UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA – PROFMAT

PADRÕES E O TRABALHO COM SEQUÊNCIAS RECURSIVAS: UMA ABORDAGEM NO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

PONTA GROSSA
2014

RONALDO THEODOROVSKI

PADRÕES E O TRABALHO COM SEQUÊNCIAS RECURSIVAS: UMA ABORDAGEM NO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional, Setor de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Fabiane de Oliveira

PONTA GROSSA
2014

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

Theodorovski, Ronaldo
T388 Padrões e o trabalho com sequências recursivas : uma abordagem no desenvolvimento do pensamento algébrico/ Ronaldo Theodorovski. Ponta Grossa, 2014.
85 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Orientadora: Profª Drª Fabiane de Oliveira.

1.Pensamento algébrico. 2.Padrões. 3.Sequências recursivas. 4.Planilhas eletrônicas. I.Oliveira, Fabiane de. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. T.

CDD: 512

TERMO DE APROVAÇÃO

Ronaldo Theodorovski

"PADRÕES E O TRABALHO COM SEQUÊNCIAS RECURSIVAS: UMA ABORDAGEM NO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO"

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Fabiane de Oliveira

Orientador: Profa. Dra. Fabiane de Oliveira
Departamento de Matemática, UEPG/PR

Patricia Hess

Profa. Dra. Patricia Hess
Departamento de Matemática, UTFPR/PR

Profa. Dr. Marciano Pereira
Departamento de Matemática, UEPG/PR

Ponta Grossa, 11 de Julho de 2014.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por esta conquista.

A minha família, em especial aos meus pais que sempre me incentivaram a estudar e por me mostrarem que jamais podemos deixar de lutar.

A minha orientadora Prof.ª Dr.ª Fabiane de Oliveira pela paciência, educação, dedicação e competência. Sua contribuição foi fundamental para a realização desse trabalho.

Aos membros da banca examinadora, professores Marciano e Patricia pelo tempo dedicado à análise e contribuições para o enriquecimento desse trabalho.

A todos os professores do PROFMAT da UEPG, pelo ensino e empenho.

Aos meus colegas de turma, em especial a Debora, pela amizade e dedicação de muitas horas de estudos juntos.

Aos meus colegas da Escola Estadual Gil Stein Ferreira.

As pessoas que sempre me auxiliaram e acreditaram em meu potencial, sem duvidar que este momento se tornaria realidade.

A SBM por ter fornecido esta oportunidade, junto à CAPES que proporcionou auxílio financeiro durante o curso.

E a todos que contribuíram de alguma maneira para que eu chegasse até aqui. Muito obrigado.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo apresentar propostas pedagógicas para o ensino da álgebra tendo em vista promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Para tanto foi realizado um levantamento bibliográfico buscando trabalhos que demonstram que tal objetivo pode ser alcançado por meio de um ensino que prioriza o reconhecimento e a generalização de padrões matemáticos. Em um primeiro momento, procuramos analisar como alguns livros didáticos do Ensino Fundamental tratam desse tema. Para contemplar o Ensino Médio, demos destaque às sequências definidas recursivamente, que se revelam como um bom ponto de partida para a generalização de padrões. Dessa forma, apresentamos um estudo dos métodos de resolução das relações de recorrências que permitem encontrar a fórmula do termo geral para esse tipo de sequência. Além disso, com o estudo de recorrências lineares, é possível propor uma abordagem alternativa para o ensino de progressões no Ensino Médio. Buscando trabalhar com regularidades numéricas para descrever e generalizar relações, sugerimos a utilização de recursos computacionais, em particular, o uso das planilhas eletrônicas, como proposta metodológica no ensino da álgebra.

Palavras-chave: pensamento algébrico, padrões, sequências recursivas, planilhas eletrônicas

ABSTRACT

This paper aims to present educational proposals for the teaching of algebra in order to promote the development of students' algebraic thinking. To do so a bibliographical survey searching for papers that demonstrate that such goal can be achieved through an education that prioritizes the recognition and the generalization of mathematical patterns was conducted. At first, we tried to analyze how some textbooks of elementary school deal with this issue. To address high school, we highlighted the sequences defined recursively, which appear as a good starting point for the generalization of patterns. Thus, we present a study of the methods of solving the recurrence relations that allows the formula to find the general term for this type of sequence. Moreover, with the study of linear recurrences, it is possible to propose an alternative approach to teaching progressions in high school. Seeking to work with numerical regularities to describe and generalize relationships, we suggest the use of computational resources, in particular, the use of spreadsheets as a methodological approach in the teaching of algebra.

Keywords: algebraic thinking, patterns, recursive sequences, spreadsheets

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DCE	Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PA	Progressão Aritmética
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PG	Progressão Geométrica
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PRD	Paraná Digital
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SEED	Secretaria de Estado da Educação do Paraná
TIC	Tecnologias da Informação e Comunicação

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo introdutório apresentamos uma análise da literatura que trata do aprendizado da álgebra na Educação Básica. Iniciamos com uma revisão bibliográfica de alguns trabalhos referentes ao tema. Em seguida, refletimos a relevância do problema, definindo os objetivos e apresentando o delineamento do texto.

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Devido à relevância do conteúdo, o estudo sobre o ensino da álgebra aparece em diversos trabalhos de professores e pesquisadores que serão citados. Pretendemos compreender de que forma a exploração de padrões, num contexto de atividades de investigação, pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos da Educação Básica.

Aquino (2008) teve como objetivo investigar as estratégias de 33 alunos do Ensino Fundamental na resolução de atividades que envolvem a percepção e a generalização de padrões em sequências numéricas. A autora pode constatar que as atividades promoveram o pensamento algébrico dos alunos participantes, porque foram capazes de observar, perceber regularidades e expressar a generalidade de sequências que apresentam padrão.

Canavarro (2009), ao propor um problema aos alunos de séries iniciais, surpreende-se com os aspectos importantes acerca do raciocínio matemático apresentado pelos mesmos que detectam possibilidades e capacidades de desenvolvimento do pensamento algébrico, as quais compreendem: (i) a identificação referente à estrutura matemática da situação-problema colocada em análise; (ii) o estabelecimento de relações numéricas entre as duas variáveis em causa; (iii) a generalização de uma regra para determinar um termo qualquer da sequência, por meio da linguagem natural; (iv) a forma de expressar a generalização, utilizando de recorrência e através do termo geral.

Grecco (2008) apresentou uma sequência didática para uma turma do sétimo ano do Ensino Fundamental, com o objetivo de introduzir a álgebra por meio de situações-problemas que envolvem o reconhecimento e a generalização de padrões. Um desses problemas pedia para que os alunos determinassem quantos apertos de mão são trocados entre 5 pessoas. A segunda parte do problema pedia para que descobrissem a quantidade de cumprimentos se fossem 2, 3, 4, 6, 7, 10, 20 e um número n de pessoas. Já a terceira parte do problema pedia para que criassem uma fórmula para calcular o número A de apertos de mão para um número n qualquer de pessoas.

Para a autora, com essa atividade foi possível proporcionar aos estudantes um primeiro contato com o pensamento algébrico, e oportunizar a generalização e a construção de expressões algébricas por meio de padrões em sequências.

Silva (2009) teve como objeto de estudo verificar de que forma as atividades que envolvem observação e generalização de padrões são exploradas por professores que ministram aulas em oficinas para o ensino da Matemática, denominadas Experiências Matemáticas. Para isso realizou entrevistas com cinco professores destas oficinas, pelas quais pode-se constatar que essas atividades são minimamente trabalhadas e que alguns professores desconhecem o objetivo das mesmas.

O mesmo autor coloca que a relevância da pesquisa se justifica pela importância do trabalho com padrões como meio importante para que alunos desenvolvam o pensamento algébrico e a possibilidade de criarem expressões algébricas, dando sentido a utilização dos símbolos.

Santos (2007) efetuou um estudo sobre a introdução do pensamento algébrico nos livros didáticos de Matemática. O trabalho também buscou responder questões relacionadas a forma de como a álgebra está sendo abordada nos livros didáticos atuais e como professores e alunos são influenciados por essa abordagem.

Becher (2009) teve como objetivo identificar em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio as competências e habilidades algébricas desenvolvidas por eles durante o Ensino Fundamental, e como aplicam esses conteúdos no Ensino Médio. Além disso, o autor teve como propósito caracterizar o pensamento algébrico dos participantes, seguindo a abordagem de um estudo de caso.

Os dados apresentados desta pesquisa, levou a conclusão que a maioria dos estudantes conseguiram reconhecer padrões. Porém, para generalizar um padrão, o resultado ficou abaixo do esperado. O autor ressalta a necessidade de se adotar no Ensino Fundamental metodologias que garantam um aprendizado e melhor compreensão da álgebra por meio da resolução de problemas, tornando o ensino mais significativo para os educandos.

Segundo Becher (2009),

> [...] o pensamento algébrico consiste em um conjunto de habilidades cognitivas que contemplam a representação, a resolução de problemas, as operações e análises matemáticas de situações tendo as ideias e conceitos algébricos como seu referencial. (p.22).

Perez (2006) propôs a turmas de Ensino Médio, uma sequência didática envolvendo a generalização de padrões em forma de situações-problemas. Por meio das atividades propostas conclui que os alunos foram capazes de observar, levantar hipóteses, tirar conclusões e justificar suas respostas.

A autora verificou que por mais que o pensamento algébrico já estava sendo desenvolvido, expresso pela linguagem natural, os estudantes demonstraram dificuldades em escrever algebricamente/simbolicamente a regra geral de uma sequência, mesmo quando se tratava de uma progressão aritmética.

Para desenvolver o pensamento algébrico dos alunos de uma turma da segunda série do Ensino Médio, Archilia (2008) propôs atividades que envolvem a exploração de padrões, cujo objetivo era criar condições para que os alunos construíssem uma fórmula para o termo genérico de uma progressão aritmética.

Ferreira (2009), em sua dissertação de mestrado, investiga como estudantes do Ensino Médio realizam e compreendem atividades de reconhecimento e generalização de padrões. Na análise dos dados, a autora percebeu que eles conseguiram reconhecer os padrões em sequências. Porém, apresentaram dificuldades para determinar um termo qualquer da sequência. O obstáculo enfrentado, ocorre devido a utilização do processo recursivo apresentado pelos alunos, utilizando-se de um procedimento aritmético.

Conforme a mesma autora, os alunos necessitam de outras experiências para aperfeiçoarem a linguagem algébrica e manifestarem seu pensamento algébrico de maneira mais eficaz.

A partir do resultado dessa pesquisa, tivemos a ideia de apresentar uma proposta de trabalho sobre a resolução das relações recursivas encontradas em sequências numéricas, possibilitando aos alunos do Ensino Médio generalizar termos da sequência, levando-os à construção de uma fórmula para o termo geral.

Por meio dessas leituras, podemos constatar que o desenvolvimento do pensamento algébrico está diretamente ligado ao trabalho com a observação e generalização de padrões, desempenhando um papel importante no aprendizado da álgebra.

1.2 RELEVÂNCIA DO PROBLEMA

Os principais documentos de orientações curriculares referente ao ensino e aprendizagem, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (DCE) para a disciplina de Matemática, destacam a importância de se trabalhar com atividades que envolvem a observação de regularidades e a generalização de padrões no ensino da álgebra.

Para as DCE (2008) a ação do professor é articular o processo pedagógico que dê condições ao estudante constatar regularidades e realizar generalizações. Além disso, a aprendizagem da Matemática consiste em criar estratégias que possibilitam ao aluno atribuir sentido e construir significado às ideias matemáticas de modo que, tornar-se capaz de estabelecer relações, justificar, analisar, discutir e criar.

De acordo com os PCN (1998), referente ao ensino de Matemática indicam como objetivos do Ensino Fundamental:

> [...] visar ao desenvolvimento do pensamento algébrico, por meio de exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problemas e favorecer possíveis soluções; utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico. (p. 64).

No que tange ao desenvolvimento do pensamento algébrico, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), descrevem que é preciso:

> [...] colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. (p. 70).

Dessa forma, orientações curriculares sugerem o estudo das sequências numéricas para desenvolver o pensamento algébrico, pois proporcionam oportunidades de analisar, identificar regularidades, sendo possível, em alguns casos, generalizá-las e expressá-las por meio de sentenças algébricas.

Conforme as autoras Vale e Pimentel (2005), “Os temas, sobretudo no estudo das sucessões e funções, são um universo para explorar problemas e investigações com padrões” (p. 15).

O estudo de sequências numéricas relaciona-se diretamente com a álgebra, no que se refere às expressões algébricas presentes nas leis de formação de uma sequência e maior compressão de variáveis.

Para não perder o foco da álgebra, procuramos dentre os subsídios possíveis apresentar uma proposta de trabalho com sequências recursivas ou sequências de recorrências, através das quais são verificados diferentes padrões de regularidade que podem ser generalizados.

O estudo dos métodos de resolução das relações recursivas, permitirá aos alunos do Ensino Médio encontrar uma fórmula fechada para o termo geral dessas sequências. Por outro motivo, a forma como o conteúdo de recorrências lineares é abordado nesse nível de ensino acaba sendo bastante limitada, pois é dado ênfase ao estudo de progressões aritméticas e geométricas.

> O conceito de álgebra é muito abrangente e possui uma linguagem permeada por convenções diversas de modo que o conhecimento algébrico não pode ser concebido pela simples manipulação dos conteúdos abordados isoladamente. Defende-se uma abordagem pedagógica que os articule, na qual os conceitos se complementem e tragam significado aos conteúdos abordados. (DCE,2008, p.52).

Assim pretendemos possibilitar um avanço na teoria que envolve as recorrências lineares, apresentado mecanismos de generalização, objetivando o raciocínio dos alunos, e não a mera memorização de fórmulas.

Nesse sentido, essa proposta pedagógica, permite maior formalidade no uso da linguagem algébrica e apresenta estratégias de generalização mais eficazes. Tornando um ambiente propício para aprofundar as investigações sobre a observação de regularidades e a generalização de padrões, agora sob a perspectiva das sequências recursivas.

1.3 OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO

O presente trabalho tem como principais finalidades apresentar propostas pedagógicas para o ensino da álgebra, a fim de que essas promovam o desenvolvimento do pensamento algébrico. Será, também, apresentado um estudo de recorrências lineares para obter o termo geral de sequências recursivas.

Para isso pretendemos:

- Analisar em livros didáticos do Ensino Fundamental para perceber se o ensino da álgebra utiliza-se da exploração e generalização de padrões;
- Apresentar atividades que envolvam observação e generalização de padrões;
- Apresentar métodos de resolução de recorrências lineares para a construção de uma fórmula para o termo geral de sequências numéricas;

- Resolver analiticamente problemas por meio de recorrências lineares de primeira e segunda ordem;
- Abordar o cálculo do termo geral de uma progressão aritmética e geométrica por meio da utilização de recorrências lineares de primeira ordem;
- Modelar problemas usando recorrências lineares;
- Utilizar planilhas eletrônicas para o estudo da álgebra e a construção de sequências que apresentem padrões de comportamento numérico.

1.4 DELINEAMENTO DO TEXTO

O presente trabalho foi estruturado em seis capítulos. Além do capítulo introdutório e do conclusivo, conta com outros quatro capítulos referentes a fundamentação teórica e o desenvolvimento da proposta, conforme detalhamos a seguir.

No segundo capítulo encontramos a fundamentação teórica. Apresentamos algumas considerações sobre o pensamento algébrico e alguns conceitos sobre padrões matemáticos. Também será apresentado um estudo de recorrências lineares de primeira e segunda ordem e os métodos de resolução das relações de recorrência, para uma possível abordagem desse conteúdo no Ensino Médio.

No terceiro capítulo é apresentado uma análise de alguns livros didáticos do Ensino Fundamental, com o intuito de investigar as atividades de generalização de padrões que desenvolvem o pensamento algébrico dos alunos.

No quarto capítulo efetuamos a resolução de algumas questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, que tratam de recorrências lineares.

O quinto capítulo traz um resumo sobre algumas das justificativas e finalidades para o uso das tecnologias no ambiente escolar. E ainda, exemplificamos a utilização de planilhas eletrônicas no ensino da álgebra. Bem como, a inserção desse recurso no estudo de sequências numéricas.

No sexto capítulo descrevemos as considerações finais acerca de todo o trabalho desenvolvido.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A fundamentação teórica inicia brevemente com algumas reflexões sobre o ensino da álgebra e como alguns autores caracterizam o pensamento algébrico. A seguir será exposto alguns conceitos relacionados aos padrões matemáticos.

Ainda neste capítulo, apresentamos a definição de sequências numéricas, por conseguinte será estudado as sequências definidas recursivamente e a solução de recorrências lineares de primeira e de segunda ordem.

2.1 PENSAMENTO ALGÉBRICO: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Atualmente, no campo da Educação Matemática, várias são as discussões e investigações que tratam do ensino de álgebra. Esses estudos apontam suportes à prática educacional, fontes de discussões quanto às metodologias, a fim de que estas possibilitem aos alunos o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Lins e Gimenez (1997) consideram que a “álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade e desigualdade” (p. 137). Essa é uma definição de álgebra muito usada na literatura.

Esses autores acrescentam que a educação algébrica envolve dois objetivos centrais, é preciso que os alunos sejam capazes de produzir significados para a álgebra e que os mesmos desenvolvam a capacidade de pensar algebricamente.

Segundo Portanova (2005), desenvolver o pensamento algébrico torna-se essencial na educação matemática do aluno, pois nesse contexto, o aluno consegue realizar abstrações e generalizações em nível mais profundo do que o pensamento aritmético.

A mesma autora esclarece que “o pensamento algébrico é desenvolvido a partir de estudos básicos empreendidos na área da aritmética, uma vez que o aluno já perceba a existência de diferentes conjuntos numéricos e das operações possíveis de se realizar entre os seus elementos” (p. 24).

Conforme Booth (1995, p. 24), na aritmética, a ênfase está nas respostas numéricas particulares, enquanto que na álgebra, buscam-se os procedimentos e relações para expressá-las genericamente.

As características fundamentais do pensamento algébrico compreendem as hipóteses, afirmações, justificativas, identificação de regularidades e relações de grandeza (FIORENTINI et al., 1993; VALE E PIMENTEL, 2005; WALLE, 2009).

Fiorentini et al. (1993) descrevem os elementos que caracterizam o pensamento algébrico:

> [...] percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização. (p. 87).

Acrescentam ainda que:

> [...] não existe uma única forma de se expressar o pensamento algébrico. Ele pode expressar-se através da linguagem natural, através da linguagem aritmética, através da linguagem geométrica ou através da criação de uma linguagem específica para esse fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica. (p. 88).

Kaput (1999) citado por Walle (2009, p. 288) descreve o pensamento algébrico sobre as cinco diferentes formas de raciocínio algébrico: (i) Generalização da aritmética e de padrões em toda a matemática; (ii) Uso significativo do simbolismo; (iii) Estudo da estrutura no sistema de numeração; (iv) Estudo de padrões e funções; e (v) Processos de modelagem matemática, que integra as quatro anteriores.

De acordo Walle (2009, p. 287):

> O pensamento algébrico ou raciocínio algébrico envolve formar generalizações a partir de experiências com números e operações, formalizar essas ideias com uso de um sistema de símbolos significativo, explorando conceitos de padrão e de função.

Em síntese percebemos que pensar algebricamente é um conjunto de fazeres diferenciados que envolve a capacidade de cálculo e a capacidade de trabalhar com estruturas matemáticas representadas através do uso de símbolos algébricos na resolução de problemas, implicando na capacidade de generalizar.

Nesse sentido, o enfoque principal do ensino da álgebra está em propor tarefas que envolvam o raciocínio algébrico e assim desenvolver o pensamento algébrico dos alunos.

> O raciocínio algébrico implica em representar, generalizar e formalizar padrões e regularidades em qualquer aspecto da Matemática. A medida que se desenvolve esse raciocínio, se vai evoluindo no uso da linguagem e no simbolismo necessário para apoiar e comunicar o pensamento algébrico, especialmente nas equações, nas variáveis e nas funções. Esse tipo de pensamento está no coração da Matemática concebida como a ciência dos padrões e da ordem, já que é difícil encontrar em outra área da Matemática em que formalizar e generalizar não seja um aspecto central. (GODINO e FONT, 2003, p. 774).

Nessa perspectiva, os alunos devem ser confrontados com desafios que os estimulem, despertando o interesse em desenvolver algum processo de generalização. Para Barbosa (2007):

> Quando apelamos aos padrões num contexto de tarefas de investigação no ensino da Matemática é, normalmente, porque queremos ajudar os alunos a aprender matemática de forma significativa e/ou a envolver-se na sua aprendizagem, facultando-lhes um ambiente que tenha algo a ver com a sua realidade e experiências. O estudo de padrões, num contexto de tarefas de investigação, vai ao encontro deste aspecto, apoiando a aprendizagem dos estudantes para descobrirem relações, encontrarem conexões, fazerem generalizações e previsões. (p. 9).

Segundo o autor Walle (2009), “aprender a procurar por padrões e como descrever, traduzir e ampliá-los é parte do fazer matemática e do pensar algebricamente” (p. 296).

Vale e Pimentel (2005) apontam a importância do estudo de padrões no ensino da álgebra, porque pode “proporcionar contextos de aprendizagem bastante ricos e motivantes para os estudantes” (p.14). Nesse contexto, ressaltam que o uso de padrões é um importante componente da atividade matemática, isto é, permite conjecturar e generalizar.

Entre outras vantagens que as autoras defendem sobre as tarefas que envolvem a procura de padrões, é o fato que elas permitem:

- evidenciar como os diferentes conhecimentos matemáticos se relacionam entre si e com outras áreas do currículo;
- promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos tornando-os bons solucionadores de problemas e pensadores abstratos;
- melhorar a compreensão do sentido do número, da álgebra e de conceitos geométricos.

