os eruditos a passarem boa parte de seu tempo fazendo cálculos tediosos (MAOR, 2008, p.17).

No final do século XVI, o matemático escocês John Napier (1550-1617) desenvolveu estudos visando formas alternativas para a simplificação de tais cálculos. Inquietado pelo grande número de operações extensas e difíceis que freavam o progresso científico, concentrou todos os seus esforços em desenvolver métodos que pudessem simplificá-los (COLLETTE, 1995).

A ideia inicial de Napier foi estabelecer relações em termos geométricos entre um segmento de reta AB e uma semi-reta DX de forma que os pontos C e F pertencentes a AB e DX, respectivamente, se movam simultaneamente ao longo dessas linhas com velocidades iniciais iguais a partir de A e de D (conforme a Figura 1). A velocidade de C é numericamente igual a distância CB e a velocidade de F é constante. Napier definiu y=DF como sendo o logaritmo de x=CB (EVES,2004).

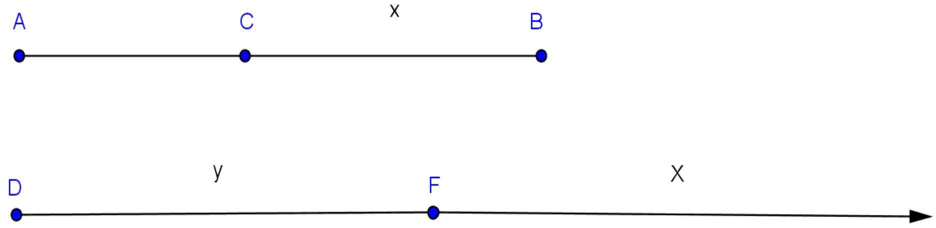

Figura 1: Logaritmos de Napier
Fonte: O autor

Percebe-se que em períodos de tempos iguais, *x* decresce em *progressão geométrica* e que *y* cresce em *progressão aritmética.* A relação entre os termos de uma progressão geométrica e os expoentes ou índices desta formarem uma progressão aritmética já havia sido formulada pelo matemático alemão Michael Stifel (1487-1567).

Utilizando como base o número 2, a relação de Stifel pode ser simplificada da seguinte forma:

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	(PG)
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	(PA)

Nota-se que o produto de dois termos da PG está associado à soma de dois termos da segunda progressão (uma PA):

2^n	-	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	(PG)
n	-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	(PA)

Por exemplo: se quisermos multiplicar 16 por 64, basta encontrarmos os expoentes correspondentes a 16 e 64 na base 2, isto é, 4 e 6 e somá-los. Como a soma é 10, realiza-se o processo inverso, o número cujo expoente é 10 corresponde a 1024, logo este valor corresponde ao produto procurado. Essa regra corresponde a multiplicar potências de mesma base: $a^m . a^n = a^{m+n}$, em que se repete a base e somam-se os expoentes. É Interessante que esta redução da multiplicação à adição foi constatada antes da existência de expoentes para representar potências de um número, ou seja, o conceito de logaritmo surgiu antes da notação exponencial.

Mediante este dispositivo pode-se notar o conceito de logaritmo proposto por Napier; percebe-se que os elementos postos em progressão geométrica são os que partem com velocidade variada, enquanto os da progressão aritmética são os que partem com velocidade constante. Em outras palavras, os termos da progressão aritmética são os respectivos logaritmos da progressão geométrica. Ainda com base neste dispositivo, pode-se escrever que a base 2 da potência corresponde à *base do logaritmo,* o valor de cada potência corresponde ao *logaritmando* e os respectivos expoentes são os *logaritmos*. A princípio, Napier denominou o expoente de cada potência por “número artificial”; após algum tempo, porém, o nominou *logaritmo*, palavra que significa “número de razão” (EVES,2004).

Para números inteiros positivos a tarefa de se obter o logaritmo é razoavelmente fácil. Porém sua principal função prática era ser utilizada com qualquer número (inteiro ou fracionário). Como o estudo de expoentes fracionários da forma $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ não haviam sido perfeitamente definidos na época de Napier, sua ideia foi, desta forma, procurar uma base constituída por um número pequeno, de modo que suas potências crescessem lentamente. Após alguns anos, ele decidiu usar o número $(1 - 10^{-7}) = 0{,}99999$ ... ; esta escolha parece estar na preocupação de Napier em diminuir o uso de frações decimais (EVES,2004). Sua primeira tabela continha 101 elementos iniciando pelo número $10^7(1 - 10^{-7})^0$ até o número $10^7(1 - 10^{-7})^{100}$, em que cada termo é obtido subtraindo-se sua 10^7 parte de seu termo anterior. Utilizando-se notação hodierna tem-se que $N = 10^7(1 - 10^{-7})^L$, em que L é o logaritmo "neperiano" de N. Nesse sistema, $L = 0$ corresponde a $N = 10^7$ (nos logaritmos decimais $L = 0$ corresponde a $N = 1$). De forma particular os logaritmos de Napier *diminuem* com o aumento dos números enquanto que os logaritmos de base 10 *crescem* e, curiosamente, a base escolhida para sua primeira tabela fez com que Napier chegasse próximo de descobrir um número que, aproximadamente um século depois, se tornaria a base universal dos logaritmos; este número é o número e que corresponde ao limite da sequência numérica $(1 + 1/n)^n$ quando n tende ao infinito (trataremos o número e de forma mais apurada na sequência deste trabalho).

Em 1614, Napier publicou seu trabalho com logaritmos em um texto intitulado "Mirifici logarithmorum canonis descriptio" (Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos). Esta obra despertou grande interesse na comunidade científica da época e obteve o rápido reconhecimento sendo utilizada por expoentes como Johannes Kepler que usou os logaritmos em seus cálculos de órbitas planetárias. Um ano após esta publicação, o professor inglês de geometria Henry Briggs (1561-1631), deslumbrado com a invenção, resolve ir a Escócia para se encontrar pessoalmente com Napier. Nesta visita, Briggs propõe o uso da base 10 para os logaritmos.

> Naquele encontro Briggs propôs duas modificações que tornariam as tabelas de Napier mais convenientes: fazer o logaritmo de 1 igual a zero, no lugar de 10^7, e ter o logaritmo de 10 igual a uma potência apropriada de 10. Depois de considerarem várias possibilidades eles finalmente decidiram que

> $log\ 10 = 1 = 10^0$. No fraseado moderno isto significa dizer que se um número positivo N for escrito como $N = 10^L$, então L é o logaritmo "comum" de N, escrito como $log_{10}N$, ou, simplesmente $log\ N$ (MAOR, 2008, p. 27).

Desse encontro nasce os logaritmos *Briggsianos* ou *comuns*, utilizados atualmente. A partir daí o trabalho de confeccionar novas tabelas coube a Briggs, que publicou em 1624 o livro *Arithmetica logarithmica*. Suas tábuas com logaritmos decimais continham todos os inteiros de 1 até 20.000 bem como de 90.000 até 100.000, com uma precisão de quatorze casas decimais. Coube ao editor holandês Adriaen Vlacq (1600-1660) incluir os logaritmos de 20.000 a 90.000 na segunda edição de *Arithmetica logarithmica*, publicado em 1628. Este trabalho foi utilizado para todas as tabelas seguintes com poucas modificações; apenas em 1924 foram elaboradas novas tabelas com precisão de 20 casas decimais, confeccionadas em celebração dos 300 anos de invenção dos logaritmos.

Em 1620, o suíço Jobst Bürgi (1552-1632), publicou uma tabela de logaritmos com ideias semelhantes às de Napier; a diferença significativa era a proporção usada: enquanto Napier usou $1 - 10^7$ (um número um pouco menor que 1), Bürgi utilizou $1 + 10^{-4}$ (um numero um pouco maior que 1) o que faz com que seus logaritmos aumentem enquanto que os de Napier diminuam. Se um número inteiro positivo for escrito da forma $N = 10^8(1 + 10^{-4})^L)$, para Bürgi o número $10L$ era denominado *número vermelho* correspondente ao *número negro* N (esses números foram impressos realmente em vermelho). Portanto, os números vermelhos são os logaritmos dos números negros. Outra diferença fundamental entre as teorias de Napier e Bürgi é que a abordagem de Napier era geométrica, ao passo que a abordagem de Bürgi era algébrica.

As obras de Napier e Bürgi foram realizadas totalmente independente uma da outra, mas como Napier publicou 6 anos antes coube a ele a prioridade na invenção dos logaritmos.

> A invenção dos logaritmos chegou ao mundo como um relâmpago num dia claro. Nenhum trabalho anterior conduziu a ela, ou previu, ou sugeriu o seu aparecimento. Ela permanece isolada, surgindo abruptamente no pensamento humano, sem derivar do trabalho de outros intelectos ou seguir linhas conhecidas de pensamento matemático (MAOR,2008, p.28).

1.2 – Propriedades dos Logaritmos

Esse instrumento para facilitar cálculos que permitiu durante anos que operações como multiplicação e potenciação fossem simplificados foi substituído, nos dias de hoje, pelas calculadoras eletrônicas. Entretanto, os logaritmos continuam a exercer destaque na matemática. A função logarítmica, sua inversa e a função exponencial, constituem a única maneira de se descrever matematicamente a evolução de uma grandeza cuja taxa de crescimento (ou decrescimento) é proporcional à quantidade daquela grandeza existente num dado momento (LIMA, 2010a).

