UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA - UEPG
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT)

RUBENS EDGARD FURSTENBERGER FILHO

ESTUDO DAS FUNÇÕES – APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

PONTA GROSSA
2015

RUBENS EDGARD FURSTENBERGER FILHO

ESTUDO DAS FUNÇÕES – APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada no PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Estadual de Ponta Grossa, na área de concentração no Ensino da Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Airton Kist

PONTA GROSSA

2015

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

Furstenberger Filho, Rubens Edgard

F991 Estudo das funções – aplicações no ensino médio/ Rubens Edgard Furstenberger Filho. Ponta Grossa, 2015.
46f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Orientador: Prof. Dr. Airton Kis.

1.Funções. 2.Modelagem Matemática. 3.GRAPHMÁTICA. 4.Matemática do cotidiano. I.Kis, Airton. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. T.

CDD: 515

TERMO DE APROVAÇÃO

Rubens Edgard Furstenberger Filho

"ESTUDO DAS FUNÇÕES – APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO"

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador: Prof. Dr. Airton Kist
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG/PR

João Biesdorf
Prof. Dr. João Biesdorf
Departamento de Matemática, UTFPR/PR

Scheila V. Biehl
Profa. Dra. Scheila Valechenski Biehl
Departamento de Matemática, UEPG/PR

Ponta Grossa, 20 de Agosto de 2015.

Dedico esse trabalho à minha esposa Mariane e à minha filha Eduarda que souberam compreender minhas ausências, me apoiaram incondicionalmente na busca desse sonho e me incentivam sempre a lutar pela Educação.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Airton Kist, por ter sugerido questões a serem abordadas na minha dissertação. Aos professores Luciane Grossi e Marciano Pereira, do Departamento de Matemática da UEPG, que foram coordenadores iniciais do PROFMAT em Ponta Grossa, programa esse que oportunizou vários professores da rede pública de Ensino, como eu, a buscarem qualificação para tentar melhorar a qualidade do Ensino de Matemática no nosso país.

A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo.

(Galileo Galilei)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo estudar as funções sob um olhar prático, usando como suporte problemas baseados em situações do cotidiano e científicos. Essa abordagem ajuda o aluno a compreender a importância do estudo de funções através de uma lista de problemas apoiados na Matemática observada em situações do cotidiano como: análise de contas de luz e água, custo de uma corrida de táxi, análise gráfica do crescimento exponencial de uma bactéria num estudo de laboratório ou no decaimento radioativo de elementos químicos. Os problemas permitem aos alunos das turmas do primeiro ano do ensino médio analisar, com auxílio do software GRAPHMATICA, o comportamento linear de funções afins e das curvas de funções exponenciais. Também permitem analisar porque essas funções, em muitas aplicações, tem domínio positivo.

Palavras-chave: Funções, Modelagem Matemática, GRAPHMATICA, Matemática do cotidiano.

ABSTRACT

This work aims to study the functions from a practical vision , using as support issues based on scientific everyday situations. This approach helps the student to understand the importance of the study of functions through a list of issues supported by mathematics of day by day as: analysis of electricity and water bills, a taxi ride fare, graphical analysis of the exponential growth of a bacteria in a laboratory study or radioactive decay of chemical elements. The problems allow students of the first year of high school classes to analyze , with the help of GRAPHMATICA software , linear behavior related functions and curves of exponential functions . Also allow analyze why these functions in many applications, have positive domain.

Keywords : Functions , Mathematical Modeling , GRAPHMATICA , Mathematics of day by day .

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Podemos dizer que a matemática é considerada como um dos meios mais eficientes pelo qual o homem compreende o mundo e constitui uma linguagem rigorosa e autêntica da ciência, o que permitiu o desenvolvimento de diversas teorias científicas. As fórmulas matemáticas e as regras são a síntese de um processo histórico que mostram a forma "final" de um conhecimento que o homem levou tempos para construir.

Historicamente o fazer matemático nas várias sociedades esteve e está permeado pela necessidade de solucionar problemas que podem ser gerados por uma necessidade social ou uma questão puramente matemática.

Entre a comunidade científica, a matemática é definida como uma ciência formal e para sua organização podemos, por exemplo, usar métodos dedutivos. No entanto, a matemática não é apenas uma ciência abstrata, ela faz parte do dia a dia das pessoas e como tal, sua construção não é realizada necessariamente pelas "leis" da lógica formal. Uma descoberta em matemática pode, na verdade, ocorrer de forma experimental, podendo a formalização e prova serem feitos posteriormente.

“A prova teria, nesse caso, não a função de criação de novos conhecimentos, mas de demonstração de algo já descoberto; porém para comunidade científica, a prova, nessa situação, mereceria o status de ‘novidade’ ou ‘descoberta’.” (ABREU, 2001). Depois de um problema surgir, e o fato de o matemático usar a forma experimental para obter o resultado, cria-se uma solução utilizada cotidianamente. Após intenso trabalho de pesquisa, é que o matemático adquire uma visão mais ampla do problema, que vai lhe permitir chegar a uma prova. Somente então é que esta experiência é reorganizada, polida e transcrita (verbal e simbolicamente) dentro dos padrões do método lógico dedutivo. Isto não significa que seu trabalho foi concluído definitivamente. A matemática nunca está pronta, acabada, nenhuma formalização é totalmente finalizada (uma definição, um conceito, só serão enunciados cada vez mais precisamente à medida que forem necessários à resolução de problemas mais complexos).

Infelizmente, em se tratando do ensino da Matemática, professores e autores de livros didáticos parecem esquecer-se do tempo e do esforço gasto pelos matemáticos para dominarem os conceitos e a linguagem sofisticada na qual o conhecimento matemático é expresso. Esquecem que não é possível aprender a linguagem na qual um conhecimento é exposto, sem antes terem tido a oportunidade de vivenciar, experimentar esse conhecimento.

A aprendizagem de matemática na sala de aula é um momento de interação entre a matemática organizada pela comunidade científica, ou seja, a matemática formal, e a matemática aplicada no cotidiano das pessoas. Não devemos nos esquecer de que o professor é uma pessoa que organiza, sua atividade matemática. Mesmo que uma pessoa seja cientificamente treinada, sua atividade não segue necessariamente as formas dedutivas, aprovadas pela comunidade científica. Por outro lado a matemática praticada na sala de aula deve ser contextualizada e abordar situações e problemas mais próximos do cotidiano dos alunos. Porque o que interessa nessa situação é a aprendizagem do aluno, e a atividade que conduz à aprendizagem é a atividade de uma pessoa construindo o seu conhecimento e, portanto, para que o aluno possa desenvolver sua capacidade de observar e interpretar os eventos do mundo. Assim, o processo de elaboração do conhecimento matemático é construtivo, o que implica a utilização de um modo de raciocínio construído por duas partes. O raciocínio matemático, tanto abstrato quanto concreto, convivem simultaneamente sem que exista um item mais importante do que o outro.

Na Matemática, enquanto ciência, os conhecimentos, deduções, teoremas, axiomas entre outros elementos são apresentados de formas organizadas, gerais, atemporais, totalmente descontextualizados, porque não há preocupação do matemático em comunicar o processo através do qual produziu determinados resultados, como por exemplo o estudo do Binômio de Newton ou dos Sistemas Lineares. Na sala de aula ocorre o inverso, para explorar os conceitos o professor precisa buscar situações familiares que deem sentido aos mesmos. Assim, como momento inicial, atribui-se um significado ao conhecimento matemático para que ele seja compreensível aos alunos. Por um processo de análise, conduzido pelo professor, o aluno vai percebendo que o conhecimento produzido pode ser aplicado a muitas situações.

Progressivamente o aluno vai transformando suas respostas, conclusões e conhecimentos, em saber matemático com caráter universal, isto é, vai se apropriando da linguagem formal da matemática.

D´Ambrósio em seu estudo da Etnomatemática diz que ela propõe um enfoque epistemológico alternativo associado a uma historiografia mais ampla. Parte da realidade e chega, de maneira natural, através de um enfoque cognitivo com forte fundamentação cultural, à ação pedagógica (D´AMBRÓSIO, 1993). A Etnomatemática reconhece que não é possível chegar a uma teoria final das maneiras de saber/fazer matemático de uma cultura, daí seu o caráter dinâmico (ao contrário da Matemática, que possuindo sua epistemologia fechada, quando se propõe a fazer um estudo com embasamento etnoantropológico, o faz fundamentado nas culturas mediterrâneas e nos algoritmos, como padrão que orienta a compreensão do modo de pensar matemático nas culturas estudadas.)

Em consequência do exposto, já não é mais possível estudar-se a matemática isoladamente das demais disciplinas e do mundo real. As ideias matemáticas devem estar ao alcance de todos e devem ser compreendidas não só pelos matemáticos, mas por todos aqueles que dela irão utilizar-se de algum modo.

Precisamos de modelos que façam a “ponte” entre o concreto e o abstrato, que consigam mostrar a necessidade do conhecimento matemático para melhor entendermos o mundo no qual vivemos.

As funções, por exemplo, são uma parte da Matemática que tem inúmeras aplicações práticas.

A justificativa da importância de realizar esse trabalho é de justamente tornar o assunto “Funções”, que em geral é apresentado de forma árida no final do Ensino Fundamental e em todo o Ensino Médio, sem conexões com a vida prática (apenas um compêndio de fórmulas e aplicações das mesmas em exercícios teóricos), mais interessante ao aluno na medida que ele a identifica aplicável em seu cotidiano.

Pretende-se que o aluno perceba que realmente a matemática é uma maneira com a qual as ciências se relacionam, e que ela está intimamente ligada ao dia a dia do aluno, através de exemplos práticos. Essa abordagem pode ajudar a melhorar a compreensão e entendimento do mundo em que vive.

As funções podem ser uma ferramenta que permitirá ao aluno prever vários aspectos econômicos que afetam a sua vida. Além disso, possibilitará também a ele perceber a necessidade do raciocínio matemático e de como suas fórmulas e características auxiliam nos cálculos para obter resultados de modelos previamente conhecidos. Essa metodologia pode ajudar o aluno a perceber que é importante saber para “o que serve” a matemática e também saber “como chegar em resultados eficientes no problema”.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta de ação para os alunos do Ensino Médio no assunto funções, pois o estudo das funções é um dos temas mais relevantes na área de Matemática.

Por sua aplicação em várias áreas do conhecimento e sua utilização em várias disciplinas do Ensino Médio como em Matemática, Química e Biologia esta proposta de ação para o ensino foi concebida. Ela é focada e utiliza problemas aplicados as ciências supra citadas, permitindo ao professor uma oportunidade de trabalho conjunto com seus colegas de outras áreas, em uma ação interdisciplinar.

Além da introdução, este trabalho está estruturado nas seguintes etapas:

a) Realização de pesquisa bibliográfica, descrevendo um breve contexto histórico sobre o desenvolvimento do conceito de funções.
b) Levantamento bibliográfico sobre como são abordados os conceitos de funções nos livros didáticos adotados nas escolas, comparando-os com o que está previsto pelas Diretrizes Curriculares Estaduais e Parâmetros Curriculares Nacionais.
c) Análise de contas de consumo como água e luz, tabulação de valores e construção de gráficos, análise do custo de uma corrida de táxi, com análise de gráficos e comparações dos mesmos, análise do aumento de uma população de bactérias e do decaimento de substâncias químicas radioativas via gráficos e análises dos mesmos.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Na matemática, para entender o conceito de função é necessário antes entender o conceito de relação, por isso a importância de compreender o conceito de relação. Algebricamente falando, a relação se dá entre dois conjuntos através de uma lei de associação. Essa lei apresenta duas variáveis. Uma representando os elementos do primeiro conjunto (onde tiramos os elementos da variável livre, chamado domínio) e outra representando os elementos do segundo conjunto (onde devem estar os elementos da variável dependente, chamado de contradomínio). Quando a lei se verifica para dois elementos (um de cada conjunto) se verifica a relação. A função possui características mais específicas do que a relação. A primeira é que um dos conjuntos possua todos os seus elementos relacionados a algum elemento do outro conjunto. E a segunda é que essa relação é única.

Inicialmente vamos analisar duas formas como o conceito de função é apresentado. O enunciado mais clássico:

> Geralmente uma correspondência entre os elementos de dois conjuntos. Mais estritamente: uma fórmula pela qual uma correspondência pode ser calculada; uma curva, uma regra, uma "caixa preta" que fornece uma saída fixa para uma dada entrada. Por exemplo: $Y = X^2$. Entrada: X. Saída X^2. (DAVIS; HERSCH, 1989, p. 457).

