

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL - PROFMAT

MAIKON LUIZ MIRKOSKI

NÚMEROS E POLINÔMIOS DE BERNOULLI

DISSERTAÇÃO

PONTA GROSSA

2018

MAIKON LUIZ MIRKOSKI

NÚMEROS E POLINÔMIOS DE BERNOULLI

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Ponta Grossa como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Matemática”.

Orientador: Marcos Calçada, Dr.

PONTA GROSSA

2018

M675 Mirkoski, Maikon Luiz
Números e polinômios de Bernoulli/ Maikon Luiz
Mirkoski. Ponta Grossa, 2018.
64f.; il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFOMAT), Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Calçada

1. Números de Bernoulli. 2. Polinômios de Bernoulli. 3. Função Gama. 4. Função Beta. 5. Função Teta. 6. Equação funcional. I. Calçada, Marcos. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa - Mestrado Profissional em Matemática. III. T.

CDD: 515.7


TERMO DE APROVAÇÃO


Maikon Luiz Mirkoski

“Números e Polinômios de Bernoulli”

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador:


Prof. Dr. Marcos Calçada
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG/PR


Prof. Dr. Marciano Pereira
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG/PR


Prof. Dr. Roberto Ribeiro Santos Júnior
Departamento de Matemática, UFPR/PR

Ponta Grossa, 19 de Outubro de 2018.

À minha família pelo incentivo nesta caminhada.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Marcos Calçada por me orientar nessa jornada, pela paciência e dedicação oferecidas durante a construção deste trabalho.

A todos os professores do PROFMAT-UEPG que contribuíram de forma direta ou indireta à realização deste trabalho, bem como a todos professores que me acompanharam na minha vida acadêmica e escolar.

Em especial ao Prof. Leandro, o qual sinto orgulho de dizer que foi a minha inspiração para licenciar-se em matemática e seguir nos estudos.

A todos os meus companheiros de estudos da turma PROFMAT-UEPG 2016, em especial ao meu colega e grande amigo desde a graduação Felipe.

Em especial à minha namorada Marine, minha mãe Maria do Carmo, meu pai Miguel e meu irmão Marrone.

Ao IFPR *campus* Irati pelo apoio e incentivo.

“Em matemática você não aprende as coisas, se acostuma com elas.”
John Von Neumann

RESUMO

Neste trabalho, estudamos os números e os polinômios de Bernoulli, bem como algumas de suas aplicações mais importantes em Teoria dos Números. Com base em uma caracterização simples, os polinômios de Bernoulli são introduzidos e, posteriormente, os números de Bernoulli. As séries de Fourier dos polinômios de Bernoulli são utilizadas na demonstração da equação funcional da função teta. Esta equação, por sua vez, é utilizada na demonstração da célebre equação funcional da função zeta, que tem importância central na teoria da distribuição dos números primos. Além das conexões com as funções especiais zeta e teta, discutimos também, em detalhe, conexões entre os números e os polinômios de Bernoulli com a função gama. Essas relações são então exploradas para produzir belas fórmulas para certos valores da função zeta, entre outras aplicações.

Palavras-chave: Números de Bernoulli, Polinômios de Bernoulli, Função Gama, Função Zeta, Função Teta, Equação Funcional.

ABSTRACT

In this work we study Bernoulli numbers and Bernoulli polynomials, as well as some of its most important applications in Number Theory. Based on a simple characterization, the Bernoulli polynomials are introduced and, later, the Bernoulli numbers. The Fourier series of the Bernoulli polynomials are used to demonstrate the functional equation of the theta function. This equation, in turn, is used in the proof of the famous functional equation of the zeta function, which is central to the theory of prime number distribution. In addition to the connections with the special functions zeta and theta, we also discuss, in detail, connections between the Bernoulli numbers and Bernoulli polynomials with the gamma function. These relations are then explored to produce beautiful formulas for certain values of the zeta function, among other applications.

Keywords: Bernoulli Numbers, Bernoulli Polynomials, Gamma Function, Zeta Function.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 – Reprodução da lista de fórmulas do livro <i>Ars Conjectand</i> p. 97	11
FIGURA 2.1 – $B_1(x), B_2(x)$	17
FIGURA 2.2 – $B_3(x), B_4(x)$	17
FIGURA 2.3 – $B_5(x), B_6(x)$	17
FIGURA 3.1 – $B_1(x), B_2(x)$	26
FIGURA 3.2 – $B_3(x), B_4(x)$	26
FIGURA 3.3 – $B_5(x), B_6(x)$	27
FIGURA 4.1 – Simetria dos Polinômios de Bernoulli	34
FIGURA 7.1 – Gráfico da função $\Gamma(s)$, para $s > 0$	46
FIGURA 7.2 – Função Gama para $s \in (-6, 0)$	51
FIGURA 7.3 – $1/\Gamma(s)$ para $s \in (-6, 0)$	54
FIGURA 7.4 – $\zeta(s)$ para $s \in (-1, 3)$	54
FIGURA 8.1 – $\zeta(1 - 2n)$ para $n \in \mathbb{N}$	59
FIGURA 8.2 – $\zeta(n)$ para $n \in (-10, 0)$	60
FIGURA 8.3 – $\zeta(n)$ para $n \in (-20, 0)$	60

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	NÚMEROS E POLINÔMIOS DE BERNOLLI	14
3	POLINÔMIOS DE BERNOULLI E SÉRIES DE FOURIER	21
4	POLINÔMIOS DE BERNOULLI E SÉRIES DE POTÊNCIA	31
5	A EXPANSÃO DE EULER-MACLAURIN DE ORDEM m	35
6	A FUNÇÃO TETA	42
7	A FUNÇÃO GAMA	46
8	A EQUAÇÃO FUNCIONAL E OS NÚMEROS DE BERNOULLI	55
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS	62
	REFERÊNCIAS	64

1 INTRODUÇÃO

Os números de Bernoulli estão entre as sequências numéricas mais interessantes e importantes da Matemática. Historicamente, os números de Bernoulli surgiram na obra póstuma *Ars Conjectandi*¹, em 1713, do suíço Jacob Bernoulli (1654-1705), na descrição de uma forma de calcular a soma de potências de inteiros consecutivos

$$S_p(n) = 1^p + 2^p + \dots + n^p, \quad (1.1)$$

para inteiros $n > 0$ e $p > 0$. De forma mais precisa, os números de Bernoulli nos permitem calcular os coeficientes do polinômio de grau $p + 1$ na variável n que é o valor de $S_p(n)$. A Figura 1.1, com fórmulas fechadas para soma de potências, com p de 1 a 10, estava na obra de Bernoulli. Ele usou o símbolo \int , um S alongado, para indicar a somatória. Na notação moderna, as três primeiras somas seriam:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= \frac{1}{2}n(n+1), \\ \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \\ \sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2. \end{aligned}$$

A fórmula geral para calcular a soma de p -ésimas potências não foi explicitada por Bernoulli (APOSTOL, 2008), mas sabemos que

$$\sum_{k=1}^{m-1} k^p = \frac{B_{p+1}(m) - B_{p+1}}{p+1}, \quad p \geq 1, m \geq 2, \quad (1.2)$$

sendo $B_n(x)$ um polinômio em x de grau n , chamado **polinômio de Bernoulli**, dado por

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k}, \quad n \geq 0, \quad (1.3)$$

¹A arte de Conjeturar.