Um sistema de logaritmos pode ser representado através de uma tabela com duas colunas, em que cada número real positivo x da coluna à esquerda corresponde, na mesma linha à direita, a um número real $log(x)$ chamado logaritmo de x.

Tabela de logaritmos decimais

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{log}(\boldsymbol{x})$
1	0
2	0,30103
3	0,477121
4	0,60206
5	0,69897
6	0,778151
7	0,845098
8	0,90309
9	0,954243
10	1

Tabela 1: Tabela com os logaritmos decimais dos números inteiros de 1 a 10
Fonte: O autor

A tabela 1 possui características peculiares como, por exemplo: se os números x da esquerda estiverem colocados em ordem crescente o mesmo ocorre com seus respectivos logaritmos, e se multiplicarmos dois números x e y, o logaritmo do produto desses números deve ser a soma dos logaritmos de x e y. Em linguagem moderna escreve-se da seguinte maneira:

Um sistema de logaritmos fixado uma base a é uma função $log_a: R^+ \to R$ com as seguintes propriedades:

a) $log_a\,(a) = 1$
b) $log_a\,(x.y) = log_a(x) + log_a\,(y)$ para todo $x\,, y \in R^+$

A segunda propriedade apresentada acima deriva da regra da multiplicação de potências de mesma base: $a^x . a^y = a^{x+y}$ que, como anteriormente mencionado, esta notação exponencial foi inventada após a descoberta dos logaritmos; de qualquer forma esta sugere a construção de uma tabela de logaritmos de base a de forma que, na coluna da esquerda lista-se $a, a^2, a^3, a^4, \ldots, a^n,$ ... e, na coluna à direita lista-se os expoentes correspondentes $1,2,3,4, \ldots, n,$ ... .Se n é um número natural então toda tabela formulada dessa forma permite calcular produtos de números da forma a^n sem maiores problemas. Entretanto, após algum tempo da difusão dessa notação surgiram as seguintes questões naturais:

* Como se consideram potências com expoentes negativos e fracionários;
* Se a for um número positivo diferente de 1, então todo número real positivo pode ser aproximado por potências de a com expoentes racionais.

Devido a essas questões é necessário analisar as propriedades das potências de um número real positivo para um entendimento mais apropriado das propriedades logarítmicas.

1) A potência a^n é definida como sendo o produto de n fatores iguais ao número a, ou seja, $a^n = a.a.a...a$ $(n\,fatores)$. Portanto, a *propriedade fundamental* $a^x.a^y = a^{x+y}$ se verifica.

2) Para definir a^0 é necessário convencionar que $a^0 = 1$, donde a propriedade fundamental é descrita fazendo-se $x = 0$ e $y = n$: $a^0.a^n = a^{0+n} = a^n$.

3) Estendendo o conceito de potência para expoentes negativos de forma a satisfazer a propriedade fundamental, devemos fazer $x = n$ e $y = -n$: $a^n.a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1$.

Dessa forma, a única maneira possível de se definir a potência a^n, n inteiro, mantendo a validez da propriedade fundamental consiste em fazer $a^{-n} = 1/a^n$.

A propriedade fundamental é válida para o produto de várias potências:

4) Para n fatores iguais de a^x , segue-se que:

$a^x.a^x.a^x.a^x...a^x$ (n fatores) = a^{nx} , ou seja, $(a^n)^x = a^{nx}$.

5) Estendendo a noção de potência de um número real $a > 0$ para expoentes fracionários da forma $n = p/q$, em que p e q são inteiros e $q > 0$, deve-se definir a potência $a^{p/q}$ de forma a se obter um número real positivo $(a^{p/q})^q = a^{(p/q)q} = a^p$, consequentemente, $a^{p/q}$ deve ser um número real positivo cuja q-ésima potência é a^p.

6) Utilizando a propriedade acima nos termos da definição de raiz, tem-se $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ e, em particular, $a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$.

Definido o conceito de potência e de posse de sua *propriedade fundamental*, tradicionalmente o logaritmo de um número é definido do seguinte modo:

> Dado um número real positivo $a > 0$, o *logaritmo* de um número positivo $x > 0$ na base a é o expoente y a que se deve elevar a de tal modo que $a^y = x$. Escreve-se $y = log_a x$ e lê-se y é o logaritmo de x na base a (LIMA,2010a,p.11).

A definição significa que $y = log_a x$ é equivalente a $a^y = x$, ou seja, possuem o mesmo significado. A partir desta definição pode-se provar a *propriedade fundamental dos logaritmos*: $log_a\,(x.y) = log_a\,x + log_a\,y$

De fato, escrevendo-se as equações $log_a\,x = u$ e $log_a\,y = v$ na forma de potência tem-se que $x = a^u$ e $y = a^v$, ou seja, $x.y = a^u\,.a^v$, donde $x.y = a^{u+v}$, e assim $log_a\,(x.y) = u + v$, ou $log_a\,(x.y) = log_a\,x + log_a\,y$.

Utilizando-se a definição de logaritmo como expoente pode-se obter o logaritmo decimal de um número por aproximação. Por exemplo, para o logaritmo de 2 escreve-se $log_{10}2 = n$, ou seja, $2 = 10^n$; como $2^{10} = 1024$ conclui-se que $2^{10} = 10^3 + 24$, Considerando-se uma margem de erro de $2{,}4\,\%$ podemos escrever $2^{10} \cong 10^3$. Dividindo os expoentes por 10 obtemos $2^1 \cong 10^{0,3}$, donde o valor procurado de n é, aproximadamente, $0{,}3$ e então $\log_{10} 2 \cong 0{,}3$.

De posse das propriedades fundamentais enunciadas:

a) $log_a\,(a) = 1$;

b) $log_a\,(x.y) = log_a\,(x) + log_a\,(y)$ para todo x e $y \in R+$;

Como consequência das propriedades das potências, derivam-se as seguintes propriedades logarítmicas:

1) $log_a\,(1.1) = log_a\,(1) + log_a\,(1)$, logo $log_a\,(1) = 0$

2) $log_a\,(x_1.x_2\ldots x_n) = log_a\,(x_1) + log_a\,(x_2) + \ldots + log_a\,(x_n)$

3) $log_a(x^n) = log_a\,(x.x.x\ldots x) = log_a\,(x) + log_a\,(x) + \cdots + log_a\,(x) = n log_a(x)$

4) $log_a(x/y) = log_a\,(x.1/y) = log_a\,(x) + log_a\,(1/y) = log_a\,(x) + log_a\,(y^{-1}) = log_a\,(x) - log_a\,(y)$

5) Como a equação $y = log_a\,x$ equivale à equação $a^y = x$, conclui-se que:

$a^{log_a x} = x$

Observação: Com base nas propriedades enunciadas acima, o logaritmo de um número não pode estar definido para $x = 0$ pois $log_a\ (0) = log_a\ (x.0) = log_a\ (x) + log_a\ (0)$, em que $log_a\ (0) = 0$, negando a propriedade $log_a\ (1) = 0$, desta forma, os logaritmos são definidos para todo $x > 0$.

1.3 - Logaritmos Naturais e o Número e

Chamado por alguns autores de Logaritmo neperiano, o logaritmo natural utiliza como base o número "e". Como foi visto na Subseção 1.1, deste trabalho o logaritmo definido por Napier tinha valores diferentes deste que definiremos agora.

O número e é o número irracional dado pelo limite da sequência numérica $(1 + n)^n$ quando n tende ao infinito; e corresponde ao número $2{,}718281828459$ ... (com aproximação de doze casas decimais). Este número surge de forma espontânea em várias áreas das ciências exatas, como no estudo da variação de uma grandeza (seu crescimento ou decrescimento) em cada instante em que essa variação é proporcional ao valor dessa grandeza naquele dado instante: questões de juros, desintegração radioativa, crescimento populacional, resfriamento de um corpo, entre outras.

A data exata do nascimento do número e é obscura; provavelmente suas origens são do século XVII (mesma época em que Napier inventou os logaritmos). Nesse período ocorreu um enorme crescimento do comércio internacional em que transações financeiras se proliferaram de várias formas; nesse contexto o estudo de juros compostos teve intensa dedicação e, possivelmente, o número e foi reconhecido pela primeira vez no que hoje denominamos *matemática financeira* (MAOR, 2008).

Vejamos um caso de questão financeira envolvendo o número e :

Ao investirmos um capital C em uma aplicação que paga uma taxa de i por cento de juros compostos anuais teremos, ao final do primeiro ano, um montante M igual a $M = C(1 + i)$; no final do segundo ano $M = C\,(1 + i)^2$, e assim sucessivamente. Após t anos o saldo será de $M = C(1 + i)^t$. Esta fórmula é a base para todos os cálculos financeiros (aplicações bancárias, empréstimos, financiamentos , dentre outros). Algumas instituições financeiras calculam o juro acumulado em somente uma vez ou em várias vezes por ano, formando várias composições de juros: anuais, semestrais, trimestrais, semanais, diários. Suponha que essa composição seja realizada n vezes ao ano; então, para cada período de conversão, a taxa será dividida por n, ou seja i/n, e como em t anos existem nt períodos de conversão tem-se em um ano um montante:

$$M = C\,(1+1/n)^{nt}.$$

Suponha ainda que um capital $C = 1$ em um tempo $t = 1$ é aplicado a uma taxa de 100% ao ano, isto é, $M = (1+1/n)^n$. A tabela 2 mostra o comportamento de M para valores crescentes de n.

n	$M = (1+1/n)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
10	2,59374
100	2,70481
1.000	2,71692
10.000	2,71815
100.000	2,71827
1.000.000	2,71828
10.000.000	2,71828

Tabela 2: Valor aproximado do número e
Fonte: O autor

Para a aproximação usada na tabela acima qualquer valor posterior de n não alterará o resultado de M. Usando aproximações com mais casas decimais as mudanças ocorrerão com dígitos cada vez menores.