Agora vejamos uma definição mais atual:

> Hoje, quando pensamos em uma função, duas coisas vem a nossa mente: a curva que a representa graficamente e sua expressão analítica. Em seguida, se fizermos um exercício mais formal, também lembramos da ideia de correspondência, expressa pela definição em termos de conjuntos. (ROQUE; PITOMBEIRA, 2011, p. 237).

É importante salientar que essa última definição, considerada mais moderna, apresenta um erro conceitual, pois a ideia de que quando falamos de uma curva, falamos de uma função, está errada. Por exemplo, o círculo é uma curva mas não é uma função real. Além disso, uma função não precisa estar definida em um intervalo de números reais, como por exemplo a função de $f(x) = sen\ x$. Qualquer relação de conjuntos que satisfaça as condições de exclusividade nas relações de domínio e contradomínio e de não sobrar elementos no domínio é uma função.

Ou seja, a função tem sua definição na matemática clássica, mas atualmente a linguagem formal, embora imprescindível, está sendo colocada ao lado da "ideia do conceito de função" de maneira mais intuitiva. De fato, não existe oposição entre as duas. Na verdade elas se complementam.

Na disciplina Números e Funções Reais (MA11), estudada durante o curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, vimos a seguinte definição de função, enunciada de maneira clara e com o rigor matemático necessário, para melhor compreensão do professor de Matemática:

> Dados os conjuntos X,Y, uma função $f:X \to Y$ (lê-se "uma função de X em Y") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se o domínio e Y é o contra-domínio da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se imagem de x pela função f, ou valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \mapsto f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em f(x). (LIMA, 2006, p. 38).

Voltando a origem do estudo das funções, os gregos procuraram descrever tudo que ocorria na *Natureza* (para eles *Física*) de forma a torná-la compreensível para o Homem, dentro desse estudo e busca estava a tentativa de se explicar o movimento e de se prever a *posição* que um corpo ocuparia decorrido um determinado espaço de tempo. Aristóteles foi um dos que se destacaram nessa busca, porém ele formulou algumas proposições que só foram comprovadas como errôneas no séc. XIV d.C. por Thomas Bradwardine.

Seu foco de estudo foi a ideia de Aristóteles sobre o movimento, a qual dizia que a velocidade de um objeto sujeito a uma força propulsora atuando num meio resistente é proporcional à força e inversamente proporcional à resistência. Em certos aspectos essa afirmação ia contra o senso comum e foi exatamente isso que Bradwardine provou usando uma teoria generalizada das proporções que, em nossa notação, seria assim expressa

$$V = K \cdot log\left(\frac{F}{R}\right),$$

em que : K é uma constante real, V a velocidade, F a força e R a resistência.

Mas como se poderia visualizar esse fenômeno? A resposta para essa pergunta foi dada pelo francês Nicole Oresme, por volta de 1360 d.C. Segundo ele, isso poderia se dar através de um gráfico que "*expressaria a relação entre duas grandezas que variam"*. Oresme chegou a essa conclusão durante uma época em que se discutiam as relações entre: velocidades e tempos, variação de temperatura, etc., mas que não podiam ser vistas ou demonstradas empiricamente em virtude da inadequação dos instrumentos. Daí a importância do seu trabalho quando disse "Tudo o que é mensurável é imaginável na forma de quantidade contínua." (ORESME,1360 apud OLIVEIRA; ROSA; VIANA, 2014).

A representação de funções passou a ser conhecida então na época como "*Latitude das Formas"*. Assim é que começamos a ter uma representação visual para um fenômeno que ocorre na Natureza.

Podemos observar também que ao representar um evento na forma de modelo matemático invariavelmente temos uma relação matemática ou uma equação. Porém, o que é uma equação matemática?

Pesquisando em alguns sites na internet surgirão, certamente, palavras como **incógnita** e **variável**. Essas palavras são muito comuns em nosso dia a dia, mas por diversas vezes, nos escapa ou desconhecemos seu verdadeiro significado. Seu uso errôneo tem sido motivo de muita confusão no ensino e na compreensão da matemática. Algumas definições aparecem em pesquisas simples da rede mundial de computadores, como a citada abaixo:

> Em matemática, uma **incógnita** é uma **variável** cujo valor deve ser determinado de forma a resolver uma equação ou inequação. Normalmente, é representada pelas letras **x**, **y** e **z**, e as constantes pelas primeiras letras do alfabeto (**a**, **b**, **c**, etc).
> Ex: 3x + 4= 19; x - y= 6.
> A ideia de usar uma convenção alfabética para diferenciar incógnitas de constantes foi do matemático francês François Viète, que empregou consoantes para as incógnitas e vogais para as constantes.
> A incógnita é basicamente um valor desconhecido, que irá ser descoberto por meio de uma equação, que pode ser tanto de 1º grau quanto de 2º grau, variando de acordo com a sua dificuldade de execução.
> Em português, é aquilo que se desconhece e procura saber, mistério. (MACEDO, 2009).

No fim do século VIII e início do século IX viveu em Bagdá, o matemático e astrônomo árabe, Mohamed Ibn-Musa Al-Khowarismi. Esse matemático escreveu dois livros de grande importância para a humanidade. Um deles dedicado ao sistema de numeração criado pelos hindus, o sistema posicional de base dez, usado por nós até hoje, o qual conhecemos por algarismos hindu-arábicos. Seu outro livro foi dedicado ao estudo das equações, cujo nome é Al-jabr Wail Muqãbalah, e traz o estudo, das expressões literais. A utilização das letras facilitou e possibilitou generalizações de cálculos que eram impossíveis até então, trazendo para nós o uso de incógnitas e variáveis, geralmente representadas por x ou por y. Muitos dizem que se usa essas duas letras por serem as menos usadas dentre as do alfabeto, porém e como se justifica, então, o uso tão frequente do a, b ou c? A resposta é que na verdade essas são as letras mais usadas em virtude de como os árabes se referiam à incógnita de uma equação, elas a chamavam de "coisa" (em árabe *xay*).

A palavra equação deriva do latim *equatione*, que, por sua vez, deriva do árabe *adala,* que significa igualar em peso.

Para o caso de não se querer uma igualdade, mas sim uma desigualdade usa-se a inequação. Em uma inequação a resposta não é, em geral, um número a se descobrir (incógnita), mas sim um espaço numérico onde a resposta é possível. Por exemplo, uma inequação real tem como resposta um número ou um intervalo de números reais que satisfazem a condição de desigualdade desejada (variável). Caso nenhum número verifique a desigualdade proposta, o conjunto solução é vazio. Quando se possui uma variável com relação de dependência para com outra variável passamos a ter uma relação de função, que assim como na inequação, tem como solução um conjunto de números compreendidos dentro de um campo de variação pré-determinado.

Voltando a definição mais atual de Roque e Pitombeira (2011) uma função pode ter um gráfico representativo. Isso ocorre porque os acontecimentos diários na natureza, e mesmo os causados pelo homem, nem sempre são constantes, ou seja, estão sujeitos a variações que quando expressas pelo movimento descrevem curvas, e seus modelos matemáticos podem ser equações com grau variando de 1 até n, sendo n um número natural maior ou igual a 1.

Para melhor compreendermos a forma de se operar ou construir um modelo matemático, e até pelo próprio avanço da matemática e de suas aplicações, desenvolveu-se o estudo das funções dentro Teoria dos Conjuntos, isso foi necessário para permitir descobrir as regras de operação e o campo de variação que permite a existência de uma resposta real das funções.

> Inquestionavelmente, o conceito de função é uma das ideias mais básicas em todos os ramos da Matemática. O leitor pode ter já aprendido a seguinte definição: uma função é uma regra de correspondência que associa a cada elemento x de um certo conjunto (chamado o domínio da função) um e apenas um elemento y de um outro conjunto (chamado o contra-domínio da função). Esta definição é nebulosa. O que se quer dizer precisamente por uma regra? De modo a evitar ambiguidades, matemáticos criaram uma definição precisa de função, usando a linguagem de conjuntos. (SAMPAIO, 2011).

Podemos então dizer que uma função, de maneira simples, é uma relação entre dois conjuntos dados, através de uma sentença matemática fechada, com duas variáveis, sendo que uma é livre e outra dependente.

Para a variável livre fornecemos os elementos de um conjunto chamado de Domínio, o qual, na função, deve ter todos os seus elementos relacionados de maneira exclusiva com o segundo conjunto, onde estão os elementos da variável dependente, chamado Contradomínio. Os elementos do Contradomínio que estão relacionados com o domínio formam um subconjunto do Contradomínio chamado de conjunto Imagem.

Exemplo : Dado o conjunto A = {1, 2, 3, 4} e o conjunto B = {0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15} e a relação

$$y = x^2 - 1,$$

sendo y uma relação de A em B então concluímos que essa relação é função e pode ser representada por

$$y = f(x).$$

Observe no diagrama (nesse caso a representação por diagramas é mais interessante, pois temos uma quantidade finita de elementos nos conjuntos) abaixo, Figura 1, que a relação segue o conceito básico de função, ou seja, todos os elementos do domínio estão relacionados com os elementos do contradomínio e essa relação é única.

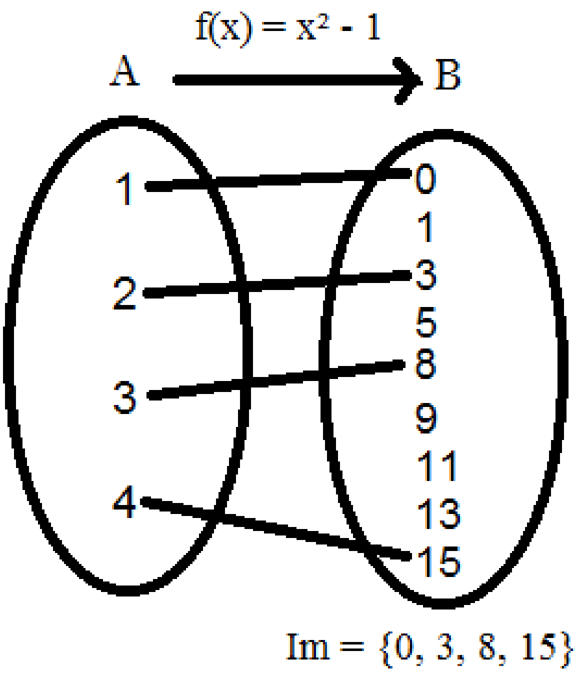


Figura 1 – Diagrama de Venn da função $f(x) = x^2 - 1$ do conjunto A → B
Fonte: O autor

3 METODOLOGIA E PLANO DE TRABALHO

O que faremos na sequência será representar, através de modelos matemáticos, algumas formas funcionais com exemplos práticos, que foram testados em turmas do primeiro ano do Ensino Médio em 2015. Mostraremos a visualização desses acontecimentos através de gráficos ou diagramas. Para isso partiremos do princípio de que tudo na natureza se transforma e se move.

Vamos descrever situações do cotidiano através de funções. Modelar o valor de uma conta de luz e água em função do consumo, o preço de uma corrida em função da distância percorrida. Vamos também aplicar modelagem matemática usando funções em Biologia, como a reprodução ou controle de uma bactéria, e na Química, como o decaimento de elementos radioativos conhecendo a meia vida. Enfim, mostrar como as funções são uma forma eficiente de análise de resultados e como podem ajudar nas interpretações dos mesmos.

Para uma melhor compreensão e apropriação sugerimos o uso do *software* livre GRAPHMATICA [www.graphmatica.com], que é um "plotter" de funções com características numéricas e de cálculo avançado e fácil de usar. O *software* pode ser baixado em qualquer sistema operacional Windows a partir da versão 2000. Podemos, com o auxílio desse *software*, construir gráficos de funções cartesianas, relações e desigualdades, coordenadas polares, equações paramétricas e equações diferenciais ordinárias. Podem ser confeccionados até 999 gráficos na tela ao mesmo tempo. Permite também copiar para o PAINT (Microsoft) em formato bitmap (BMP) e diversos outros formatos tradicionais como JPG. Além disso, possibilita a visualização gráfica e numérica das linhas tangentes e integrais de uma dada função, possui ajuda on-line e arquivos de demonstração. Em resumo, uma grande ferramenta para estudantes e professores de matemática de qualquer nível de ensino, do médio até o cálculo diferencial na faculdade.