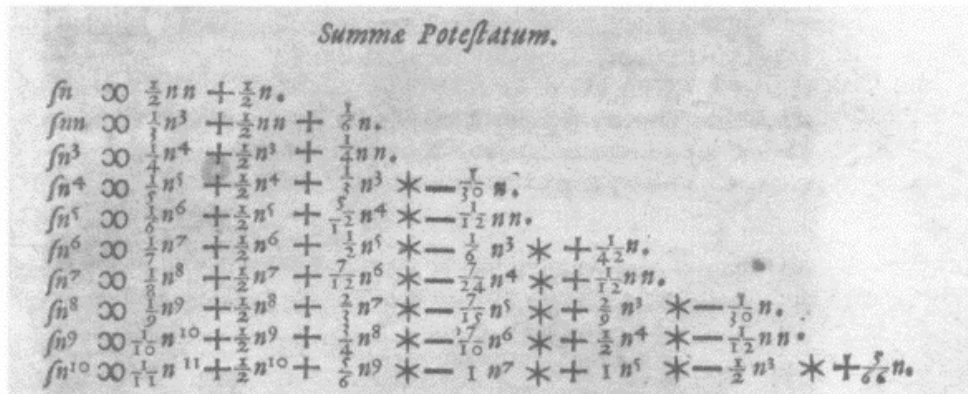


Figura 1.1: Reprodução da lista de fórmulas do livro *Ars Conjectand* p. 97

em que os B_k são os **números de Bernoulli**. Podemos defini-los recursivamente como:

$$B_0 = 1, \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0, \quad \text{para } n \geq 2. \quad (1.4)$$

Por meio da equação 1.4 verificamos que:

B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$

Tabela 1.1: Números de Bernoulli

Da equação 1.3, vemos que $B_n = B_n(0) = B_n(1)$, para todo $n \geq 2$. Os B_n , com n ímpar e maior que 2, são todos iguais a zero. Assim, usando a equação 1.3 obtemos os polinômios de Bernoulli:

$$\begin{aligned} B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\ B_3(x) &= x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}, \\ B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \\ B_5(x) &= x^5 - \frac{5x^4}{2} + \frac{5x}{3} - \frac{x}{6}, \\ B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{42}. \end{aligned}$$

Vale ressaltar que o japonês Takakazu Seki (1642-1708) também definiu os mesmos números de Bernoulli no seu livro póstumo *Katsuyo Sanpo*², em 1712. Este é um caso em que

²Fundamentos da Arte do Cálculo.

não haverá dúvidas quanto à descoberta independente e praticamente simultânea de um mesmo conceito (ARAKAWA et al., 2014, p. 2-3).

Os números e os polinômios de Bernoulli possuem muitas aplicações na Matemática. Por exemplo, no estudo do último teorema de Fermat (IRELAND; ROSEN, 1982), na expansão de Euler-Maclaurin (APOSTOL, 1999), no cálculo de diferenças finitas (NÖRLUND, 1924), em combinatória (COMTET, 1970, 1974), e em outros campos (TEMPESTA, 2006). Algumas vezes, tais aplicações ocorrem em contextos inesperados como, por exemplo, na teoria dos primos regulares de Kummer (OLIVEIRA, 2013).

Uma importante aplicação dos números de Bernoulli é no estudo da distribuição dos números primos e da função zeta de Riemann $\zeta(s)$ (APOSTOL, 2008), definida para $s > 1$ pela série

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}. \quad (1.5)$$

Há bastante tempo essa função atrai a atenção de vários matemáticos de renome. Já no século XVII, ela estava ligada ao famoso **problema da Basileia**. Para compreender o problema, convém recuar a 1650, ano em que foi publicado o livro *Novae quadraturæ arithmeticae sev de additione fractionum*, de Pietro Mengoli. É um livro sobre soma de séries, duas das quais são:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \quad (1.6)$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \quad (1.7)$$

No livro é demonstrado que a primeira série, a série harmônica, diverge. O autor também levantou a questão de qual é o valor da soma da segunda série. Este problema também foi discutido por Jacob Bernoulli em 1689. O problema só foi resolvido em 1735 por Leonhard Euler. Ele mostrou que, de forma surpreendente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{6}. \quad (1.8)$$

Variações desta série são deste então muito estudadas, sendo que a equação (1.8) é na verdade $\zeta(2)$. O próprio Euler calculou mais valores de $\zeta(2k)$, para $k = 1, 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= \frac{\pi^2}{6}, & \zeta(4) &= \frac{\pi^4}{90}, & \zeta(6) &= \frac{\pi^6}{945}, \\ \zeta(8) &= \frac{\pi^8}{9450}, & \zeta(10) &= \frac{\pi^{10}}{93555}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Nesta dissertação tivemos como objetivo explorar algumas das conexões mais importantes entre os números e os polinômios de Bernoulli e as funções zeta, gama e teta. De forma mais detalhada, no capítulo 2 introduzimos os polinômios de Bernoulli mostrando que são os únicos polinômios que satisfazem três condições simples. Já os números de Bernoulli foram definidos como sendo os valores em $x = 0$ dos correspondentes polinômios de Bernoulli. A seguir mostramos como a sequência dos números de Bernoulli pode ser obtida de maneira recursiva. Por fim ilustramos esse resultado calculando os primeiros números de Bernoulli. No capítulo 3 calculamos as séries de Fourier para os polinômios de Bernoulli no intervalo $[0, 1]$. A seguir definimos a função zeta de Riemann e provamos a equação de Euler que relaciona esta função com os números primos. Por fim, utilizamos as séries de Fourier obtidas anteriormente para expressar o valor da função zeta nos pares positivos em termos de números de Bernoulli. No capítulo 4 estudamos séries de potência que geram os números e os polinômios de Bernoulli. A série geradora dos polinômios de Bernoulli nos permitiu provar, então, uma relação de simetria com respeito à reta $x = \frac{1}{2}$ obedecida por esses polinômios. No capítulo 5 utilizamos vários resultados dos capítulos anteriores para definir e provar a célebre expansão de Euler-Maclaurin, que foi então empregada em várias aplicações interessantes. Por último, apresentamos um raciocínio heurístico devido a Lagrange que justifica de forma intuitiva a fórmula de Euler-Maclaurin. No capítulo 6 tivemos como metas definir a função teta de Jacobi e provar a lei de simetria que ela obedece. Nossa demonstração dessa lei fez uso da expansão de Euler-Maclaurin. No capítulo 7 estudamos outra função especial célebre – a função gama. Inicialmente, ela foi definida com domínio real e mostramos que ela é uma extensão da função fatorial. Posteriormente, ela foi estendida ao domínio complexo e encontramos uma fórmula que relaciona as funções gama, zeta e os números de Bernoulli. No capítulo 8 provamos que a função zeta de Riemann obedece a uma lei de simetria conhecida por equação funcional da função zeta. Ela é fundamental em Teoria dos Números e está intimamente relacionada com a famosa Hipótese de Riemann. Para prová-la fizemos uso da equação funcional da função teta. Depois disso extraímos algumas consequências simples envolvendo valores da função zeta e os números de Bernoulli. Por fim, no último capítulo tecemos as considerações finais.

2 NÚMEROS E POLINÔMIOS DE BERNOLLI

Neste capítulo introduzimos os polinômios de Bernoulli mostrando que são os únicos polinômios que satisfazem três condições simples. Já os números de Bernoulli são definidos como sendo os valores em $x = 0$ dos correspondentes polinômios de Bernoulli. A seguir mostramos como a sequência dos números de Bernoulli pode ser obtida de maneira recursiva. Por fim ilustramos esse resultado calculando os primeiros números de Bernoulli.