O número e surge de forma espontânea em várias outras questões básicas o que torna sua importância inevitável, daí o fato de ser utilizado como base para os logaritmos naturais (LIMA,2010a).

Outro fato curioso é que Napier chegou próximo de descobrir o número $1/e$. Como já visto, sua definição de logaritmos é equivalente a equação $N = 10^7(1 - 10^{-7})^L$. Se mudarmos a escala das variáveis dividindo N e L por 10^7 obtém-se $X = (1 - 10^{-7})^Y$ em que $X = N/10^7$ e $Y = L/10^7$. Para $Y = 10^7$ temos $X = 0{,}367879422\ldots$ o que nos dá aproximadamente $1/e$.

O número e exerce papel fundamental para a obtenção do logaritmo de um número negativo como será visto no capítulo 3 deste trabalho. Devido a este fato utilizaremos a notação ln para logaritmos naturais e log para logaritmos decimais.

CAPÍTULO 2 – ENTRAVES HISTÓRICOS PARA A OBTENÇÃO DE LOGARITMOS DE UM NÚMERO NEGATIVO

2.1 – Implicações Históricas

Os símbolos para indicar potências e raízes não estavam bem difundidos no início do século XVII de forma que nem Napier nem Bürgi utilizaram qualquer notação em seu invento. Como mencionado anteriormente, ambos construíram tabelas de logaritmos baseados num modelo mecânico-geométrico de pontos em movimento, estabelecendo relações entre termos de uma série geométrica com os termos de uma série aritmética. O conceito de base, conceito este que concebe o logaritmo como uma operação inversa da potenciação, não possui qualquer significado nas definições iniciais. A definição de logaritmo adotada inicialmente bem como a forma que eram construídas as tabelas logarítmicas não permitiam ou propiciavam qualquer consideração sobre estender o conceito para os números negativos, já que estas tabelas cumpriam as necessidades para as quais foram elaboradas (CAJORI, 1913).

Outro fato interessante ocorreu: a discussão de logaritmos para números negativos demorou a despertar interesse na literatura devido à própria aceitação dos números negativos nesse período de tempo.

Os números negativos foram introduzidos de forma livre pelos hindus em torno de 600 d.C., e levaram praticamente um milênio para que fossem formuladas propriedades consistentes para os mesmos. Matemáticos indianos como Brahmagupta (598 d.C. – 670 d.C.) e Bhaskara Akaria (1114 – 1185) escreveram trabalhos discorrendo sobre alguns significados para os números negativos. Contudo, esses números ganharam aceitação de forma vagarosa na Europa Moderna. Muitos matemáticos entre os séculos XVI e XVII desconsideravam os números negativos quando estes apareciam em seus cálculos, tendo-os como valores falsos ou impossíveis.

Girolamo Cardano (1501 – 1576) escreveu o primeiro tratado dedicado exclusivamente à Álgebra, o “Ars Magna”. Nessa obra é dada pequena atenção aos números negativos e raízes negativa (BOYER, 2010). Cardano classifica o que atualmente é denominado números reais positivos como “números verdadeiros”, e os números negativos e raízes de números negativos como “números falsos” ou “fictícios”.

Outro expoente matemático Simom Stevin (1548 – 1620), em seus estudos, começou a admitir números negativos como raízes e coeficientes de algumas equações, fato este que contribuiu no processo de aceitação desses números em meios acadêmicos. Mas foi apenas no século XVIII que este cenário modificou significativamente com uma interpretação geométrica para os números positivos e negativos, como sendo segmentos de sentidos opostos. Nesse ínterim, o trabalho mais relevante foi o livro “Tratado da Álgebra” (1748), publicado dois anos após a morte de seu autor, o escocês Colin MacLaurin (1698 – 1746). Nesta obra, o conceito de uma quantidade negativa é considerada tão real quanto uma quantidade positiva tomadas de forma simétrica em relação ao zero como origem, corroborando a definição geométrica. Contudo, criavam-se controvérsias entre o “zero absoluto” e o “zero origem” uma vez que MacLaurin não os distinguia. Apesar disso, esta foi a obra de um matemático moderno que mais se aproximou da compreensão dos números negativos, tornando-se referência nesse estudo (MEDEIROS,1992).

Como podemos perceber, a difusão dos números negativos foi lenta, gradativa e conflituosa, quadro que permaneceu assim até meados do século XIX (GLAESER, 1985), o que explica a dificuldade em associá-los aos conceitos que efervesceram na Idade Média, dentre estes o conceito de logaritmo, quadro que, parece ter permanecido até 1712, quando Leibniz publicou um artigo na revista alemã *Acta Eruditorum*, discorrendo sobre o assunto.

Gottried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) nasceu em Leipzig (Alemanha) e é considerado o último sábio a conseguir conhecimento universal (BOYER, 2010). Tornou-se célebre por dividir a invenção do Cálculo ou Análise Matemática como passou a ser denominada, com o inglês Isaac Newton. Leibniz propôs que um número negativo não poderia ter logaritmo real já que toda potência de expoente real de um número positivo a, é um número positivo (LIMA, 2010b). Ao se aceitar essa proposição levanta-se uma nova questão:

“*Se um número negativo não possui logaritmo real, logo esse logaritmo deve ser complexo!*”

Tem-se então, novamente, um impasse histórico de aceitação, agora de um novo conjunto numérico que atenda diversas questões e propriedades algébricas e geométricas não satisfeitas pelos números reais.

Apesar dos primeiros registros do aparecimento de raízes negativas datarem do início da era cristã em obras como *Estereometria*, do matemático grego Heron em aproximadamente 74 d.C. e Arithmetica *de Diophanto*, publicado em aproximadamente 275 d.C, foi apenas no século XVI novamente com o matemático italiano Girolamo Cardano que esses números ganharam algum destaque no Capítulo 37 do seu livro Ars Magna, onde expõe um curioso problema: dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes cujo produto seja 40. Ao chamar de x a primeira parte, a outra parte terá comprimento $(10 - x)$. Equacionando as partes tem-se:

$x.(10 - x) = 40$

$x^2 - 10x + 40 = 0$, cujas soluções são $x = 5 + \sqrt{-15}$ e

$x = 5 - \sqrt{-15}$.

Cardano notou que se considerarmos as raízes como números, obtemos:

$$x.(10 - x) = (5 + \sqrt{-15}).[10 - (5 + \sqrt{-15})]$$
$$x.(10 - x) = (5 + \sqrt{-15}).(5 - \sqrt{-15})$$
$$x.(10 - x) = 25 - (-15)$$
$$x.(10 - x) = 40.$$

Ele denominou tais soluções de sofisticadas, porém inúteis. Soluções com raízes negativas eram dispensadas ou desconsideradas há muito tempo. Ao que parece, os matemáticos até o referido momento, compartilhavam da afirmação de Bhaskara feita no século XII, “Não há raiz quadrada de um negativo, pois ele não é um quadrado”.

Um fato interessante é que não foram equações do 2º grau que motivaram o surgimento dos números complexos e sim uma disputa pela resolução de equações do 3º grau da forma $x^3 + px + q = 0$, proposta pelo matemático italiano Antonio Maria Fior, que desafiou outro matemático italiano, Nicolo Fontana Tartaglia (1499 – 1557) na resolução de cerca de 30 problemas dessa natureza. Fior conhecia um método de resolução para essas equações desenvolvido por seu mentor, Scipione Del

Ferro (1465 – 1526), que faleceu sem publicar tal método. Contudo, Tartaglia desenvolveu um método próprio, resolveu as questões propostas e sugeriu outras que seu oponente não obteve êxito. Este episódio tornou-se famoso, chegando ao conhecimento de Cardano que, em 1539, convenceu Tartaglia a revelar seu método de resolver equações cúbicas com o juramento de não publicá-lo. Com o auxílio de seu discípulo Ludovico Ferrari (1522 – 1565) conseguiu demonstrar a resolução de equações de terceiro e de quarto grau. Em 1544, ao tomar conhecimento do trabalho de Del Ferro se viu desencarregado da promessa feita a Tartaglia e publicou seus resultados no supracitado Ars Magna.