O *software* é indutivo, ou seja, concede ao usuário a possibilidade de inserir a função como se escreve, na forma convencional, e imediatamente o programa, após apertar a tecla "enter", fornece o gráfico. Ao clicar no ícone que aparece na tela inicial, após instalado no computador ou tablet, aparece uma tela de abertura, com uma barra inicial para inserir uma função de variáveis y e x, como por exemplo,

$y = 2x + 4$, e imediatamente o *software* fornece o gráfico (como exemplificado na Figura 2) .

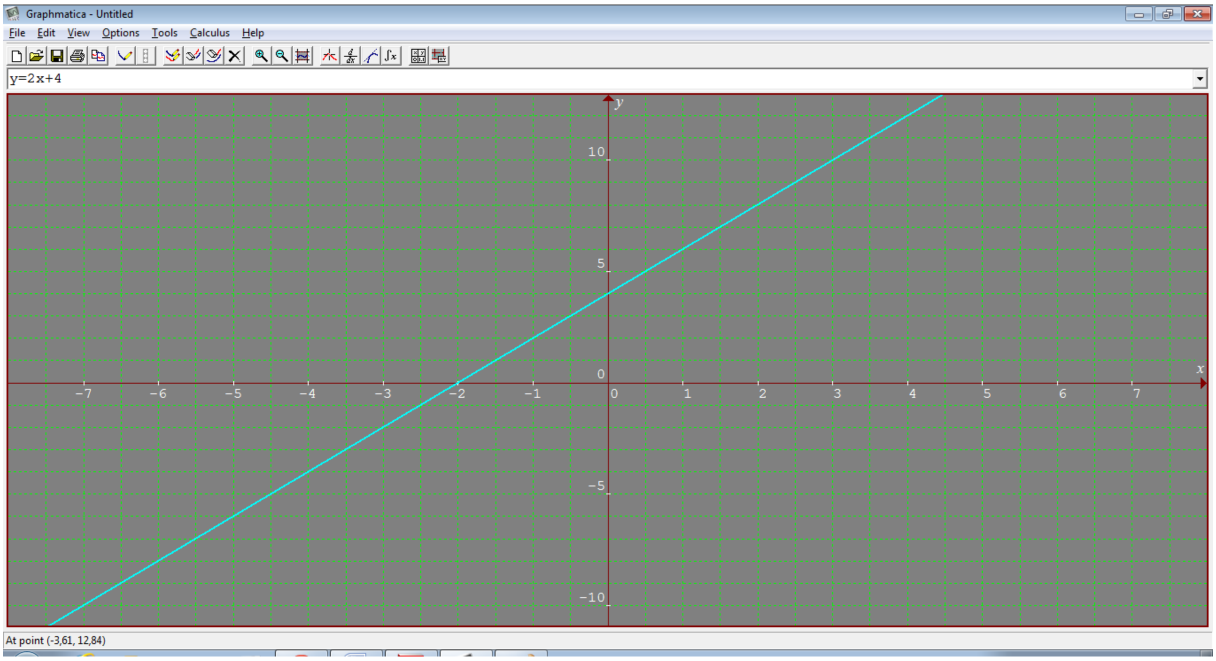


Figura 2 – Gráfico gerado pela função $y=2x+4$ no aplicativo *GRAPHMATICA*
Fonte: O autor

A vizualização da sobreposição de gráficos se dá pela mudança de cores das variações propostas nas funções digitadas, o que facilita muito a compreensão dos mesmos (veremos nos exemplos propostos a seguir).

Um exemplo clássico é de uma família de funções afins, onde o coeficiente angular é constante e o coeficiente linear varia de uma em uma unidade inteira.

O aluno percebe que as retas criadas são todas paralelas entre si, e que a função intercepta o eixo y justamente no valor do coeficiente linear.

Por ser um software livre, o mesmo pode ser usado em qualquer laboratório de informática nas escolas e mesmo pelos alunos em suas casas. O seu uso permite ao professor explorar a confecção e interpretação de gráficos, retirando a limitação do papel, régua e lápis, os quais permitem fazer um ou dois gráficos no mesmo espaço de tempo que se constroem dez ou mais, com auxílio do GRAPHMATICA.

3.1 PROBLEMAS PROPOSTOS

1) Decifrando os números da conta de luz – construção de uma função linear:

A conta de luz fornece ao aluno uma função afim que passa pela origem. Ela será da forma

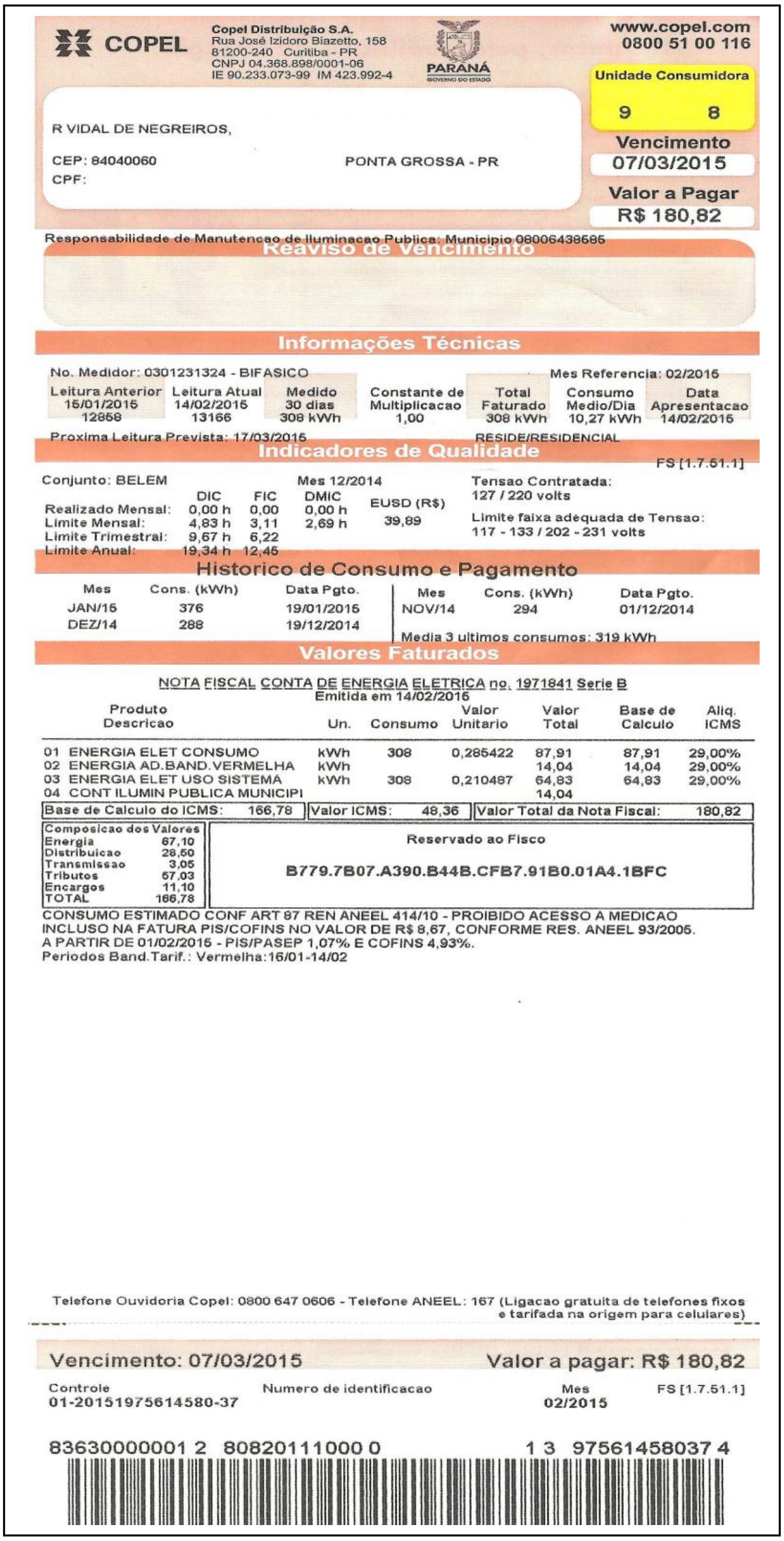
$$f(x)=ax\,.$$

Como a uma constante, que neste caso é de $R\$0{,}59$; (divisão do valor da conta pela quantidade de kWh consumidos) e x a quantidade de kWh consumidos. Graficamente a função representa uma reta que passa pela origem, pois caso não se consuma nenhum kWh a conta será 0. Outro ponto analisado é o caso da função retratar uma medida (no caso o kWh) que só existe no campo dos números inteiros positivos. Como o custo também só existe no campo dos números reais positivos, o gráfico se limita ao primeiro quadrante (como veremos na sequência).

Como aula introdutória ao ensino de funções, foi pedido aos alunos para trazerem para a aula uma conta de luz de suas casas para analisar graficamente o consumo. O aluno terá uma relação clara de que quanto maior o consumo de energia (medida em kWh) mais cara será sua conta. Na aula podem ser considerados outros aspectos, como a bandeira amarela da conta, que pode se tornar vermelha caso a produção de energia no país se torne crítica, a taxa de iluminação pública, que é cotestada juridicamente, e nesse caso é fixa para consumidores acima de 50 kWh, incorporada na conta e sujeita aos mesmos aumentos pré-determinados pelo governo, mas essencialmente será para construir um gráfico consumo x valor da conta (Figura 3).

Analisando a Figura 3 vê-se que a conta de luz apresenta o consumo do mês atual e dos três meses anteriores. Supondo que 1,00 é a constante de multiplicação do custo quando a fatura está na bandeira amarela, é necessário lembrar ao aluno que essa constante pode ser alterada quando a bandeira estiver vermelha, que é quando a energia produzida fica mais cara (tal fato é anunciado com antecedência pelos Governos por conta de períodos de seca, por exemplo).

A partir da Figura 3 pode-se montar uma tabela com o consumo dos três meses anteriores ao da conta atual (Tabela 1) e que poderá ser preenchida pelo aluno. Para isso supõe-se que o custo não sofreu alteração e usa-se a Tabela 2 (Tabela 1 preenchida) onde estão os valores das contas anteriores (Figura 4).



COPEL

Copel Distribuição S.A.
Rua José Izidoro Biazetto, 158
81200-240 Curitiba - PR
CNPJ 04.368.898/0001-06
IE 90.233.073-99 IM 423.992-4

PARANÁ
GOVERNO DO ESTADO

www.copel.com
0800 51 00 116

Unidade Consumidora
9 8

R VIDAL DE NEGREIROS,

CEP: 84040060 PONTA GROSSA - PR
CPF:

Vencimento
07/03/2015

Valor a Pagar
R$ 180,82

Responsabilidade de Manutencao de Iluminacao Publica: Municipio 08006438585

Reaviso de Vencimento

Informações Técnicas

No. Medidor: 0301231324 - BIFASICO

Mes Referencia: 02/2015

Leitura Anterior	Leitura Atual	Medido	Constante de Multiplicacao	Total Faturado	Consumo Medio/Dia	Data Apresentacao
15/01/2015	14/02/2015	30 dias	1,00	308 kWh	10,27 kWh	14/02/2015
12858	13166	308 kWh				

Proxima Leitura Prevista: 17/03/2015

RESIDE/RESIDENCIAL

Indicadores de Qualidade

FS [1.7.51.1]

Conjunto: BELEM

Mes 12/2014

	DIC	FIC	DMIC
Realizado Mensal:	0,00 h	0,00	0,00 h
Limite Mensal:	4,83 h	3,11	2,69 h
Limite Trimestral:	9,67 h	6,22	
Limite Anual:	19,34 h	12,45	

EUSD (R$)
39,89

Tensao Contratada:
127 / 220 volts

Limite faixa adequada de Tensao:
117 - 133 / 202 - 231 volts

Historico de Consumo e Pagamento

Mes	Cons. (kWh)	Data Pgto.	Mes	Cons. (kWh)	Data Pgto.
JAN/15	376	19/01/2015	NOV/14	294	01/12/2014
DEZ/14	288	19/12/2014			