Proposição 2.1. *Existe uma única sequência de polinômios $B_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, tal que $B_0(x) = 1$ e, para todo inteiro $m \geq 1$,*

$$(i) B'_m(x) = mB_{m-1}(x),$$

$$(ii) \int_0^1 B_m(x) dx = 0.$$

Antes de fazermos a prova da proposição 2.1, observe que as condições (i) e (ii) são equivalentes as condições:

$$(i) B'_m(x) = mB_{m-1}(x),$$

$$(ii)' B_m(1) = B_m(0), \quad \forall m \geq 2.$$

De fato, se $m \geq 1$, então

$$\int_0^1 B_m(x) dx = \int_0^1 \frac{B'_{m+1}(x)}{m+1} dx = \frac{1}{m+1} [B_{m+1}(1) - B_{m+1}(0)].$$

Demonstração da Existência - Por indução.

Se $n = 1$, temos pela condição (i)

$$B'_1(x) = 1 \cdot B_0(x) = 1,$$

e assim,

$$B_1(x) = x + c_1,$$

para alguma constante c_1 . Mas pela condição (ii) obtemos

$$0 = \int_0^1 (x + c_1) dx = \frac{x^2}{2} + c_1 x \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + c_1.$$

Portanto, $c_1 = -\frac{1}{2}$ e $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$.

Suponhamos agora por indução que para algum $n \geq 2$ existem $B_0(x), B_1(x), \dots, B_n(x)$ polinômios que satisfazem (i) e (ii). Vamos então provar que existe um único polinômio $B_{n+1}(x)$ que satisfaz as condições (i) e (ii) com $m = n + 1$, isto é,

$$(a) B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x),$$

$$(b) \int_0^1 B_{n+1}(x) dx = 0.$$

De fato, como a integral indefinida de um polinômio é um polinômio,

$$B_{n+1}(x) = B_{n+1}(0) + (n+1) \int_0^x B_n(t) dt$$

é um polinômio que satisfaz a condição (a). Além disso,

$$\begin{aligned} \int_0^1 B_{n+1}(x) dx &= (n+1) \int_0^1 B'_n(x) dx \\ &= (n+1)n \int_0^1 B_{n-1}(x) dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

pelas condições (a) e (b) e a hipótese de indução.

Provamos que existe um polinômio $B_{n+1}(x)$ que satisfaz (a) e (b).

Resta verificar a unicidade.

Seja $\bar{B}_{n+1}(x)$ outro polinômio que satisfaz (a) e (b). Ou seja,

$$\bar{B}'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x) \quad \text{e} \quad \int_0^1 \bar{B}_{n+1}(x) dx = 0.$$

Então, para todo x ,

$$\begin{aligned} (B_{n+1} - \bar{B}_{n+1})'(x) &= B'_{n+1}(x) - \bar{B}'_{n+1}(x) \\ &= (n+1)B_n(x) - (n+1)B_n(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$B_{n+1}(x) = \bar{B}_{n+1}(x) + c$$

para alguma constante c . Mas, por (b),

$$0 = \int_0^1 B_{n+1}(x)dx = \int_0^1 \bar{B}_{n+1}(x)dx + \int_0^1 cdx = 0 + c = c.$$

Logo, $c = 0$ e $B_{n+1}(x) = \bar{B}_{n+1}(x), \forall x$.

Assim, pelo princípio da indução matemática, vale a proposição. \square

A sequência de polinômios da proposição 2.1 é chamada de **sequência de polinômios de Bernoulli**.

Exemplo 2.2. *Vimos que $B_0(x) = 1$ e $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$.*

Agora,

$$B_2'(x) = 2B_1(x) = 2x - 1,$$

de modo que

$$B_2(x) = x^2 - x + c,$$

para alguma constante c . Mas

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 B_2(x)dx = \left. \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + cx \right|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + c, \end{aligned}$$

assim, $c = \frac{1}{6}$ e

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Procedendo de forma semelhante podemos verificar que:

$$\begin{aligned} B_3(x) &= x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}, \\ B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \\ B_5(x) &= x^5 - \frac{5x^4}{2} + \frac{5x}{3} - \frac{x}{6}, \\ B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{42}. \end{aligned}$$

Nas figuras 2.1, 2.2 e 2.3 apresentamos gráficos de alguns polinômios de Bernoulli.

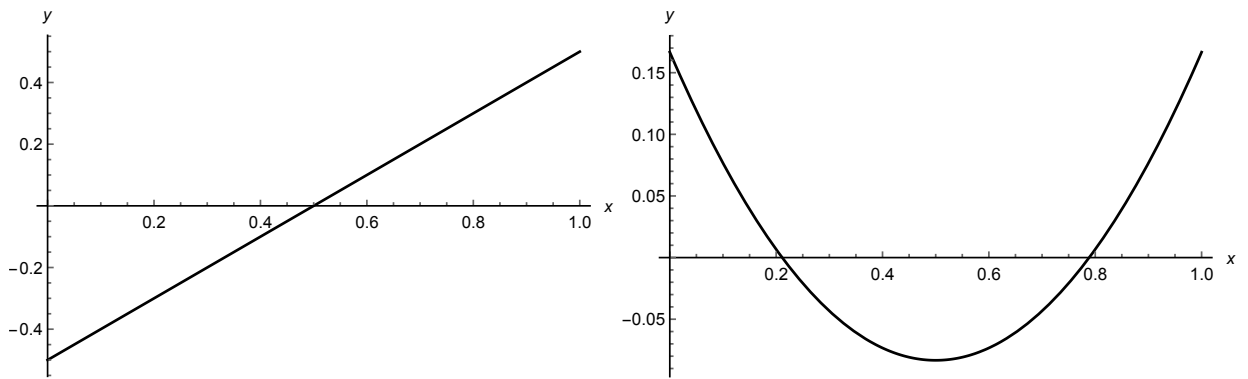


Figura 2.1: $B_1(x), B_2(x)$

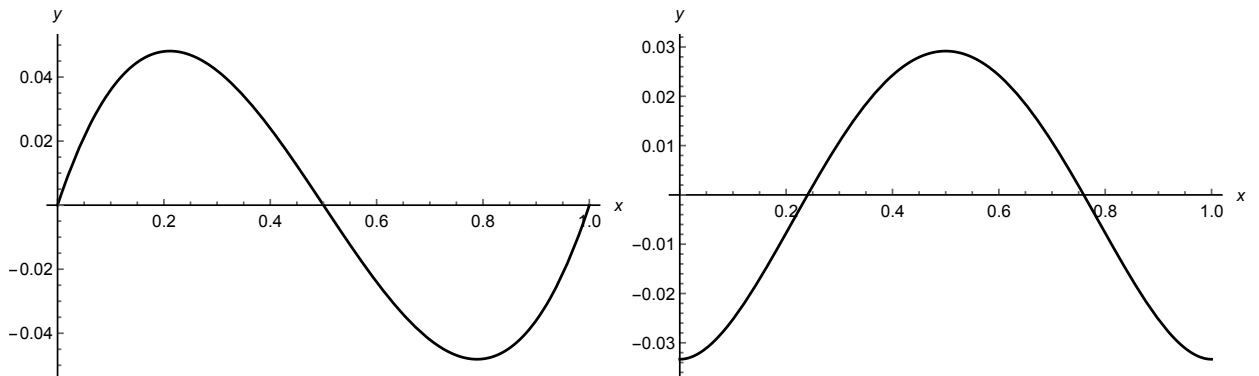


Figura 2.2: $B_3(x), B_4(x)$

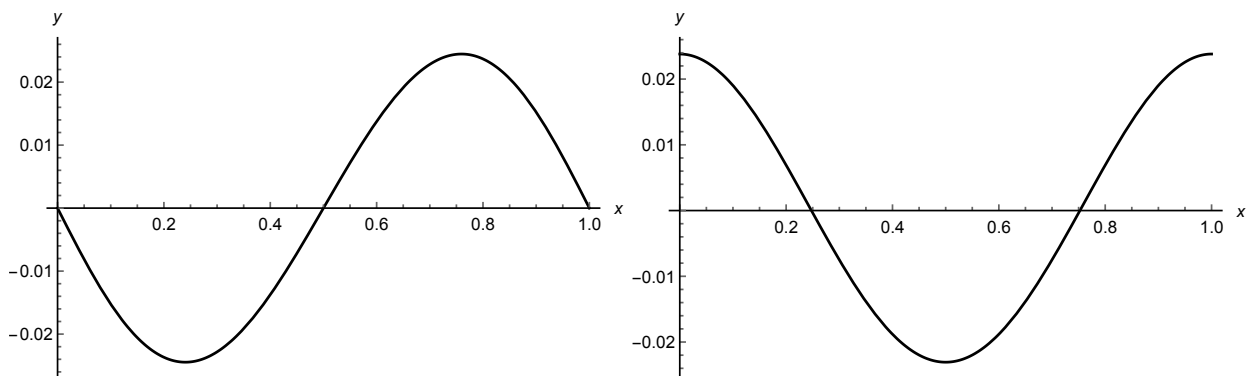


Figura 2.3: $B_5(x), B_6(x)$

Observe que o m -ésimo polinômio de Bernoulli é um polinômio de grau m , assim podemos escrever