Outro matemático italiano, o algebrista Rafael Bombelli (1526 – 1573), estudou a obra de Cardano, observando de modo mais detalhado os casos em que as formas irredutíveis das equações cúbicas levavam a raízes de números negativos, o que o levou a publicar, em 1572, o livro *l'Algebra*, em que expõe as ideias de Cardano de forma mais propedêutica. No Capítulo 2 de seu livro, Bombelli investiga particularmente a equação $x^3 = 15x + 4$, cuja solução é: $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, em que se considerou a existência de raiz cúbica da forma $a + \sqrt{-b}$ e se encontrou $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$. Assim, $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1}$, donde $x = 4$. Bombelli encontrou a raiz desta equação utilizando expressões ignoradas anteriormente, ou seja, Bombelli foi o primeiro matemático a dar importância aos números que futuramente seriam denominados "números complexos". No século XVII, Descartes, em sua obra *Discurso do Método*, chamou as raízes negativas de "números imaginários". Entretanto, a formalização das operações e propriedades com esses números ocorreram dois séculos mais tarde com o matemático suíço Leonard Euler, que contribuiu também com a notação chamando de i a raiz quadrada de -1, isto é, $i^2 = -1$, tornando i a base dos números imaginários. Dessa forma, o número $a + b\sqrt{-1}$ passou a ser representado em sua forma algébrica $a + bi$, o que possibilitou que esses números fossem operados como polinômios. As contribuições de Leonard Euler serão vistas de maneira mais detalhada no Capítulo 3 deste trabalho, visto que este exerce papel fundamental na resolução do problema proposto nesta pesquisa.

Percebe-se, claramente, o porquê do logaritmo de um número negativo levar tanto tempo para ser questionado, e mesmo após a consideração de Leibniz sobre o assunto, haver relutância em discorrer sobre o tema, uma vez que há implicações históricas nos conceitos matemáticos essenciais que compreendem este problema.

2.2 – Impasses e Controvérsias

A primeira controvérsia acerca da existência do logaritmo de um número negativo teve início mediante a troca de correspondências entre Gottried Leibniz e o matemático suíço Johann Bernoulli (1667 – 1748), entre março de 1712 e julho de 1713.

Leibniz entendia os logaritmos como sendo a função inversa da potenciação, ou seja, o logaritmo de x na base a é o expoente y tal que $a^y = x$; portanto esse logaritmo deve ser obrigatoriamente um número real positivo e a recíproca também deve ser verdadeira: o logaritmo de um número negativo não pode ser um número real positivo, portanto deve ser complexo, sem mais especificações.

Johann Bernoulli pertencia a uma família de matemáticos (há registros de contribuições de 13 matemáticos pertencentes a este clã, (EVES, 2004)). Foi professor na Universidade da Basiléia e manteve constante intercâmbio de ideias com Leibniz. Bernoulli defendia a existência de logaritmos reais para números negativos; para isso baseava-se no seguinte argumento:

Se $(-x)^2 = x^2$, então $ln\,(-x)^2 = ln\,x^2$, o que implica $2\,ln\,(-x) = 2\,ln\,x$, $ln\,(-x) = ln\,x$ para qualquer $x > 0$.

Leibniz, por outro lado, por meio do desenvolvimento da série $\ln(1+\mathrm{x}) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$, para $x = -2$, encontrou o resultado $\ln(-1) = -2 - 2 - \frac{8}{3} - 4 - \frac{32}{5} - \cdots$. Como consequência, o $ln(-1)$ é uma soma infinita de números negativos, portanto o argumento de Bernoulli não é válido (DUNHAM, 2000). Na verdade, esta série diverge para $x > 1$ (BOYER, 2010). Em definitivo, Leibniz não aceitava a existência do logaritmo de números negativos pelo argumento de Bernoulli pelo fato de que, se $ln\,(-1)$ existe, supõe-se que:

$\ln\sqrt{-1} = \ln(-1)^{½}$, e assim $\frac{1}{2}\ln(-1) = \frac{1}{2}\ln(1)$, logo tem-se um logaritmo real de um número “inexistente”.

Analisando a propriedade logarítmica $ln(x.y) = ln(x) + ln(y)$, observa-se que para validar a proposição de Bernoulli teríamos:

$ln(0) = ln(0.e) = ln(0) + ln(e)$, o que implica $ln\,(e) = 0$, que contradiz o propriedade $ln(e) = 1$.

Entretanto, se retirarmos o zero do domínio da função logarítmica, obtemos uma extensão da função que mantém as duas propriedades fundamentais $ln(e) = 1$ e $ln(x.y) = ln(x) + ln(y)$.

Como $ln(1) = 0$ então:

$0 = \ln(1) = \ln[(-1).(-1)] = \ln(-1) + \ln(-1) = 2\ln(-1)$, logo $\ln(-1) = 0$, assim $\ln(-x) = \ln(-1.x) = \ln(-1) + \ln(x) = 0 + ln(x) = ln(x)$, logo $ln|-x| = ln(x)$.

Aparentemente, abrindo-se esta exceção, Bernoulli estaria correto. A função logarítmica foi estendida de forma que seus valores permaneçam reais e ainda se tenha o logaritmo de um produto igual à soma dos logaritmos dos fatores. Todavia, a propriedade $a^{log_a x} = x$ deixaria de ser verdadeira; teríamos então: $a^{log_a x} = |x|$.

Partindo desses argumentos antagônicos, nem Leibniz nem Bernoulli chegaram a uma conclusão: o primeiro insistia em olhar para o logaritmo como expoente da potência $a^y = x$ e o segundo insistia na validez da propriedade $ln(x.y) = ln(x) + ln(y)$.

Outro matemático que compartilhava da opinião de Bernoulli era o francês Jean Le Rond d'Alembert (1717 – 1783), que também escreveu um artigo sobre o assunto. Desta vez a controvérsia epistolar foi com Leonard Euler que, em 1749 escreveu *De la controverse entre Mrs. Leibnitz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatifs et imaginaires* (EULER, 1751). Euler utilizou a fórmula $e^{i\theta} = \cos\theta + isen\theta$, válida para qualquer ângulo (fórmula esta que era conhecida pela comunidade científica, porém não claramente enunciada), fazendo a substituição $\theta = \pi$, isto é, $e^{i\pi} = \cos\pi + isen\pi$ e obteve $e^{i\pi} = -1$, que equivale a $\ln(-1) = i\,\pi$. Portanto, o logaritmo de um número negativo não é um número real como pensavam Bernoulli e d'Alembert, mas sim "imaginário puro" (BOYER, 2010). Euler manteve intensa correspondência com d'Alembert discorrendo sobre diversos assuntos, e tentou convencê-lo a respeito de suas teses sobre os logaritmos de números negativos.

Porém jamais obteve êxito, pois d'Alembert continuou a apresentar novos argumentos para sustentar sua própria tese. A verdade é que d'Alembert continuava definindo logaritmos como os termos de uma progressão aritmética em relação a uma progressão geométrica, como inicialmente propuseram Napier e Bürgi (jamais adotou a definição da função logarítmica como a função inversa da função exponencial).

Euler e d'Alembert mantiveram um intenso comércio intelectual. Esse intercâmbio iniciou-se com cordialidade e reconhecimento de ambos os lados, porém devido a intermináveis discussões de cunho doutrinário, este clima foi interrompido e culminou em uma série de acusações formuladas por d'Alembert contra Euler. Ao que parece, as diferenças transcendiam o âmbito das teorias, o mesmo ocorrendo entre Leibniz e Bernoulli (TATON, 1984).

Fato é que as posições defendidas por Leibniz, Bernoulli e d'Alembert só poderiam ser compatíveis quando limitavam-se a considerar logaritmos de números positivos (LIMA, 2010b). O diferencial nos trabalhos de Euler foi o de não contestar o estatuto dos números negativos na época e trabalhar de forma singular com "números imaginários", como veremos a seguir.

CAPÍTULO 3 – LOGARITMOS DE NÚMEROS NEGATIVOS

3.1 – Equação de Euler

Leonhard Euler (1707 – 1783), matemático suíço nascido na Basiléia, estudou com Johann Bernoulli na Universidade da Basiléia onde ingressou em 1720. Considerado insuperável na história da matemática, estudou todos os ramos conhecidos. Entre livros e artigos publicou 530 trabalhos, deixando ainda postumamente manuscritos que renderam vários anos de estudos. Segundo a Sociedade Suíça de Ciências Naturais, a obra completa de Euler compreende 886 trabalhos; isso lhe credita o status de escritor matemático mais fecundo da história. A obra Introductio in Analysin Infinitorum (mencionada anteriormente), tratado que é constituído de dois volumes, publicada em 1748, é considerada o livro chave para o estudo da análise e serviu para o desenvolvimento da matemática durante toda a segunda metade do século XVIII. Nesse livro são utilizadas diversas notações implementadas por Euler, em que destacam-se: f(x) para funções, e para a base dos logaritmos naturais, $\sum$ para somatórios e i para a unidade imaginária $\sqrt{-1}$, assim como as abreviações sin, cos, tang, notações estas próximas das utilizadas atualmente. Entretanto, a contribuição mais significativa de Euler foi a fórmula que leva seu nome: $e^{ix} = \cos x + i\, sen\, x$, que, para $x = \pi$ resulta em $e^{i\pi} + 1 = 0$. Esta curiosa equação, segundo (MAOR, 2008), relaciona os cinco números mais importantes da matemática. Euler foi um dos primeiros matemáticos a tratar os logaritmos como expoentes da forma como são vistos na atualidade.