Para que isso ocorra, deve ser levado em consideração alguns aspectos relevantes que oportunizem aos alunos a:

- descobrir o padrão numa sequência;
- descrever o padrão oralmente e por escrito;
- continuar uma sequência;
- prever termos numa sequência;
- generalizar;
- construir uma sequência. (p.16).

Abrantes (1995) esclarece que o reconhecimento de regularidades, a investigação de padrões e a generalização de sequências numéricas ajudam os alunos na capacidade de abstração, de forma que os mesmos consigam identificar e formular regras gerais. Com isso, permite que a aprendizagem da álgebra se processe de um modo gradual.

Gigante e Santos (2012) comentam que quando os alunos estabelecem generalizações de números ou eventos quaisquer, a partir da observação de regularidades e utilizam-se de diferentes símbolos para a representação, em geral formados por letras, esses alunos iniciam o desenvolvimento do pensamento algébrico. Assim, através da generalização e abstração é possível ampliar os conceitos de número, dos sistemas de numeração, das operações, permitindo o equacionamento das situações-problema e o uso de linguagem algébrica cada vez mais formal.

Para Gigante e Santos (2012, p.25):

> Ao longo de todo o ensino fundamental, a ideia de regularidade, apresentada em sequências figurais e numéricas, bem como a identificação de padrões que as relacionam, proporciona generalizações e as primeiras algebrizações. Alguns conceitos, trabalhados como noções intuitivas nos anos iniciais (o conceito de função, por exemplo) vão se ampliando ao longo dos anos finais e consolidam-se no decorrer do ensino médio.

Sendo assim, os conceitos algébricos iniciais precisam ser bem trabalhados para a formação de conceitos algébricos posteriores.

De acordo com a organização dos conteúdos apresentados nas DCE (2008), são nas séries finais do Ensino Fundamental que os conteúdos algébricos começam a ser ensinados, tais como as expressões algébricas, equações do primeiro e segundo grau, polinômios, funções, sistemas de equações e inequações. Apesar que nas séries iniciais já se possa incluir alguns tópicos da álgebra, embora não de maneira formalizada.

Ainda, conforme essas diretrizes, os conteúdos no Ensino Médio deverão ser trabalhados de forma articulada, ampliando e aprofundando os conteúdos ministrados no Ensino Fundamental.

2.2 PADRÕES MATEMÁTICOS

A procura por padrões é tão importante que fez com que Devlin (2002) considerasse a Matemática como “a ciência dos padrões”. Muitos fenômenos fluem com uma regularidade tal que, se for identificada, será possível fazer previsões e formular conjecturas. O reconhecimento de padrões em diversas situações reais muitas vezes leva a novas e importantes ideias.

> O que o matemático faz é examinar "padrões" abstratos - padrões numéricos, padrões de forma, padrões de movimento, padrões de comportamento, etc. Esses padrões tanto podem ser reais como imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou assumindo um interesse pouco mais recreativo. (DEVLIN, 2002, p. 9)

Assim, parte do conhecimento produzido é o resultado das ações empíricas, ou seja, da prática cotidiana e outra parte é consequência da valorização do caráter teórico racional da Matemática. Com esse pensamento, a Matemática desempenha papel decisivo e fundamental por permitir a resolução de problemas e funcionar como instrumento essencial na construção dos conceitos algébricos.

Para Gigante e Santos (2012, p.45):

> Na natureza, nas pinturas, na poesia, na arquitetura, na dança, no ritmo, nos crochês, nas rendas, nos ladrilhos dos pisos e das paredes, em tudo que nos rodeia, no nosso corpo, nos animais, nas plantas, há formas ou sequências cujos padrões possibilitam generalizações. Apreciá-los, reconhecê-los, identificá-los, criá-los, generalizá-los e algebrizar é fazer Matemática, é reconhecer o mundo em que vivemos.

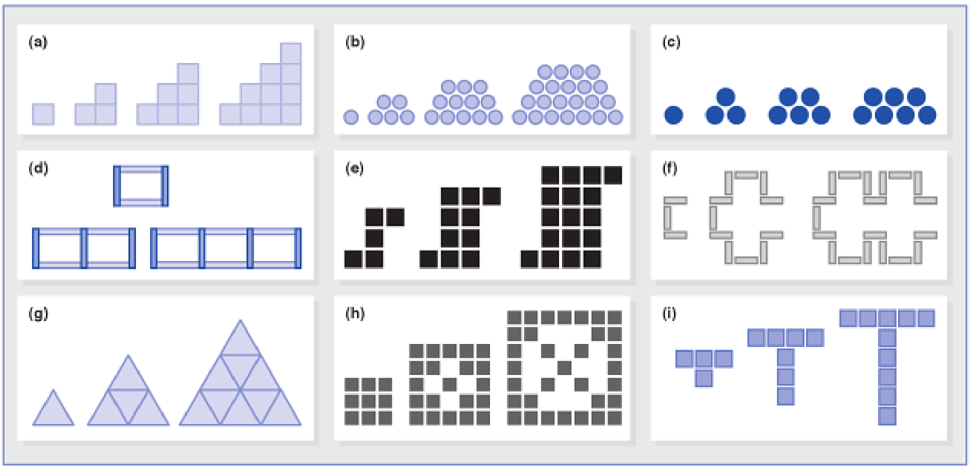
No âmbito da Matemática escolar, ao analisarmos as DCE (2008) verificamos que o assunto “padrões” não está apresentado de forma explícita nesse documento. São considerados os padrões que estão associados às sequências com regras lógicas e que nos levam a sua generalização.

Walle (2009), apresenta alguns tipos de padrões de regularidade, os quais podem ser: padrão repetitivo, padrões numéricos e padrões crescentes. Esses padrões podem ser reconhecidos, ampliados e generalizados. O conceito de padrão repetitivo parte da identificação de um núcleo que é a menor cadeia de elementos que se repete.

Para Walle (2009) os estudantes podem explorar padrões que envolvam uma progressão a cada passagem. O estudo de padrões de crescimento possibilita aos alunos fazer generalizações, através de relações algébricas que permite dizer a quantidade de elementos em uma posição qualquer. Com isso, pode contribuir para a formação do conceito de função.

Na Fig. 2.1, são apresentados exemplos de padrões de crescimento, que obedecem a um determinado tipo de regularidade que podem ser reconhecidas e generalizadas.

Figura 2.1 – Padrões crescentes



Fonte: Walle (2009, p. 299)

O mesmo autor também propõe exemplos de padrões numéricos, formulando hipóteses das regras observadas nas sequências numéricas, fundamental para o processo de generalização.

2, 4, 6, 8, 10, ...	(números pares: adicione 2 a cada vez)
1, 4, 7, 10, 13, ...	(comece com 1; adicione 3 a cada vez)
1, 4, 9, 16, ...	(números quadrados perfeitos)
0, 1, 5, 14, 30, ...	(adicione o próximo número quadrado perfeito)
2, 5, 11, 23, ...	(dobre o número e adicione 1)
2, 6, 12, 20, 30, ...	(multiplique pares de números naturais consecutivos)
3, 3, 6, 9, 15, 24, ...	(adicione os dois números anteriores, exemplo de uma sequência de *Fibonacci*)

Segundo Walle (2009, p.297) os padrões numéricos encontrados em sequências numéricas baseados em uma regra particular proporcionam desafios apropriados no desenvolvimento do pensamento algébrico em todos os níveis da Educação Básica.

2.3 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Em diferentes contextos encontramos situações que envolvem a ideia de sequências. Podemos considerar os exemplos:

(i) A sequência dos meses do ano (janeiro, fevereiro, março, ..., dezembro);

(ii) A sequência dos múltiplos inteiros positivos de 3 (3, 6, 9, 12,...).

DEFINIÇÃO 2.1: Uma sequência é uma função cujo domínio é conjunto dos números naturais, denotado por $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,...\}$, em um conjunto A.

$$\begin{aligned} a:\ \ &\mathbb{N} \to A \\ &n \mapsto a(n) \end{aligned}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, o valor $a(n)$ é usualmente representado por a_n.

Escreve-se $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...a_n, ...)$, ou (a_n) para indicar a sequência a. (HEFEZ, 2011, p.11).

Em alguns casos, o domínio de uma sequência é o conjunto de inteiros não negativos $\{0, 1, 2, 3,...\}$, em vez de $\mathbb{N}$. Ou seja, a sequência inicia em $n = 0$.

Quando o domínio da função é $\{1,2,3,4,...,m\}$, para algum $m \in \mathbb{N}$, sobre um conjunto A, a sequência é dita finita e denotada por: $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_m$.

No exemplo (i), sequência dos meses do ano, temos uma sequência finita, onde os seus termos são:

$a_1 =$ janeiro $\quad a_2 =$ fevereiro $\quad a_3 =$ março $\quad$ ... $\quad a_{12} =$ dezembro

No exemplo (ii), podemos encontrar uma regra para calcular os termos da sequência em uma ordem qualquer, admitindo que esses termos seguem o mesmo padrão que os apresentados.

Uma maneira de fazer isso é procurar uma função ou lei de formação que relacione cada termo da sequência com a ordem do elemento, isto é, ao índice de sua posição.

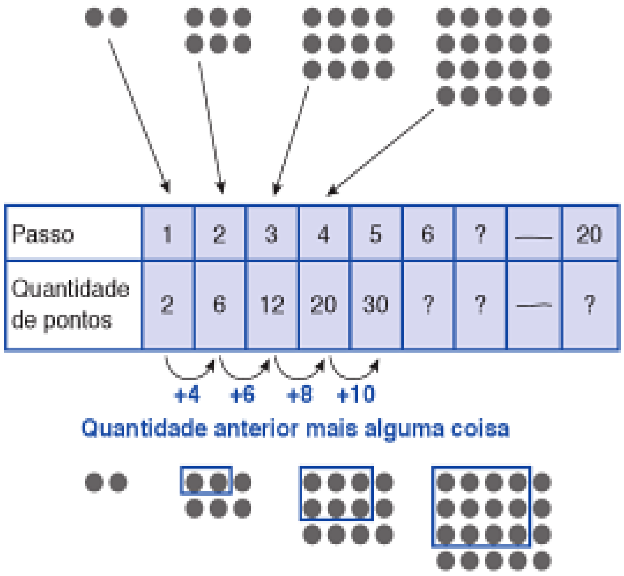
Assim, sendo n a posição de um termo na sequência, temos que cada elemento da sequência é o triplo da sua posição. Em linguagem matemática, o termo de ordem n da sequência é dado pela expressão algébrica $3n$. Denotamos isso escrevendo a sequência numérica como:

$$3,\ 6,\ 9,\ ...,\ 3n,\ ....$$

Dizemos que a função $a(n) = a_n = 3n$ é o termo geral dessa sequência.

No trabalho com algumas sequências numéricas é comum identificar as relações recursivas. Por exemplo, na Fig. 2.2 temos uma sequência construída iterativamente, que envolve o desenho da figura anterior e a respectiva contagem, referente à construção de termos para a determinação de termos seguintes.

Figura 2.2 – Processos recursivos



Passo	1	2	3	4	5	6	?	—	20
Quantidade de pontos	2	6	12	20	30	?	?	—	?

Fonte: Walle (2009, p.301)

Analisando a Fig. 2.2, percebemos que a quantidade de pontos em cada passo é igual a quantidade de pontos do passo anterior adicionado aos números pares (4, 6, 8, 10,...). Dessa maneira, “a descrição que diz como um padrão é modificado de um passo ao passo seguinte é conhecida como uma relação recursiva” (WALLE, 2009, p.300).

Por esse método, para descobrir a quantidade de pontos na centésima figura, teríamos que determinar os 99 passos anteriores, o que seria uma tarefa não muito viável. Sendo assim, é preciso encontrar uma regra que relacione a ‘quantidade de pontos’ ao ‘passo’ da figura, sem haver a necessidade de calcular os elementos intermediários.

Nesse sentido, o estudo que faremos a seguir, vai ao encontro dessas necessidades. Para isso, é apresentado a definição de sequências recursivas e métodos para resolver uma relação recursiva, permitindo encontrar uma fórmula para o passo n, ou seja, o termo geral da sequência sem recorrer aos termos anteriores.

2.4 SEQUÊNCIAS DEFINIDAS RECURSIVAMENTE

Muitas sequências são definidas recursivamente, ou seja, existem sequências numéricas onde se conhece o primeiro termo e uma lei que permite relacionar o termo a_n com alguns de seus termos anteriores: a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1.

Quando isso ocorre, dizemos que os termos podem ser obtidos recursivamente ou através de uma equação de recorrência.

Exemplo 2.1: Consideremos a sequência cujos termos obedecem às condições:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2, n \geq 1 \end{cases}$$

Vamos calcular o 2º, 3º, 4º e 5º termos:

- $n = 1 \Rightarrow a_2 = a_1 + 2 \Rightarrow a_2 = 3;$
- $n = 2 \Rightarrow a_3 = a_2 + 2 \Rightarrow a_3 = 5;$
- $n = 3 \Rightarrow a_4 = a_3 + 2 \Rightarrow a_4 = 7;$
- $n = 4 \Rightarrow a_5 = a_4 + 2 \Rightarrow a_5 = 9.$

Logo, a sequência é (1, 3, 5, 7, 9,...), ou seja, podemos inferir que é a sequência dos números naturais ímpares.

2.5 RECORRÊNCIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Uma recorrência é dita linear de primeira ordem quando é da forma $x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$, onde f e g são funções de n. A terminologia "linear" é no sentido que não existem potências ou produtos de $x_i's$, com $i = 1, 2, 3, ..., n$.

Quando $g(n)$ = 0, a recorrência linear é dita homogênea. Caso contrário, é não homogênea (adaptado de LIMA et al., 2006, p.69).

As recorrências $x_{n+1} = 2nx_n$ e $x_{n+1} = 5x_n + n^2$ são exemplos de recorrências lineares de primeira ordem, respectivamente homogênea e não homogênea.

Considere uma recorrência linear homogênea do tipo $x_{n+1} = Ax_n$, onde A é uma constante. Vamos apresentar um exemplo de como encontrar uma solução que permite calcular todos os termos desta sequência em função de n.

Exemplo 2.2: Seja $x_{n+1} = 5x_n$ uma relação recursiva, tal que $x_1 = 5$. Obtenha a função que expressa x_n em função de n.

SOLUÇÃO: Escrevendo os termos da equação de recorrência $x_{n+1} = 5x_n$, teremos que:

$$\begin{aligned} x_2 &= 5x_1 \\ x_3 &= 5x_2 \\ x_4 &= 5x_3 \\ &\vdots \\ x_n &= 5x_{n-1} \end{aligned}$$

Multiplicando ordenadamente o primeiro e segundo membro das igualdades, teremos:

$$x_2.x_3.x_4 \ldots x_{n-1}.x_n = 5x_1.5x_2.5x_3 \ldots 5x_{n-2}.5x_{n-1} \tag{2.1}$$

Dividindo os dois membros da Eq. 2.1 por $x_2.x_3.x_4 \ldots x_{n-1}$, desde que os termos sejam todos não nulos, e simplificando o produto de fatores de 5 (aparece $n-1$ vezes), obtemos $x_n = x_1 5^{n-1}$. Como $x_1 = 5$, segue que $x_n = 5^n$.

Exemplo 2.3: Considere uma relação da forma $x_{n+1} = f(n)x_n$, onde f é uma função com domínio o conjunto dos números naturais. Em particular, $x_{n+1} = (n+1)x_n$, com $x_1 = 1$, encontre a expressão x_n em função de *n*.

SOLUÇÃO: Temos que:

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_1 \\ x_3 &= 3x_2 \\ x_4 &= 4x_3 \\ &\vdots \\ x_n &= nx_{n-1} \end{aligned}$$

Multiplicando membro a membro as equações acima, teremos:

$$x_2.x_3.x_4 \ldots x_{n-1}.x_n = 2x_1.3x_2.4x_3 \ldots (n-1)x_{n-2}.nx_{n-1} \tag{2.2}$$

Dividindo os dois membros da Eq. 2.2 por $x_2.x_3.x_4 \ldots x_{n-1}$, obtemos:

$$x_n = x_1.2.3.4...(n-1).n \tag{2.3}$$

Substituindo $x_1 = 1$ na Eq. 2.3, e fazendo $1.2.3.4...(n-1).n = n!$, obtemos a solução da recorrência $x_{n+1} = (n+1)x_n$, isto é:

$$x_n = n! \tag{2.4}$$

2.5.1 Progressão Aritmética e Geométrica no Ensino Médio

Existem dois tipos de recorrências lineares de primeira ordem bastante conhecidas em Matemática, a Progressão Aritmética (PA) e a Progressão Geométrica (PG). É importante destacar, que muitas vezes as fórmulas de PA e PG são apresentadas aos alunos do Ensino Médio de forma "pronta e acabada". Assim, corremos o risco de privar os mesmos de todo um raciocínio algébrico e conceitos matemáticos existentes para chegar até elas.

Conforme as DCE (2008) espera-se que o aluno do Ensino Médio generalize cálculos para a determinação de termos de uma sequência numérica. Sendo assim, a partir da definição de PA e PG, o trabalho com recorrências possibilita aos estudantes a generalização e a obtenção de uma fórmula para o termo geral.

Progressões Aritméticas

Definição 2.2: Progressão aritmética é uma sequência numérica, onde cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante r denominada razão da progressão (SMOLE e DINIZ, 2005, p.167).

Assim, $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_{n-1}, a_n, ...)$ é uma PA $\Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + r, n \geq 1$.

Dessa forma, podemos perceber que uma progressão aritmética é uma recorrência linear de primeira ordem. Da definição 2.2, temos que:

$$\begin{aligned}
&a_2 = a_1 + r \\
&a_3 = a_2 + r \\
&a_4 = a_3 + r \\
&\vdots \\
&a_n = a_{n-1} + r
\end{aligned}$$

Somando os membros das igualdades ordenadamente, obtemos:

$$a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n = a_1 + r + a_2 + r + a_3 + r + \ldots a_{n-2} + r + a_{n-1} + r \tag{2.5}$$

Subtraindo em ambos os membros $a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}$ e escrevendo a soma das $n-1$ parcelas de r da Eq. 2.5, obtemos o termo geral de uma progressão aritmética em função da razão e do primeiro termo:

$$a_n = a_1 + (n-1).r \tag{2.6}$$

Exemplo 2.4: Sejam os números inteiros positivos ímpares: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... Qual é o 157º número dessa sequência?

SOLUÇÃO: Note que cada termo dessa sequência, a partir do primeiro, é igual ao anterior mais uma constante 2. Assim, essa sequência é dada pela recorrência $a_{n+1} = a_n + 2$, com $n \geq 1$ e $a_1 = 1$, cuja representação é de uma PA. Logo, pela Eq. 2.6, segue que $a_n = 1 + (n-1).2$ e reescrevendo esse resultado, chegamos em $a_n = 2n - 1$. Para determinar o 157º elemento da sequência, calcula-se $a_{157} = 2.157 - 1 = 313$.

Soma dos termos de uma progressão aritmética finita

Antes de apresentar os cálculos que determina a fórmula da soma dos termos de uma PA, comecemos com um fato histórico envolvendo um matemático famoso.

Conta-se que o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), quando criança frequentou uma escola em que o professor era muito rígido. Certa vez, para manter a classe ocupada e em silêncio, ele pediu que os alunos calculassem a soma dos inteiros de 1 a 100. Gauss, que estava na época com aproximadamente sete anos, apresentou o resultado correto em poucos minutos, anunciando que a soma era 5050 (SMOLE e DINIZ, 2005, p.167).

Vejamos o seu raciocínio:

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100$$

Somando os termos equidistantes, Gauss percebeu que este valor era constante, obtendo o número 101, isto é, 1 + 100 = 101, 2 + 99 = 101, 3 + 98 = 101 e assim sucessivamente até 50 + 51 = 101. Como no total são 50 parcelas de 101, então 50 x 101 = 5050. A regra utilizada por Gauss é válida para qualquer PA finita, que consiste em somar o primeiro com o último termo, multiplicar pela quantidade de termos e dividir o resultado encontrado por 2.

De fato, se a sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_{n-1}, a_n)$ é uma PA finita de razão *r,* podemos representar cada um de seus termos da seguinte forma:

$$(a_1, \underbrace{a_1 + r}_{a_2}, \underbrace{a_1 + 2r}_{a_3}, \underbrace{a_1 + 3r}_{a_4}, ..., \underbrace{a_n - 2r}_{a_{n-2}}, \underbrace{a_n - r}_{a_{n-1}}, a_n)$$

Sendo S_n a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética finita, podemos escrevê-la nas duas formas seguintes:

$$S_n = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + (a_1 + 3r) + ... + (a_n - 2r) + (a_n - r) + a_n \quad (2.7)$$
$$S_n = a_n + (a_n - r) + (a_n - 2r) + (a_n - 3r) + ... + (a_1 + 2r) + (a_1 + r) + a_1 \quad (2.8)$$

Adicionando os termos ordenadamente das Eq. 2.7 e 2.8, obtemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) \quad (2.9)$$

Como a parcela $(a_1 + a_n)$ aparece n vezes, então temos:

$$2.S_n = n(a_1 + a_n) \quad (2.10)$$

Logo, a soma dos n primeiros termos de uma PA finita será dada por:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad (2.11)$$

Exemplo 2.5: O número triangular T_n é definido como a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética 1, 2, 3, 4, ... O número quadrangular Q_n é definido como a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética 1, 3, 5, 7, ... A Fig. 2.3 justifica essa denominação. Determinar o número triangular e quadrangular de ordem n.