$$B_m(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} c_{k,m} x^{m-k} \quad (2.1)$$

para certos escalares $c_{0,m}, c_{1,m}, \dots, c_{m,m}$. Daí,

$$\begin{aligned} B'_m(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} c_{k,m} (m-k) x^{m-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} m \binom{m-1}{k} c_{k,m} x^{m-k-1} \\ &= m \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} c_{k,m} x^{m-1-k} \end{aligned}$$

Mas, pela condição (i) da proposição 2.1, temos $B'_m(x) = mB_{m-1}(x)$, se $m \geq 1$. Logo, se $m \geq 1$ temos

$$m \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} c_{k,m} x^{m-1-k} = m \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} c_{k,m-1} x^{m-k-1}$$

Portanto, para $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$,

$$c_{k,m} = c_{k,m-1}.$$

Quer dizer, os coeficientes $c_{k,m}$ não dependem de m , apenas de k . Assim, podemos reescrever a equação (2.1) como

$$B_m(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} c_k x^{m-k}. \quad (2.2)$$

Note que $B_m(0) = \binom{m}{m} c_m = c_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Os números $B_m(0)$ são chamados **números de Bernoulli** e denotados por B_m . Logo, pelo exemplo 2.2, temos

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}.$$

Nosso raciocínio anterior provou a seguinte proposição.

Proposição 2.3. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Então,*

$$B_m(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_k x^{m-k}. \quad (2.3)$$

A proposição 2.3 nos permite obter uma fórmula recursiva para calcular os números de Bernoulli e, conseqüentemente, os polinômios de Bernoulli.

Proposição 2.4. *Os números de Bernoulli satisfazem a relação de recorrência*

$$(i) \quad B_0 = 1,$$

$$(ii) \quad B_m = -\frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m+1}{j} B_j, \quad m \geq 1.$$

Demonstração. Já que

$$\int_0^1 B_m(x) dx = 0,$$

se $m \geq 1$, pela proposição 2.3,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_k \int_0^1 x^{m-k} dx \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_k \frac{1}{m-k+1} \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k \frac{1}{m+1} \\ &= \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} B_k + \binom{m+1}{m} B_m = 0,$$

ou ainda, de forma equivalente,

$$B_m = -\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} B_k.$$

□

Exemplo 2.5. *Vamos calcular os 4 primeiros números de Bernoulli usando a relação de recorrência a proposição 2.4.*

$m=1$,

$$B_1 = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^0 \binom{2}{k} B_k = -\frac{1}{2} B_0 = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}.$$

$m=2$,

$$B_2 = -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^1 \binom{3}{k} B_k = -\frac{1}{3} \left(\binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 \right) = -\frac{1}{3} \left(1 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{-1}{2} \right) = -\frac{1-1.5}{3} = \frac{1}{6}.$$

$m=3$,

$$B_3 = -\frac{1}{4} \sum_{k=0}^2 \binom{4}{k} B_k = -\frac{1}{4} \left(\binom{4}{0} B_0 + \binom{4}{1} B_1 + \binom{4}{2} B_2 \right) = -\frac{1}{4} \left(1 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{-1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{6} \right) = -\frac{1}{4} \cdot 0 = 0$$

$m=4$,

$$\begin{aligned} B_4 &= -\frac{1}{5} \sum_{k=0}^3 \binom{5}{k} B_k = -\frac{1}{5} \left(\binom{5}{0} B_0 + \binom{5}{1} B_1 + \binom{5}{2} B_2 + \binom{5}{3} B_3 \right) = -\frac{1}{5} \left(1 \cdot 1 + 5 \cdot \frac{-1}{2} + 10 \cdot \frac{1}{6} + 10 \cdot 0 \right) \\ &= -\frac{1}{5} \left(1 - \frac{5}{2} + \frac{5}{3} \right) = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{30}. \end{aligned}$$

Podemos facilmente continuar aplicando a proposição 2.4 até obter a tabela abaixo.

B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$	0

Tabela 2.1: Números de Bernoulli

3 POLINÔMIOS DE BERNOULLI E SÉRIES DE FOURIER

Neste capítulo calculamos as séries de Fourier para os polinômios de Bernoulli no intervalo $[0, 1]$. A seguir definimos a função zeta de Riemann e provamos a equação de Euler que relaciona esta função com os números primos. Por fim, utilizamos as séries de Fourier obtidas anteriormente para expressar o valor da função zeta nos pares positivos em termos de números de Bernoulli.

Inicialmente, precisamos relembrar alguns fatos básicos sobre séries de Fourier:

1) A Série de Fourier de um função periódica localmente integrável $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de período 1 é a série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2\pi kx),$$

em que os **coeficientes de Fourier** de f são dados por

$$a_k = 2 \int_0^1 f(x) \cos(2\pi kx) dx, \quad k \geq 0,$$

$$b_k = 2 \int_0^1 f(x) \sin(2\pi kx) dx, \quad k \geq 1,$$

Note que, como f é periódica de período 1, $a_k = 0$ se f é ímpar, e $b_k = 0$ se f é par.

2) O teorema de Fourier de convergência pontual afirma que a série de Fourier de f converge para $f(x)$ em todo ponto x onde f é contínua e tem derivadas à esquerda e à direita (não necessariamente iguais).

Fazendo uso desses fatos podemos provar a seguinte proposição.

Proposição 3.1. *As seguintes identidades são válidas:*

(i)

$$B_1(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k}, \quad \forall x \in (0, 1).$$

(ii) Se m é par,

$$B_m(x) = 2(-1)^{\frac{m}{2}+1} \frac{m!}{(2\pi)^m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{k^m}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

(iii) Se m é ímpar,

$$B_m(x) = 2(-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{m!}{(2\pi)^m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k^m}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Demonstração.