No Introductio in Analysin Infinitorum, dedicou-se a análise matemática por meio do estudo de processos infinitos. Euler era um matemático experimentalista fazendo substituições inusitadas, não se preocupando com um rigor matemático. O resultado disto são equações que surpreenderam e desafiaram matemáticos da época e posteriores. Analisaremos alguns desses desenvolvimentos a partir do estudo do número e. Como visto no Capitulo 1, e é o limite da sequência numérica $(1 + 1/n)^n$ quando n tende ao infinito: $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Utilizando-se o desenvolvimento binomial de Newton, segue-se que:

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})^{\mathrm{n}} = \mathrm{C}_{\mathrm{n},0}\,\mathrm{a}^{\mathrm{n}}\mathrm{b}^{0} + \mathrm{C}_{\mathrm{n},1}\,\mathrm{a}^{\mathrm{n}-1}\mathrm{b}^{1} + \cdots + \mathrm{C}_{\mathrm{n},\mathrm{n}}\,\mathrm{a}^{0}\mathrm{b}^{\mathrm{n}}\,.$$

Fazendo a = 1 e b = $\frac{1}{n}$ tem-se que:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = 1+1+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots+\frac{1}{n^{n}}\,.$$

Expandindo-se infinitamente a série, a expressão dentro de cada parênteses tenderá a 1, pois as frações $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, tendem a 0 à medida que n tende ao infinito. Temos então:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}\,.$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}\,.$$

O quadro abaixo mostra as primeiras sete somas parciais, dando uma aproximação para o número e de nove casas decimais:

$$2 = 2$$

$$2+\frac{1}{2} = 2{,}5$$

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6} = 2{,}666$$

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24} = 2{,}708333$$

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120} = 2{,}716666$$

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720} = 2{,}7180555$$

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{1}{5040} = 2{,}718253968$$

Nota-se que esta série converge, pois a cada termo acrescido, o valor a ser somado diminui consideravelmente, devido ao denominador da forma $\frac{1}{n!}$. Ao se repetir esse desenvolvimento com a substituição $\frac{x}{n}$ no lugar de $\frac{1}{n}$, obtém-se a série:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right).$$

A grande virtude de Euler foi manipular tais séries fazendo substituições improváveis como no caso da série e^x em que atribuiu a variável x o valor da expressão imaginária ix, em que $i = \sqrt{-1}$, obtendo:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots + \frac{(ix)^n}{n!} + \cdots.$$

Pelas propriedades dos números complexos, as potências se repetem a cada 4 ciclos ou seja: $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ e $i^4 = 1$; consequentemente pode-se reescrever e^{ix} como:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{(x)^2}{2!} - \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(x)^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{(x)^{(2n)}}{(2n)!} + (-1)^n\frac{(ix)^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + \cdots.$$

Separando os termos da série em uma soma de números reais (primeiro parênteses) e uma soma de números imaginários (segundo parênteses) obtém-se:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{(x)^2}{2!} + \frac{(x)^4}{4!} - \frac{(x)^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{(x)^{(2n)}}{(2n)!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{(x)^3}{3!} + \frac{(x)^5}{5!} - \frac{(x)^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{(x)^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + \cdots\right).$$

O desenvolvimento em série de potências das funções trigonométricas $cosx$ e $senx$ (APÊNDICE), foram estudados pelos matemáticos Brook Taylor (1685 – 1731) e Colin Maclaurin (1698 – 1731) e já eram conhecidas e difundidas na época de Euler:

$$cosx = \left(1 - \frac{(x)^2}{2!} + \frac{(x)^4}{4!} - \frac{(x)^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{(x)^{(2n)}}{(2n)!} + \cdots\right).$$

$$senx = \left(x - \frac{(x)^3}{3!} + \frac{(x)^5}{5!} - \frac{(x)^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{(x)^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + \cdots\right).$$

Substituindo $senx$ e $cosx$ na equação e^{ix}, Euler chegou a sua mais famosa fórmula:

$$\boldsymbol{e^{ix} = cosx + isenx.}$$

Essa notável equação tornou possível o aparecimento de outras relações interessantes entre as quais a mais relevante para esse trabalho, obtida pela substituição $x = \pi$, obtém-se a equação $e^{i\pi} + 1 = 0$. Nesta equação estão interligadas quatro importantes ramos da matemática:

- Aritmética, representada pelo 0 e 1;
- Álgebra, representada pelo i ;
- Geometria, representada pelo π ;
- Análise, representada pelo e.

Essa, entre outras curiosidades, torna a equação de Euler uma das mais notáveis da história da matemática, intrigando ainda matemáticos contemporâneos.

> Para Benjamim Peirce, um dos principais matemáticos de Harvard do século XIX, a fórmula de Euler, $e^{i\pi} = -1$, veio como uma revelação. Ao descobri-la, um dia, ele se voltou para seus alunos e disse: "Cavalheiros, que isto certamente seja verdadeiro é absolutamente paradoxal; não podemos entender a fórmula, não sabemos o que significa. Mas conseguimos prová-la e portanto sabemos que deve ser verdade." (MAOR, 2008, p. 208).

3.2 – Obtenção do Logaritmo de um Número Negativo

Para formalizar o conceito de logaritmos de números negativos, Euler partiu da representação geométrica de um número complexo. Esta representação gráfica foi sugerida por três matemáticos contemporâneos: o norueguês Caspar Wessel (1745 – 1818) em 1797, o francês Jean Robert Argand (1768 – 1822) em 1806 e o alemão Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), em 1831, e ficou conhecido como plano de Argand-Gauss ou, simplesmente, plano complexo.

Para essa representação, um número complexo é definido como sendo um par ordenado onde sua forma algébrica é dada por $z = x + iy$, x representa a parte real e graficamente é marcado no eixo horizontal e iy é a parte imaginária representada no eixo vertical. Desta forma, o par (x, y) é obtido geometricamente segundo a Figura 2.

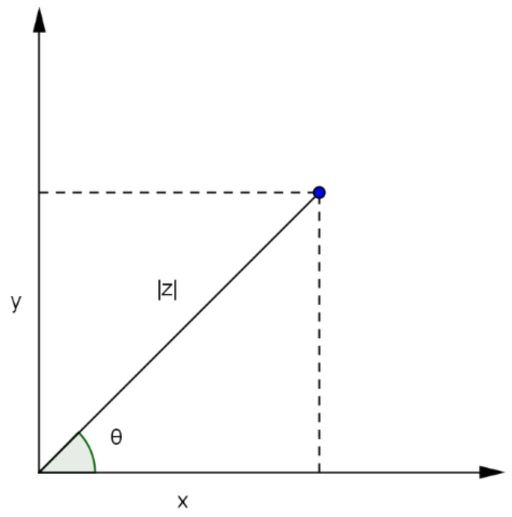

Figura 2: Representação geométrica retangular do número $z = x + iy$
Fonte: O autor

O plano de Argand-Gauss estabelece uma correspondência entre os números complexos e os pontos do plano. O número $z = x + iy$ forma um ângulo com a horizontal; denotando este ângulo por θ e se r é a distância do ponto (x, y) à origem dos eixos (também denominado polo), temos uma segunda forma de representação denominada sistema de coordenadas polares (Figura 3) .

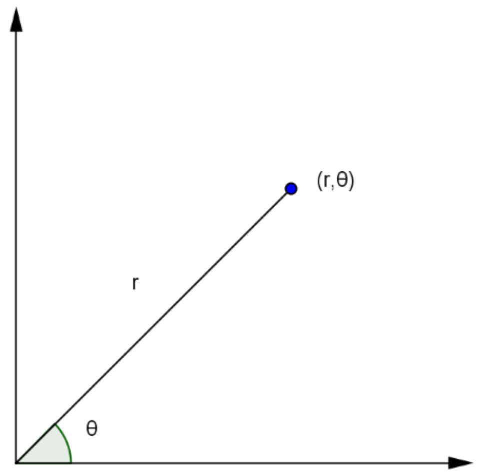

Figura 3 : Representação geométrica polar do número $z = x + iy$
Fonte: O autor

As coordenadas retangulares (x, y) e as coordenadas polares (r, θ) se relacionam por meio das razões trigonométricas $x = rcos\theta$ e $y = rsen\theta$. Substituindo-se $x\ e\ y$ na forma algébrica $z = x + iy$ obtém-se:

$$z = x + iy = r\ cos\theta + irsen\theta$$
$$z = r(cos\theta + isen\theta).$$

Voltando a equação de Euler $e^{ix} = cosx + isenx$ em que o expoente do primeiro termo é puramente imaginário, pode-se fazer a substituição ix por $z = x + iy$, donde obtém-se:

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}.e^{iy} = e^{x}(\cos y + i\mathrm{sen}\ y\ )$$
$$e^{z} = e^{x}(\cos y + i\mathrm{sen}\ y\ ).$$

Comparando a equação de Euler com a forma polar de um número complexo, tem-se $e^{x} = r;\ y = \ \theta.$

A função e^{z} é periódica; isso se deve ao fato das funções $\cos y$ e $sen\ y$ possuírem período $2\pi\ \mathrm{radianos}$. Esse fato se observa na representação gráfica de um número complexo (Figura 4).

Como exemplo, vamos obter a representação gráfica do número $z = 1 + i$. Temos $x = 1$, $y = 1$; portanto o ângulo $\theta = arc\tan 1 = \frac{\pi}{4}$ e $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Na forma polar tem-se

$$z = \sqrt{2}\ \left(cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}\right)$$
$$z = \sqrt{2}\ \left(cos\frac{9\pi}{4} + isen\frac{9\pi}{4}\right)$$

.