Media 3 ultimos consumos: 319 kWh

Valores Faturados

NOTA FISCAL CONTA DE ENERGIA ELETRICA no. 1971841 Serie B
Emitida em 14/02/2015

Produto Descricao	Un.	Consumo	Valor Unitario	Valor Total	Base de Calculo	Aliq. ICMS
01 ENERGIA ELET CONSUMO	kWh	308	0,285422	87,91	87,91	29,00%
02 ENERGIA AD.BAND.VERMELHA	kWh			14,04	14,04	29,00%
03 ENERGIA ELET USO SISTEMA	kWh	308	0,210487	64,83	64,83	29,00%
04 CONT ILUMIN PUBLICA MUNICIPI				14,04		

Base de Calculo do ICMS: 166,78 | Valor ICMS: 48,36 | Valor Total da Nota Fiscal: 180,82

Composicao dos Valores	
Energia	67,10
Distribuicao	28,50
Transmissao	3,05
Tributos	57,03
Encargos	11,10
TOTAL	166,78

Reservado ao Fisco

B779.7B07.A390.B44B.CFB7.91B0.01A4.1BFC

CONSUMO ESTIMADO CONF ART 87 REN ANEEL 414/10 - PROIBIDO ACESSO A MEDICAO
INCLUSO NA FATURA PIS/COFINS NO VALOR DE R$ 8,67, CONFORME RES. ANEEL 93/2005.
A PARTIR DE 01/02/2015 - PIS/PASEP 1,07% E COFINS 4,93%.
Periodos Band.Tarif.: Vermelha:16/01-14/02

Telefone Ouvidoria Copel: 0800 647 0606 - Telefone ANEEL: 167 (Ligacao gratuita de telefones fixos e tarifada na origem para celulares)

Vencimento: 07/03/2015

Valor a pagar: R$ 180,82

Controle
01-20151975614580-37

Numero de identificacao

Mes
02/2015

FS [1.7.51.1]

83630000001 2 80820111000 0 1 3 97561458037 4

Figura 3 – Conta de luz de uma unidade residencial da COPEL
Fonte: COPEL, 2015

Dados extraídos da conta de luz:

Tabela 1 – Consumo da conta de luz (Figura 1) dos três meses anteriores e o consumo da conta com o respectivo valor a ser pago

Mês	Consumo (kWh)	Valor da conta
Novembro/2014	294	
Dezembro/2014	288	
Janeiro/2015	376	
Fevereiro/2015	308	R$180,82

Fonte : COPEL, 2015

Para calcular o valor das outras contas precisamos inicialmente saber o custo de $1\ \mathrm{kWh}$ e isso pode ser feito por regra de três simples.

$$x = \frac{1 \times 180{,}82}{308} = 0{,}59\,.$$

Assim o valor de $1\ \mathrm{kWh}$ é de $R\$0{,}59$. Pode-se preencher a Tabela 1 multiplicando-se o consumo mensal pela constante $R\$0{,}59$.

Tabela 2 – Valores da conta para os meses de novembro de 2014 à fevereiro de 2015

Mês	Consumo (kWh)	Valor da conta
Novembro/2014	294	R$173,46
Dezembro/2014	288	R$169,92
Janeiro/2015	376	R$221,84
Fevereiro/2015	308	R$180,82

Fonte: O autor

Com o auxílio do GRAPHMATICA esses pontos são marcados no plano cartesiano. Analisando os pontos, percebe-se que os mesmos estão alinhados e dá a entender que o preço pago deve ser linear.

A função que descreve o valor conta de luz fica da seguinte forma:

$$f(x) = 0{,}59x\,.$$

O gráfico da mesma pode ser visto nas Figuras 4a e 4b. A função tem como o domínio e a imagem o conjunto dos números reais não negativos, ou seja,

$$[0,+\infty[\,.$$

Os pontos da Tabela 2 podem ser destacados no gráfico (Figura 4a). Percebe-se que os pontos estão alinhados, independente do quanto de energia foi ou será consumida.

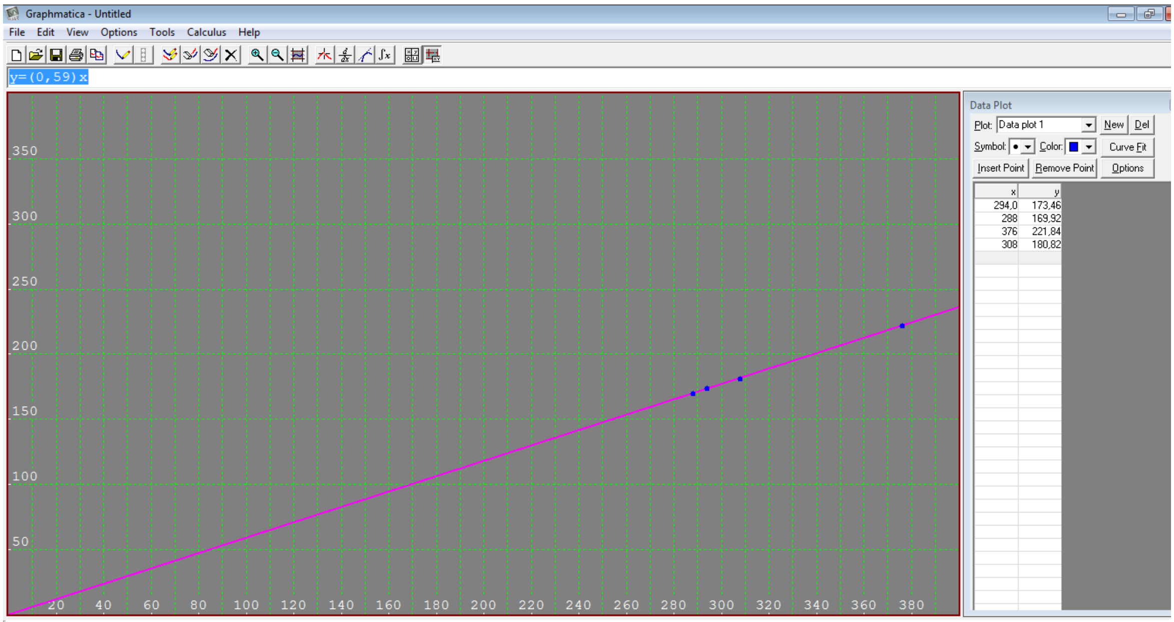


Figura 4a – Gráfico obtido no aplicativo *GRAPHMATICA* com os pontos da Tabela 2, marcados sobre a reta $y=0,59x$

Fonte: O autor

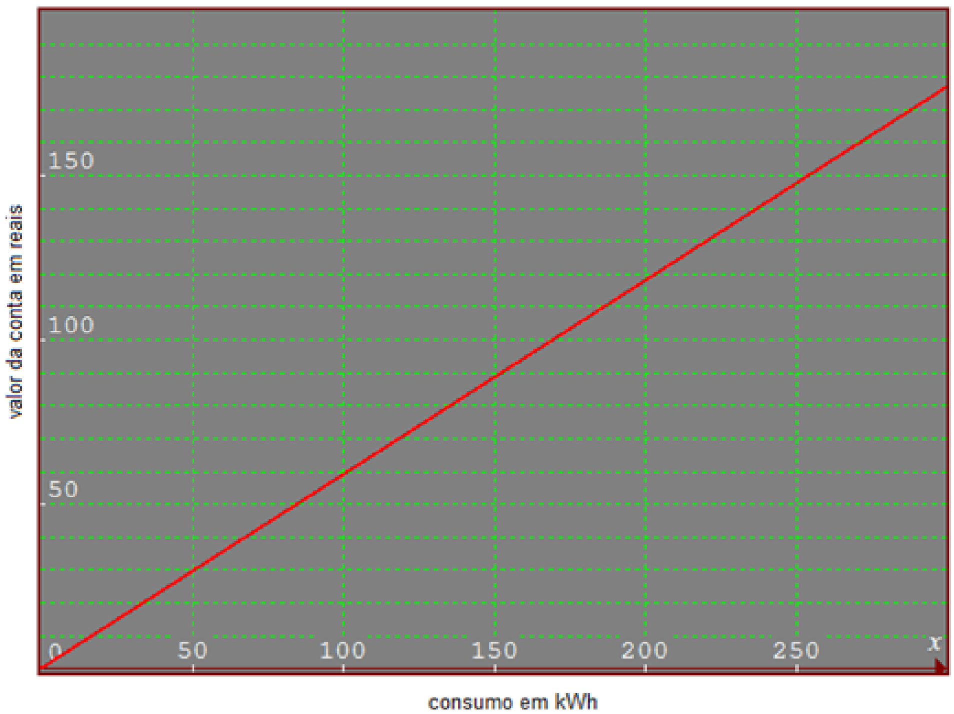


Figura 4b – Gráfico traçado pelo software quando se insere a função linear $f(x) = 0,59\,x$, onde o eixo horizontal é o consumo e o vertical o valor pago

Fonte: O autor

2) Decifrando os números da conta de água – função definida por duas sentenças sendo uma delas constante e a outra afim :

SANEPAR
Companhia de Saneamento do Paraná

Endereço: Rua Engenheiros Rebouças nº 1376
CEP 80.215-900 Curitiba - PR
CNPJMF 76.484.013/0001-45
Inscrição Estadual 101.80080-64
Internet: www.sanepar.com.br

CONTA **FONE SANEPAR: 115**

NOME DO CLIENTE — MATRÍCULA

ENDEREÇO — NÚMERO — Nº LADO — Nº FRENTE
R ESTER KEMMELMEYER

CEP — LOCAL
84.050- PONTA GROSSA

ROTEIRO DE LEITURA	HIDRÔMETRO	CAT - RES - COM - IND - UTP - POP
207-09-25-345-59580	5-12F423710-4-1	014 001 - - - -

QUALIDADE DA ÁGUA DISTRIBUÍDA	Turbidez	Cor	Cloro	Flúor	Coli. Totais
Nº Mínimo de Amostras Exigidas	184	56	184	–	184
Nº Amostras Realizadas	184	184	184	–	184
Nº Amostras que Atenderam à Legislação	184	184	184	–	184

Definições no verso

Conclusão: TODAS AS AMOSTRAS ATENDERAM A LEGISLACAO

HISTÓRICO DE PAGAMENTOS - CONDICIONADO AS OBSERVAÇÕES CONSTANTES NO VERSO

Ano	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
2013	PAGO	PAGO	PAGO	PAGO	PAGO	PAGO	PAGO	PAGO	PAGO	PAGO	PAGO	PAGO
2014	PAGO	PAGO	PAGO	PAGO	PAGO	PAGO	PAGO	PAGO	---	---	---	---

FAIXAS DE CONSUMO	VOLUME	VALOR M3/R$ ÁGUA	TOTAIS ÁGUA	TOTAIS ESGOTO
RES Minimo	10		25,14	20,11
De 11 a 30m3	14	3,77	52,78	42,22

TRIBUTOS FEDERAIS - LEI 12.741 - VALOR APROXIMADO R$ 12,68

HISTÓRICO DE CONSUMO/m3

10/13	11/13	12/13	01/14	02/14	03/14	04/14	05/14	06/14	07/14	08/14
26	45	29	A	67	23	22	27	A	21	26

DIAS DE CONSUMO	DATA LEITURA	LEITURA ANTERIOR	LEITURA ATUAL	CONSUMO/m3	REFERÊNCIA
33	15/09/2014	531	AUSENTE	ATRIBUIDO	09/2014

MOTIVO DA AUSÊNCIA DE LEITURA: CASA/PORTAO FECHADO
MÉDIA DE CONSUMO/m3 ÚLTIMOS 5 MESES: 24
VENCIMENTO: 25/09/2014

PREVISÃO PRÓXIMA LEITURA	ÁGUA	ESGOTO	SERVIÇOS	TOTAL
15/10/2014	77,92	62,33		140,25

EVITE PROBLEMAS:MANTENHA SEU CADASTRO ATUALIZADO.
RELATORIO QUALIDADE DA AGUA: WWW.SANEPAR.COM.BR
FACILITE O ACESSO PARA LEITURA – CASA/PORTAO FECHADO

AUTENTICAÇÃO NO VERSO — OBSERVAÇÕES NO VERSO — COMPROVANTE CLIENTE

AVISO DE VENCIMENTO – VALOR A SER DEBITADO

EM SUA C/C – NAO VALE COMO RECIBO

ROTEIRO:207-09-25-345-59580

SANEPAR

MATRÍCULA	REFERÊNCIA	VENCIMENTO	VALOR TOTAL
1015.2950	09/2014	25/09/2014	140,25

AUTENTICAÇÃO NO VERSO — COMPROVANTE SANEPAR

Figura 5 – Conta de água de uma unidade residencial da SANEPAR
Fonte: SANEPAR, 2014

A conta de água fornece ao aluno uma função definida por duas sentenças. Ela será da forma:

$$f(x) = \begin{cases} b, & para\ 0 \leq x \leq 10 \\ a(x - 10) + b, & para\ x > 10 \end{cases}.$$

Com uma constante b igual ao valor da taxa mínima (nesse caso de $R\$45{,}25$) e para consumo acima do mínimo ($10\ m^3$) uma função afim com coeficiente angular igual a $R\$6{,}79$ por m^3 a mais consumido até um limite de $30\ m^3$. Essa função também é representada apenas no primeiro quadrante por se tratar de valores estritamente positivos.