Para todo $m \geq 1$, seja $B_m^p(x)$ a extensão periódica para \mathbb{R} da restrição de $B_m(x)$ a $[0, 1]$. Assim, $B_m^p(x) = B_m(x)$ para $x \in [0, 1]$, de modo que no cálculo dos coeficientes de Fourier de $B_m^p(x)$ podemos trocar $B_m^p(x)$ por $B_m(x)$. Assim, os coeficientes de Fourier de $B_m^p(x)$ são dados por

$$\begin{aligned} a_k^m &= 2 \int_0^1 B_m(x) \cos(2\pi kx) dx, & k \geq 0, \\ b_k^m &= 2 \int_0^1 B_m(x) \sin(2\pi kx) dx, & k > 0. \end{aligned}$$

Primeiramente, vamos calcular a série de Fourier de $B_1(x)$. Temos

$$a_0^1 = 2 \int_0^1 B_1(x) dx = 0,$$

e se $k > 0$, usando integração por partes obtemos

$$\begin{aligned} a_k^1 &= 2 \int_0^1 B_1(x) \cos(2\pi kx) dx \\ &= 2B_1(x) \frac{\sin(2\pi kx)}{2\pi k} \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 B_1'(x) \frac{\sin(2\pi kx)}{2\pi k} dx \\ &= 0 - \frac{2}{2\pi k} \int_0^1 B_0(x) \sin(2\pi kx) dx \\ &= -\frac{1}{\pi k} \int_0^1 \sin(2\pi kx) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
b_k^1 &= 2 \int_0^1 B_1(x) \sin(2\pi kx) dx \\
&= -\frac{2B_1(x) \cos(2\pi kx)}{2\pi k} \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 B_1'(x) \frac{\cos(2\pi kx)}{2\pi k} dx \\
&= -\frac{(2x-1) \cos(2\pi kx)}{2\pi k} \Big|_0^1 + \frac{1}{\pi k} \int_0^1 \cos(2\pi kx) dx \\
&= -\frac{1}{\pi k}.
\end{aligned}$$

Como $B_1^p(x)$ é diferenciável em $[0, 1]$, segue-se do teorema de Fourier de convergência pontual que

$$B_1(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k}, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Suponhamos agora que $m > 1$. Temos, para $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
a_k^m &= 2 \int_0^1 B_m(x) \cos(2\pi kx) dx \\
&= 2B_m(x) \frac{\sin(2\pi kx)}{2\pi k} \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 B_m'(x) \frac{\sin(2\pi kx)}{2\pi k} dx \\
&= -\frac{1}{2\pi k} 2 \int_0^1 mB_{m-1}(x) \sin(2\pi kx) dx \\
&= -\frac{m}{2\pi k} b_k^{m-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_k^m &= 2 \int_0^1 B_m(x) \sin(2\pi kx) dx \\
&= -2B_m(x) \frac{\cos(2\pi kx)}{2\pi k} \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 B_m'(x) \frac{\cos(2\pi kx)}{2\pi k} dx \\
&= -\frac{(B_m(1) - B_m(0))}{\pi k} + 2 \int_0^1 mB_{m-1}(x) \frac{\cos(2\pi kx)}{2\pi k} dx \\
&= \frac{m}{2\pi k} 2 \int_0^1 B_{m-1}(x) \cos(2\pi kx) dx \\
&= \frac{m}{2\pi k} a_k^{m-1}.
\end{aligned}$$

Para $k = 0$ temos

$$a_0^m = 2 \int_0^1 B_m(x) dx = 0.$$

Verificamos então, que

$$a_k^m = -\frac{m}{2\pi k} b_k^{m-1}, \quad (3.1)$$

$$b_k^m = \frac{m}{2\pi k} a_k^{m-1}, \quad (3.2)$$

se $m > 1$. Logo, se $m > 2$,

$$a_k^m = -\frac{m(m-1)}{(2\pi k)^2} a_k^{m-2},$$

$$b_k^m = -\frac{m(m-1)}{(2\pi k)^2} b_k^{m-2}.$$

Se $m \geq 2$ e ímpar, podemos escrever

$$a_k^m = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{m!}{(2\pi k)^{m-1}} a_k^1,$$

$$b_k^m = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{m!}{(2\pi k)^{m-1}} b_k^1.$$

Como $a_k^1 = 0$ para todo $k \geq 0$ e, $b_k^1 = -\frac{1}{\pi k}$ para todo $k > 0$, temos

$$a_k^m = 0, \quad \forall k \geq 0 \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} b_k^m &= (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{m!}{(2\pi k)^{m-1}} \frac{(-1)}{\pi k} \\ &= 2(-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{m!}{(2\pi k)^m}, \quad \forall k \geq 1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Como $B_m^p(x)$ é contínua e possui derivadas laterais em todos os pontos, temos pelo teorema de Fourier que se $m > 1$ e ímpar:

$$B_m(x) = 2(-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{m!}{(2\pi)^m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k^m},$$

para todo $x \in [0, 1]$.

Agora se m é par e $m \geq 4$ obtemos, usando as equações (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4).

$$\begin{aligned} a_k^m &= -\frac{m}{2\pi k} b_k^{m-1} \\ &= -\frac{m}{2\pi k} 2(-1)^{\frac{m}{2}} \frac{(m-1)!}{(2\pi k)^{m-1}} \\ &= 2(-1)^{\frac{m}{2}+1} \frac{m!}{(2\pi k)^m}, \end{aligned}$$

e

$$b_k^m = \frac{m}{2\pi k} a_k^{m-1} = \frac{m}{2\pi k} \cdot 0 = 0.$$

Se $m = 2$ temos pelas equações (3.1) e (3.2):

$$\begin{aligned} a_k^2 &= -\frac{2}{2\pi k} b_k^1 = -\frac{2}{2\pi k} \left(\frac{-1}{\pi k} \right) = \frac{2 \cdot 2!}{(2\pi k)^2} \\ b_k^2 &= \frac{2}{2\pi k} a_k^1 = 0. \end{aligned}$$

Em suma, se $m \geq 2$ e par temos:

$$\begin{aligned} a_k^m &= 2(-1)^{\frac{m}{2}+1} \frac{m!}{(2\pi k)^2}, \quad k \geq 1, \\ a_0^m &= 0. \\ b_k^m &= 0, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Como $B_m^p(x)$ é contínua e possui derivadas laterais em todos os pontos, temos pelo teorema de Fourier, que se $m \geq 2$ e par:

$$B_m(x) = 2(-1)^{\frac{m}{2}+1} \frac{m!}{(2\pi)^m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{k^m},$$

para todo $x \in [0, 1]$. □

Observação 1. Note que pelo item (iii) da proposição 3.1 obtemos para $n \geq 1$,

$$B_{2n+1} = B_{2n+1}(0) = 0.$$

Ou seja, todos os números de Bernoulli com índices ímpares são nulos, exceto o primeiro.

Nas figuras 3.1, 3.2 e 3.3 estão os gráficos de séries truncadas com 5 e 10 termos para alguns polinômios de Bernoulli.

É fácil verificar usando o teste da integral que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ converge se $x > 1$. Portanto, está bem definida a função $\zeta : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}. \quad (3.5)$$

Ela é chamada de **função zeta de Riemann**. Trata-se de uma das mais importantes funções da Matemática, pois possui diversas relações fundamentais com os números primos. De fato, a primeira conexão importante entre números primos e a função zeta foi descoberta por Euler e é apresentada no próximo teorema.