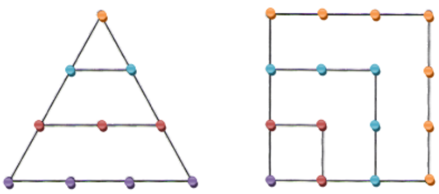


Figura 2.3 – Representação do número triangular e quadrangular

SOLUÇÃO: Sendo $T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n$ a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética de razão 1, com $a_1 = 1$ e $a_n = n$, substituindo esses valores na Eq. 2.11, obtemos $T_{\mathrm{n}} = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

De maneira semelhante, $Q_{\mathrm{n}} = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2n - 1$, é determinado pela soma dos n primeiros número naturais ímpares, ou seja, uma PA de razão 2. Substituindo $a_1 = 1$ e $a_n = 2n - 1$, na Eq. 2.11 temos que $Q_{\mathrm{n}} = \dfrac{n(1 + 2n - 1)}{2} = n^2$.

Progressões Geométricas

Definição 2.3: Progressão geométrica é uma sequência numérica, onde cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma constante q denominada razão da progressão (SMOLE e DINIZ, 2005, p.176).

Assim, $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_{n-1}, a_n, ...)$ é uma PG $\Leftrightarrow a_{n+1} = a_n.q$, $n \geq 1$

Dessa forma, podemos perceber que uma progressão geométrica é uma recorrência linear homogênea. Da definição 2.3, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 q \\ a_3 &= a_2 q \\ a_4 &= a_3 q \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} q \end{aligned}$$

Multiplicando membro a membro as igualdades acima, obtemos:

$$a_2.a_3.a_4 \ldots a_{n-1}.a_n = a_1 q.a_2 q.a_3 q \ldots a_{n-2} q.a_{n-1} q \qquad (2.12)$$

Dividindo ambos os membros da Eq. 2.12 por $a_2.a_3.a_4.a_5 \ldots a_{n-1}$ de termos não nulos e escrevendo o produto dos $n-1$ fatores iguais a q na forma de potência, obtemos o termo geral de uma PG, dada pela expressão:

$$a_n = a_1.q^{n-1} \qquad (2.13)$$

Progressão Geométrica e a fórmula dos Juros Compostos

De acordo com as DCE (2008) o estudo de progressões geométricas pode ser trabalhado de forma articulada ao conteúdo de juros compostos, tendo em vista que esse conteúdo é uma das mais importantes aplicações de progressões geométricas.

Conforme Giovanni (2011, p. 230):

> [...] o juro composto é conhecido como juro sobre juro e é o mais utilizado nas transações financeiras. No juro composto, o valor gerado é incorporado ao capital e passa a participar da geração de juros no período seguinte.

Veja como podemos obter a fórmula dos juros compostos, partindo do próximo exemplo e do seu conceito.

Exemplo 2.6: Determinar o montante, ao fim de 3 anos, correspondente a uma aplicação no valor de R$ 1.000,00, à taxa de 10% ao ano, no regime de juros compostos.

SOLUÇÃO: No regime dos juros compostos, a taxa de 10% deve incidir sobre o montante do ano anterior. Assim, depois de decorrido o primeiro ano o montante é o capital aplicado adicionado ao juro, que é o rendimento do capital inicial a taxa de 10% ao ano.

$$M_1 = 1000 + (1000\ .\ 0{,}1) = 1100.$$

Ao transcorrer o segundo ano, o novo montante é a soma do montante do ano anterior que agora é o capital, mais o juro desse novo capital:

$$M_2 = 1100 + (1100\ .\ 0{,}1) = 1210.$$

Da mesma forma ao fim do terceiro e último ano, temos que:

$$M_3 = 1210{,}00 + (1210\ .\ 0{,}1) = 1331.$$

Logo, o montante desejado é R$ 1331,00.

Numa possível extensão do problema que preveja o valor do montante num período qualquer, o uso recursivo se torna um processo trabalhoso para a determinação de termos de ordem distante. Sendo assim, é preciso encontrar uma regra geral sem ter a necessidade de calcular consecutivamente todos os seus termos até chegar ao termo desejado.

A generalização desse exemplo pode ser vista na Tab. 2.1, onde pretendemos determinar o montante M_n após n períodos de tempo, considerando um capital inicial C e taxa periódica i.

Tabela 2.1 – Generalização do montante/juros compostos

Período	Montante
0	M_0
1	$M_1 = M_0 + M_0.i = M_0(1+i)$
2	$M_2 = M_1 + M_1.i = M_1(1+i)$
3	$M_3 = M_2 + M_2.i = M_2(1+i)$
4	$M_4 = M_3 + M_3.i = M_3(1+i)$
$\vdots$	$\vdots$
n	$M_n = M_{n-1} + M_{n-1}.i = M_{n-1}(1+i)$

Com base no padrão observado, obtemos a seguinte recorrência matemática:

$$M_n = M_{n-1}(1+i) \tag{2.14}$$

Resolvendo a recorrência linear de primeira ordem homogênea, podemos encontrar uma fórmula explícita para o montante M_n. Da Eq. 2.14, temos que:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_0(1+i) \\ M_2 &= M_1(1+i) \\ M_3 &= M_2(1+i) \\ &\vdots \\ M_n &= M_{n-1}(1+i) \end{aligned}$$

Multiplicando membro a membro as equações acima, obtemos:

$$M_1.M_2.M_3\ldots M_{n-1}.M_n = M_0(1+i).M_1(1+i).M_2(1+i)\ldots M_{n-2}(1+i)M_{n-1}(1+i) \tag{2.15}$$

A Eq. 2.15 pode ser simplificada dividindo ambos os membros por $M_1.M_2.M_3\ldots M_{n-1}$ de termos não nulos e escrevendo o produto dos *n* fatores iguais a $1+i$ na forma de potência.

$$M_n = M_0(1+i)^n \tag{2.16}$$

Como $M_0 = C$ e substituindo esse valor na Eq. 2.16, chegamos ao resultado:

$$M_n = C(1+i)^n \tag{2.17}$$

Assim, no regime dos juros compostos a sequência numérica dos montantes no decorrer do tempo, constitui uma progressão geométrica de razão $1+i$.

Podemos usar indução Matemática para comprovar sua validade:

i. Para $n = 0$, temos $M_0 = C(1+i)^0 = C$, ou seja, a fórmula é válida.

ii. Agora, devemos assumir que $M_n = C(1+i)^n$ é verdadeira (hipótese indutiva).

A partir da relação de recorrência $M_n = M_{n-1}(1+i)$ e da hipótese, devemos verificar que M_{n+1} é verdadeira.

$$M_{n+1} = M_n(1+i) \overset{\text{hipótese}}{=} C(1+i)^n(1+i) = C(1+i)^{n+1}$$

Isto mostra que a fórmula explícita para M_n é válida, para todo $n \geq 0$.

Soma dos termos de uma progressão geométrica finita

Em uma PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n)$, podemos indicar por S_n a soma dos n primeiros termos, ou seja:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad (2.18)$$

Multiplicando a Eq. 2.18 pela razão q, $q \neq 0$, obtemos:

$$q.S_n = a_1.q + a_2.q + a_3.q + \ldots + a_{n-2}.q + a_{n-1}.q + a_n.q \quad (2.19)$$

Da definição de PG, $a_n = a_{n-1}.q$, a Eq. 2.19 pode ser reescrita como:

$$q.S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_n.q \quad (2.20)$$

Subtraindo os termos da Eq. 2.18 dos termos da Eq. 2.20, obtemos:

$$q.S_n - S_n = a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + \ldots + a_n - a_{n-1} + a_n.q - a_n \quad (2.21)$$

Anulando os termos inversos aditivos da Eq. 2.21, obtemos:

$$S_n(q-1) = a_n q - a_1 \quad (2.22)$$

Como $a_n = a_1 q^{n-1}$, ao ser substituído na Eq. 2.22 encontramos $S_n(q-1) = a_1(q^n - 1)$. Isolando S_n, iremos obter a seguinte fórmula:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ para } q \neq 1 \quad (2.23)$$

Dessa maneira, a soma dos n primeiros termos de uma PG pode ser calculada conhecendo-se a razão e o primeiro termo.

Soma dos termos de uma progressão geométrica infinita

A soma S dos infinitos termos de uma PG de razão $|q| < 1$ é finita, ou seja, $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, com $S \in \mathbb{R}$. De fato,

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, \text{ pois } |q| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{(0-1)}{q-1}, \text{ isto é:}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} \tag{2.24}$$

Exemplo 2.7: Determine a fração geratriz da dízima periódica 0,171717...

SOLUÇÃO: Podemos escrever a dízima periódica da seguinte maneira:

0,171717...= 0,17 + 0,0017 + 0,000017 + 0,00000017 + ...

Note que essa adição possui infinitas parcelas, que formam uma PG infinita de razão $q = \frac{1}{100}$. A fração geratriz é, então, o valor da soma dos termos dessa PG. Utilizando a Eq. 2.24, temos:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0{,}17}{1-\frac{1}{100}} = \frac{0{,}17}{\frac{99}{100}} = 0{,}17.\frac{100}{99} = \frac{17}{99}$$

Portanto a dízima periódica 0,171717... é gerada pela fração $\frac{17}{99}$.

2.5.2 Solução de uma recorrência do tipo $x_{n+1} = x_n + f(n)$

De Lima et al. (2006), as recorrências lineares de primeira ordem não homogêneas da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$, com f uma função de n, são facilmente resolvidas. De fato,

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + f(1) \\ x_3 &= x_2 + f(2) \\ x_4 &= x_3 + f(3) \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + f(n-1) \end{aligned}$$

Somando membro a membro as equações acima, obtemos:

$$x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} + x_n = x_1 + f(1) + x_2 + f(2) + x_3 + f(3) + \ldots + x_{n-1} + f(n-1) \tag{2.25}$$

Subtraindo $x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1}$ em ambos os membros da Eq. 2.25, obtemos:

$$x_n = x_1 + f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n-1) = x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} f(i) \tag{2.26}$$

Dessa forma, a Eq. 2.26 refere-se a solução da recorrência $x_{n+1} = x_n + f(n)$.

2.5.3 Solução de uma recorrência do tipo $x_{n+1} = Ax_n + f(n)$

Para a resolução de uma recorrência linear não homogênea de primeira ordem do tipo $x_{n+1} = Ax_n + f(n)$, onde A é uma constante não nula e f uma função de n, utilizaremos o seguinte teorema:

Teorema 2.1: Sendo a_n uma solução não nula da recorrência $x_{n+1} = A.x_n$, então a substituição $x_n = a_n.y_n$ transforma a recorrência $x_{n+1} = A.x_n + f(n)$ em $y_{n+1} = y_n + f(n)[A.a_n]^{-1}$ (adaptado de LIMA et al., 2006, p.71).

Demonstração: Como a_n é solução não nula da recorrência $x_{n+1} = A.x_n$, segue que $a_{n+1} = A.a_n$. Fazendo a substituição $x_n = a_n.y_n$ na recorrência $x_{n+1} = Ax_n + f(n)$, teremos:

$$a_{n+1}.y_{n+1} = A.a_n.y_n + f(n) \tag{2.27}$$

Substituindo a_{n+1} por $A.a_n$ na Eq. 2.27, obtemos:

$$A.a_n.y_{n+1} = A.a_n.y_n + f(n) \tag{2.28}$$

Dividindo por $A.a_n$ a Eq. 2.28 e fazendo as devidas manipulações algébricas, obtemos $y_{n+1} = y_n + f(n)[A.a_n]^{-1}$, o qual é o resultado desejado.

Exemplo 2.8: Encontrar uma fórmula explícita para a recorrência $x_{n+1} = 4x_n + 8^n$, com $x_1 = 2$.

SOLUÇÃO: Resolvendo a equação homogênea associada $x_{n+1} = 4x_n$, temos que:

$$\begin{aligned}
&x_2 = 4x_1 \\
&x_3 = 4x_2 \\
&x_4 = 4x_3 \\
&\vdots \\
&x_n = 4x_{n-1}
\end{aligned}$$

Multiplicando os membros das igualdades ordenadamente, obtemos:

$$x_2.x_3.x_4 \ldots x_{n-1}.x_n = 4x_1.4x_2.4x_3 \ldots 4x_{n-2}.4x_{n-1} \tag{2.29}$$

Simplificando a Eq. 2.29, obtemos $x_n = x_1.4^{n-1}$. Uma solução da equação homogênea associada é $a_n = 4^{n-1}$. Fazendo a substituição $x_n = a_n.y_n$, na recorrência $x_{n+1} = 4x_n + 8^n$, obtemos:

$$a_{n+1}.y_{n+1} = 4a_n.y_n + 8^n \tag{2.30}$$

Substituindo $a_n = 4^{n-1}$ na Eq. 2.30 , obtemos:

$$4^n.y_{n+1} = 4^n.y_n + 8^n \tag{2.31}$$

Dividindo ambos os membros da Eq. 2.31 por 4^n, obtemos:

$$y_{n+1} = y_n + 2^n \tag{2.32}$$

Agora, resolvendo a equação de recorrência encontrada $y_{n+1} = y_n + 2^n$, temos que:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + 2^1 \\ y_3 &= y_2 + 2^2 \\ y_4 &= y_3 + 2^3 \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + 2^{n-1} \end{aligned}$$

Somando os membros das igualdades ordenadamente, obtemos $y_2 + y_3 + y_4 + \ldots + y_{n-1} + y_n = y_1 + 2^1 + y_2 + 2^2 + y_3 + 2^3 + \ldots + y_{n-1} + 2^{n-1}$, que ao ser simplificado resulta:

$$y_n = y_1 + \underbrace{2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}}_{\text{Soma PG}} \tag{2.33}$$

Note que $2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}$ trata-se da soma dos $n-1$ primeiros termos de uma progressão geométrica com $a_1 = 2$ e $q = 2$. Da Eq. 2.23 (soma dos termos de uma PG), segue que $\sum_{n=1}^{n-1} 2^n = 2\dfrac{2^{n-1}-1}{2-1} = 2^n - 2$. Assim, a Eq. 2.33 se reduz na seguinte expressão:

$$y_n = y_1 + 2^n - 2 \tag{2.34}$$

Como $x_n = a_n.y_n$, isto é, $x_n = 4^{n-1}.y_n$, e como $x_1 = 2$, segue que $y_1 = 2$. Dessa forma, a Eq. 2.34 se reduz a $y_n = 2^n$. Agora, basta substituir $y_n = 2^n$ em $x_n = 4^{n-1}.y_n$

para obter a solução geral. Logo, a solução da relação de recorrência $x_{n+1} = 4x_n + 8^n$ é dada por $x_n = 2^{3n-2}$, para todo $n \geq 1$.

2.6 RECORRÊNCIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

De Lima et al. (2006, p.74) as recorrências lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes são da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, sendo p e q coeficientes reais, com $q \neq 0$. A essas recorrências associa-se uma equação de segundo grau, $r^2 + pr + q = 0,$ chamada de equação característica.

Os próximos quatro teoremas e as suas respectivas demonstrações, foram extraídos de Lima et al. (2006, p.74-78), que serão utilizados para encontrar a solução de uma recorrência linear homogênea de segunda ordem.

Teorema 2.2: Sejam as raízes r_1 e r_2 da equação característica $r^2 + pr + q = 0$. Então $a_n = C_1 r_1^{\ n} + C_2 r_2^{\ n}$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ para quaisquer C_1 e C_2 constantes reais.

Demonstração: Como $a_n = C_1 r_1^{\ n} + C_2 r_2^{\ n}$, vamos primeiramente escrever as identidades:

$$a_{n+1} = C_1 r_1^{\ n+1} + C_2 r_2^{\ n+2}$$
$$a_{n+2} = C_1 r_1^{\ n+2} + C_2 r_2^{\ n+2}$$

Substituindo a_n, a_{n+1} e a_{n+2} na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n &= C_1 r_1^{\ n+2} + C_2 r_2^{\ n+2} + p\left(C_1 r_1^{\ n+1} + C_2 r_2^{\ n+1}\right) + q\left(C_1 r_1^{\ n} + C_2 r_2^{\ n}\right) \\ &= C_1 r_1^{\ n+2} + pC_1 r_1^{\ n+1} + qC_1 r_1^{\ n} + C_2 r_2^{\ n+2} + pC_2 r_2^{\ n+1} + qC_2 r_2^{\ n} \\ &= C_1 r_1^{\ n}(r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^{\ n}(r_2^2 + pr_2 + q) \\ &= C_1 r_1^{\ n}.0 + C_2 r_2^{\ n}.0 = 0 \end{aligned}$$

Como r_1 e r_2 são as raízes da equação característica, então $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, ou seja, $a_n = C_1 r_1^{\ n} + C_2 r_2^{\ n}$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. O que prova o teorema.

■

O Teorema 2.2 é um caso geral de solução. Entretanto, os teoremas descritos a seguir, serão estudados os casos específicos em relação às raízes da equação característica, considerando-se as três possíveis situações:

i) Duas raízes reais distintas: $r_1 \neq r_2$;

ii) Duas raízes reais iguais: $r_1 = r_2$;

iii) Duas raízes complexas: $r_1 = a + bi$ e $r_2 = a - bi$, com a e b reais e $i^2 = -1$.

Teorema 2.3: Sejam r_1 e r_2 raízes reais e distintas da equação característica $r^2 + pr + q = 0$. Então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são do tipo $a_n = C_1 r_1^{\ n} + C_2 r_2^{\ n}$ para quaisquer C_1 e C_2 constantes reais.

Demonstração: Seja y_n uma solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ e sejam C_1 e C_2 duas constantes tais que: $\begin{cases} C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1 \\ C_1 r_1^{\ 2} + C_2 r_2^2 = y_2 \end{cases}$. Resolvendo esse sistema de equações, encontramos:

$$C_1 = \frac{r_2^2 y_1 - r_2 y_2}{r_1 r_2 (r_1 - r_2)} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{r_1 y_1 - r_1^{\ 2} y_1}{r_1 r_2 (r_1 - r_2)}.$$

Esse resultado é possível pois como $q \neq 0$ e $q = r_1.r_2$, então $r_1.r_2 \neq 0$. Além disso, como as raízes da equação característica são distintas, então $r_1 - r_2 \neq 0$.

Afirmamos que $y_n = C_1 r_1^{\ n} + C_2 r_2^{\ n}$ para todo n natural. Vamos provar isso partindo do fato que $z_n = y_n - C_1 r_1^{\ n} - C_2 r_2^{\ n}$ e consequentemente $z_n = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n &= y_{n+2} - C_1 r_1^{\ n+2} - C_2 r_2^{\ n+2} + p(y_{n+1} - C_1 r_1^{\ n+1} - C_2 r_2^{\ n+1}) + q(y_n - C_1 r_1^{\ n} - C_2 r_2^{\ n}) \\ &= y_{n+2} - C_1 r_1^{\ n+2} - C_2 r_2^{\ n+2} + py_{n+1} - pC_1 r_1^{\ n+1} - pC_2 r_2^{\ n+1} + qy_n - qC_1 r_1^{\ n} - qC_2 r_2^{\ n} \\ &= \underbrace{(y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n)}_{=0} - C_1 r_1^{\ n} \underbrace{(r_1^{\ 2} + pr_1 + q)}_{=0} - C_2 r_2^{\ n} \underbrace{(r_2^{\ 2} + pr_2 + q)}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Como y_n é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ e r_1 e r_2 são as raízes da equação $r^2 + pr + q = 0$, segue que, $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$. De $z_n = y_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n$, $C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1$ e $C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2$, então $z_1 = z_2 = 0$. Portanto, $z_n = 0$, para todo n natural.

■

Exemplo 2.9: Determine a solução da recorrência $x_{n+2}+3x_{n+1}-10x_n=0$, com $x_0=2$ e $x_1=9$.

SOLUÇÃO: Primeiramente, vamos escrever a equação característica da recorrência $x_{n+2}+3x_{n+1}-10x_n=0$, que é dada por $r^2+3r-10=0$. Resolvendo a equação quadrática encontramos $r_1=2$ ou $r_2=-5$.

Como as raízes são reais e distintas, a solução geral é dada por $x_n=C_1 2^n+C_2(-5)^n$. Passamos agora a descobrir os valores de C_1 e C_2. A partir das condições iniciais, $x_0=2$ e $x_1=9$, podemos substituir $n=0$ e $n=1$ em $x_n=C_1 2^n+C_2(-5)^n$, obtendo assim o sistema de equação linear: $\begin{cases} C_1 2^0+C_2(-5)^0=1 \\ C_1 2^1+C_2(-5)^1=9 \end{cases}$, que pode ser reescrito como: $\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ 2C_1-5C_2=9 \end{cases}$. Resolvendo esse sistema de equações, encontramos $C_1=2$ e $C_2=-1$. Com esses resultados, a fórmula explícita para a recorrência $x_{n+2}+3x_{n+1}-10x_n=0$ é dada por $x_n=2.2^n-1(-5)^n$, isto é, $x_n=2^{n+1}-(-5)^n$, para todo $n\geq 1$.

Teorema 2.4: Sejam r_1 e r_2 raízes reais e iguais da equação característica $r^2+pr+q=0$, então $a_n=C_1r_1{}^n+C_2nr_2{}^n$ é solução da recorrência $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n=0$ para quaisquer C_1 e C_2 constantes reais.

Demonstração: Como as raízes da equação $r^2+pr+q=0$ são iguais, então $r_1=r_2=-\dfrac{p}{2}$. Substituindo $a_n=C_1r_1{}^n+C_2nr_1{}^n$ em $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n=0$, segue que:

$$\begin{aligned} a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n &= C_1r_1^{n+2}+C_2(n+2)r_1^{n+2}+p\left(C_1r_1^{n+1}+C_2(n+1)r_1^{n+1}\right)+q\left(C_1r_1^n+C_2nr_1^n\right) \\ &= C_1r_1^{n+2}+C_2nr_1^{n+2}+2C_2r_1^{n+2}+pC_1r_1^{n+1}+pC_2nr_1^{n+1}+pC_2r_1^{n+1}+qC_1r_1^n+qC_2nr_1^n \\ &= C_1r_1^n\left(r_1^2+pr_1+q\right)+C_2nr_1^n\left(r_1^2+pr_1+q\right)+C_2r_1^{n+1}\left(2r_1+p\right) \end{aligned}$$

Como $r_1{}^2+pr_1+q=0$ e $2r_1+p=2\left(-\dfrac{p}{2}\right)+p=0$, segue que:

$$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=C_1r_1^n(0)+C_2nr_1^n(0)+C_2r_1^{n+1}(0)=0$$

■

Teorema 2.5: Se as raízes r_1 e r_2 da equação característica $r^2 + pr + q = 0$ forem complexas, então $a_n = C_1 r_1^{\ n} + C_2 r_2^{\ n}$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ para quaisquer constantes C_1 e C_2, podendo ser escrita na forma $a_n = \rho^n [C_1^{'} \cos(n\theta) + C_2^{'} sen(n\theta)]$, onde $C_1^{'}$ e $C_2^{'}$ são novas constantes, $\rho = |r_1| = |r_2|$ e $\theta = arg(r_1)$.