Vale observar também que o gráfico será contínuo.

Como uma segunda aula ilustrativa no ensino de funções, pediu-se aos alunos que trouxessem para a aula a conta de água de suas casas para analisar graficamente o consumo. O aluno teve uma relação clara de que quanto mais a família gastasse água (medida em m^3) mais cara ficaria sua conta. Mas diferente da conta de luz, a água possui uma tarifa de consumo mínimo, onde se explica que se a residência não consumir nada ou até $10\ m^3$, paga a taxa mínima de $R\$25{,}14$ mais 80% desse valor de esgoto (que corresponde a $R\$20{,}11$) fechando um total mínimo de $R\$45{,}25$.

A unidade consumidora que consumir mais do que $10\ m^3$ terá um acréscimo de $R\$6{,}79$ por cada metro cúbico a mais consumido além dos $10\ m^3$ até o limite de $30\ m^3$ ($R\$3{,}77$ pela água e mais 80% desse valor, ou seja, $R\$3{,}02$, como taxa de esgoto).

Assim quem consumir mais de $10\ m^3$ (no eixo x) pagará $R\$45{,}25$ pelos dez metros cúbicos mais $R\$6{,}79$ por cada metro cúbico consumido a mais.

Dessa forma a função que representa o valor da tarifa a ser pago terá duas sentenças, uma para consumo entre 0 e $10\ m^3$ e outra para consumo de $10\ m^3$ até o limite de $30\ m^3$. Em termos matemáticos temos:

$$f(x)=\begin{cases}45{,}25 \ para\ 0 \le x \le 10\\ 6{,}79\,(x-10)\ +45{,}25 \ para\ 10 \le x \le 30\end{cases}$$

ou

$$f(x)=\begin{cases}45{,}25 \ para\ 0 \le x \le 10\\ 6{,}79\ x-22{,}65 \ para\ 10 \le x \le 30\end{cases}.$$

A Figura 6a apresenta o gráfico das duas sentenças da função f, que representa o valor da conta de água, sem a adequação do domínio.

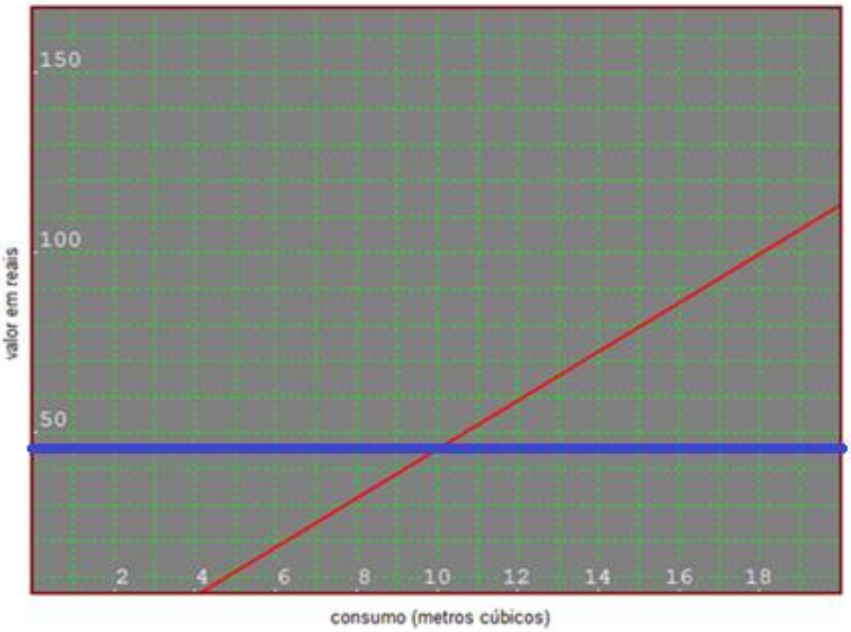


Figura 6a – Gráfico das duas sentenças da função que representa o valor da conta de água sem a restrição do domínio. $f(x)=44{,}25$ (azul) e $f(x)= 6{,}79x - 22{,}6$ (vermelha)

Fonte: O autor

As retas da Figura 6a se interceptam no ponto onde $x = 10$ m³ e y = R$44,25. Mas precisamos adequar o gráfico (limitar o domínio de cada sentença da função) para ficar apenas com uma “linha”. Ou seja, a linha azul até a intersecção e a vermelha a partir dela. Essa operação não é possível no GRAPHMATICA, software usado para fazer o gráfico da função *f*. Para contornar esse problema salvamos a figura do gráfico em formato bmp e o editamos no *Paint.* Elimina-se as partes azuis e vermelhas dos gráficos que não fazem parte da função (Figura 6b).

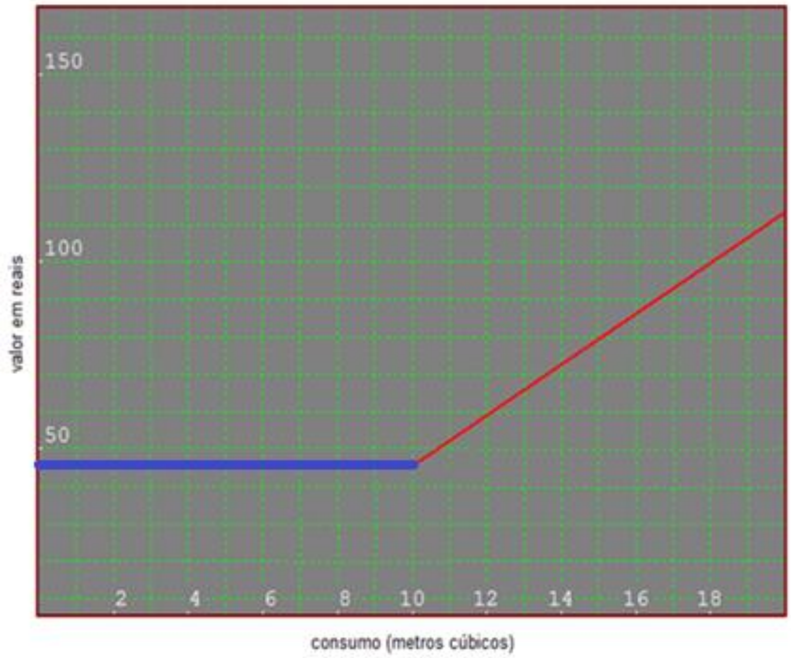


Figura 6b – Gráfico da função que representa o valor da contra de água restrita ao domínio
Fonte: O autor

E finalmente o gráfico da função que representa o valor da conta de água (Figura 6 c).

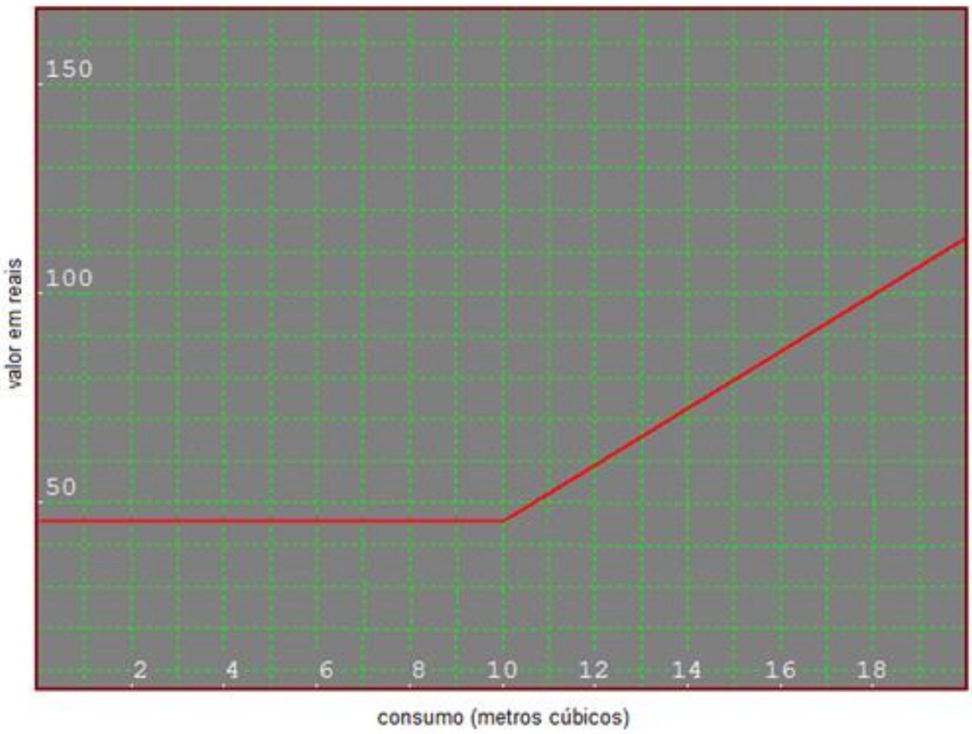


Figura 6c – Gráfico da função, composta por duas sentenças, que representa o valor da conta de água de uma residência
Fonte: O autor

A função tem domínio $[0{,}30]$ e imagem $[45{,}25;181{,}05]$.

É importante registrar que existe na SANEPAR uma terceira tarifação para consumidores residenciais. Essa tarifação ocorre quando o consumo ultrapassa os $30\ m^3$. Nesse caso, por exemplo, se a residência consome $35\ m^3$ de água em um mês, pagará $10\ m^3$ dentro da tarifa mínima, $20\ m^3$ na segunda tarifação (de $R\$6{,}79$ por m^3) e $5\ m^3$ na terceira tarifação (de $R\$11{,}50$ por m^3 a mais consumido).

Esse dado foi observado após a análise da conta e da construção do gráfico com os alunos, e apesar de nenhum aluno apresentar uma conta com consumo maior que os $30\ m^3$, essa informação deve ser incorporada para fins de complementação em aplicações futuras do exercício.

3) A corrida de táxi – análise do coeficiente angular e do coeficiente linear:

As funções afins também sofrem variações de coeficiente angular (que é a tangente do ângulo que a reta faz com o eixo das abscissas) e de coeficiente que é linear (que é o ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas).

Nesse caso veremos uma função que sofre variação de coeficiente angular, pois o valor cobrado por quilômetro rodado é diferenciado em dias de semana normais (ditos em horário comercial) com relação a finais de semana e feriados.

Uma corrida de táxi na cidade de Ponta Grossa custa $R\$3{,}25$ de bandeirada e $R\$3{,}12$ por quilômetro rodado em bandeira 1 (dias de semana das 08h00 às 22h00) e $R\$3{,}74$ por quilômetro rodado em bandeira 2 (finais de semana e das 22h00 às 08h00 do dia seguinte). Para exemplificar o preço de uma corrida de táxi suponha que uma pessoa que chegue em Ponta Grossa às 8h30 da manhã de segunda-feira, na rodoviária (Figura 7), e deseje ir até um destino que fica a 15 km da mesma.

Em uma aula podem ser trabalhadas as seguintes questões :

1. Qual o valor que essa pessoa pagará pela corrida?
2. Qual a fórmula matemática que se usa para calcular o custo em função da distância percorrida nos dias de semana em horário normal e também em horário diferenciado e nos finais de semana?
3. Mostrar os gráficos sobrepostos dessa função e determinar seu domínio e imagem.

Figura 7 – Vista lateral da saída da rodoviária de Ponta Grossa no Paraná
Fonte: TERMINAL Rodoviário Intermunicipal do Município de Ponta Grossa. 2008. Disponível em: <http://pontagrossa.pr.gov.br/rodoviaria/>. Acesso em: 10 maio 2015

Respostas:

1. Se ela chegou às $8h30$ então pagará pela bandeira 1. O valor em reais será de $3{,}25 + 15 \cdot 3{,}12 = 50{,}05$, ou seja, $R\$50{,}05$.
2. Nos dias normais se tomarmos como *f(x)* a representação do valor pago em reais e x como a quantidade de quilômetros rodados teremos as fórmulas: $f(x) = 3{,}12x + 3{,}25$ para horário comercial e $f(x) = 3{,}74x + 3{,}25$ para horário diferenciado e finais de semana (Figura 8).