Teorema 3.2 (Euler). Para todo $s > 0$, temos que

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}. \quad (3.6)$$

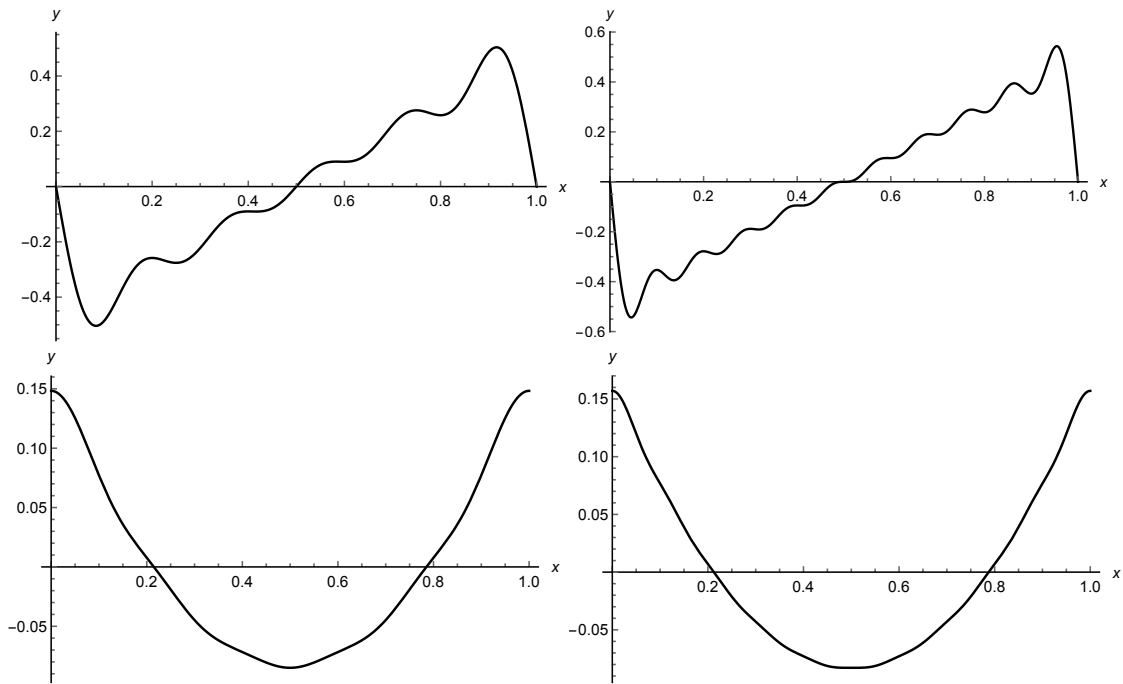


Figura 3.1: $B_1(x), B_2(x)$

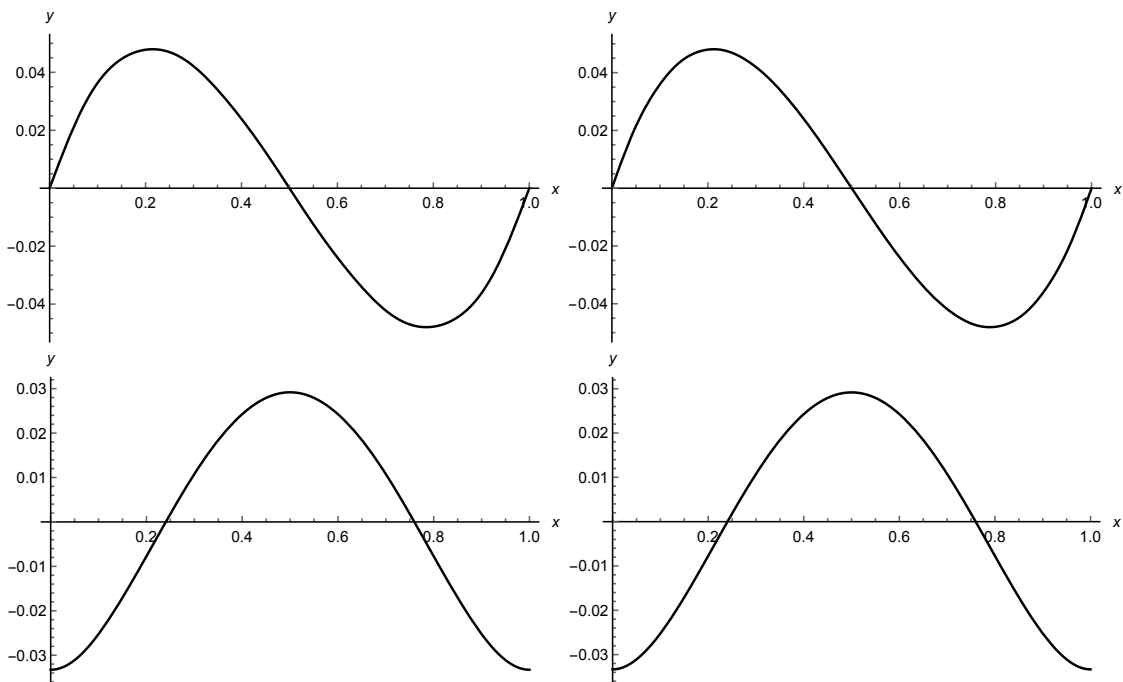


Figura 3.2: $B_3(x), B_4(x)$

Demonstração. Observe primeiro que

$$\zeta(s) \frac{1}{2^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s},$$

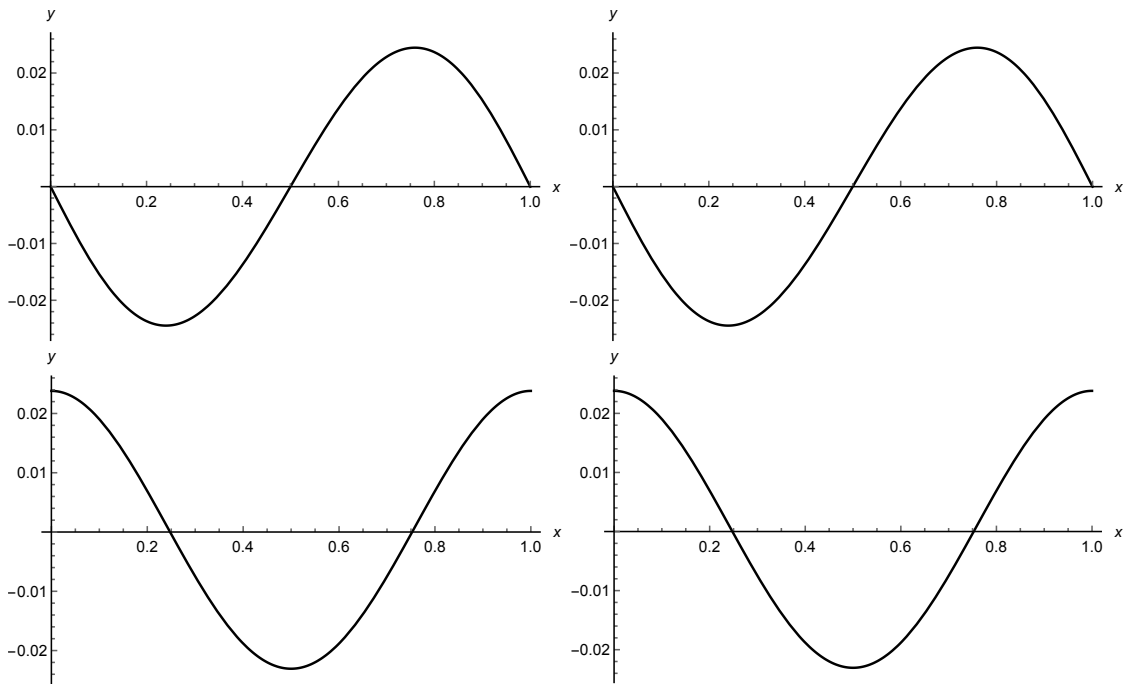


Figura 3.3: $B_5(x), B_6(x)$

de modo que

$$\zeta(s) - \frac{1}{2^s} \zeta(s) = \zeta(s) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s},$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Agora note que

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) - \frac{1}{3^s} \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s).$$

Ou seja, todos os múltiplos de 3 são removidos de $\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s)$. Logo,

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \sum_{\substack{n=1, \\ (n,6)=1}}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Na última somatória $(n, 6) = 1$ indica o mdc de n e 6. Quer dizer, todos os múltiplos de 2 e 3 não estão presentes no somatório. Assim, repetindo o mesmo argumento para todos os primos menores que um número x , verificamos que

$$\prod_{p < x} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{q^s} + \dots,$$

em que foram retirados todos os múltiplos dos primos menores do que x . Além disso, q é o

menor primo maior ou igual a x e é o menor termo depois de 1 presente no lado direito da equação. Portanto, tomando o limite de x tendendo ao infinito obtemos

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \zeta(s) = 1,$$

o que prova o teorema. □

Como uma consequência simples do último teorema temos o seguinte resultado bem conhecido.