.

.

$$z = \sqrt{2}\ \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + \ isen\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right).$$

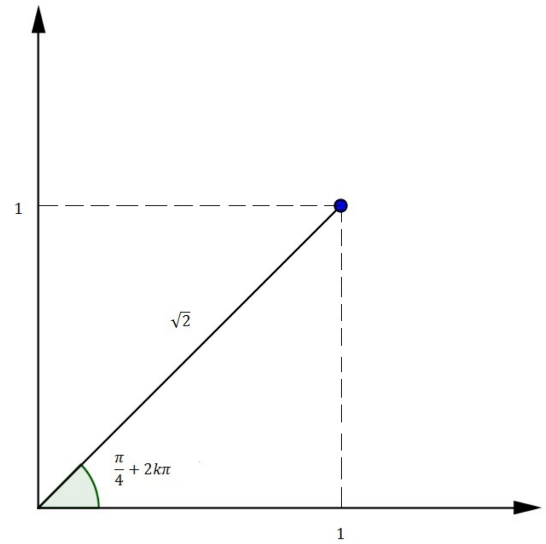

Figura 4: Representação geométrica polar do número $z = 1 + i$
Fonte: O autor

Euler definiu o inverso da função $w = e^z$ como sendo o logaritmo natural complexo de z. Então, se $e^z = r(\cos\theta + i\text{sen}\,\theta\,)$, como $e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$, segue-se que $e^z = re^{i\theta}$, $w = \ e^z = re^{i\theta}$, $w = re^{i\theta}$;

$$ln\,w = ln\,r + \ ln\,e^{i\theta}$$
$$ln\,w = ln\,r + \ i\theta\ ln\,e.$$

Como r é o módulo de w ,ou seja, $|w|$ e θ está definido a menos de um múltiplo inteiro de 2π, conclui-se que:

$$\boldsymbol{ln\,w} = \boldsymbol{ln}\,|\boldsymbol{w}| + \boldsymbol{i}(\boldsymbol{2k\pi} + \ \boldsymbol{\theta}).$$

Portanto, o logaritmo de um número negativo constitui, na verdade, uma infinidade de valores, encontrados à medida que são tomados números inteiros para

k. Porém, nenhum destes valores são números reais; são estes imaginários. Em relação a isso Euler afirmou:

> “Vemos portanto que é essencial à natureza dos logaritmos que cada número tenha uma infinidade de logaritmos e que todos esses logaritmos sejam diferentes, não somente entre si mas também de todos os logaritmos dos demais números.
> Ocorre com os logaritmos o mesmo que com os ângulos ou arcos de círculo; pois em cada seno ou cosseno corresponde uma infinidade de arcos diferentes, bem assim a cada número convém uma infinidade de logaritmos. Mas é preciso aqui observar uma grande diferença: todos os arcos que correspondem ao mesmo seno ou cosseno são reais, mas todos os logaritmos de um mesmo número são imaginários, com exceção de um único se o número dado for positivo, e todos os logaritmos dos números negativos ou imaginários são, sem exceção, imaginários.” (LIMA, 2010b, p. 184,185)

Outro fato que se percebe é que, se w é um número real positivo tal que $w = e^z$ então $ln\, w = ln\,|w| + i(2k\pi + \theta)$ fornece um logaritmo real encontrado atribuindo $k = 0$ e os demais valores são todos complexos.

Na dedução de Euler observa-se também que se $\ln w$ significa o conjunto de todos os números complexos z tal que $w = e^z$, então são válidas as seguintes propriedades que são bem conhecidas na literatura:

- $ln(x.y) = ln(x) + ln(y)$
- $ln(e) = 1$

O logaritmo do produto $(x.y)$ é um número complexo se, e somente se, a soma do logaritmo de x com o logaritmo de y é também um número complexo.

Dessa forma, a solução desenvolvida por Euler unifica as posições defendidas anteriormente por Leibniz e por Bernoulli. A este respeito, Elon Lages Lima afirma:

> (...) admitindo uma infinidade de logaritmos para cada número, tem-se $e^{logw} = w$, como queria Leibniz, e vale ainda $\log(w.z) = \log(w) + \log(z)$, conforme pretendia Jean Bernoulli.” (LIMA, 2010b, p. 185)

3.3 – Exemplos

1) Obtenha o logaritmo natural de -1.

Como $ln\, w = ln\, |w| + i(2k\pi + \theta)$, então $ln\,(-1) = ln\, 1 + i(2k\pi + \pi)$. Fazendo-se $-2 \leq k \leq 2$, $k \in Z$, obtém-se os seguintes logaritmos:

$k = -2,\ ln(-1) = ln\, 1 + i(-4\pi + \pi) = -3i\pi\,;$

$k = -1,\ ln(-1) = ln\, 1 + i(-2\pi + \pi) = -i\pi\,;$

$k = 0,\ ln(-1) = ln\, 1 + i(0 + \pi) = i\pi\,;$

$k = 1,\ ln(-1) = ln\, 1 + i(2\pi + \pi) = 3i\pi\,;$

$k = 2,\ ln(-1) = ln\, 1 + i(4\pi + \pi) = 5i\pi\,.$

Observa-se que para $k = 0$, tem-se a equação de Euler na forma $e^{i\pi} = -1$, ou seja, $\ln(-1) = i\pi$.

2) Obtenha o logaritmo natural de -3.

$ln\,(-3) = ln\, 3 + i(2k\pi + \pi)$; para $k = 0$ obtém-se:

$ln\,(-3) = ln\, 3 + i(2.0.\pi + \pi) \cong 1{,}09 + i\pi$

Observação: a equação $ln\, w = ln\, |w| + i(2k\pi + \theta)$, permite também calcular o logaritmo de um número complexo:

3) Calcule o logaritmo natural do número complexo $1 + i$.

Como $|w| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ e $\theta = arco\ tangente\ de\ \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$, então

$ln(1 + i) = ln\,\sqrt{2} + i(2k\pi + \frac{\pi}{4})$

$ln(1 + i) = \frac{1}{2}\ ln\, 2 + i(2k\pi + \frac{\pi}{4})$

Fazendo-se $k = 0$, segue que $ln(1 + i) = \frac{1}{2} ln\, 2 + i\frac{\pi}{4}$.

Para $k = 1$: $ln(1+i) = \frac{1}{2}\, ln\, 2 + i(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} ln\, 2 + \frac{9i\pi}{4}$

Observação: O logaritmo de um número complexo também constitui uma infinidades de valores complexos.

4) Obtenha o logaritmo natural do número 2.

$ln\, 2 = ln|2| + i(2k\pi + 0)$; para $-2 \leq k \leq 2$, $k \in Z$, obtém-se

$k = -2,\ ln(2) = ln\, 2 + i(-4\pi + 0)\pi \cong 0{,}69 - 4i\pi$;

$k = -1,\ ln(2) = ln\, 2 + i(-2\pi + 0) \cong 0{,}69 - 2i\pi$;

$k = 0,\ ln(2) = ln\, 2 + i(0 + 0) \cong 0{,}69$;

$k = 1,\ ln(2) = ln\, 2 + i(2\pi + 0) \cong 0{,}69 + 2i\pi$;

$k = 2,\ ln(2) = ln\, 2 + i(4\pi + 0) \cong 0{,}69 + 4i\pi$.

Observação: Todo número positivo possui um logaritmo real (quando $k = 0$) e uma infinidade de logaritmos complexos.

CAPÍTULO 4 - LOGARITMO DE UM NÚMERO NEGATIVO E A CALCULADORA

Algumas calculadoras científicas operam com números complexos, como é o caso da CASIO fx-82MS que possibilita somar, subtrair, multiplicar e dividir esses números em sua forma algébrica e em sua forma polar. Porém, como a maioria das calculadoras populares, esta também não efetua cálculos com logaritmos de números negativos. Uma calculadora que possui tal recurso é a HP 50g (Figura 5).

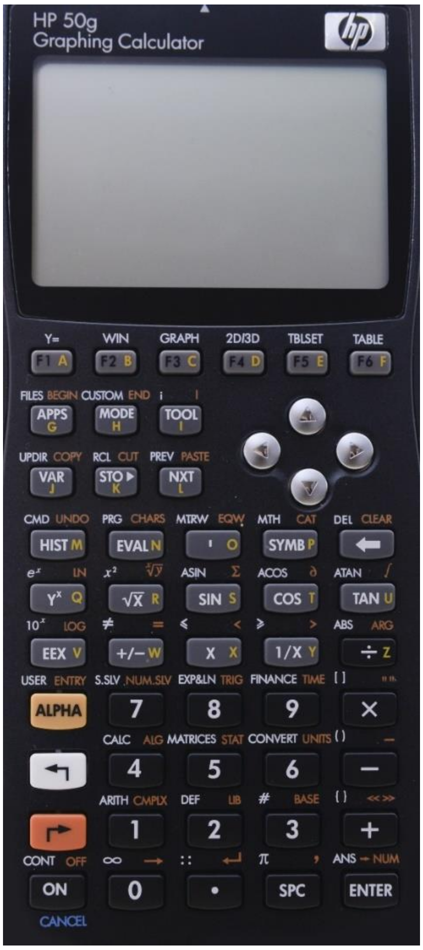

Figura 5: Calculadora que opera com logaritmos de um número negativo
Fonte: O autor

Para configurar a calculadora para operar no campo dos números complexos basta ligá-la e selecionar a caixa de nome *complex* obedecendo a seguinte sequência: teclas *on*, *mode*, *F3*, seleciona *complex* e *F6* para confirmar.