3. O domínio dessas duas funções é o conjunto dos reais não-negativos, $\Re_+$, pois não existe distância negativa, e a imagem das duas é Im = $[3{,}25;+\infty[$.

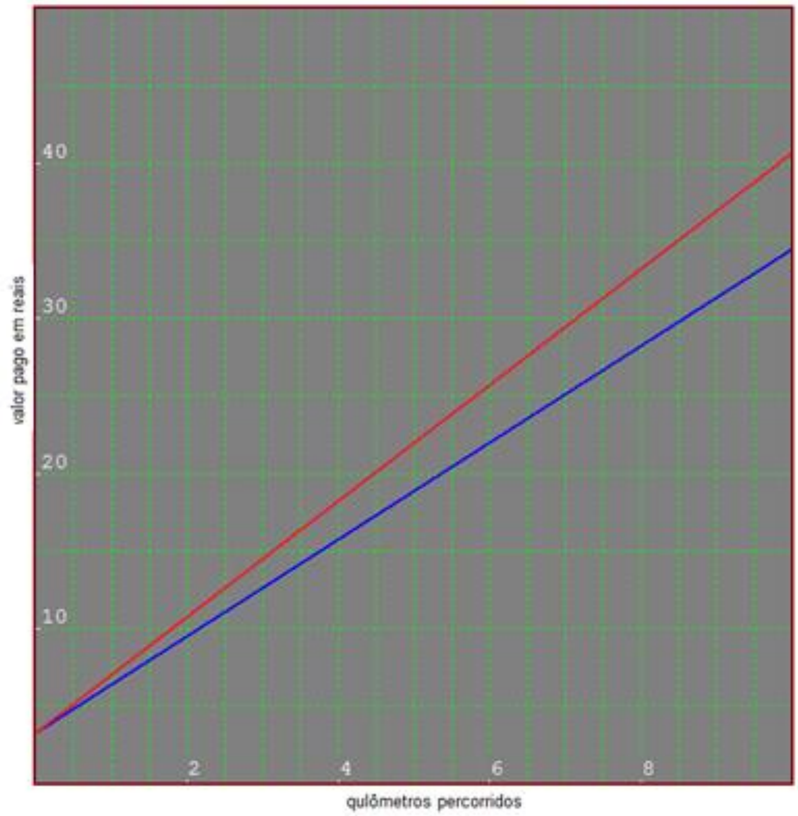


Figura 8 – Gráficos que representam o custo de uma corrida de táxi em dias de semana em horário comercial (azul) e nos finais de semana e também fora do horário comercial (em vermelho)
Fonte: O autor

Chegamos à conclusão de que o gráfico do preço de uma corrida de táxi não passa pela origem. Que ambos têm origem no mesmo ponto do eixo y; $R\$3{,}25$; porém uma reta cresce de maneira mais rápida que a outra porque o coeficiente angular é maior (a reta vermelha cresce mais, cujo coeficiente angular é $3{,}74$, do que a azul que tem coeficiente angular $3{,}12$).

4) A bactéria que se multiplica exponencialmente:

Para se estudar o crescimento de uma bactéria é preciso cultivá-la, como cultura pura, em meios de cultura e condições ambientais que variam em condições químicas e físicas, tais como: fontes de nutrientes, osmolaridade, pH, presença ou ausência de oxigênio e temperatura de incubação.

Por exemplo, a bactéria *Entamoeba coli* crescendo em um meio de cultura rico e sob condições aeróbicas, atinge uma concentração final de 2 a 5 vezes 109 células por ml em cerca de 12 a 18 horas.

Uma das abordagens mais comuns no estudo do crescimento bacteriano é a obtenção de curvas de crescimento. Estas podem ser obtidas por representações gráficas do aumento do número de indivíduos em um determinado período de tempo.

4.1) Princípios básicos do crescimento bacteriano:

Toda bactéria tem seu ambiente ideal onde encontra condições ótimas de crescimento. Uma população bacteriana é um sistema dinâmico, com células se dividindo e morrendo todo o tempo.

Traçando uma linha de tendência pelos pontos que representam o número de bactérias em tempos diferentes, percebe-se que o gráfico da curva se aproxima de curva exponencial e cada ponto por onde a curva passa indica o número teórico de células, em um dado tempo (Figura 9).

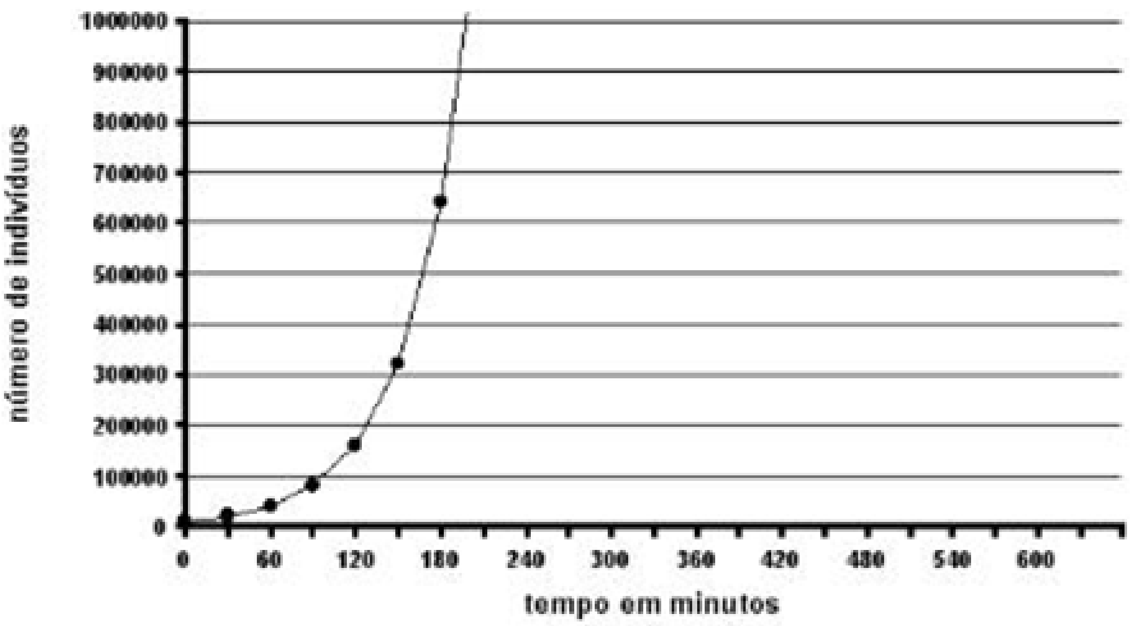


Figura 9 – Gráfico demonstrativo do crescimento de uma população de bactérias em minutos

Fonte: EBAH. c2013. Disponível em: <http://www.ebah.com.br/>. Acesso em: 30 abr. 2015

Em nosso estudo o interesse maior é no gráfico que representa o crescimento bacteriano. Esse gráfico pode ser construído no GRAPHMATICA no início do estudo de funções exponenciais. O mesmo acontece com as bactérias, se parte do ponto $(0,1)$ ou seja, se $x = 0$, $y = 1$, pois deve-se ter uma população inicial para ter o crescimento. Pode-se modelar (supor) que começa-se com uma bactéria e ela se divide em duas, três, quatro e aí a população vai dobrando a cada intervalo de tempo igual. E conforme esse crescimento a base da função exponencial será diferente.

Por exemplo, podemos usar o gráfico abaixo (Figura 10) com a variação da base 2, 3 e 4, mostrando como seria o crescimento de uma população de bactérias com crescimento duplo, triplo e quádruplo.

$f(x)=2^x$

$f(x)=3^x$

$f(x)=4^x$

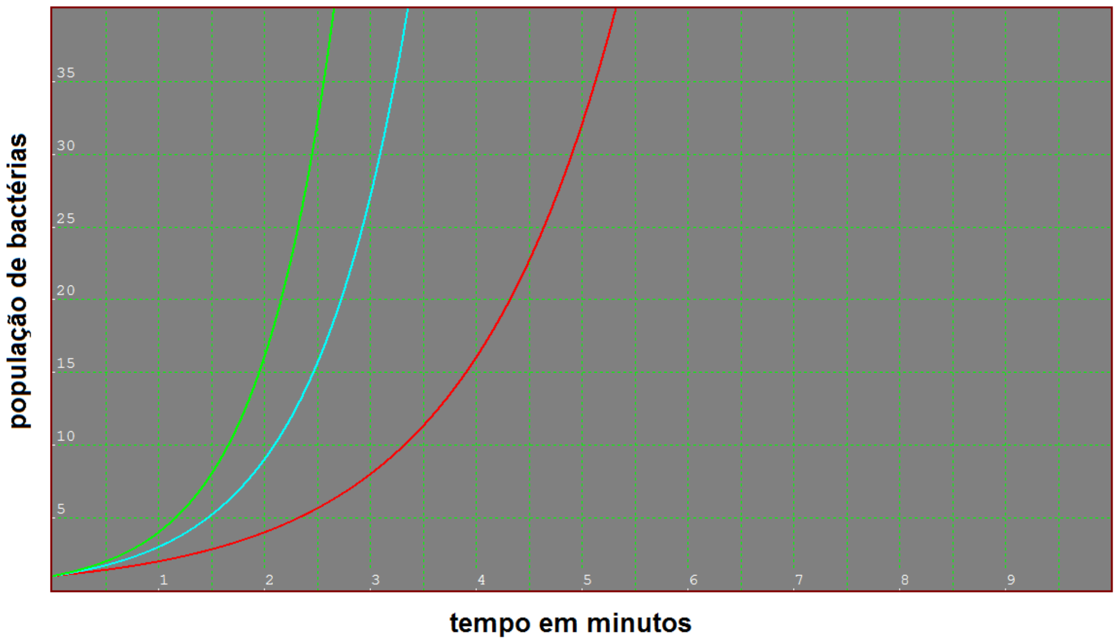


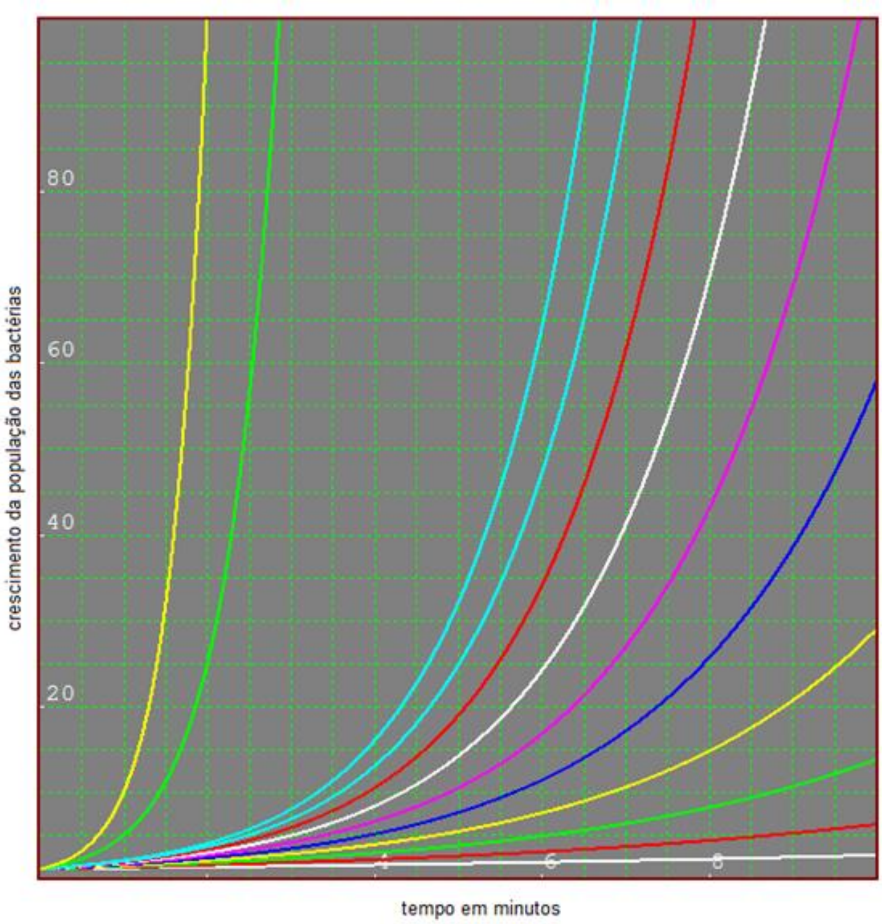
Figura 10 – Gráfico demonstrativo do crescimento exponencial de uma bactéria, com a base 2, 3 e 4 e como quanto maior a base mais rápido é o crescimento
Fonte: O autor

Ou seja,

$$f(x) = a^x \text{, para todo } a > 1 .$$

Mostrar um exemplo prático é sempre útil para estimular os processos de abstração. Pode ser usado também no início de estudos da Progressão Geométrica.