Teorema 3.3. *Existem infinitos números primos.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que existe apenas um número finito de primos. Então, o produtório do lado direito do teorema de Euler envolve apenas um número finito de termos e, portanto, tem limite quando $s \rightarrow 1$. Porém, o lado esquerdo torna-se a série harmônica no limite quando $s \rightarrow 1$. Isso é uma contradição, já que, como sabemos, a série harmônica é divergente. Logo, existem infinitos números primos. □

O próximo resultado é muito interessante porque expressa o valor da função zeta nos números pares positivos em termos de números de Bernoulli. Podemos considerá-lo como a solução de uma generalização do Problema da Basileia (que era encontrar uma fórmula para $\zeta(2)$).

Proposição 3.4. *Seja m par e $m \geq 2$. Então*

$$\zeta(m) = (-1)^{\frac{m}{2}+1} \frac{1}{2} \frac{(2\pi)^m}{m!} B_m,$$

em que B_m é o m -ésimo número de Bernoulli.

Demonstração. De fato, usando (ii) da proposição 3.1 obtemos

$$\begin{aligned} B_m = B_m(0) &= 2(-1)^{\frac{m}{2}+1} \frac{m!}{(2\pi)^m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi k0)}{k^m} \\ &= 2(-1)^{\frac{m}{2}+1} \frac{m!}{(2\pi)^m} \zeta(m), \end{aligned}$$

de onde é claro o resultado. □

A última proposição nos permite provar algumas estimativas que serão úteis no estudo da expansão de Euler-Maclaurin.

$\zeta(2)$	$\zeta(4)$	$\zeta(6)$	$\zeta(8)$	$\zeta(10)$...
$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\pi^4}{90}$	$\frac{\pi^6}{945}$	$\frac{\pi^8}{9450}$	$\frac{\pi^{10}}{93555}$...

Tabela 3.1: Alguns valores de $\zeta(2k)$

Corolário 3.5. *Seja*

$$\mu_m = \sup_{x \in [0,1]} |B_m(x)|.$$

Então valem as seguintes estimativas:

$$(i) \mu_m \leq 4 \frac{m!}{(2\pi)^m} \quad \text{se } m \geq 1.$$

$$(ii) \mu_m = |B_m|, \quad \text{se } m \geq 2 \text{ e par.}$$

Demonstração. Se $m = 1$ então

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \leq \frac{4}{\pi} \frac{1}{2} = 4 \frac{1}{2\pi},$$

já que $\pi \leq 4$. Se $m \geq 2$, pela proposição 3.1, para cada $x \in [0, 1]$ temos

$$|B_m(x)| \leq 2 \frac{m!}{(2\pi)^m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m} = 2 \frac{m!}{(2\pi)^m} \zeta(m).$$

Logo,

$$\mu_m = \sup_{x \in [0,1]} |B_m(x)| \leq 2 \frac{m!}{(2\pi)^m} \zeta(m).$$

Por fim, vale a estimativa (i) porque se $m \geq 2$ então $\zeta(m) \leq 2$. De fato, temos

$$\zeta(m) - 1 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^m} \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{t^m} dt = \frac{1}{m-1} \leq 1,$$

em que a primeira desigualdade é válida porque $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^m}$ é uma soma inferior para a integral $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^m}$.

Para provar (ii) é suficiente notar que se $m \geq 2$ e par, então pela proposição 3.1 (ii) temos

$$2 \frac{m!}{(2\pi)^m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m} = |B_m(0)| = |B_m|.$$

□

Observação 2. Dada uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ limitada em um intervalo I . A **norma sup** de f em I

é definida por

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^\infty(I)} &= \sup\{|f(x)| : x \in I\} \\ &= \sup_{x \in I} |f(x)|.\end{aligned}$$

Algumas vezes escreve-se simplesmente $\|f\|_\infty$, se não houver risco de ambiguidade.

Assim, no corolário 3.5,

$$\mu_m = \|B_m(\cdot)\|_{L^\infty(I)} = \|B_m(\cdot)\|_\infty.$$

4 POLINÔMIOS DE BERNOULLI E SÉRIES DE POTÊNCIA

Neste capítulo estudamos séries de potência que geram os números e os polinômios de Bernoulli. A série geradora dos polinômios de Bernoulli nos permite provar, então, uma relação de simetria com respeito à reta $x = \frac{1}{2}$ obedecida por esses polinômios.

Proposição 4.1. *A série de potência*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

converge absolutamente se $x \in (-2\pi, 2\pi)$. Além disso, se $x \neq 0$ e $x \in (-2\pi, 2\pi)$, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = \frac{x}{e^x - 1}.$$

Demonstração. Note primeiro que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = 1 - \frac{1}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} x^{2n},$$

já que $B_{2n+1} = 0$ para $n \geq 1$.

Para determinar a convergência da série no intervalo $(-2\pi, 2\pi)$ vamos utilizar o teste da razão. Temos pela proposição 3.4,

$$\frac{\left| \frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right|}{\left| \frac{B_{2n}}{(2n)!} x^{2n} \right|} = \frac{\left| \frac{\zeta(2n+2)}{(2\pi)^{2n+2}} \right| |x|^2}{\left| \frac{\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}} \right|} = \frac{\zeta(2n+2)}{\zeta(2n)} \frac{|x|^2}{(2\pi)^2}.$$

Para calcular o limite quando $n \rightarrow \infty$ na expressão anterior, vamos mostrar que o limite $\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta(k)$ existe. De fato, é fácil ver que a sequência $(\zeta(k))$, $k = 2, 3, \dots$ é monótona decrescente. Também é fácil ver que $\zeta(k) > 1$, se $k > 1$. Portanto, $(\zeta(k))$ converge. Seja $1 \leq l = \lim_{k \rightarrow \infty} \zeta(k)$.

Então,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right|}{\left| \frac{B_{2n}}{(2n)!} x^{2n} \right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\zeta(2n+2)}{\zeta(2n)} \frac{|x|^2}{(2\pi)^2} = \frac{l \cdot |x|^2}{l \cdot (2\pi)^2} = \left(\frac{|x|}{2\pi} \right)^2$$

Pelo teste da razão, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$ converge para todo x tal que

$$\left(\frac{|x|}{2\pi} \right)^2 < 1,$$

ou seja, $|x| < 2\pi$.

Sabemos que a série

$$e^x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, pela teoria de séries de potência, no intervalo $(-2\pi, 2\pi)$ podemos multiplicar termo a termo as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n,$$

e, a série resultante converge também em $(-2\pi, 2\pi)$. Temos

$$\begin{aligned} (e^x - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{(m-k)! k!} B_k \right) x^m \\ &= x + \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} B_k \right) x^m \\ &= x, \end{aligned}$$

pela proposição 2.4. Logo, se $x \neq 0$ e $x \in (-2\pi, 2\pi)$, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = \frac{x}{e^x - 1}.$$

□

A última proposição pode ser estendida da seguinte forma.