Vamos retornar aos Exemplos 1,2,3 da Subseção 3.3 deste trabalho e resolvê-los utilizando-se tal calculadora.

1) Obtenha o logaritmo natural de -1.

Para obter o logaritmo de -1, basta na tela principal digitar o número 1 e a tecla +/- para deixá-lo negativo (Figura 6) e, na sequência, digita-se a tecla de cor laranja com uma seta para a direita para selecionar a função ln que encontra-se inscrita sobre a tecla y^x. A resposta é obtida apenas para $k = 0$ e em forma de par ordenado, em que o primeiro termo é a parte real e o segundo corresponde à parte imaginaria (Figura 7).

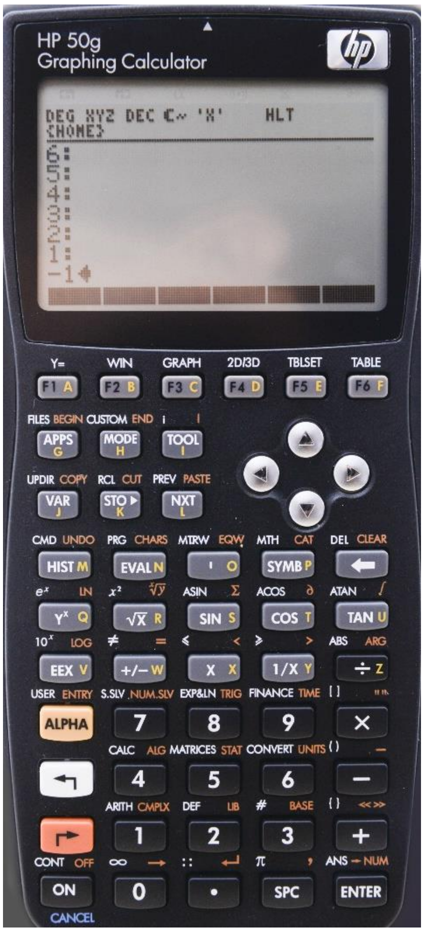

Figura 6: Digitação de -1 para obtenção de seu logaritmo
Fonte: O autor

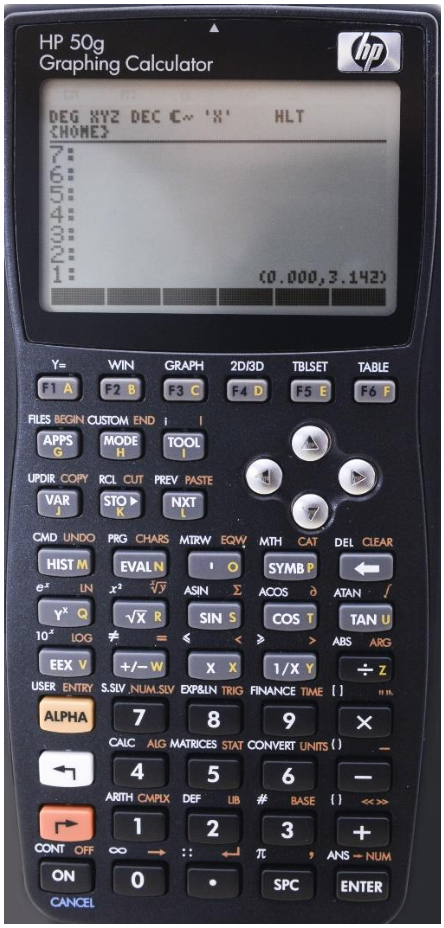

Figura 7: Logaritmo de -1 na forma de par ordenado
Fonte: O autor

Observação: A calculadora foi configurada para obter aproximações de 3 casas decimais.

2) Obtenha o logaritmo natural de -3.

Obedecendo a mesma sequência do exemplo anterior, obtém-se (Figuras 8 e 9):

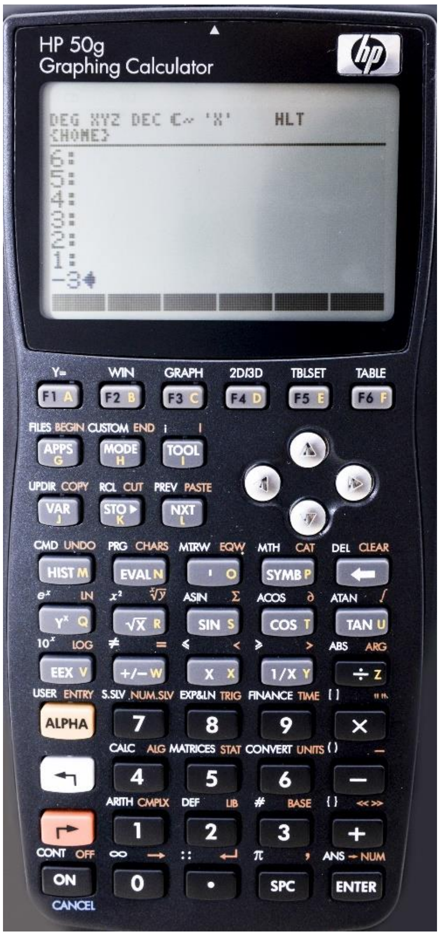

Figura 8: Digitação de -3 para obtenção de seu logaritmo
Fonte: O autor

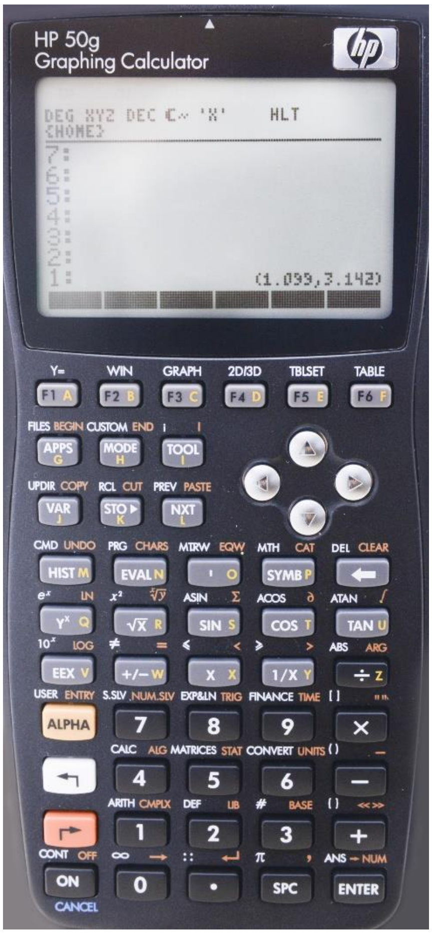

Figura 9: Logaritmo de -3 na forma de par ordenado
Fonte: O autor

3) Obtenha o logaritmo natural do número complexo $1 + i$.

Neste caso, o número $1 + i$ será digitado também na forma de par ordenado, ou seja, $(1,1)$. Primeiramente, digita-se a tecla branca com seta para a esquerda e, em seguida, a tecla de subtração cuja segunda função em branco corresponde à abertura de parênteses. Tecla-se o número 1, e em seguida a tecla laranja com seta para a direita e a tecla SPC para se obter a virgula, e novamente o número 1, está formado o par ordenado (Figura 10). Após isso, digita-se mais uma vez a tecla laranja com seta para a direita para selecionar a função ln (Figura 11).

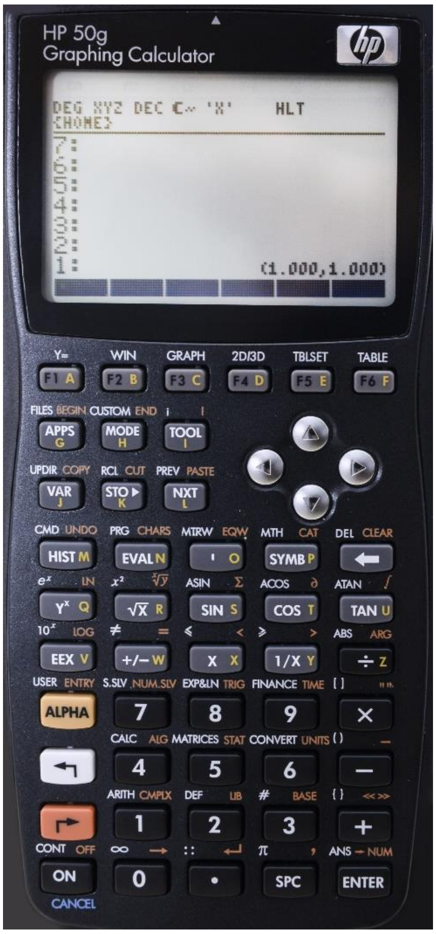

Figura 10: Digitação de $1 + i$ na forma de par ordenado
Fonte: O autor

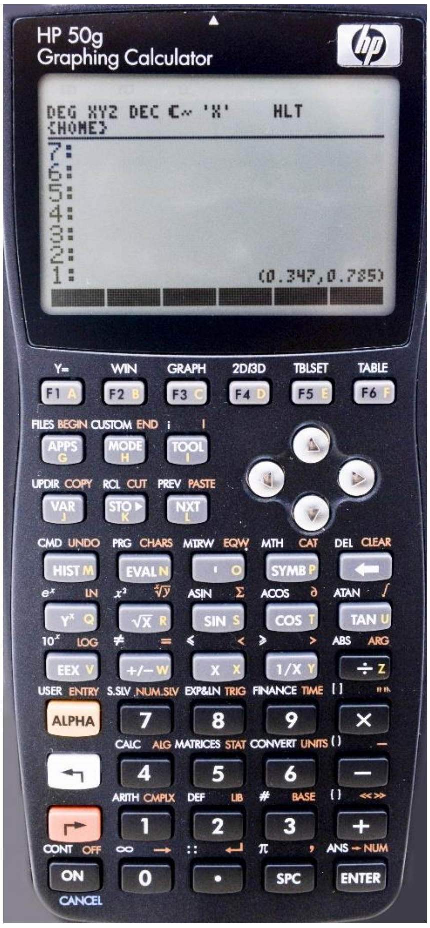

Figura 11: Logaritmo de $1 + i$ na forma de par ordenado logaritmo
Fonte: O autor