Demonstração: Colocando as raízes na forma trigonométrica, teremos: $r_1 = \rho(\cos\theta + isen\theta)$ e $r_2 = \rho(\cos\theta - isen\theta)$, onde ρ corresponde ao módulo das raízes $|r_1| = |r_2|$ e θ é o argumento do número complexo $a + bi = r_1$.

Aplicando a Lei de De Moivre para calcular as potências de r_1 e r_2, temos:

$$r_1^n = \rho^n \left(\cos(n\theta) + isen(n\theta)\right) \tag{2.35}$$

$$r_2^n = \rho^n \left(\cos(n\theta) - isen(n\theta)\right) \tag{2.36}$$

Substituindo a Eq. 2.35 e a Eq. 2.36 na solução $a_n = C_1 r_1^{\ n} + C_2 r_2^{\ n}$, temos:

$$a_n = C_1 \left[\rho^n \left(\cos(n\theta) + isen(n\theta)\right)\right] + C_2 \left[\rho^n \left(\cos(n\theta) - isen(n\theta)\right)\right] \tag{2.37}$$

Podemos reescrever a Eq. 2.37 conforme indicado abaixo:

$$a_n = \rho^n \left[(C_1 + C_2)\cos(n\theta) + i(C_1 - C_2)sen(n\theta)\right] \tag{2.38}$$

Da Eq. 2.38, escrevendo $C_1^{'} = C_1 + C_2$ e $C_2^{'} = i\left(C_1 - C_2\right)$ como novas constantes, chegamos ao resultado esperado:

$$a_n = \rho^n [C_1^{'} \cos(n\theta) + C_2^{'} sen(n\theta)]$$

■

3 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Este capítulo apresenta uma breve análise de alguns livros didáticos do Ensino Fundamental, principalmente do 7º e 8º anos. O objetivo é analisar se esses livros, escolhidos pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD-2014), utilizam para o desenvolvimento do pensamento algébrico o reconhecimento e a generalização de padrões em sequências numéricas.

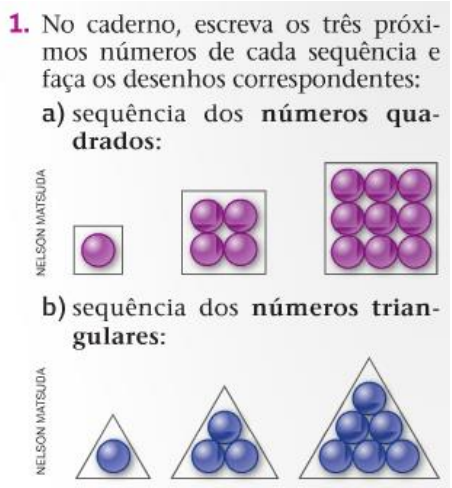
É importante ressaltar que os livros analisados são utilizados nas escolas públicas brasileiras e de autores bem conceituados. Além disso, é dado uma atenção especial na análise dos problemas selecionados desses livros, considerados como motivadores para a introdução ao aprendizado da álgebra.

3.1 Matemática – 8º ano. Autores: Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, editora Moderna, 2012.

Nesse livro os conceitos algébricos são apresentados de forma relacionada a diferentes ramos da matemática como aritmética e geometria. Na seção problemas e exercícios a observação de padrões e regularidades é abordada de maneira simples, utilizando-se de uma linguagem clara e com exercícios de fácil compreensão.

No primeiro capítulo, intitulado *Números primos – Números que dão origem a outros*, são apresentadas algumas questões que chamam a atenção para o reconhecimento de padrões e a descoberta de propriedades numéricas. São explorados os números triangulares e quadrados, como vemos na Fig. 3.1.

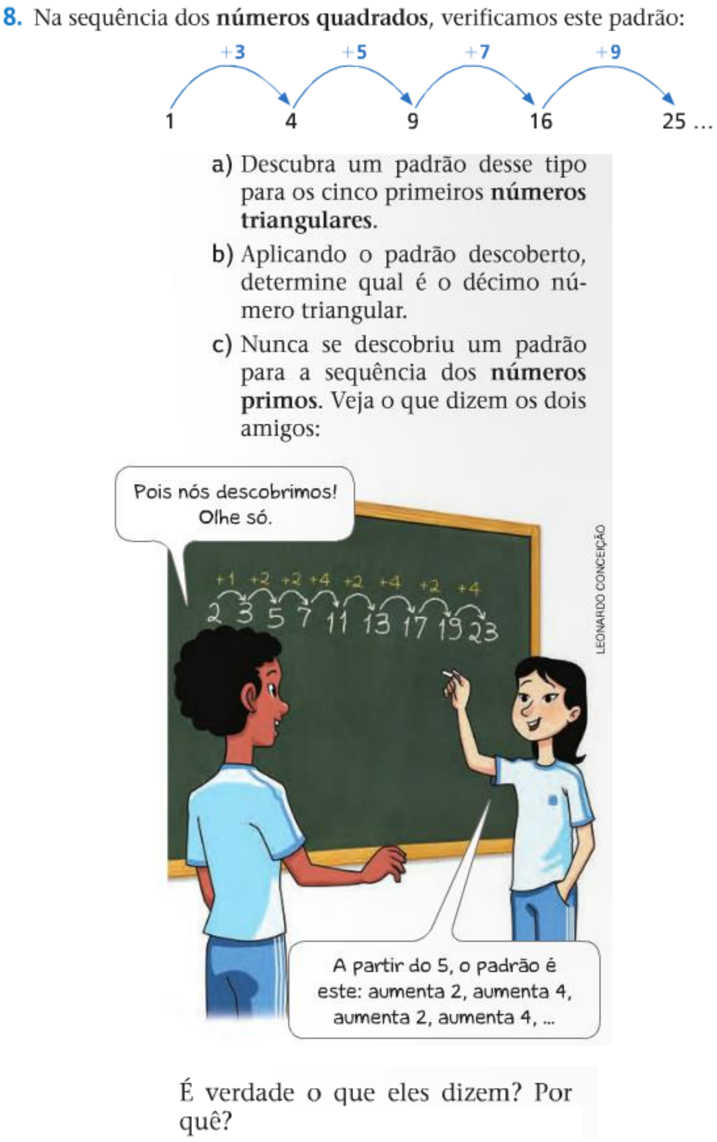
Figura 3.1 – Números triangulares e quadrados



FONTE: Imenes e Lellis, 2012, 8º ano, p. 16

Ainda sobre os números triangulares e quadrados, temos na Fig. 3.2 um exercício que permite escrever os termos da sequência numérica utilizando-se de um processo recursivo, itens a) e b). No item c) temos uma questão que mostra que nem sempre uma sequência numérica apresenta um padrão, é o caso da sequência dos números primos.

Figura 3.2 – Reconhecimento de padrões em sequências numéricas



8. Na sequência dos **números quadrados**, verificamos este padrão:

$1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+5} 9 \xrightarrow{+7} 16 \xrightarrow{+9} 25 \ldots$

a) Descubra um padrão desse tipo para os cinco primeiros **números triangulares**.

b) Aplicando o padrão descoberto, determine qual é o décimo número triangular.

c) Nunca se descobriu um padrão para a sequência dos **números primos**. Veja o que dizem os dois amigos:

É verdade o que eles dizem? Por quê?

FONTE: Imenes e Lellis, 2012, 8º ano, p. 17-18

São propostas atividades de familiarização e o reconhecimento de padrões em sequências numéricas, utilizando inicialmente um desenvolvimento aritmético para encontrar os termos iniciais e, dando continuidade às questões, os autores propõem o reconhecimento do termo geral das sequências que apresentam um padrão numérico.

Na Fig. 3.3 os números quadrados são apresentados de forma generalizada, ou seja, utilizando-se uma fórmula para o termo geral. Com base nesse exemplo, deve-se escrever a generalização para os números cúbicos.

Figura 3.3 – Exemplo de generalização

9. Usando letras para representar números, podemos descrever os **números quadrados** com uma fórmula:

$$\boxed{Q_n = n^2}$$

Vamos combinar que o valor de **n** pode ser 1, 2, 3 etc. Assim, $Q_2 = 2^2 = 4$ e $Q_5 = 5^2 = 25$. Há uma fórmula parecida para os **números cúbicos: C_n = ???**

Descubra essa fórmula e, depois, apresente os seis primeiros números cúbicos.

FONTE: Imenes e Lellis, 2012, 8º ano, p. 18

Acreditamos que os alunos teriam condições de chegar sozinhos ao resultado $Q_n = n^2$. Quando a expressão algébrica é colocada de maneira pronta, o aluno deixa de construir o seu conhecimento algébrico e cabe a ele apenas reproduzir esse conhecimento. Isso seria um ponto negativo a ser destacado.

As sequências numéricas também são exploradas no capítulo 7, *Potências e raízes*. Primeiramente os autores justificam o resultado da potência de expoente zero usando uma sequência numérica com potência de base 2 e expoentes naturais para verificar que dois elevado a zero é igual a um. Também são utilizados outros exemplos, no caso base 10 e base – 5, como vemos na Fig. 3.4.

Figura 3.4 – Potências com expoente zero

$$\begin{array}{rcrl} 2^3 & = & 8 & \\ & & & :2 \\ 2^2 & = & 4 & \\ & & & :2 \\ 2^1 & = & 2 & \\ & & & :2 \\ 2^0 & = & ? & \end{array}$$

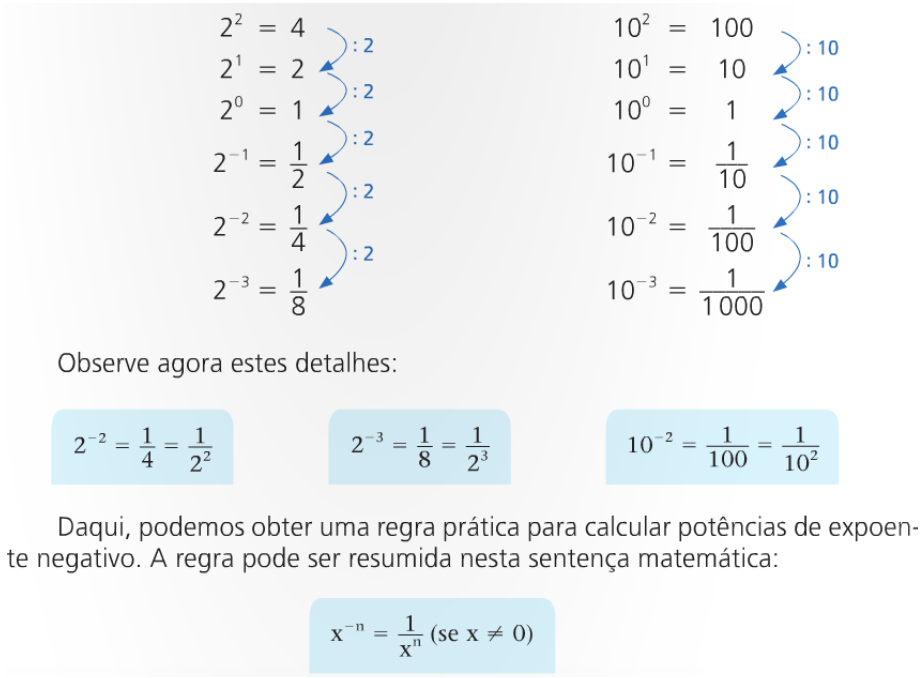
Observando o padrão na sequência de cálculos, percebe-se que 2^0 deve ser igual a 1. Esse mesmo raciocínio pode ser feito com outros números:

$$\begin{array}{rcrl} 10^3 & = & 1\,000 & \\ & & & :10 \\ 10^2 & = & 100 & \\ & & & :10 \\ 10^1 & = & 10 & \\ & & & :10 \\ 10^0 & = & 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcrl} (-5)^3 & = & -125 & \\ & & & :(-5) \\ (-5)^2 & = & 25 & \\ & & & :(-5) \\ (-5)^1 & = & -5 & \\ & & & :(-5) \\ (-5)^0 & = & 1 & \end{array}$$

FONTE: Imenes e Lellis, 2012, 8º ano, p. 142

Os autores utilizam-se da mesma ideia para deduzir a propriedade referente ao cálculo de uma potência de expoente inteiro negativo, como vemos na Fig. 3.5. A partir de cálculos aritméticos é possível levar os alunos a encontrarem uma propriedade matemática por meio da generalização do padrão observado.

Figura 3.5 – Potências com expoente inteiro negativo



$$2^2 = 4 \quad 2^1 = 2 \quad 2^0 = 1 \quad 2^{-1} = \frac{1}{2} \quad 2^{-2} = \frac{1}{4} \quad 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

$$10^2 = 100 \quad 10^1 = 10 \quad 10^0 = 1 \quad 10^{-1} = \frac{1}{10} \quad 10^{-2} = \frac{1}{100} \quad 10^{-3} = \frac{1}{1\,000}$$

Observe agora estes detalhes:

$$2^{-2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} \qquad 2^{-3} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} \qquad 10^{-2} = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$$

Daqui, podemos obter uma regra prática para calcular potências de expoente negativo. A regra pode ser resumida nesta sentença matemática:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \text{ (se } x \neq 0\text{)}$$

FONTE: Imenes e Lellis, 2012, 8º ano, p. 143

Usar a aritmética para desenvolver e expressar generalizações torna o aprendizado mais significativo, sendo mais facilmente compreendido pelos alunos. Contudo, os autores poderiam ter deixado com que os alunos tirassem suas próprias conclusões, isso levaria os mesmos a fazer suas próprias descobertas e construir seu conhecimento.

3.2 Projeto Araribá: Matemática – 7º ano. Editor: Fábio Martins de Leonardo, editora Moderna, 2012.

A coleção Projeto Araribá – Matemática é uma obra coletiva, sendo Fábio Martins de Leonardo o editor responsável. O livro faz uso frequente de padrões e regularidades em sequências numéricas para deduzir regras e fórmulas.

No terceiro capítulo, intitulado *Números inteiros – outras operações*, na seção de exercícios referente a esse capítulo são verificados padrões de regularidades em sequências numéricas e por meio de questionamentos os alunos devem estabelecer as regras de sinais para o produto entre números inteiros, conforme mostra a Fig. 3.6.

Figura 3.6 – Multiplicação entre números inteiros

1 Copie os quadros no caderno e, observando as regularidades, complete-os, substituindo cada ■ pelo produto do número correspondente na primeira linha pelo correspondente na primeira coluna.

a)

×	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4
+4	■	■	■	■	0	+4	+8	+12	+16

−4 −4 −4 −4 −4 −4 −4 −4

b)

×	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4
+2	■	■	■	■	0	+2	+4	+6	+8

−2 −2 −2 −2 −2 −2 −2 −2

2 Agora, usando o mesmo raciocínio do exercício anterior, copie o quadro em seu caderno e substitua cada ■ pelo produto correspondente.

×	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4
−4	■	■	■	■	■	■	■	■	■
−3	■	■	■	■	■	■	■	■	■
−2	■	■	■	■	■	■	■	■	■
−1	■	■	■	■	■	■	■	■	■
0	■	■	■	■	■	■	■	■	■
+1	■	■	■	■	■	+1	+2	+3	+4
+2	■	■	■	■	■	+2	+4	+6	+8
+3	■	■	■	■	■	+3	+6	+9	+12
+4	■	■	■	■	■	+4	+8	+12	+16

3 Analise os produtos do quadro da atividade anterior e responda às questões abaixo no caderno.

a) Quando você multiplicou dois números positivos, o resultado foi positivo ou negativo?

b) Quando você multiplicou um número positivo por um número negativo, o resultado foi positivo ou negativo?

c) Quando você multiplicou um número negativo por um número positivo, o resultado foi positivo ou negativo?

d) Quando você multiplicou dois números negativos, o resultado foi positivo ou negativo?

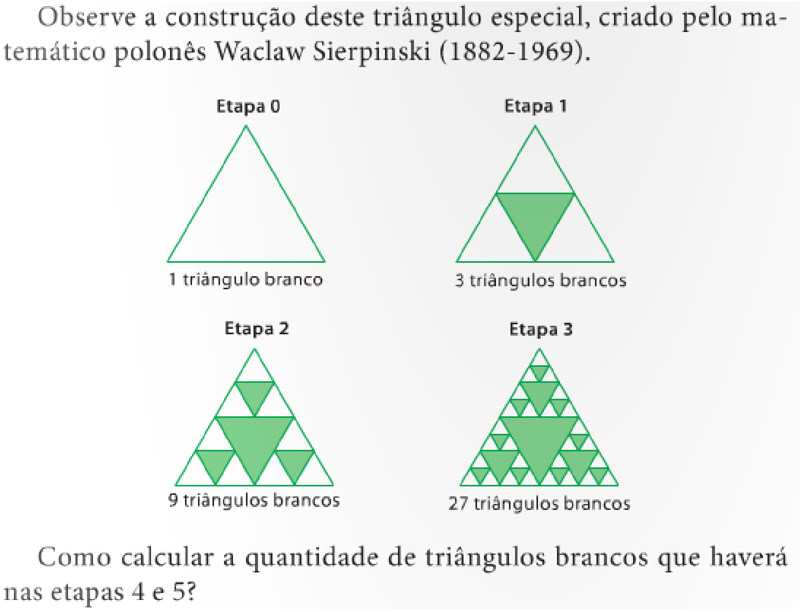
e) E quando você multiplicou um número positivo ou um número negativo por zero, qual foi o resultado?

FONTE: Projeto Araribá, 2010, 7º ano, p. 38-39

A investigação de padrões em sequências numéricas para trabalhar a multiplicação de números inteiros, possibilita ao aluno compreender melhor essas regras ao invés de apenas decorá-las. Além disso, contribui para formação de outros conceitos matemáticos a serem produzidos e da generalização de conteúdos matemáticos.

Ainda no capítulo 3, subtítulo *Potenciação em que a base é um número inteiro*, os autores se utilizam de padrões fractais para dar início ao conteúdo de potências. De acordo com a Fig. 3.7, o triângulo utilizado para a introdução do conteúdo é denominado triângulo de *Sierpinski* (criado por *Waclaw Sierpinski*).

Figura 3.7 – Triângulo de *Sierpinski*



FONTE: Projeto Araribá, 2010, 7º ano, pág. 45

Podemos notar que na passagem de etapas, os triângulos de cor branca são subdivididos em triângulos menores, dando origem a três novos triângulos da mesma cor.

Nesse padrão, por meio da análise das etapas, deve-se perceber que a quantidade de triângulos brancos em uma determinada etapa pode ser escrita como a multiplicação de fatores iguais. Por exemplo, a etapa 4 pode ser escrita como sendo 3.3.3.3. A partir desse problema, os autores apresentam a definição de potências.

No caso do ensino da álgebra, os alunos podem generalizar o problema quando reconhecerem o padrão, descrevendo os demais níveis usando linguagem algébrica, ou seja, uma fórmula capaz de expressar o número de triângulos brancos para um nível qualquer, isto é, o número de triângulos brancos pode ser representado por $b_n = 3^n$.

No capítulo 9, intitulado *Equações*, são propostas atividades de reconhecimento de padrões em sequências numéricas, utilizando inicialmente um desenvolvimento aritmético para determinar os termos das posições iniciais e dando sequência às questões. Os autores propõem a determinação de outras posições mais distantes no qual a construção do desenho ou processo recursivo se torna mais difícil, tendo que generalizar os padrões observados. Essa atividade é ilustrada pela Fig. 3.8.

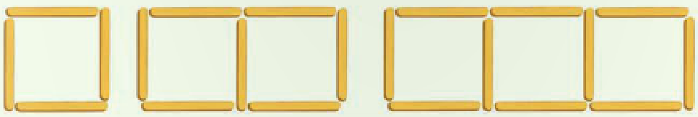
Figura 3.8 – Atividades de observação e generalização de padrão

1 Observe a sequência: 1, 4, 9, ...
Ela pode ser representada em um quadro:

1º termo	2º termo	3º termo	...
1	4	9	...

a) Como determinar o próximo termo?
b) E o termo que vem depois desse?
c) E o 100º termo?
d) Que expressão algébrica traduz o enésimo termo (nº termo)?

2 Observe a figura que está sendo formada com palitos de sorvete. Primeiro, formou-se um quadrado com 4 palitos de sorvete, depois, acrescentaram-se 3 palitos e formou-se mais um quadrado; a seguir com mais 3 palitos, formou-se mais um quadrado. E assim continuou a formação da figura.



a) Continuando essa construção, quantos palitos serão necessários para formar 4 quadrados?
b) E para formar 5 quadrados?
c) E para formar x quadrados?
d) E para formar 15 quadrados?

FONTE: Projeto Araribá, 2010, 7º ano, p. 131

3.3 Praticando Matemática – 7º ano. Autores: Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos, editora do Brasil, 2012.