A base deve ser um número maior que 1, para que a curva seja crescente. Se utiliza base "*a*" igual a 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6, 1,7; 1,8; 1,9; 2, depois 5 e 10 (Figura 11) e verifica-se, pela sobreposição gráfica como é o comportamento da curva exponencial para diferentes bases.



Bases em sequência :

Branco : 1,1
Vermelha : 1,2
Verde : 1,3
Amarela : 1,4
Azul : 1,5
Rosa : 1,6
Branco : 1,7
Vermelha : 1,8
Azul claro : 1,9
Azul claro : 2,0
Verde : 5
Amarela : 10

Figura 11 – Gráfico demonstrativo do crescimento exponencial de uma bactéria, com a base variando de 1,1 à 10,0 e como quanto maior a base mais rápido é o crescimento
Fonte: O autor

As curvas mostradas na Figura 11 são todas de funções exponenciais obtidas variando apenas a base.

Em ambientes naturais e em condições experimentais nas quais a disponibilidade de nutrientes e de espaço sejam limitadas, em um dado momento algum fator se torna desfavorável: um nutriente essencial torna-se escasso (fontes de energia), produtos tóxicos do metabolismo acumulam-se em concentrações que inibem a divisão celular, o espaço torna-se limitado, etc. Quaisquer uma dessas situações, isoladamente ou em conjunto, inibem o crescimento, provocando um declínio do número de células viáveis na população até o ponto em que esta se extinga completamente (Figura 12).

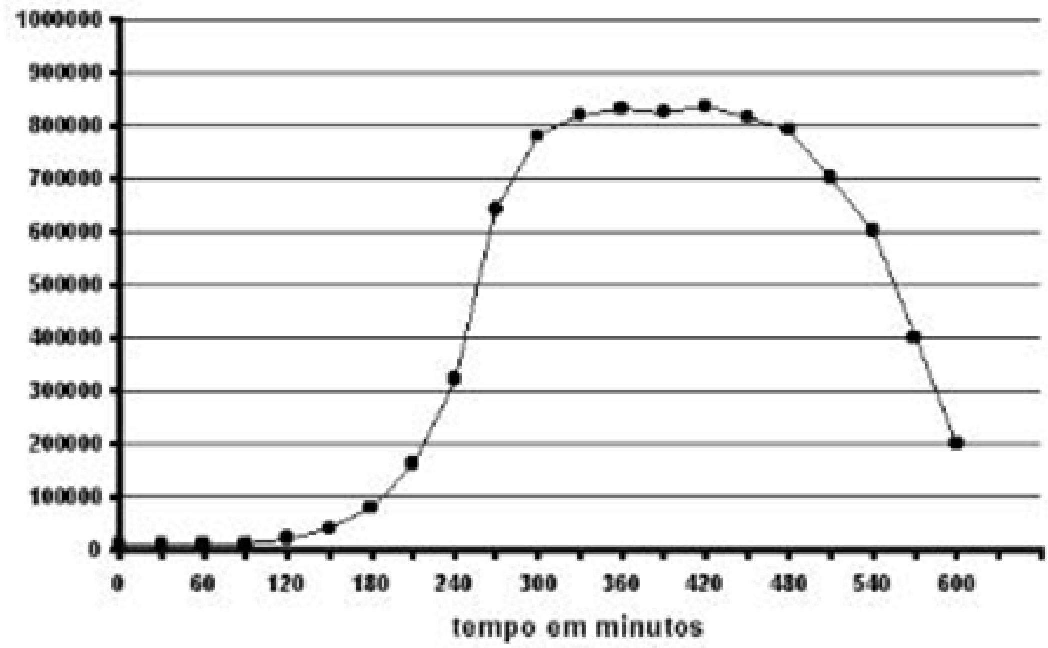


Figura 12 – Tendência de crescimento real de uma colônia de bactérias
Fonte: EBAH. c2013. Disponível em: <http://www.ebah.com.br/>. Acesso em: 30 abr. 2015

A tendência de crescimento representada na Figura 9 só pode ser mantida indefinidamente se houver um suprimento ilimitado de nutrientes, ambiente inalterável e espaço ilimitado. O gráfico da Figura 12 representa uma situação real onde se percebe o crescimento exponencial de uma bactéria e depois sua estabilização e consequente queda populacional decorrente dos aspectos externos.

Na prática o crescimento de uma colônia de bactérias não é exponencial o tempo todo. No caso simplificado na Figura 12 podemos ver as quatro fases de vida de uma colônia de bactérias. Essas fases são melhor explicadas na disciplina de Biologia, que se encarrega de explanar melhor os conhecimentos que são inerentes a ela. Cabe a Matemática contribuir como ciência para explicar os mecanismos numéricos que se relacionam em tais circunstâncias.

Resumidamente, as quatro fases são: a fase lag (fase de adaptação metabólica ao novo ambiente; o metabolismo celular está direcionado para sintetizar as enzimas requeridas para o crescimento nas novas condições ambientais encontradas pelas células), a fase exponencial (fase na qual o número de células da população dobra a cada geração), a fase estacionária (fase em que a taxa de crescimento diminui significativamente devido às condições limitantes do meio) e a fase de declínio (fase em que as células perdem a capacidade de se dividir, a taxa de morte celular torna-se maior que a taxa de divisão e o número de células viáveis decresce exponencialmente até a completa extinção da população).

5) Quanto tempo dura um material radioativo?

Essa pergunta pode ser respondida por meio de uma grandeza que mede a diminuição que as amostras radioativas de diferentes elementos sofrem com o passar do tempo.

Por exemplo, o período de meia-vida do Bário 142 (Ba-142) é de 6 minutos. Para melhor exemplificar, digamos que temos uma amostra de 2 g desse isótopo radioativo, após 6 minutos, restará apenas 1 g dessa amostra, ou seja, metade (Figura 13). Depois de mais 6 minutos, a massa do Ba-142 diminuirá para 0,5 g, mostrando que houve outra redução pela metade. Passando-se mais 6 minutos, a quantidade será de 0,25g e assim por diante.

Nesse caso temos uma função exponencial decrescente. Ao contrário do exemplo anterior, da bactéria, a meia vida tem uma base constante, no caso a base é $\left(\frac{1}{2}\right)$ e o expoente é $\frac{x}{6}$ (tempo em minutos).

Porém essa função tem um fator multiplicador de 2 (porque são 2 g da substância) e os resultados obtidos são todos multiplicados por 2. Então a função fica na forma

$$f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{6}}.$$

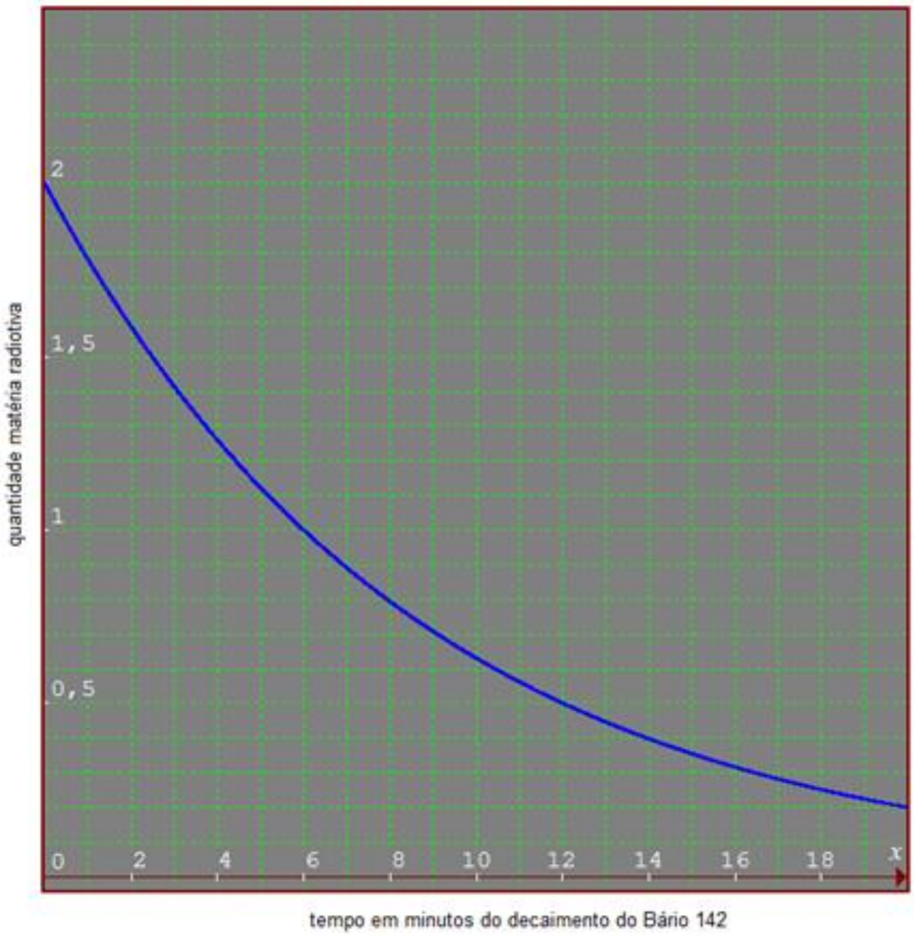


Figura 13 – Gráfico do decaimento de massa radioativa (em gramas) do Bário142, pelo tempo (em minutos)
Fonte: O autor

Nesse caso, o domínio da função é o conjunto dos reais não-negativos $\Re_+$ e o conjunto imagem é $]0,2]$, pois a massa decresce de 2 mg, mas nunca atinge o zero absoluto.

Isso nos mostra que o Ba-142 tem um tempo constante para reduzir-se à metade e algo semelhante acontece com todos os elementos radioativos. No entanto, cada radioisótopo se reduz pela metade em um tempo diferente, ou seja, possui uma meia vida específica. Na Tabela 3 temos uma lista com a meia-vida de vários radioisótopos. Veja como alguns levam apenas segundos para se reduzirem à metade, enquanto que outros levam vários anos:

Tabela 3 – Meia-vida de alguns radioisótopos

RADIOISÓTOPO	MEIA-VIDA
Oxigênio-13	0,0087 s
Carbono-15	2,4 s
Tecnécio-99	6,0 h
Xenônio-135	9,0 h
Fósforo-32	32 dias
Enxofre-35	87 dias
Cobalto-60	5,26 anos
Trítio (hidrogênio-3)	12,5 anos
Estrôncio-90	28,1 anos
Césio-137	30,17 anos
Rádio-226	1600 anos
Plutônio-239	2.440.000 anos
Urânio-235	4500.000.000 anos

Fonte: O autor

Vamos considerar a mesma massa para cada substância, 1 grama por exemplo. Na Figura 14 construímos o gráfico para três radioisótopos : Xenônio, Fósforo e Enxofre. Para melhor visualizar os gráficos usou-se escala 1,5 gramas na vertical e 150 dias na horizontal.