A calculadora HP 50g possui também a função para obtenção de logaritmos decimais de números negativos.

Exemplo: Obtenha o logaritmo decimal de -1.

Basta novamente digitar o número -1 na tela principal (Figura 12) e, em seguida, LOG que encontra-se na segunda função em laranja sobre a tecla EEX (Figura 13).

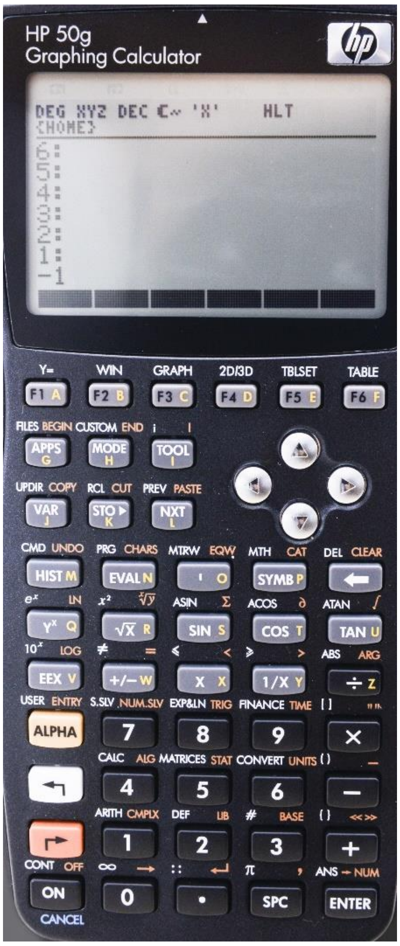

Figura 12: Digitação no número -1 para obtenção de seu logaritmo decimal
Fonte: O autor

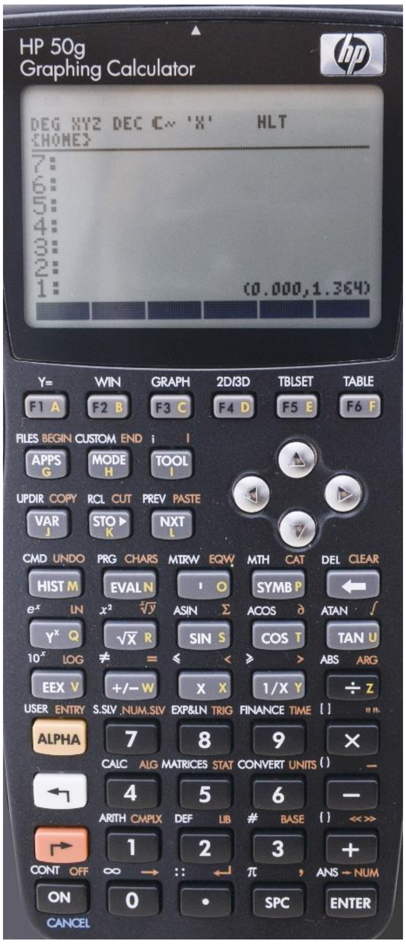

Figura 13: Logaritmo decimal de -1 em forma de par ordenado
Fonte: O autor

Para efetuar a mudança de base do logaritmo natural para o logaritmo decimal usaremos a fórmula $\log a = \frac{\ln a}{\ln 10}$. Assim para o logaritmo de -1 na base 10, para $k = 0$, é igual a $\log(-1) = \frac{\ln(-1)}{\ln 10}$, $\log(-1) = \frac{\ln(-1)}{\ln 10}$, $\log(-1) = \frac{i\pi}{2{,}303}$, $\log(-1) \cong 1{,}364i$. Na forma de par ordenado corresponde ao par $(0{,}000\, , 1{,}364)$, conforme obtido na calculadora (Figura 13).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os logaritmos de números negativos são pouco difundidos até mesmo no meio acadêmico, restando a poucos o desejo de estudá-los com afinco. Podemos perceber, a partir desta constatação, o porquê de tais números serem ignorados na maior parte dos livros (principalmente voltados para o ensino médio), artigos e sítios de matemática na internet, os quais preferem simplesmente afirmar que os logaritmos estão definidos apenas para números positivos e até mesmo que não existem logaritmos de números negativos.

Durante o desenvolvimento deste trabalho vimos que o estudo desses logaritmos foi alvo de intensas discussões de renomados matemáticos por um longo intervalo de tempo, os quais defendiam seus pontos de vista de acordo com as ferramentas matemáticas da época e de convicções próprias usando propriedades peculiares apenas aos números positivos. Estes fatos históricos são de grande relevância no estudo dos logaritmos como de outras áreas da matemática, visto que mediante estes se percebe que a construção do conhecimento se dá de forma gradativa e muitas vezes lenta, necessitando-se de discussões, embates, controvérsias, análises e formalização de novos conceitos de forma a embasar um assunto específico como o objeto de estudo deste trabalho.

Vimos também que é necessária uma análise das propriedades dos logaritmos de forma que, qualquer teoria a esse respeito, deva obedecer tais propriedades sem a necessidade de exceções como o caso dos logaritmos obtidos por Euler, o qual por meio de ferramentas do desenvolvimento de funções em séries chegou a uma notável equação. Isso possibilitou a construção de um relação simples para a obtenção do logaritmo de um número negativo, o qual não constitui apenas um valor, mas uma infinidade de valores, os quais não pertencem ao conjunto dos números reais, e sim ao conjunto dos números complexos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, B. C. **História da Matemática**; tradução de Elza F. Gomide. E. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

CAJORI, Florian. **History of the exponential and logarithmic concepts**, I – V. The American Mathematical Monthly. 1913, p. 39

COLLETTE, Jean Paul. **El Comienzo de Las Matemáticas Modernas**. Espanha: Ed. Siglo XXI, 1985

DUNHAM, W; Euler, **el maestro de todos los matemáticos**. Madrid. Nivola, 2000

EULER, Leonhard. **De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les lagarithmes des nombres negatifs et imaginaires**. Memoires de l'Académie des sciences de Berlim.1751,p.139-179.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática,** pp 344, Campinas,SP: Editora da Unicamp, 2004.

GLAESER, Georges. **Epistemologia dos números negativos**. *Boletim do GEPEM*, n°17. p.29-124, 1985.

LIMA, Elon Lages. **LOGARITMOS,** Sbm, Rio de Janeiro,Rj, 2010a.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática e outras histórias**. Sbm. 5.ed, Rio de Janeiro, Rj, 2010b.

MAOR, Eli. **e: A história de um número**, 4ª Ed. Rio de Janeiro, RJ: Record,2008.

MEDEIROS, Alexandre & MEDEIROS, Cleide. **Números Negativos: Uma história de incertezas**. *Bolema*, ano 7, n.° 8, p. 49-59, 1992.

PCN+, **Diretrizes Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Ministério de Educação/Secretaria de Educação e Tecnologia, Brasilia, 2002.

TATON, René. **Euler et D'Alembert. In: Zum Werk Leonhard Eulers. Vorträge des Euler** – Kolloquiums, Berlin, mai 1983. Basel; Birkhäuser Verlag, 1984.

APÊNDICE

A expansão em série das funções $sen\ x$ e $\cos x$ utilizadas por Leonard Euler para obtenção de sua famosa equação foram elaboradas pelo matemático inglês Brook Taylor e obedece a seguinte lei:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Essa expressão para $x_0 = 0$ é conhecida como fórmula de Maclaurin, devido ao matemático escocês Colin Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Aplicando a fórmula de Taylor-Maclaurin para as funções $sen\ x$ e $\cos x$ obtém-se:

$$cosx = \left(1 - \frac{(x)^2}{2!} + \frac{(x)^4}{4!} - \frac{(x)^6}{6!} + \ ... \ + (-1)^n \frac{(x)^{(2n)}}{(2n)!} + \cdots\right).$$

$$senx = \left(x - \frac{(x)^3}{3!} + \frac{(x)^5}{5!} - \frac{(x)^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{(x)^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + \cdots\right).$$