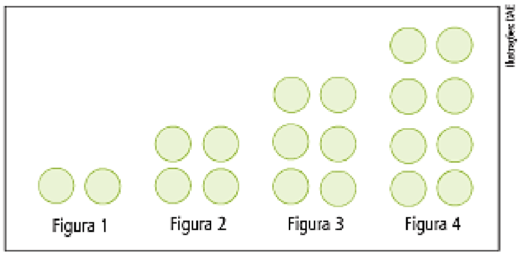
Nesse livro as sequências numéricas são utilizadas primeiramente no terceiro capítulo, *Números inteiros.* Nesse caso para justificar o produto de um número positivo por um número negativo e o produto de dois números negativos, construindo assim as regras de sinais para a multiplicação.

No capítulo 9, *Equações*, o estudo da álgebra é iniciado com a observação de padrões em sequências geométricas, como mostra a Fig. 3.9. Com essa introdução, os estudantes são conduzidos a pensar como descrever uma fórmula para expressar a relação entre duas grandezas (o número de bolinhas em uma posição qualquer) e, ao mesmo tempo, calcular o valor numérico da expressão obtida.

Figura 3.9 – Atividades para a introdução da álgebra

1. Letras e padrões

Observe a sequência de figuras no quadro.



Descubra o padrão que relaciona a quantidade de bolinhas e o número da figura.

Mantendo o mesmo padrão, quantas bolinhas terá a figura 5? E a figura 8?

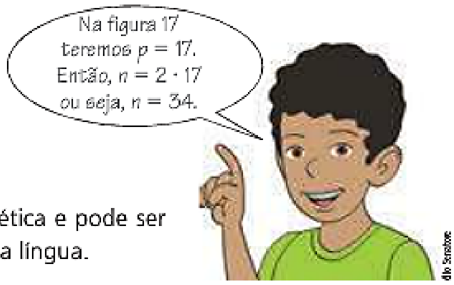
Podemos generalizar esse padrão usando palavras:

- o número de bolinhas da figura é igual a duas vezes o número da posição que ela ocupa na sequência.

Também podemos utilizar a linguagem matemática. Como?

Representando pela letra p a posição da figura e pela letra n o número de bolinhas, escrevemos:

$$n = 2 \cdot p$$



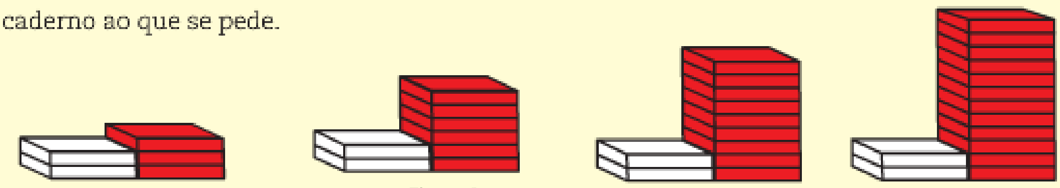
Observe que a linguagem matemática é mais sintética e pode ser compreendida por pessoas que não conhecem a nossa língua.

FONTE: Andrini e Vasconcellos, 2012, 7º ano, 2012, p. 197

A partir dessa situação os alunos são questionados a respeito de outra sequência utilizando caixas brancas e vermelhas, como na Fig. 3.10. O problema parte da observação de padrões onde primeiramente é preciso determinar os próximos termos e só então devem generalizar a situação com uma expressão algébrica, ou seja, determinar o número de caixas em uma posição qualquer.

Figura 3.10 – Atividades de observação e generalização de padrão

Na sequência de figuras abaixo, estão empilhadas caixas brancas e caixas vermelhas. Responda em seu caderno ao que se pede.



a) Quantas caixas brancas e quantas caixas vermelhas terá a figura 5? Duas brancas e 15 vermelhas.

b) Qual será o número total de caixas da figura 12? 38 caixas

c) Como se calcula o número de caixas vermelhas da figura 20? Multiplicando 20 por 3.

d) Quantas caixas vermelhas tem a figura cuja posição é n? $3 \cdot n$

FONTE: Andrini e Vasconcellos, 2012, 7º ano, p. 197

Ainda no capítulo 9, na seção dos exercícios, há mais algumas situações envolvendo sequências numéricas e suas generalizações, como vemos na Fig. 3.11.

Figura 3.11 – Atividades de observação e generalização de padrão

1 A expressão $2n + 3$ gera a sequência:

5, 7, 9, ...

Calcule:

a) o sexto termo da sequência; 15

b) o décimo termo da sequência; 23

c) o vigésimo termo da sequência. 43

2 (Saresp) Considere a sequência:

3, 7, 11, 15, 19, 23, ..., n, ...

O número que vem imediatamente depois de n pode ser representado por:

a) 24

b) $4n$

c) $n + 1$

x d) $n + 4$

FONTE: Andrini e Vasconcellos, 2012, 7º ano, p. 201

Na questão 1) o livro trabalha com o cálculo do valor numérico de uma expressão algébrica, a qual representa a generalização dos termos de uma sequência numérica. Na questão 2), os alunos devem reconhecer o padrão numérico para compreender como se dá o termo seguinte.

3.4 Praticando Matemática – 8º ano. Autores: Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos, editora do Brasil, 2012.

Os autores se utilizam de sequências numéricas para justificar o resultado de uma potência de expoente inteiro negativo, assim como outros autores também o fizeram, entretanto a abordagem utilizada deve ser destacada, os alunos são questionados e conduzidos a pensar. São trazidas questões para que percebam o padrão das sequências, permitindo a construção e a generalização de propriedades matemáticas para potências desse tipo.

Continuando com essa mesma ideia os alunos devem perceber que o resultado de uma potência de base 10 depende do valor do expoente dessa potenciação, inclusive para o expoente negativo, como vemos na Fig. 3.12.

Figura 3.12 – Potências de base dez

$10^0 = 1$
$10^1 = 10$
$10^2 = 100$
$10^3 = 1\,000$
$10^4 = 10\,000$
$10^5 = 100\,000$

O número de zeros é igual ao valor do expoente.

1. Compare o número de zeros do resultado de cada potência com o valor do expoente. O que você observa?
2. Como escrevemos 1000000000 (1 bilhão) usando uma potência de base 10? 10^9
3. O resultado da potência 10^{23} terá quantos zeros? 23 zeros

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$
$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$
$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

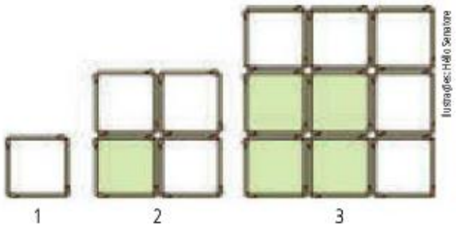
1. Escreva em seu caderno 10^{-4} e 10^{-5} na forma de número decimal. 0,0001 e 0,00001
2. Compare o número de zeros à esquerda do 1 no resultado dessas potências com o valor do expoente. O que você observa? O número de zeros é igual ao valor do expoente.
3. Quem vai ao quadro escrever 0,000 000 001 como uma potência de base dez? 10^{-9}

FONTE: Andrini e Vasconcellos, 2012, 8º ano, p. 43

No livro do oitavo ano o uso de padrões é pouco explorado. Há mais uma situação na seção de exercícios do capítulo 3, *Radiciação*, onde os alunos devem generalizar as regularidades observadas, conforme mostra a Fig. 3.13. Trata-se de uma sequência bastante conhecida, a sequência de números quadrados representados geometricamente, neste caso cada termo é a soma do termo anterior com um certo número ímpar.

Figura 3.13 – Números quadrados

38 Rosângela está construindo quadrados com palitos de fósforo adicionando "quadradinhos" aos quadrados já construídos, formando uma sequência, de acordo com o esquema:



a) Rosângela terminou de construir o quadrado de número 29. Qual é o número de "quadradinhos" que Rosângela precisa adicionar a esse quadrado para obter o quadrado de número 30? 59 quadradinhos

b) Escreva uma expressão que represente o número de "quadradinhos" de cada figura. n^2

FONTE: Andrini e Vasconcellos, 2012, 8º ano, p. 64

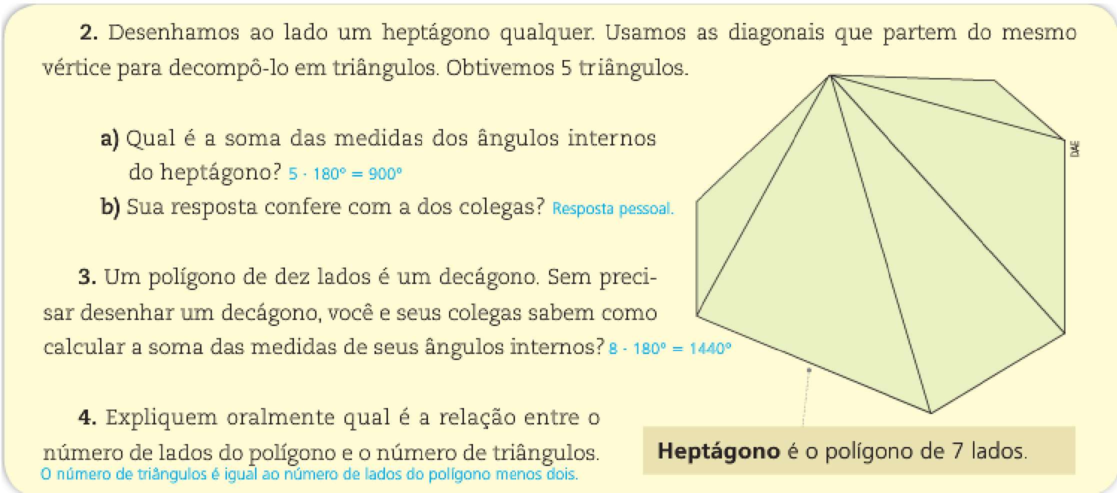
A forma como a questão é abordada promove a utilização de um raciocínio recursivo que requer uma compressão da lei de formação dessa sequência.

Em geral, os alunos visualizam com mais facilidade o padrão adicionar números ímpares a figura anterior. De modo que, não percebem de imediato a relação entre a quantidade de elementos na figura com a ordem que esta ocupa na sequência. É importante que o professor leve-os a construção do termo geral da sequência sem precisar conhecer o termo que o antecede.

No capítulo 12, *Quadriláteros e outros polígonos*, encontramos uma atividade proposta através de situações que envolvem a investigação e a generalização de regularidades. Há argumentações que levam a dedução da fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono. Essas argumentações se dão a partir de exemplos particulares com hexágonos e heptágonos, e generaliza o cálculo para polígonos de *n* lados.

É uma sugestão de atividade em grupo onde os integrantes são instigados a pensar algebricamente, os quais devem perceber a relação entre o número de lados do polígono e o número de triângulos formados a partir das diagonais traçadas em um vértice. Essa atividade é ilustrada pela Fig 3.14.

Figura 3.14 – Soma dos ângulos internos de um polígono


2. Desenhamos ao lado um heptágono qualquer. Usamos as diagonais que partem do mesmo vértice para decompô-lo em triângulos. Obtivemos 5 triângulos.

a) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos do heptágono? 5 · 180° = 900°

b) Sua resposta confere com a dos colegas? Resposta pessoal.

3. Um polígono de dez lados é um decágono. Sem precisar desenhar um decágono, você e seus colegas sabem como calcular a soma das medidas de seus ângulos internos? 8 · 180° = 1440°

4. Expliquem oralmente qual é a relação entre o número de lados do polígono e o número de triângulos. O número de triângulos é igual ao número de lados do polígono menos dois.

FONTE: Andrini e Vasconcellos, 2012, 8º ano, p. 220

Nesse caso, através da investigação deve-se concluir que a soma das medidas dos ângulo internos de um polígono de *n* lados é igual à soma das medidas dos ângulos internos de todos os n–2 triângulos que o compõe, ou seja, $S_n = (n-2).180^{\circ}$.

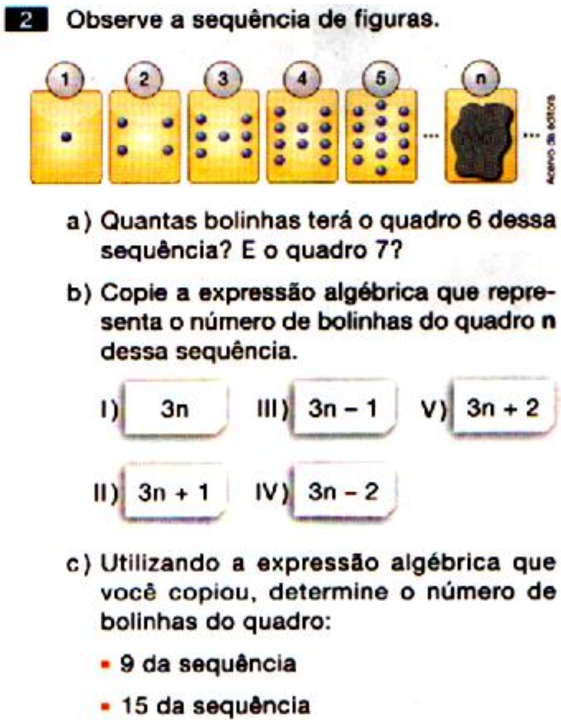
A seguir faremos uma análise dos livros didáticos Vontade de saber Matemática do 7º e 8º anos. Essa obra foi elaborado por professores da Universidade Estadual de Londrina e das redes particular e pública de ensino. É um livro elaborado baseado nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná.

3.5 Vontade de saber Matemática – 7º ano. Autores: Joamir Souza e Patricia Moreno Pataro, editora FTD, 2012.

O livro apresenta poucos problemas que ajudam a desenvolver o pensamento algébrico utilizando o reconhecimento de padrões e a generalização de sequências numéricas. São observados apenas em dois exercícios, no capítulo 6, no conteúdo de expressões algébricas.

Na Fig. 3.15 temos uma atividade que apresenta uma sequência numérica a partir da qual é necessário encontrar uma generalização na forma de expressão algébrica. Antes disso, no item a), os alunos são instigados a observar e descobrir os próximos termos da sequência a partir do reconhecimento de padrões.

Figura 3.15 – Atividades de observação e generalização de padrão


2 Observe a sequência de figuras.

a) Quantas bolinhas terá o quadro 6 dessa sequência? E o quadro 7?

b) Copie a expressão algébrica que representa o número de bolinhas do quadro n dessa sequência.

I) 3n III) 3n – 1 V) 3n + 2

II) 3n + 1 IV) 3n – 2

c) Utilizando a expressão algébrica que você copiou, determine o número de bolinhas do quadro:

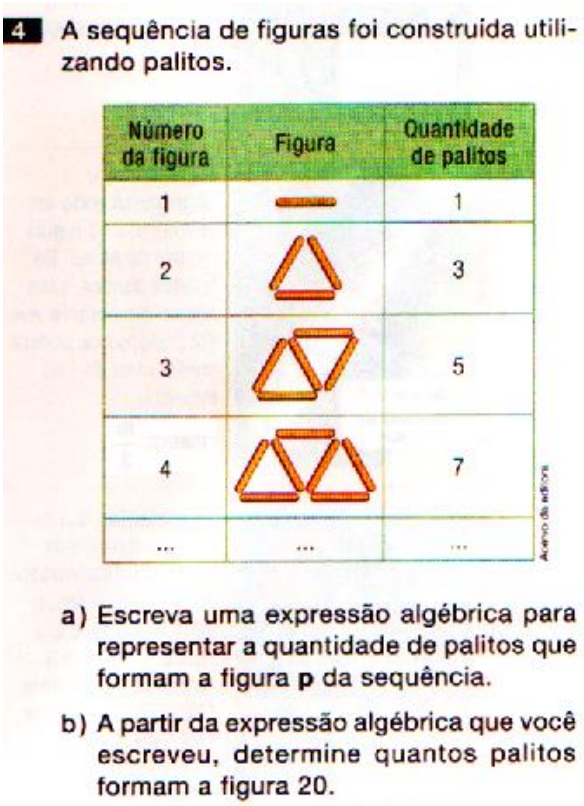
- 9 da sequência
- 15 da sequência

FONTE: Souza e Pataro, 2012, 7º ano, p. 161

No item b) para facilitar são dadas cinco opções de expressões algébricas para encontrar a expressão correta, permitindo a resolução da questão por tentativa, isso é importante tendo em vista que os alunos do 7º ano estão tendo um primeiro contato com a linguagem algébrica, entretanto podem argumentar com contraexemplos as alternativas incorretas.

Nesse livro há mais um problema semelhante a esse em toda a edição. O outro exercício apresenta uma tabela com uma sequência de palitos, como vemos na Fig. 3.16. Nesse caso, o aluno deve escrever através da linguagem algébrica a quantidade de palitos em uma posição qualquer, sem recorrer as alternativas.

Figura 3.16 – Atividades de observação e generalização de padrão



4 A sequência de figuras foi construída utilizando palitos.

Número da figura	Figura	Quantidade de palitos
1		1
2		3
3		5
4		7
...	...	...

Acervo da editora

a) Escreva uma expressão algébrica para representar a quantidade de palitos que formam a figura **p** da sequência.

b) A partir da expressão algébrica que você escreveu, determine quantos palitos formam a figura 20.

FONTE: Souza e Pataro, 2012, 7º ano, p. 161

Cabe ao professor ser mediador no processo de aprendizagem, fazendo os questionamentos necessários para que os estudantes cheguem ao resultado correto e consequentemente a generalização do problema.

A partir desse exercício, é interessante o professor propor outras questões envolvendo a ideia de equações do primeiro grau, como, por exemplo, criar a pergunta: Em qual figura serão necessários 25 palitos?

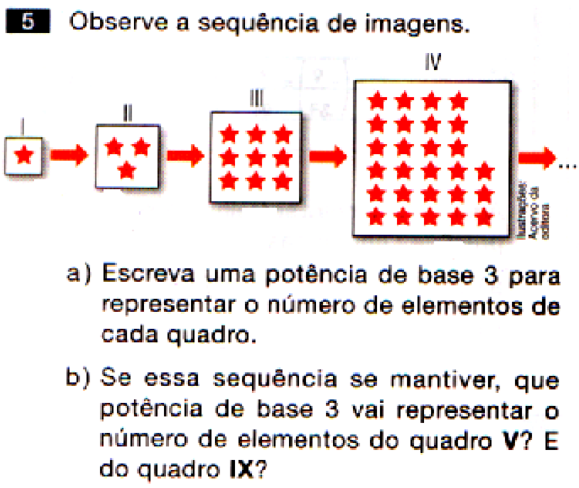
Dessa forma, responder problemas por meio de expressões algébricas e equações são importantes para estabelecer as diferenças entre variáveis e incógnitas no uso das letras.

Podemos notar que os dois exercícios apresentados nessa obra, exigem duas habilidades essenciais para desenvolver o pensamento algébrico. Sendo a primeira, reconhecer padrões, e a segunda representar esses padrões a partir de generalizações e deduções.

3.6 Vontade de saber Matemática – 8º ano. Autores: Joamir Souza e Patricia Moreno Pataro, editora FTD, 2012.

O livro traz alguns exemplos que exploram as sequências numéricas, as quais são utilizadas no segundo capítulo, *Potências e raízes,* para justificar o valor de uma potência com expoente inteiro negativo. Ainda nesse capítulo, na seção de atividades, há um problema envolvendo o reconhecimento de padrões em sequências numéricas, como vemos na Fig. 3.17.

Figura 3.17 – Atividades de reconhecimento de padrões


5 Observe a sequência de imagens.

a) Escreva uma potência de base 3 para representar o número de elementos de cada quadro.

b) Se essa sequência se mantiver, que potência de base 3 vai representar o número de elementos do quadro **V**? E do quadro **IX**?

FONTE: Souza e Pataro, 2012, 8º ano, p. 35

O problema exige a capacidade dos alunos de reconhecerem padrões, prevendo, a partir disso os termos da sequência. Porém, seria de grande importância representar os padrões percebidos utilizando linguagem algébrica, uma vez que os alunos de 8º ano já têm algum conhecimento prévio referente ao assunto.

No volume do professor, na parte de *comentários e sugestões* há uma orientação pedagógica para o capítulo intitulado *Polígonos,* onde é sugerido que seja trabalhado a generalização de sequências numéricas, como, por exemplo, os números triangulares, quadrados e pentagonais. Para que posteriormente, o professor inicie o estudo das fórmulas do número de diagonais e da soma dos ângulos internos de um polígono qualquer, através de um ensino que oportunize a observação e a generalização de regularidades, permitindo a dedução dessas fórmulas. Com essa abordagem será possível fazer uma ligação entre a geometria, os números e a álgebra.

3.7 CONSIDERAÇÕES SOBRE OS LIVROS DIDÁTICOS

Com a análise dos livros didáticos podemos observar que os autores estão utilizando a estratégia de introdução à linguagem algébrica através de exercícios de generalização de padrões em sequências numéricas, deixando de utilizar as frases prontas escritas na linguagem literal para que os alunos traduzam para a linguagem algébrica.

Essa abordagem diferenciada torna a álgebra mais interessante, além de promover o pensamento algébrico, ainda colabora para desenvolver o raciocínio recursivo, não formalmente, porém de maneira intuitiva, através de atividades que proporcionem este primeiro contato.

Podemos verificar que o estudo de sequências e a generalização de padrões é explorada, não apenas nos capítulos reservados ao estudo da álgebra, mas também em outros capítulos relacionando com a aritmética e geometria. Alguns autores se utilizam de sequências numéricas para justificar regras numéricas, como nos conteúdos envolvendo as operações dos números inteiros e potências com expoente negativo.

O reconhecimento de padrões em sequências torna o aprendizado mais significativo, sendo mais facilmente compreendido pelo aluno. Já a generalização faz com que relacione a aritmética com a álgebra.

No entanto, as sequências geométricas e numéricas poderiam ser mais exploradas pelos livros didáticos. Portanto, cabe ao professor não fixar seu trabalho apenas em uma obra, mas trazer para sala outras atividades e situações desse tipo, auxiliando os alunos a desenvolver o pensamento algébrico.