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{8x}{3}} \text{ (linha verde - Xenônio)}$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{32}} \text{ (linha amarela - Fósforo)}$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{87}} \text{ (linha azul - Enxofre)}$$

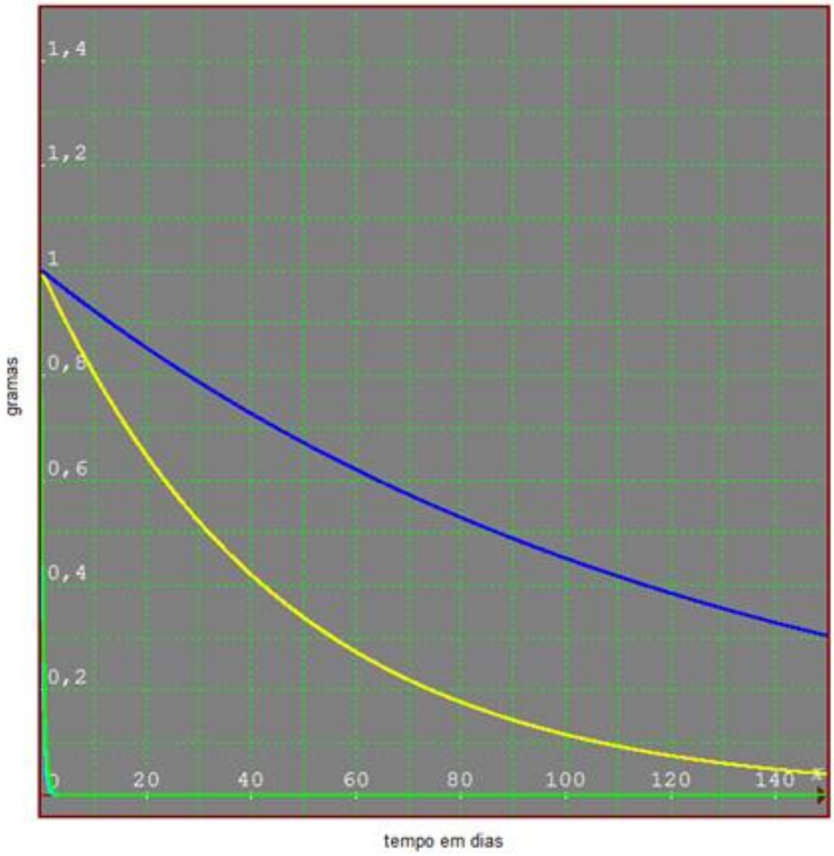


Figura 14 – Gráfico do decaimento de massa radioativa (em gramas) do Xenônio, Fósforo e Enxofre, pelo tempo (em dias)
Fonte: O autor

As funções, cujos gráficos aparecem na Figura 14 tem como domínio o conjunto dos reais não-negativos $\Re_+$ e o conjunto imagem $]0,1]$.

Agora vamos construir outro gráfico mudando a escala para 1,1 gramas no eixo vertical (y) e para 70 anos no eixo horizontal (x) para o Cobalto, Trítio, Estrôncio e Césio (Figura 15).

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5,26}}\ (linha\ rosa\ \text{-}\ Cobalto)$$

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{12,5}}\ (linha\ branco\ \text{-}\ Trítio)$$

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{28,1}}\ (linha\ vermelho\ \text{-}\ Estrôncio)$$

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{30,17}}\ (linha\ azul\ \text{-}\ Césio)$$

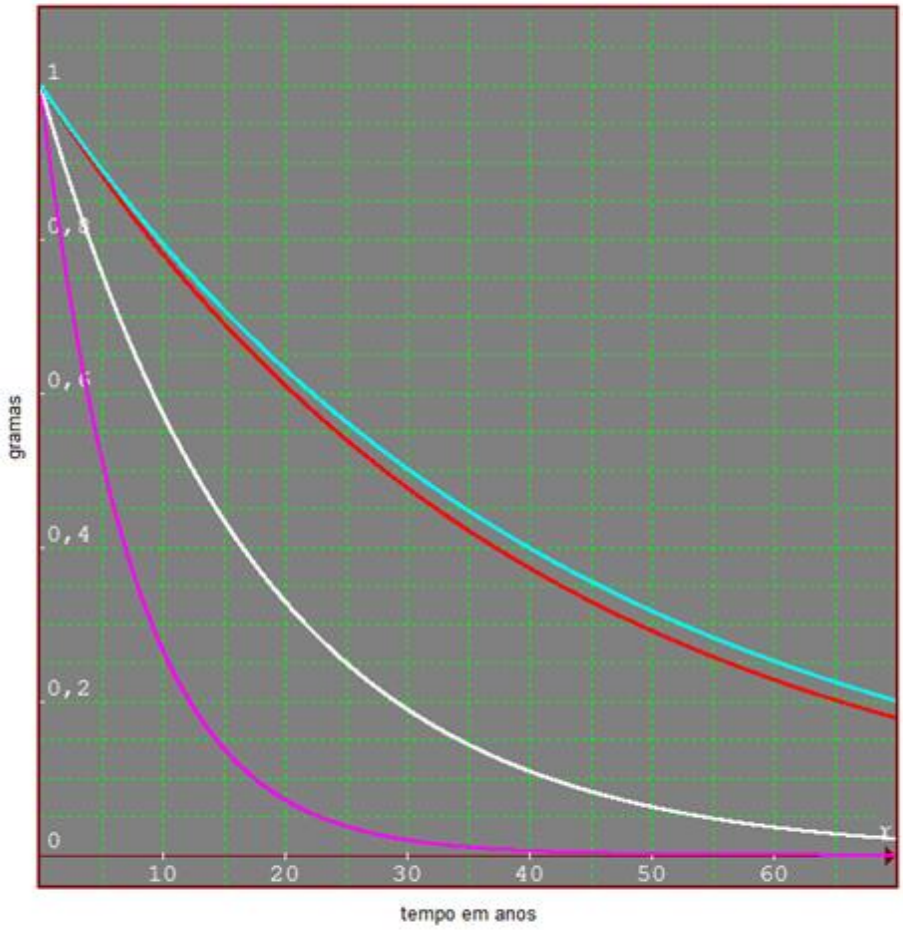


Figura 15 – Gráfico do decaimento de massa radioativa (em gramas) do Cobalto, Trítio, Estrôncio e Césio, pelo tempo (em anos)
Fonte: O autor

As funções, cujos gráficos aparecem na Figura 15 tem como domínio o conjunto dos números reais não-negativos $\Re_+$ e o conjunto imagem $]0,1]$.

Essas curvas de decaimento radioativo são o período de semidesintegração. Tomemos como exemplo específico o iodo-131, que é usado em medicina nuclear em exames de tireoide. O período de meia-vida do iodo-131 é de 8 dias, assim, temos o seguinte gráfico que representa a curva de decaimento radioativo de uma amostra de 10g do iodo-131 (Figura 16).

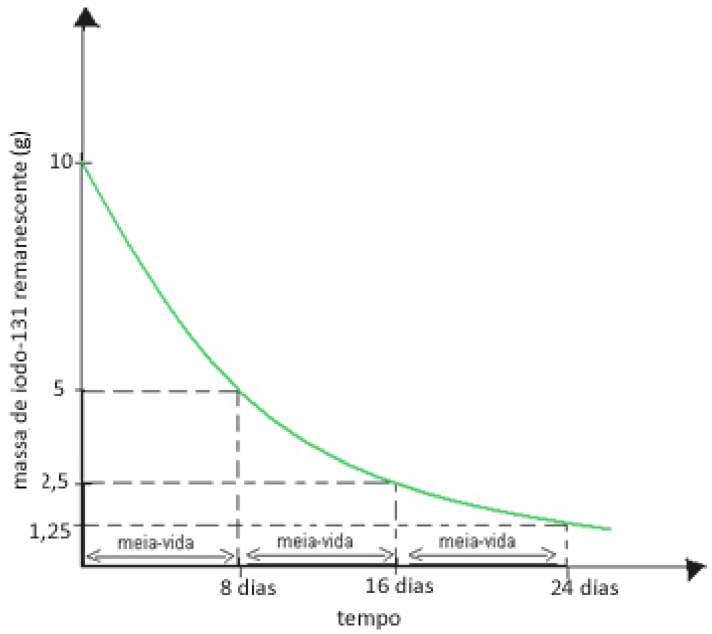


Figura 16 – Observação da meia vida do radioisótopo iodo-131
Fonte: FOGAÇA, Jennifer Rocha Vargas. Meia-Vida ou Período de Semidesintegração de Elementos Radioativos. **Mundo Educação**, [S. l.], c2015. Disponível em: <http://www.mundoeducacao.com/quimica/meiavida-ou-periodo-semidesintegracao-elementos-radioativos.htm>. Acesso em: 15 abr. 2015.

A meia-vida não depende da quantidade da amostra, nem da temperatura, nem da pressão. Qualquer variação dessas três grandezas não interfere na tempo que a substância leva para se decompor.

As meias-vidas dos isótopos são utilizadas para várias finalidades, como para estimar o tempo que demora para a radioatividade ser reduzida a padrões aceitáveis para a vida.

Outra aplicação interessante é para determinar a idade de fósseis. Essa idade é estimada a partir da análise do carbono 14, que é incorporado nos organismos vivos. Quando o ser vivo morre, ele deixa absorver esse isótopo e começa a sua desintegração. Sabendo que o período de meia-vida do carbono-14 é de 5730 anos, pode-se estimar em que tempo aquele ser vivo morreu.

4 CONCLUSÃO

Os resultados obtidos nesses problemas propostos com as construções gráficas mostram como a Matemática e em particular as funções estão intrinsecamente ligadas ao nosso dia a dia. Ao se partir do concreto para o abstrato, via exemplos de situações reais, fica mais fácil para o aluno entender a necessidade de se conhecer melhor o assunto função e como sua presença nas nossas vidas é muito mais comum do que os alunos imaginam.

A utilização da tecnologia através de um *software* facilitou a visualização de gráficos, antes apenas construídos no papel, auxiliando consideravelmente o aluno a entender melhor o assunto de funções.

Quando utilizamos contas de consumo, situações cotidianas e científicas (envolvendo a Biologia e a Química, por exemplo), promove-se também a interdisciplinaridade, ponto importante da Educação nos dias de hoje.

No caso específico das funções, o auxílio da ferramenta computacional e das aplicações práticas ajudaram na compreensão e na importância e necessidade de seu estudo. Após a abordagem via exemplos concretos foi feita a formulação teórica com todo o rigor matemático que o assunto necessita.

E finalmente ao experimentar os problemas propostos em sala de aula durante o primeiro semestre de 2015 percebeu-se que os resultados foram muito satisfatórios. Os alunos passaram a ter um grande interesse em softwares educacionais e em outras situações matemáticas que podem ser associadas a situações na vida deles, entenderam o conceito de função com mais facilidade e ainda levaram para casa a necessidade de se economizar água e energia, tanto para as finanças da família, como despertando uma consciência ecológica e social nos mesmos.

REFERÊNCIAS

ABREU, J. M. O Magistério da Matemática no Ensino Fundamental: os desafios do professor. 2001. 48 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização)- Universidade Cândido Mendes, Rio de Janeiro, 2001. Disponível em: <http://www.avm.edu.br/monopdf/8/JOSE%20MAURO%20DE%20ABREU.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2015.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática: um programa. A Educação Matemática em Revista, [S. l.], v. 1, n. 1, p. 5-11, 1993.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. A Experiência Matemática. 4. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER E.; MORGADO A. C. A Matemática do Ensino Médio, Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 1

EBAH. c2013. Disponível em: <http://www.ebah.com.br/>. Acesso em: 30 abr. 2015.

FOGAÇA, J. R. V. Meia-Vida ou Período de Semidesintegração de Elementos Radioativos. Mundo Educação, [S. l.], c2015. Disponível em: <http://www.mundoeducacao.com/quimica/meiavida-ou-periodo-semidesintegracao-elementos-radioativos.htm>. Acesso em: 15 abr. 2015.

KEITH, H. GRAPHMATICA [Software livre de computador para construir e representar gráficos de funções planas]. Versão 2.1 para Windows, 2012.

MACEDO, L. N. Análise do Uso de uma Sequência Didática com Objetos de Aprendizagem Digitais no Desenvolvimento de Conceitos Algébricos. Dissertação (Mestrado)- Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2009.

OLIVEIRA, D. P. A.; ROSA, M.; VIANA, M. C. V. De Oresme a Dirichlet: um breve histórico do desenvolvimento das funções. RBHM, [S. l.], v. 14, n. 28, p. 47-61, 2014. Disponível em: <http://www.cead.ufop.br/images/NOTICIAS_2015/07-01-15_artigo_Davidson-Milton-Marger.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2015.

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. Tópicos de História da Matemática. Disciplina MA31. Mestrado Profissional em Matemática. São Carlos: Sociedade Brasileira de Matemática, 2011.

SAMPAIO, J. L. P. Noções de Matemática. São Paulo: Vestseller, 2011. v. 1.

TERMINAL Rodoviário Intermunicipal do Município de Ponta Grossa. 2008. Disponível em: <http://pontagrossa.pr.gov.br/rodoviaria/>. Acesso em: 10 maio 2015.