4 QUESTÕES ENVOLVENDO RECORRÊNCIAS: UMA RECOMENDAÇÃO AO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo apresentamos propostas de atividades possíveis de serem aplicadas no contexto escolar do Ensino Médio.

As regularidades e os padrões em sequências numéricas são bastante explorados, bem como as relações de recorrências. Sendo necessário utilizar os métodos de resolução vistos no Capítulo 2 para encontrar o termo geral da sequência recursiva em causa.

As atividades propostas são baseadas em algumas questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), seja nas provas de edições anteriores ou do Banco de Questões com problemas e desafios matemáticos.

4.1 CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DA OBMEP

A OBMEP é uma realização do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), que conta com apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação. Sua primeira edição foi realizada no ano de 2005, sendo que no ano presente acontece a décima edição (OBMEP, 2014).

Participam da OBMEP estudantes da rede pública do 6º ano ao 9º ano do Ensino Fundamental e alunos do Ensino Médio, separados em três níveis diferentes, de acordo com a sua escolaridade. Os alunos do 6º e 7º anos fazem a prova do nível 1; já os do 8º e 9º anos fazem a prova do nível 2; e os do 1º, 2º e 3º anos do Ensino Médio fazem a prova do nível 3.

As provas são constituídas de duas fases, de modo que na primeira fase é aplicada prova objetiva (múltipla escolha) a todos os inscritos da escola. A escola seleciona aproximadamente 5% dos alunos em cada nível que se destacaram na primeira fase para participar da segunda fase. Nesta fase os selecionados são submetidos a uma prova discursiva de acordo com o seu nível 1, 2 ou 3 (OBMEP, 2014).

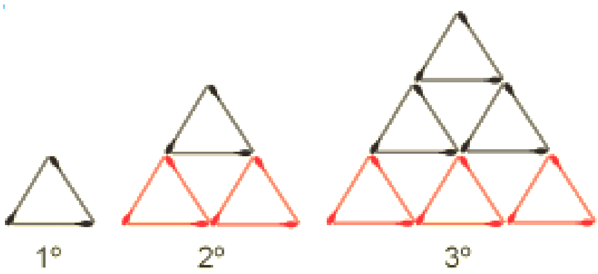
No endereço eletrônico da OBMEP (www.obmep.org.br) encontram-se as provas realizadas nos anos de 2005 a 2013 com as respectivas soluções. Também, é disponibilizado a versão eletrônica do Banco de Questões da OBMEP, que consiste em atividades elaboradas com base na metodologia da Resolução de Problemas que requer criatividade na resolução das questões, e quando utilizadas poderão tornar as aulas de matemática mais desafiadoras.

4.2 QUESTÕES DA OBMEP

Muitas questões propostas pela OBMEP, partem da exploração de padrões numéricos em sequências, culminando com a generalização dos padrões observados.

A seguir apresentamos algumas questões que podem ser resolvidas via recorrências.

Questão 4.1 (Questão 02 - OBMEP 2012 - 1ª Fase - Nível 1) Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na figura. Quantos palitos ela vai usar para construir o quinto triângulo da sequência?



SOLUÇÃO: Observe que no 2º desenho, a figura anterior foi esboçada e dois triângulos foram acrescentados, isto é, 3 + 2x3 = 9 palitos. De maneira semelhante, no 3º desenho, temos a figura anterior mais três triângulos, isto é, 9 + 3x3 = 18 palitos. Como as próximas figuras seguem o mesmo padrão, a quantidade de palitos a_n necessários para formar a figura que está na posição n é composta pela quantidade de palitos da figura anterior a_{n-1}, acrescentados de n triângulos.

Podemos escrever esse padrão de crescimento através da seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 3n, \ n \geq 1 \end{cases}$$

Escrevendo os termos da relação de recorrência, temos que:

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + 3.2 \\
a_3 &= a_2 + 3.3 \\
a_4 &= a_3 + 3.4 \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} + 3.n
\end{aligned}$$

Somando ordenadamente os termos de cada igualdade, temos que:

$$a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n = a_1 + 3.2 + a_2 + 3.3 + a_3 + 3.4 + ... + a_{n-1} + 3.n \qquad (4.1)$$

Subtraindo $a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1}$ em ambos os membros da Eq. 4.1, obtemos:

$$a_n = a_1 + 3.2 + 3.3 + 3.4 + ... + 3.n \qquad (4.2)$$

Como $a_1 = 3$, podemos fatorar a Eq. 4.2, conforme indicado abaixo:

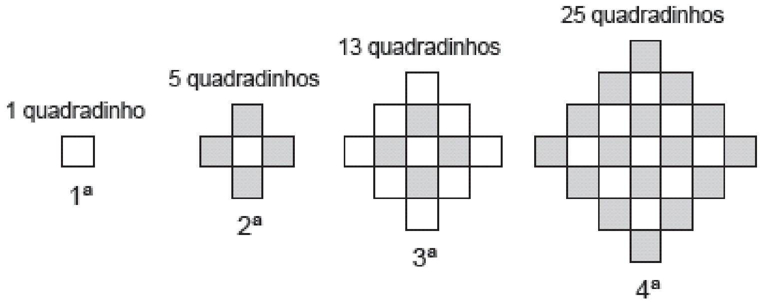
$$a_n = 3(1 + 2 + 3 + ... + n) \qquad (4.3)$$

Usando a Eq. 2.11, que determina a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, obtemos:

$$a_n = \frac{3n(n+1)}{2} \qquad (4.4)$$

Substituindo $n = 5$ na Eq. 4.4, temos que $a_5 = \frac{3.5(5+1)}{2} = 45.$ Portanto, Renata utilizará 45 palitos.

Questão 4.2 (Questão 16 - OBMEP 2009 - 1ª Fase - Nível 3) Felipe construiu uma sequência de figuras com quadradinhos; abaixo mostramos as quatro primeiras figuras que ele construiu. Qual é a primeira figura que tem mais de 2009 quadradinhos?



SOLUÇÃO: Representado por a_n os termos dessa sequência:

$$\begin{aligned} &a_1 = 1 \\ &a_2 = 5 \\ &a_3 = 13 \\ &a_4 = 25 \\ &\vdots \\ &a_n = ? \end{aligned}$$

Vamos encontrar a lei de formação que determina a quantidade de quadradinhos necessários para formar a figura que está na posição n. Para isto, fiquemos atentos no seguinte padrão que compõe essa sequência:

$$1 \xrightarrow{+4} 5 \xrightarrow{+8} 13 \xrightarrow{+12} 25$$

A sequência (4, 8, 12, ...) é uma PA de razão 4, cujo termo geral é $u_n = 4n$.

Dessa forma, a partir do padrão identificado, cada termo da sequência da sequência, a partir do primeiro, pode ser representado pela recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 4n, n \geq 1 \end{cases}$$

Escrevendo os termos da relação de recorrência, temos que:

$$\begin{aligned} &a_2 = a_1 + 4.1 = a_1 + 4 \\ &a_3 = a_2 + 4.2 = a_2 + 8 \\ &a_4 = a_3 + 4.3 = a_3 + 12 \\ &\vdots \\ &a_n = a_{n-1} + 4.(n-1) \end{aligned}$$

Somando ordenadamente os termos de cada igualdade, obtemos:

$$a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n = a_1 + 4 + a_2 + 8 + a_3 + 12 + ... + a_{n-1} + 4.(n-1) \qquad (4.5)$$

Subtraindo $a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1}$ em ambos os membros da Eq. 4.5 e substituindo $a_1 = 1$, obtemos:

$$a_n = 1 + \underbrace{4 + 8 + 12 + ... + 4.(n-1)}_{S} \qquad (4.6)$$

Usando a Eq. 2.11, para calcular S que representa a soma dos $n-1$ termos da PA de razão 4, obtemos:

$$S = \frac{(n-1)[4+4(n-1)]}{2} = 2n^2 - 2n \qquad (4.7)$$

Substituindo a Eq. 4.7 na Eq. 4.6, podemos reescrevê-la conforme indicado a seguir:

$$a_n = 2n^2 - 2n + 1 \qquad (4.8)$$

Nosso problema se resume então em achar o menor inteiro positivo n tal que $2n^2 - 2n + 1 \geq 2009$, isto é:

$$2n^2 - 2n + 1 \geq 2009 \Leftrightarrow 2(n^2 - n) \geq 2008 \Leftrightarrow n^2 - n \geq 1004 \Leftrightarrow n^2 - n - 1004 \geq 0\,.$$

Isso nos leva ao estudo do sinal da função quadrática $f(x) = x^2 - x - 1004$, cujo gráfico está ilustrado na Fig. 4.1.

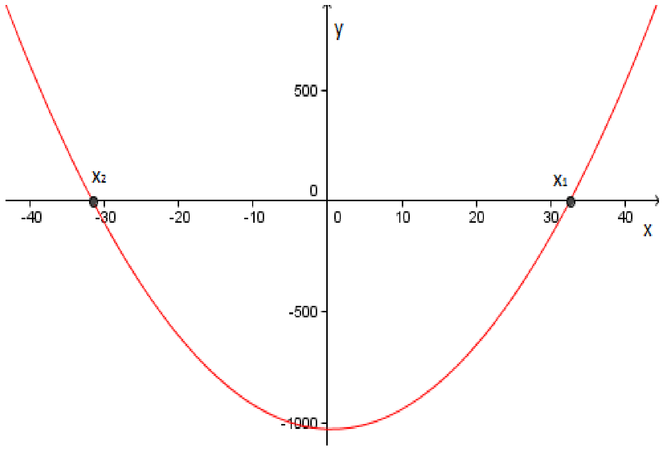


Figura 4.1 – Gráfico da função $f(x) = x^2 - x - 1004$

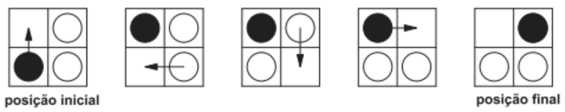
As raízes de $f(x)$ são $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{1+4016}}{2}$ e $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{1+4016}}{2}$.

Observe na Fig. 4.1 que x_2 é negativa e x_1 é, aproximadamente, igual a 32,19. Como $f(x) \geq 0$ para $x \leq x_2$ ou $x \geq x_1$, segue que o n que estamos procurando é o menor inteiro que é maior ou igual a x_1, ou seja, $n = 33$.

Portanto, a primeira figura com mais de 2009 quadradinhos é a de posição 33ª que corresponde a 2113 quadradinhos, pois $a_{33} = 2.33^2 - 2.33 + 1 = 2113$.

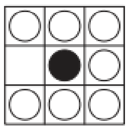
Na próxima questão, a solução dos itens a) e b) são basicamente oriundas das soluções encontradas na página eletrônica da OBMEP. No item c) sugerimos uma solução utilizando o conteúdo de recorrências.

Questão 4.3 (Questão 04 - OBMEP 2010 - 2ª Fase - Nível 3) No jogo *Arrasta Um* usa-se um tabuleiro quadriculado e peças redondas, uma preta e as outras brancas. Coloca-se uma peça em cada casa do tabuleiro, exceto em uma que é deixada vazia. Um movimento consiste em deslocar para a casa vazia a peça de uma casa adjacente. O jogo termina quando a peça preta chega ao canto superior direito do tabuleiro. Veja um exemplo de como terminar o *Arrasta Um* em quatro movimentos em um tabuleiro 2x2.



Esta sequência de movimentos pode ser descrita por $(\uparrow, \leftarrow, \downarrow, \rightarrow)$.

a) Descreva como terminar o *Arrasta Um* em seis movimentos no tabuleiro 3x3 abaixo.



SOLUÇÃO: A Fig. 4.2 indica os seis movimentos necessários para colocar a peça de cor preta no canto superior do tabuleiro:

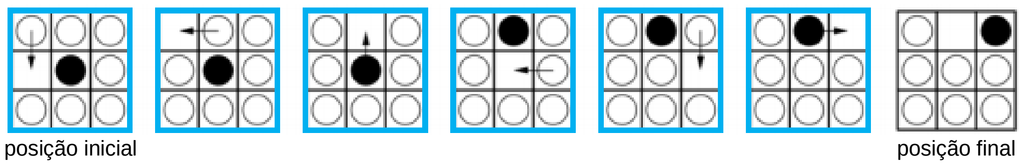
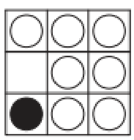


Figura 4.2 – Representação da solução - Questão 4.3, item a)

Esta sequência de movimentos pode ser descrita por $(\downarrow, \leftarrow, \uparrow, \leftarrow, \downarrow, \rightarrow)$.

Portanto, da posição inicial a posição final são necessários 6 movimentos.

b) Descreva como terminar o *Arrasta Um* em dez movimentos no tabuleiro 3x3 abaixo.



SOLUÇÃO: Podemos visualizar na Fig. 4.3 que os 4 primeiros movimentos (destacado de vermelho) são os mesmos que utilizamos em um tabuleiro 2x2. Agora, note que com esses 4 movimentos transformou a sequência semelhante a posição inicial do item a). Dessa forma, serão necessários mais 6 movimentos para colocar o círculo preto no canto superior direito.

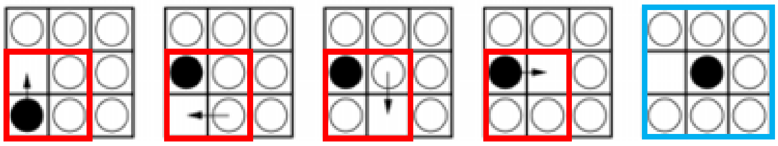
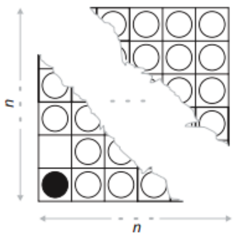


Figura 4.3 – Representação da solução - Questão 4.3, item b)

Portanto, o jogo *Arrasta Um* no tabuleiro 3x3 termina em 4 + 6 = 10 movimentos.

c) Mostre que um tabuleiro nxn, como na figura abaixo, é possível terminar o *Arrasta Um* em 6n – 8 movimentos.



SOLUÇÃO: Seja t_n o número de movimentos necessários para resolver o *Arrasta Um*, em um tabuleiro nxn começando com a peça preta no canto inferior esquerdo e a casa adjacente superior vazia.

Para colocar o círculo de cor preta no canto superior direito do tabuleiro nxn, são necessários os t_{n-1} movimentos que utilizamos em um tabuleiro $(n\text{-}1)$x$(n\text{-}1)$, mais 6 movimentos (item a). Essa situação pode ser ilustrada pela Fig. 4.4.

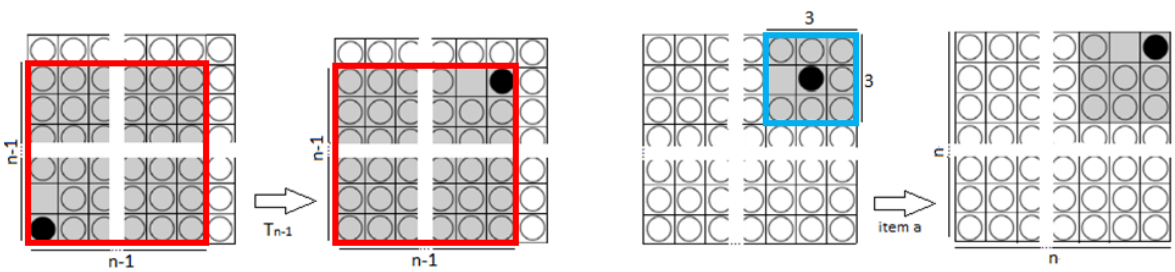


Figura 4.4 – Representação da solução - Questão 4.3, item c)

A generalização do problema fornece a seguinte recorrência matemática:

$$\begin{cases} t_2 = 4 \\ t_n = t_{n-1} + 6, n > 2 \end{cases}$$

Escrevendo os termos da recorrência $t_n = t_{n-1} + 6$, temos:

$$\begin{aligned} t_3 &= t_2 + 6 \\ t_4 &= t_3 + 6 \\ t_5 &= t_4 + 6 \\ &\vdots \\ t_n &= t_{n-1} + 6 \end{aligned}$$

Adicionando os membros das igualdades ordenadamente, obtemos:

$$t_3 + t_4 + t_5 + ... + t_{n-1} + t_n = t_2 + 6 + t_3 + 6 + t_4 + 6 + ... + t_{n-1} + 6 \qquad (4.9)$$

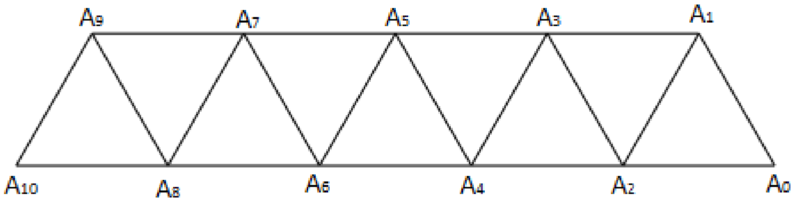
Subtraindo $t_3 + t_4 + t_5 + ... + t_{n-1}$ em ambos os membros da Eq. 4.9 e reescrevendo as $n-2$ parcelas iguais a 6, obtemos:

$$t_n = t_2 + 6(n-2) \qquad (4.10)$$

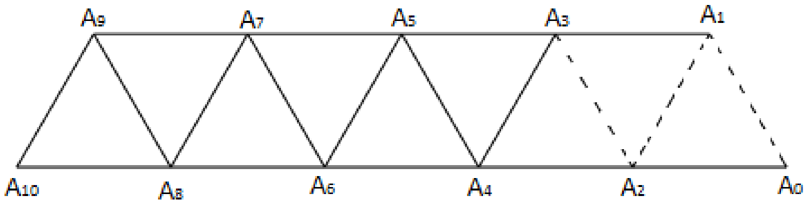
Substituindo $t_2 = 4$ na Eq. 4.10, temos que $t_n = 4 + 6(n-2)$, e simplificando esse resultado, obtemos $t_n = 6n - 8$. Portanto, é possível terminar o *Arrasta Um* em $6n - 8$ movimentos.

A seguir adaptamos uma questão contida no Banco de Questões da OBMEP 2010. Com isso, complementamos a solução apresentada para esse problema, resolvendo a relação de recorrência em causa, fazendo assim a generalização dessa questão.

Questão 4.4 (Adaptada da Questão 15 - Banco de Questões OBMEP 2013, p. 63) Considere o diagrama ilustrado abaixo:



Augusto gosta de contar caminhos partindo de algum ponto, chegando no ponto A_0 e nunca passando por um mesmo vértice duas vezes. Para isso, ele representa um caminho pela sequência dos pontos que o caminho visita. Por exemplo, o caminho pontilhado na figura abaixo é representado pela sequência $A_3A_2A_1A_0$.



Augusto chama um caminho de inusitado se a sequência de índices que representa esse caminho está ordenada de maneira decrescente. Em outras palavras, o caminho é inusitado se nunca anda para a esquerda, seja subindo ou descendo. Por exemplo, o caminho $A_3A_2A_1A_0$ é inusitado. Já o caminho $A_3A_1A_2A_0$ não é inusitado, já que A_1 aparece antes de A_2. Quantos caminhos inusitados existem começando em A_n e terminando em A_0?

SOLUÇÃO: Um caminho inusitado saindo de A_n, necessita passar logo em seguida em um dos pontos A_{n-1} ou A_{n-2}. No caso se Augusto seguir pelo ponto A_{n-1}, a sua continuação até o ponto A_0 pode ser qualquer um dos caminhos inusitados saindo de A_{n-1} e chegando em A_0. No caso se ele preferir o ponto A_{n-2}, a sua continuação pode ser qualquer um dos caminhos inusitados saindo de A_{n-2}.

Dessa forma, o número total de caminhos inusitados saindo de A_n é a soma do número de caminhos inusitados saindo de A_{n-1} com o número de caminhos inusitados saindo de A_{n-2}. Chamando de a_n o número de caminhos inusitados partindo do ponto A_n e chegando no ponto A_0, podemos escrever a seguinte recorrência matemática:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n > 2 \tag{4.11}$$

Como só existe um caminho inusitado saindo de A_1 e chegando em A_0, e existem dois caminhos inusitados partindo de A_2: $A_2A_1A_0$ e A_2A_0. Assim,

$$\begin{aligned}
&a_1 = 1\\
&a_2 = 2\\
&a_3 = a_2 + a_1 = 3\\
&a_4 = a_3 + a_2 = 5\\
&a_5 = a_4 + a_3 = 8\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Seguindo esse padrão podemos gerar a sequência numérica em que cada termo, após os dois primeiros, é igual à soma dos dois termos anteriores. Assim:

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,...

Essa sequência é conhecida como a sequência de *Fibonacci*. Para obter sua lei de formação que permite determinar o termo geral a_n, começamos escrevendo a Eq. 4.11 conforme indicado abaixo:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \tag{4.12}$$

A equação característica da Eq. 4.12 é $r^2 = r + 1$, ou seja, $r^2 - r - 1 = 0$.

As raízes da equação característica são $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Como as raízes são reais e distintas, pelo Teorema 2.3, a solução geral será dada por:

$$a_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{4.13}$$

Com as condições iniciais $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$ é possível construir um sistema de equações a partir da Eq. 4.13, como apresentado abaixo:

$$\begin{cases} C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \\[2ex] C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2 \end{cases} \tag{4.14}$$

Resolvendo o sistema obtemos a seguinte solução:

$$C_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \text{ e } C_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}.$$

Substituindo os valores de C_1 e C_2 na fórmula da solução geral, Eq. 4.13, teremos então $a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, a qual pode ser reescrita como:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] \qquad (4.15)$$

Enfim, a fórmula explícita para o termo geral da sequência de *Fibonacci* é dada pela Eq. 4.15, por meio deste resultado é possível determinar qualquer termo da sequência sem recorrer aos termos anteriores. Uma forma de visualizar isso é o uso de planilhas eletrônicas que será apresentado no capítulo 5.

5 TECNOLOGIA, MATEMÁTICA E A RELAÇÃO ENTRE AMBAS

Analisando o contexto atual da educação, percebe-se a necessidade de romper com os paradigmas tradicionais de ensino e voltar-se mais para a realidade do educando. A presença das tecnologias apresenta-se como uma dessas necessidades que requerem atenção dos professores.

Nesse sentido, “o professor é desafiado constantemente a rever e ampliar seu conhecimento.” (BORBA e PENTEADO, 2005, p. 65).

A escola precisa rever as práticas pedagógicas e assumir os desafios de desenvolver nos alunos conhecimentos diversos e habilidades novas para a construção do conhecimento integral.

A inserção do uso das novas Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) no cotidiano escolar é fundamental. Não se pode pensar em melhoria da qualidade de ensino sem incentivar o uso das ferramentas tecnológicas.

O Estado do Paraná, junto com a Secretaria de Estado da Educação do Paraná (SEED), criou o projeto de inclusão digital intitulado Paraná Digital (PRD), utilizando-se de laboratórios de informática implementados nos últimos anos nas escolas públicas paranaenses.

Segundo Adrián e Llano (2006), “[...] o educador é o agente principal desse processo de inserção da tecnologia nos ambientes educativos, e para isso precisa de formação, apoio e acompanhamento” (p.36). Percebe-se com isso que não basta informatizar as escolas sem dar suporte teórico, pedagógico e tecnológico para os professores que irão trabalhar efetivamente com os alunos.

Ainda, segundo Adrián e Llano (2006), “[...] as ferramentas tecnológicas não têm, em si mesmas, o poder de produzir mudanças nas realidades educativas, mas utilizando-as efetivamente podem ser, com certeza, de grande utilidade. A diferença fundamental está em quem e para que utiliza tais tecnologias” (p.33). Sendo assim, é preciso uma reflexão de como utilizar as tecnologias em benefício da educação.

Para Marinho (2002, p.48), “O uso inteligente dos computadores na educação dependerá de início, de um profundo repensar da prática pedagógica que ocorre na escola, do fazer cotidiano de cada professor”.

Dessa forma, vemos que somente a presença da informática em sala de aula não garante que essa irá contribuir de forma positiva para o processo de ensino e aprendizagem. Segundo Cox (2003, p.109), o professor precisa “[...] conhecer as ferramentas computacionais que podem ter serventia à sua prática educacional escolar e saber explorar instrumentos da informática de forma que atendam os objetivos educacionais".

No entanto, para o uso adequado das novas TIC, é necessário que elas sejam integradas em atividades que estejam em consonância com as atuais propostas educacionais. As DCE destacam como uma das tendências metodológicas da Educação Matemática, as mídias tecnológicas, consideradas como potencializadoras do processo pedagógico.

> Os recursos tecnológicos, como o software, a televisão, as calculadoras, os aplicativos da Internet, entre outros, têm favorecido as experimentações matemáticas e potencializado formas de resolução de problemas. Aplicativos de modelagem e simulação têm auxiliado estudantes e professores a visualizarem, generalizarem e representarem o fazer matemático de uma maneira passível de manipulação, pois permitem construção, interação, trabalho colaborativo, processos de descoberta de forma dinâmica e o confronto entre a teoria e a prática. (2008, p. 65-66).

A utilização de planilhas eletrônicas, portanto, é uma alternativa para desenvolver a formação dos conceitos algébricos e de outros conteúdos matemáticos. Por meio desse recurso os professores podem abordar vários temas integrantes do currículo básico de Matemática, tais como: álgebra, funções, gráficos, logaritmos, matemática financeira, matrizes, sequências numéricas, entre outros.

Como o intuito desse trabalho é o ensino da álgebra, o uso das planilhas eletrônicas exige procedimentos algébricos que relaciona variáveis e manipula fórmulas, que podem ser exploradas através de atividades de investigação.

Por outro lado, com as planilhas eletrônicas os alunos evitam o trabalho de cálculos repetitivos e mecânicos, tendo assim "condições de realizar as devidas análises, os debates, as conjecturas e a conclusão de ideias, atitudes intrínsecas da investigação matemática" (DCE, 2008, p.68). Neste sentido apresenta-se como possibilidades para viabilizar o ensino de forma a ser mais significativo para os estudantes.

Segundo Cox (2003, p.45), planilha eletrônica é "uma tabela composta por linhas e colunas. Nela, as linhas são identificadas por números e as colunas por letras. A interseção entre uma linha e uma coluna é chamada célula". Os programas de planilhas eletrônicas mais utilizados são o *software Microsoft Excel* e o *software* livre *BrOffice Calc*, este último presente nos laboratórios do PRD das escolas públicas paranaenses.

Uma das maneiras de usar as planilhas eletrônicas nas aulas de matemática é referente ao estudo das raízes de uma equação do segundo grau, conforme apresentamos no próximo exemplo.

Exemplo 5.1: A solução de uma equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, pode ser obtida pela expressão:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{, com } \Delta = b^2 - 4ac \qquad (5.1)$$

Utilizando a Eq. 5.1 podemos elaborar uma calculadora para encontrar as raízes de uma equação do segundo grau utilizando o *software Excel*, que dependem apenas das indicações dos coeficientes a, b e c da equação, conforme descrito a seguir.

PROCEDIMENTO:

a) Nas células B3, B4 e B5, digitamos respectivamente as letras “a”, “b” e “c”;

b) Nas células C3, C4 e C5, informamos respectivamente os valores dos coeficientes a, b e c da equação;

c) Na célula B6 escrevemos a palavra “discriminante” e na célula C6 inserimos a fórmula para calcular o valor do discriminante da equação (Δ), digitando “=C4^2-4*C3*C5”;

d) Na célula B7 escrevemos “x_1”, e na célula C7 inserimos a fórmula “=(-C4+RAIZ(C6))/2*C3”;

e) Na célula B8 escrevemos “x_2”, e na célula C8 inserimos a fórmula “=(-C4-RAIZ(C6))/2*C3”.

O professor, por sua vez, poderá propor atividades de investigação para que os alunos percebam que a natureza das raízes de uma equação do segundo grau dependem do valor do discriminante.

Com esta calculadora, inserindo os coeficientes de a, b e c, será calculado o valor do discriminante (Δ), e, dependendo de seu valor ocorrerá os três casos:

i) Quando $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais e diferentes;

ii) Quando $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais e iguais;

iii) Quando $\Delta < 0$, a equação tem não tem raízes reais.

Como exemplo, tomemos a equação $x^2 + 3x - 4 = 0$, informando os coeficientes da equação a = 1, b = 3 e c = –4 nas respectivas células C3, C4 e C5, a calculadora apresentará o valor do discriminante $\Delta = 25$, ou seja, $\Delta > 0$. Assim, a equação possui como raízes $x_1 = 1$ e $x_2 = -4$. Esse exemplo é ilustrado pela Fig. 5.1.

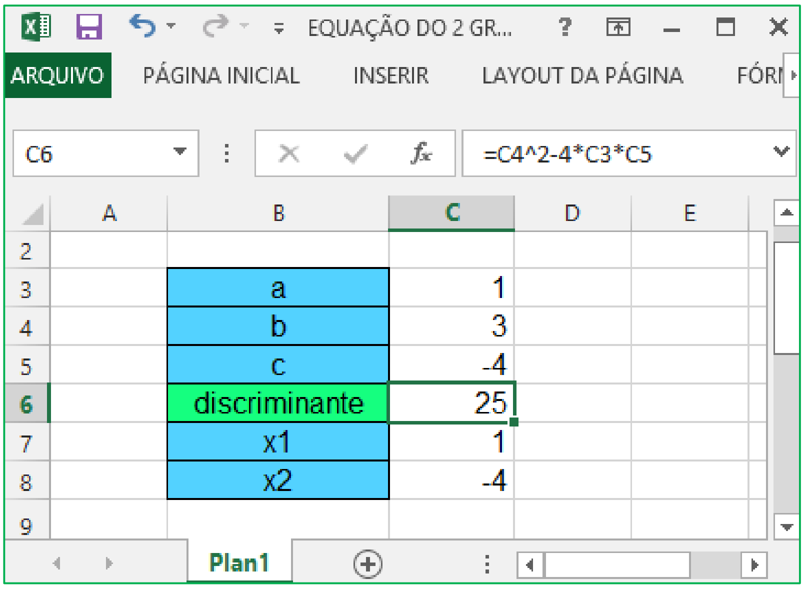


Figura 5.1 – Equação do segundo grau com $\Delta > 0$

Porém, tomando a equação do segundo grau $x^2 + 3x + 7 = 0$, ao informar os coeficientes a = 1; b = 3 e c = 7, o valor do discriminante encontrado é $\Delta = -19$, ou seja, $\Delta < 0$. Portanto, a equação não possui solução real como mostrado na Fig. 5.2.

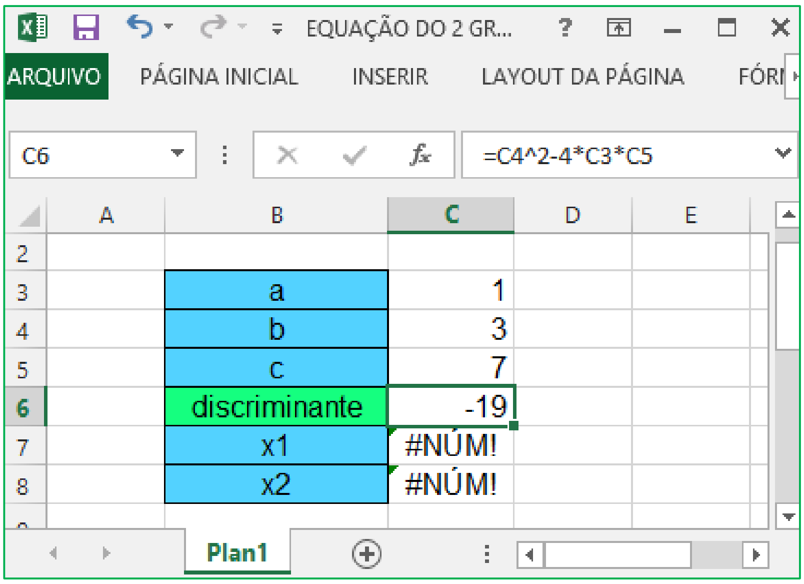


Figura 5.2 – Equação do segundo grau com $\Delta < 0$

Podemos observar que nas células C7 e C8 aparece a mensagem #NÚM!, isso se deve ao fato de que a representação dos resultados das planilhas é dada apenas por números reais. Essa situação poderá ser aproveitada para questionar aos alunos sobre a razão disso acontecer, ou seja, o erro ocorre devido a não existir um número real cujo quadrado seja igual a um número negativo.

O exemplo a seguir aborda as questões de observação e generalização de padrões matemáticos na análise de alguns prismas segundo o número de vértices, faces e arestas, permitindo relacionar a álgebra com a geometria. A atividade foi estruturada para um contexto onde o estudante já tenha tido estudado esses três elementos básicos de um poliedro, razão pela qual omitiremos a sua abordagem conceitual.

Essa atividade pode ser proposta em uma turma de 7º ano, como introdução do ensino da álgebra.

Exemplo 5.2: Em uma planilha do *Excel*, registre o número de arestas (A), faces (F) e vértices (V) dos prismas apresentados na Fig. 5.3. Em seguida, escreva uma regra geral que determina esses três elementos para um prisma de base qualquer.

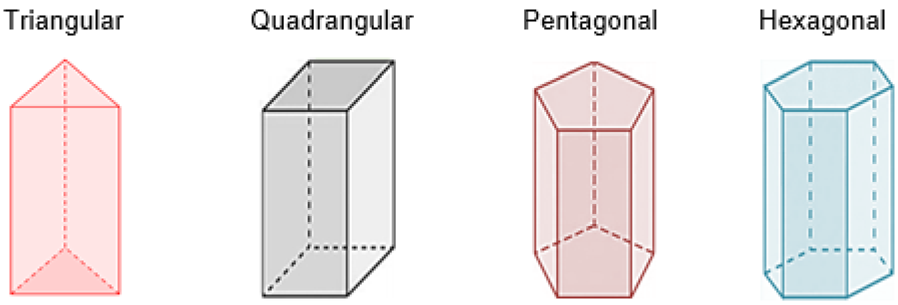


Figura 5.3 – Prismas – Exemplo 5.2

Com os poliedros apresentados na Fig. 5.3, o professor pode levar os alunos a observarem que os elementos de um prisma estão relacionados com o polígono da base do mesmo. Isto é, num prisma o número de vértices é igual ao dobro do número de vértices do polígono da base; o número de faces é igual ao número de lados do polígono da base mais dois e o número de arestas é igual ao triplo do número de lados do polígono da base.

Observado isso, o professor poderá introduzir os primeiros conceitos algébricos, bem como a utilização de símbolos para expressar a linguagem corrente.

Dessa forma, chamando de n o número de lados do polígono da base de um prisma, temos as relações:

$$V = 2n \qquad F = n + 2 \qquad A = 3n$$

A Tab. 5.1 mostra as células utilizadas com os dados inicias do problema e a generalização dessa atividade para ser construída no *Excel*.

Tabela 5.1 – Generalização dos elementos de um prisma

PRISMA	N.º de lados do polígono da base/ (Célula)	Vértices		Faces		Arestas	
		Cél.	Digitar	Cél.	Digitar	Cél.	Digitar
Triangular	3 (D3)	E3	6	F3	5	G3	9
Quadrangular	4 (D4)	E4	8	F4	6	G4	12
Pentagonal	5 (D5)	E5	10	F5	7	G5	15
Hexagonal	6 (D6)	E6	12	F6	8	G6	18
Prisma qualquer	n (D7)	E7	=2*D7	F7	=D7+2	G7	=3*D7

Nesse contexto, a célula D7 assume o papel de variável das expressões algébricas, as quais estão sendo representadas pelas células E7, F7 e G7. Assim, substituindo 10 ou outro número natural na célula D7, obteremos nas demais células o valor numérico dessas expressões. Vale lembrar que o número 10 significa a quantidade de lados do polígono da base do prisma.

Outras abordagens poderão ser realizadas, como, por exemplo, verificar a relação de *Euler* nos poliedros ($V + F - A = 2$). Para isso, o professor poderá solicitar aos seus alunos que digitem na célula H7 a fórmula: "=E7+F7-G7".

Formatando a parte gráfica das células utilizadas, pode-se obter a visualização apresentada na Fig. 5.4.

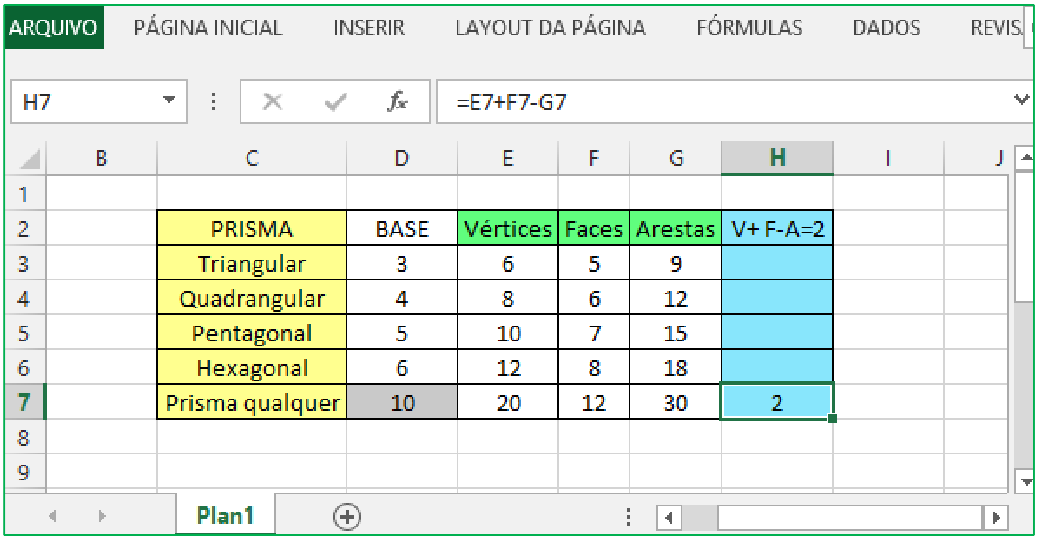


Figura 5.4 – Resultados gerados a partir da Tab. 5.1

5.1 PLANILHAS ELETRÔNICAS PARA O ESTUDO DE SEQUÊNCIAS

Nessa seção procuramos relacionar o estudo de sequências numéricas com o uso da planilha eletrônica.

Como exemplo inicial, podemos tomar a construção da sequência dos 10 primeiros números pares inteiros positivos. Para isso, utilizando o *Excel*, basta efetuar o procedimento a seguir.

PROCEDIMENTO:

a) Na célula A1, escrever "n". Nas células A2 e A3 digitar os números 1 e 2, respectivamente;

b) Selecionar as células A2 e A3;

c) Arrastar a alça de preenchimento (quadradinho inferior do lado direito) para baixo de A3 até a célula A11;

d) Na célula B1, escrever "x_n". Na célula B2, digitar "=2*A2";

e) Selecionar B2 e arrastar a alça de B2 até B11 ou dar um clique duplo na alça de B2.

De maneira resumida, é necessário colocar na coluna A os índices n = 1, 2, 3, ..., 10. Em seguida, na coluna B, multiplicar os índices por dois. Formatando as células, chegamos à visualização indicada na Fig. 5.5.

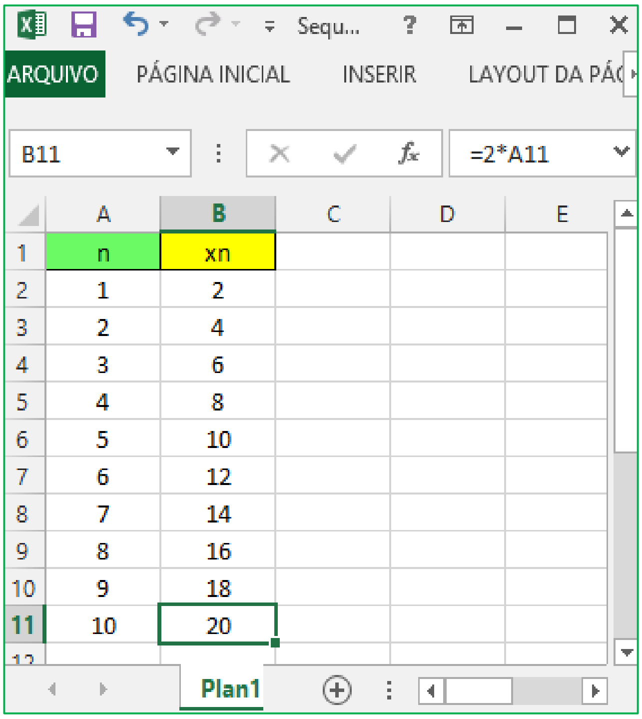


Figura 5.5 – Sequência dos números pares

O próximo exemplo é um problema clássico dos coelhos que envolve a sequência de *Fibonacci*.

Exemplo 5.3: (Adaptado do livro A Matemática do Ensino Médio de LIMA et al., 2006, p. 82). Um casal de coelhos adultos gera mensalmente um casal de coelhos, que se tornam adultos dois meses após o nascimento. Suponhamos que os coelhos sejam imortais. Começando no primeiro mês com um casal de jovens (um mês de vida), que terá prole apenas no segundo mês, quantos casais serão gerados no mês *n*?

SOLUÇÃO: Para melhor compreensão desse problema, o professor pode sugerir a construção de uma tabela, semelhante a Tab. 5.2, que permite ao aluno visualizar com mais facilidade a progressão do número de casal de coelhos, nos primeiros 7 meses.

Tabela 5.2 – Esquematização do problema dos coelhos

Mês	Fase do casal			Total de casais
	Filhote	Jovem	Adulto	
1		A		1
2	B		A	2
3	C	B	A	3
4	D,E	C	A,B	5
5	F,G,H	D,E	A,B,C	8
6	I,J,K,L,M	F,G,H	A,B,C,D,E	13
7	N,O,P,Q,R,S,T,U	I,J,K,L,M	A,B,C,D,E,F,G,H	21

A Tab. 5.2 pode ser interpretada da seguinte maneira:

- no mês 1 temos um casal de coelhos (fase jovem), que chamamos de A;
- no mês 2, o casal de adultos A gera um casal B (filhotes) e passamos a contar com dois casais: A e B;
- no mês 3, teremos 3 casais, pois o casal adulto A gera um casal C, e então ficamos com os casais A, B e C;
- no mês 4, teremos 5 casais, pois A gera D e B gera E, passamos assim a ter A, B, C, D e E;
- no mês 5, os casais adultos A, B e C geram respectivamente os casais F, G e H, e então contaremos com 8 casais: A, B, C, D, E, F, G e H. E assim, sucessivamente.

Com base nos dados observados na Tab. 5.2 referente a coluna com o total de casal de coelhos: 1, 2, 3, 5, 8, 13 e 21 é importante perguntar aos alunos:

a) É possível estabelecer um padrão de comportamento nessa sequência?

b) É possível estabelecer uma expressão matemática que relaciona o número de meses e a quantidade de casais?

Denotando por F_n essa sequência, onde F_n representa o total de casais de coelhos no mês *n*, podemos perceber que:

$$
\begin{aligned}
&F_1 = 1\\
&F_2 = 2\\
&F_3 = 3 = F_2 + F_1\\
&F_4 = 5 = F_3 + F_2\\
&F_5 = 8 = F_4 + F_3\\
&F_6 = 13 = F_5 + F_4\\
&F_7 = 21 = F_6 + F_5\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

A partir dos padrões observados, podemos inferir que cada termo da sequência acima, após os dois primeiros, é igual à soma dos dois termos anteriores. Trata-se, portanto, de uma recorrência linear homogênea de segunda ordem, representada pela expressão:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ com } F_1 = 1, F_2 = 2 \text{ e } n \geq 1 \tag{5.2}$$

Com o auxílio do *Excel*, vamos construir a sequência de *Fibonacci* com os 10 primeiros termos, utilizando-se do método recursivo. Ela pode ser gerada a partir dos valores iniciais $F_1 = 1, F_2 = 2$ e através da relação de recorrência $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para $n \geq 1$.

PROCEDIMENTO:

a) Digitar o número 1 na célula A2 e o número 2 na célula A3;

b) Selecionar as células A2 e A3, arrastar a alça de A3 para baixo até A11;

c) Digitar o número 1 e 2, respectivamente nas células B2 e B3;

d) Digitar na célula B4: “=B3+B2”;

e) Selecionar B4, arrastar a alça de B4 até B11 ou dar um clique duplo na alça de B4.

Assim, as células da coluna A representam a ordem de cada termo e as células da coluna B contêm os 10 primeiros termos da sequência de *Fibonacci*, conforme mostra a Fig. 5.6.

Outra maneira de determinar os termos da sequência de *Fibonacci* é através da fórmula explícita, cuja relação de recorrência $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ encontra-se resolvida analiticamente no Capítulo 4 referente a Questão 4.4, onde o termo geral é representado pela Eq. 4.15. Utilizando-se desse resultado, será descrito a seguir o procedimento no *Excel* para determinar um termo de ordem n sem recorrer aos termos anteriores.

PROCEDIMENTO:

a) Inserir na célula E6 o número da posição desejada;

b) Inserir na célula E7: "=1/RAIZ(5)*(((1+RAIZ(5))/2)^(E6+1)-((1-RAIZ(5))/2)^(E6+1))".

A partir da construção do termo geral da sequência de *Fibonacci* numa planilha eletrônica, basta indicar a posição do elemento desejado na célula E6 e visualizar na célula E7 o valor correspondente a essa posição. Como exemplo, vejamos na Fig. 5.6 o valor do vigésimo termo (n=20) da sequência de *Fibonacci*.

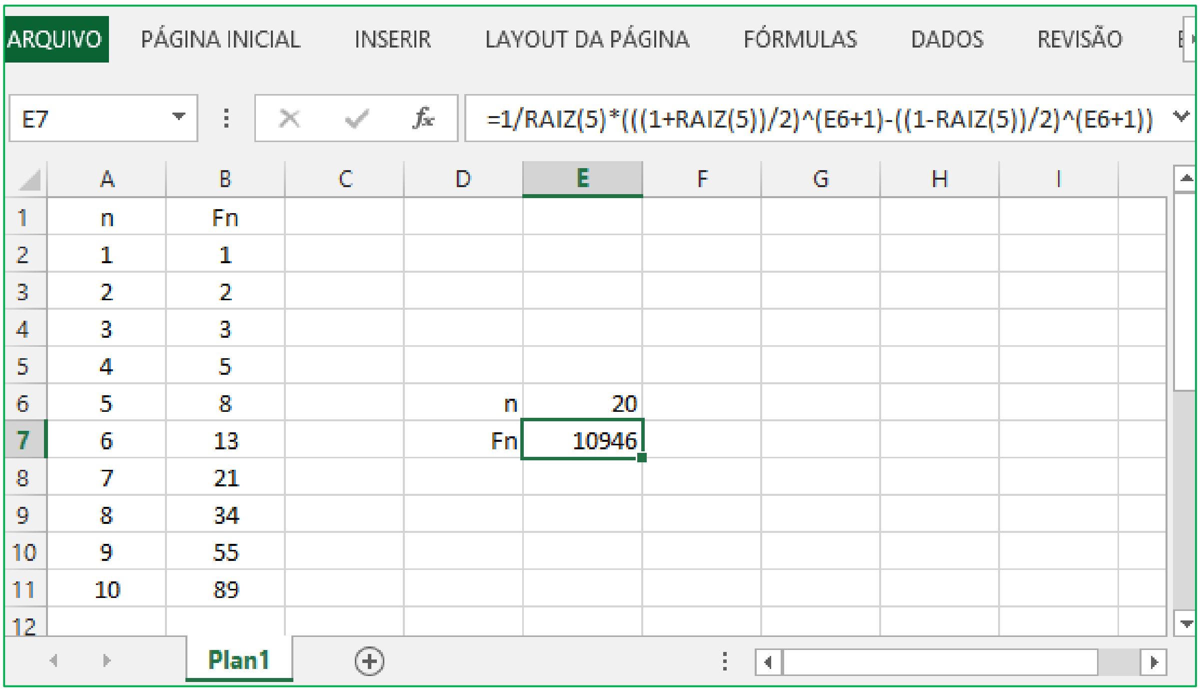


Figura 5.6 – Sequência de *Fibonacci* utilizando o *Excel*

O Exemplo a seguir pode ser proposto a turmas do Ensino Médio que objetiva desenvolver a capacidade de investigação dos alunos e de certa forma, motivá-los a resolver um problema envolvendo o conteúdo de progressão aritmética. Tem ainda como objetivo, possibilitar a busca de padrões e regularidades, em seguida com a utilização do *Excel* formular generalizações em situações diversas.

Exemplo 5.4 (Retirado do livro A Matemática do Ensino Médio de LIMA et al., 2006, p. 17). Determinar no quadro abaixo:

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
3 & 5 & & & \\
7 & 9 & 11 & & \\
13 & 15 & 17 & 19 & \\
21 & 23 & 25 & 27 & 29
\end{array}
$$

a) o primeiro elemento da 31ª linha.

b) a soma dos elementos da 31ª linha.

SOLUÇÃO: Percebemos que cada linha é representada por números ímpares, formando uma PA de razão 2. Sendo que a quantidade de elementos na linha é igual ao número da posição da mesma.

Para entender como se dá o primeiro elemento de uma determinada linha, vamos primeiramente pensar num caso menor. Por exemplo, o primeiro elemento da linha 5 é precedido por um elemento na primeira linha, dois na segunda, três na terceira e quatro elementos na quarta linha, ou seja, 1+2+3+4 números ímpares. Agora, se adicionamos 1 nessa soma (1+2+3+4+1=11) significa que o primeiro número da linha 5 ocupa a posição 11ª da sequência de números inteiros positivos ímpares que no caso é o número 21.

A Tab. 5.3 mostra as células utilizadas com os dados iniciais do problema e a generalização desta atividade para ser construída no *Excel*.

Com os dados inseridos nas células B2, B3, B4, B5 e B6, encontramos certos padrões matemáticos que nos conduzem a generalização da questão. Na célula B8 temos a soma de uma PA de razão 1 e com $n-1$ termos, adicionada ao número 1. E a célula C8 representa o primeiro número ímpar da linha n.

Tabela 5.3 – Primeiro elemento da linha n. Exemplo 5.4

Linha (célula)	Ordem do número ímpar		1º elemento	
	Célula	Digitar	Célula	Digitar
1 (A2)	B2	=1	C2	1
2 (A3)	B3	=1+1	C3	3
3 (A4)	B4	=1+2+1	C4	7
4 (A5)	B5	=1+2+3+1	C5	13
5 (A6)	B6	=1+2+3+4+1	C6	21
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n (A8)	B8	=((1+(A8-1))*(A8-1)/2)+1	C8	=2*B8-1

Assim, para determinar o primeiro elemento da 31ª linha do item a), inserimos na célula A8 o número 31 e obtemos na célula C8 a resposta, ou seja, o número 931, conforme apresentado na Fig. 5.7.

Para resolver o item b) consideremos a Tab. 5.4 como sendo continuação da Tab. 5.3. Primeiramente, vejamos na Tab. 5.4 os procedimentos para determinar a soma dos elementos das cinco primeiras linhas.

Tabela 5.4 – Soma dos elementos da linha n. Exemplo 5.4

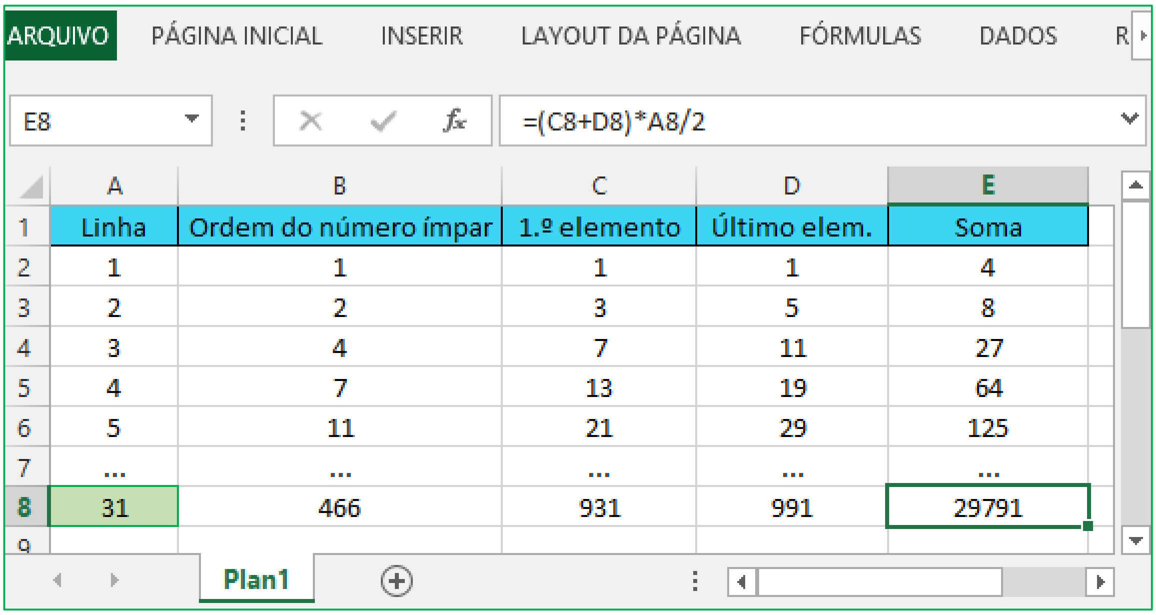
Último elemento		Soma	
Célula	Digitar	Célula	Digitar
D2	1	E2	=1
D3	5	E3	=3+5
D4	11	E4	=7+9+11
D5	19	E5	=13+15+17+19
D6	29	E6	=21+23+25+27+29
⋮	⋮	⋮	⋮
D8	=C8+(A8-1)*2	E8	=(C8+D8)*A8/2

Como os elementos de cada linha tratam-se de uma PA de razão 2, a fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n-1).r$ determina o último elemento da linha n, representada pela célula D8.

Com esse resultado, na célula E8 calcula-se a soma dos elementos da linha n, utilizando a fórmula da soma de uma PA com n termos $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$, onde o primeiro termo da linha é representado pela célula C8, o último termo corresponde a célula D8 e o número de termos é indicada pela célula A8.

Portanto, para determinar a soma dos elementos da 31ª linha, inserimos na célula A8 o número 31 e obtemos na célula E8 a resposta, ou seja, o número 29791.

Formatando as células adequadamente, chegamos à visualização indicada na Fig. 5.7.



	A	B	C	D	E
1	Linha	Ordem do número ímpar	1.º elemento	Último elem.	Soma
2	1	1	1	1	4
3	2	2	3	5	8
4	3	4	7	11	27
5	4	7	13	19	64
6	5	11	21	29	125
7	...	...	...	...	...
8	31	466	931	991	29791
9					

Figura 5.7 – Resultados gerados a partir das Tab. 5.3 e Tab. 5.4

Buscamos nesse capítulo, apresentar algumas possibilidades da exploração de planilhas eletrônicas nas aulas de Matemática. Quando bem trabalhadas e com propósitos pedagógicos, o professor possibilita ao aluno um maior envolvimento e a compreensão significativa de diversos conceitos e conteúdos matemáticos.

6 CONCLUSÃO

Esse capítulo será destinado à conclusão do trabalho. Inicia-se com a conclusão geral. Em seguida, serão descritas as considerações e sugestões para trabalhos futuros.

6.1 CONCLUSÃO GERAL

A exploração de padrões matemáticos no ensino da álgebra são considerados por diversos autores a base para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Nessa perspectiva, o presente trabalho teve como objetivo apresentar propostas pedagógicas que proporcionem aos alunos a oportunidade de observar e generalizar padrões, tratando-se de sequências numéricas associada a regularidades, tornando-os capazes de identificar e encontrar uma fórmula para o termo geral de sequências recursivas.

Com a análise efetuada em alguns livros didáticos do Ensino Fundamental (PNLD-2014), percebemos uma possível tendência em se trabalhar com a generalização de padrões para introduzir a álgebra no Ensino Fundamental. De modo que os autores se utilizam de sequências numéricas onde o aluno, diante de algumas observações ou questionamentos, é motivado a construir uma linguagem algébrica para uma determinada situação-problema.

A análise realizada sobre as abordagens algébricas, baseada no desenvolvimento do pensamento algébrico, também permitiu apresentar diversas atividades aos professores que lecionam nesse nível de ensino, de modo a acrescentar contribuições bastante consistentes para a sua prática pedagógica.

Os padrões são explorados, não apenas nos capítulos reservados ao estudo da álgebra, mas em outros capítulos relacionando a álgebra com aritmética e geometria, contribuindo para formação de outros conceitos a serem produzidos e da generalização de conteúdos matemáticos.

Faz-se necessário esse tipo de abordagem que possibilite a compreensão de uma expressão algébrica ou fórmula, ao invés de iniciar apenas com frases literais representadas na forma algébrica, sem significado ao aluno e que não estejam relacionada a um contexto.

Contudo, a generalização de padrões poderiam ser mais exploradas pelos livros didáticos, pois ainda são poucas as atividades oferecidas aos estudantes que consistem em generalizar termos de sequências e deduzir regras gerais por meio de operações aritméticas.

Cabe ao professor, portanto, não fixar seu trabalho apenas em uma obra, sendo necessário trazer para sala de aula outras atividades e situações desse tipo, que permitam aos alunos produzir significados para a álgebra e que os mesmos desenvolvam a capacidade de pensar algebricamente.

Em relação as questões extraídas de provas anteriores da OBMEP, sugeridas a turmas do Ensino Médio, notamos que os cálculos utilizados para encontrar o termo geral de sequências recursivas, exigem conhecimentos básicos da Matemática que são adquiridos durante o Ensino Fundamental, como, por exemplo, resolução de equações do primeiro e do segundo grau, sistemas de equações e regras de fatoração.

A abordagem do conteúdo de recorrências lineares no Ensino Médio, certamente é uma ótima possibilidade de ampliar o conhecimento dos alunos e de mostrar a aplicação dos conteúdos matemáticos presentes no currículo da Educação Básica.

Além disso, as atividades propostas estão de acordo com as orientações curriculares, porque proporcionam aos educandos formas de como generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos e argumentar com fundamentação lógico-dedutiva, que visam o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A incorporação de planilhas eletrônicas se apresentam como uma ferramenta útil no aprendizado da álgebra. Se bem exploradas, através de seu uso é possível descrever a generalização de padrões numéricos e suas correspondentes simbolizações usando variáveis e expressões. Portanto, a sua utilização favorece a construção de conceitos algébricos que também ajudam a promover o pensamento algébrico.

Por outro lado, as atividades realizadas no laboratório de informática através da planilha de cálculo possibilitam abordar enfoques, que em um ambiente fora da planilha não seria tão claro e de rápida resolução. Dessa maneira, oferecem aos alunos um tempo maior para que possam testar hipóteses, estabelecer conjecturas, experimentar e explorar propriedades. Modelando padrões numéricos e fazendo simulações. De forma que se transformem em construtores do seu próprio conhecimento.

6.2 CONTRIBUIÇÕES

Através de observações dos padrões em sequências numéricas no método recursivo apresentado, fomos capazes de introduzir, de maneira natural, o conceito de recorrências lineares, além do desenvolvimento desse conteúdo e as formas de resolução das relações quando dependem de termos anteriores.

Acreditamos que com essa proposta de conteúdo, estamos ampliando o horizonte dos alunos na forma de observar e generalizar padrões. Além disso, a escolha do conteúdo de recorrências, foi motivada essencialmente pela maneira que tal assunto é abordado no Ensino Médio, pois se limita praticamente ao estudo de progressões aritméticas e geométricas.

Finalizando, cabe-nos também ressaltar a afirmação de alguns professores de Matemática da Educação Básica de que falta material didático adequado para ampliar e aprofundar o estudo de recorrências. Nossa contribuição em realizar essa pesquisa, também é de deixar a todos uma proposta de trabalho que possibilita um avanço e novas abordagens ao conteúdo de recorrências no Ensino Médio, que pode ser utilizada para a construção de uma fórmula para o termo geral das sequências recursivas.

6.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Fixando-se no estudo de recorrências lineares, sugerimos como propostas para próximas investigações ideias não contempladas nesse trabalho, mas que compõem como uma importante contribuição no ensino de Matemática na Educação Básica:

- Pesquisas em livros didáticos do Ensino Médio como se aborda esse conteúdo;
- Propostas de oficinas de estudo de recorrências lineares para o Ensino Médio enfatizando os pontos principais para a teorização, interpretação e aplicação nesse nível;
- Possibilidades de inter-relação de conteúdos matemáticos, como, por exemplo, no estudo de análise combinatória, probabilidade e Matemática financeira;
- Possibilidades de interdisciplinaridade com demais áreas do conhecimento por meio da Modelagem Matemática.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P. **Avaliação e educação matemática.** v. 1. Rio de Janeiro: MEN/USU-GEPEM, 1995. 88 p. (Série Reflexões em Educação Matemática).

ADRIÁN, M.; LLANO, J. G. **A Informática educativa na escola.** São Paulo: Loyola, 2006. 86 p.

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. **Praticando Matemática.** 3.ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2012. (Coleção praticando matemática).

AQUINO, L. O. de. **Os Alunos de 5ª Série/6º Ano Frente a Atividades sobre Observação e Generalização de Padrões.** 2008. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008

ARCHILIA, S. **Construção do termo geral da progressão aritmética pela observação e generalização de padrões.** 2008. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

BARBOSA, E. **A Exploração de Padrões num Contexto de Tarefas de Investigação com Alunos do 8º ano de Escolaridade.** 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade de Évora, Lisboa, 2007.

BECHER, E. L. **Características do Pensamento Algébrico de Estudantes do 1º ano do Ensino Médio.** 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2009.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As idéias da álgebra.** Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p.23-27.

BORBA, M de C.; PENTEADO, M.G. **Informática e Educação Matemática.** 3. ed. 1.reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. 100 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 2)

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Orientações Curriculares Nacionais (Ensino Médio):** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. 2006. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb>. Acesso em: 14 jan. 2014.

_______. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais (3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental):** Matemática. 1998. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb>. Acesso em: 14 jan. 2014.

CANAVARRO, A.P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante,** v. 16, n.2, p. 81-118, 2009.

COX, K. K. **Informática na educação escolar.** Campinas: Autores Associados, 2003. 124 p. (Coleção Polêmicas do nosso tempo, 87).

DEVLIN, K. Matemática: a ciência dos padrões. Porto: Porto Editora, 2002. 222 p.

FERREIRA, C. R. de M. **Os alunos do 1º ano do Ensino Médio e os Padrões:** Observação, Realização e Compreensão. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuições para um repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, Campinas, v.4, n.1, p.78-90, mar.1993.

GEOVANNI, J. R.; GEOVANNI JÚNIOR, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática Fundamental:** uma nova abordagem. 2. ed. São Paulo; FTD, 2011.

GIGANTE, A. M. B.; SANTOS, M. B. dos. **Práticas pedagógicas em Matemática:** espaço, tempo e corporeidade. v. 3. Erechim: Edelbra, 2012. 120p.

GODINO, R; FONT, V. Razonamiento Algebraico para Maestros. **Matemáticas y su Didáctica para Maestros, Manual para El Estudiante.** Proyecto Edumat - Maestros. p. 766-826, 2003.

GRECCO, E. C. S. **O uso de Padrões e Sequências:** Uma proposta de abordagem para a introdução à álgebra para alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental. 2008. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

HEFEZ, A. **Elementos de aritmética.** 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. 176 p. (Coleção do Professor de Matemática, 8).

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática:** Imenes e Lellis. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2012.

LEONARDO, F. M. de (Ed.). **Projeto Araribá:** Matemática. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio.** v. 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 308 p. (Coleção do Professor de Matemática, 14).

LINS, R.C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** 6.ed. Campinas: Papirus, 1997. 176p. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

MARINHO, S. P. Tecnologia, educação contemporânea e desafios ao professor. In: JOLY, M. C. R. A. (Org.). **A tecnologia no ensino: implicações para a aprendizagem.** São Paulo: Casa do Psicólogo, 2002, p. 41-62.

OBMEP. **Banco de Questões 2013.** Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

_______. **Provas e Soluções (2005-2013).** Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 12 fev. 2014.

_______. **Regulamento OBMEP, 2014.** Disponível em: <http://www.obmep.org.br/regulamento.html>. Acesso em: 31 mai. 2014.

PARANÁ. Secretaria de Estado de Educação. Departamento de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática.** Curitiba: SEED, 2008. Disponível em:< http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br>. Acesso em: 14 jan. 2014.

PATARO, P. M.; SOUZA, J. **Vontade de Saber Matemática.** 2. ed. São Paulo: FTD, 2012.

PEREZ, E. P. Z. **Alunos do Ensino Médio e a Generalização de Padrão.** 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

PORTANOVA, R. (Org.). **Um currículo de matemática em movimento.** 1.ed. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2005. 95p.

SANTOS, L. G. **Introdução do pensamento algébrico:** um olhar sobre professores e livros didáticos de matemática. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2007.

SILVA, R. S. **Oficina experiências matemáticas:** professores e a exploração de padrões. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática Ensino Médio.** v. 1. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões: um tema transversal no currículo. **Revista Educação e Matemática,** Portugal, n. 85, p. 14-20, nov./dez., 2005.

WALLE, J. A. V. de. **Matemática no Ensino Fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. 584p.