Proposição 4.2. *Seja $t \in (-2\pi, 2\pi)$ e $t \neq 0$. Se x é um número real arbitrário temos*

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(x) \frac{t^m}{m!}.$$

Demonstração. Seja $F(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(x) \frac{t^m}{m!}$. Derivando em relação a x esta função e fazendo uso da proposição 2.1 obtemos,

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} m B_{m-1}(x) \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} B_{m-1}(x) \frac{t^m}{(m-1)!} = tF(x, t).$$

Ou seja, $\frac{\partial}{\partial x} F(x, t) = tF(x, t)$. Isto implica que $\frac{\partial}{\partial x} (F(x, t)e^{-xt}) = 0$ e, portanto, $F(x, t)e^{-xt} = T(t)$, para alguma função T que depende apenas de t . Logo,

$$\int_0^1 F(x, t) dx = \int_0^1 T(t)e^{xt} dx = T(t) \frac{e^t - 1}{t}.$$

Por outro lado,

$$\int_0^1 F(x, t) dx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \int_0^1 B_m(x) dx = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \int_0^1 B_m(x) dx = 1.$$

Assim, $T(t) = \frac{t}{e^t - 1}$, de modo que

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_m(x) \frac{t^m}{m!} = F(x, t) = \frac{te^{xt}}{e^t - 1}.$$

□

A proposição 4.2 nos permite provar a seguinte relação de simetria dos polinômios de Bernoulli com respeito à reta $x = \frac{1}{2}$.

Proposição 4.3. *Para todo x real,*

$$B_m(1-x) = (-1)^m B_m(x).$$

Demonstração. Pela proposição 4.2, temos

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_m(1-x) \frac{t^m}{m!} = \frac{te^{(1-x)t}}{e^t - 1} = (-t) \frac{e^{(-t)x}}{e^{-t} - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(x) \frac{(-t)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m B_m(x) \frac{t^m}{m!}.$$

Comparando os coeficientes da primeira e da última série na expressão acima obtemos a proposição.

□

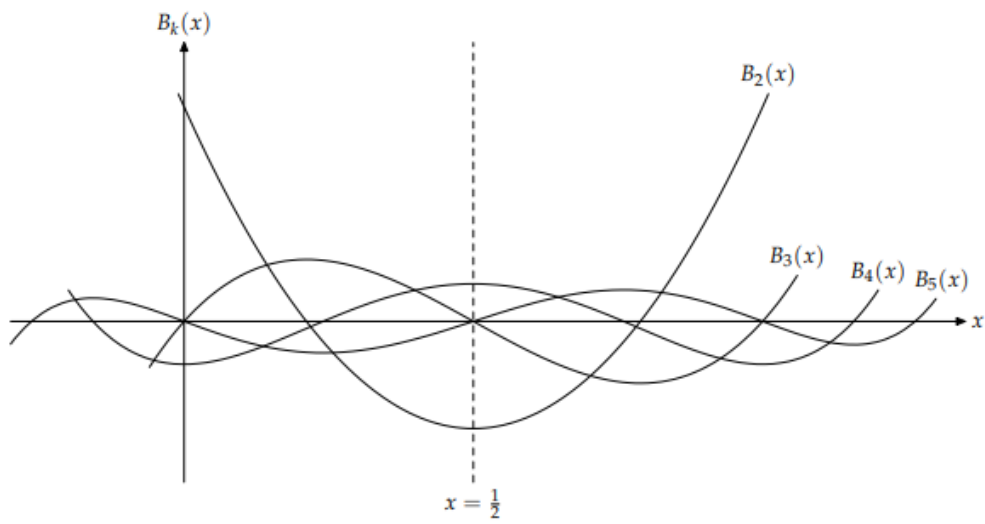


Figura 4.1: Simetria dos Polinômios de Bernoulli

5 A EXPANSÃO DE EULER-MACLAURIN DE ORDEM m

Neste capítulo utilizamos vários resultados dos capítulos anteriores para definir e provar a célebre expansão de Euler-Maclaurin. A seguir, ela é empregada em várias aplicações interessantes. Por último, apresentamos um raciocínio heurístico devido a Lagrange que justifica de forma intuitiva a fórmula de Euler-Maclaurin.

Se m é um número natural dizemos que uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^m no intervalo $[a, b]$ se for m vezes diferenciável e a derivada de ordem m for contínua.

Definição 5.1. *Seja m um inteiro positivo. Se f é uma função de classe C^{m-1} no intervalo $[a, b]$, sendo $a, b \in \mathbb{N}$, então a **expansão de Euler-Maclaurin de ordem m** de f em $[a, b]$ é definida por*

$$EM_m(f; [a, b]) = \int_a^b f(x) dx + \sum_{i=1}^m \frac{B_i}{i!} [f^{i-1}(x)]_a^b$$

Exemplo 5.2. *A expansão de Euler-Maclaurin $EM_8(f; [a, b])$ de ordem 8 de uma função definida no intervalo $[a, b]$, com $a, b \in \mathbb{N}$, é dada por*

$$\begin{aligned} EM_8(f; [a, b]) &= \int_a^b f(x) dx + \sum_{i=1}^8 \frac{B_i}{i!} [f^{i-1}(x)]_a^b = \\ &= \int_a^b f(x) dx + \left[-\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{12}f'(x) - \frac{1}{720}f^{(3)}(x) + \frac{1}{30240}f^{(5)}(x) - \frac{1}{1209600}f^{(7)}(x) \right]_a^b \end{aligned}$$

Observação 3. *Note que na expansão de Euler-Maclaurin de ordem m de uma função aparecem apenas as derivadas de f até a ordem $m - 1$ e os números de Bernoulli B_1, B_2, \dots, B_m . Além disso, para cada $l \geq 1$, a expansão de Euler-Maclaurin de ordem $2l$ de uma função coincide com sua expansão de Euler-Maclaurin de ordem $2l + 1$, pois $B_{2l+1} = 0$.*

Teorema 5.3 (Fórmula de Euler-Maclaurin de Ordem m). *Sejam a, b e m números naturais tais que $a < b$ e $m \geq 1$. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^m , então*

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a \leq k < b \\ k \in \mathbb{N}}} f(k) &= \int_a^b f(x) dx + \sum_{i=1}^m \frac{B_i}{i!} [f^{i-1}(x)]_a^b + R_m \\ &= EM_m(f; [a, b]) + R_m, \end{aligned}$$

sendo o resto de ordem m , R_m , dado por

$$R_m = \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_a^b B_m(x - [x]) f^{(m)}(x) dx.$$

Além disso, valem as seguintes estimativas para o resto

$$\begin{aligned} |R_m| &\leq \frac{\mu_m}{m!} \int_a^b |f^{(m)}(x)| dx \\ &\leq \frac{\mu_m}{m!} (b-a) \|f^{(m)}(x)\|_\infty \\ &\leq \frac{4(b-a)}{m!(2\pi)^m} \|f^{(m)}(x)\|_\infty. \end{aligned}$$

Para provar o teorema vamos fazer o uso do seguinte lema.

Lema 5.4. *Seja $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^m , $m \geq 1$. Então,*

$$\int_0^1 g(x) dx = \frac{g(0) + g(1)}{2} - \sum_{i=2}^m (-1)^i \frac{B_i}{i!} \left[g^{(i-1)}(x) \right]_0^1 + (-1)^m \int_0^1 g^{(m)}(x) \frac{B_m(x)}{m!} dx. \quad (5.1)$$

Demonstração. (Por Indução) Como $B_1'(x) = 1$, usando integração por partes obtemos

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 g(x) B_1'(x) dx = [g(x) B_1(x)]_0^1 - \int_0^1 g'(x) B_1(x) dx.$$

Já que $B_1(0) = -\frac{1}{2} = B_1$ e $B_1(1) = -B_1$, temos

$$\int_0^1 g(x) dx = \frac{g(0) + g(1)}{2} - \int_0^1 g'(x) B_1(x) dx,$$

o que prova a equação (5.1) no caso base da indução.

Suponhamos agora por indução que vale o lema 5.1 no caso n , com $1 \leq n < m$, ou seja,

$$\int_0^1 g(x) dx = \frac{g(0) + g(1)}{2} - \sum_{i=2}^n (-1)^i \frac{B_i}{i!} \left[g^{(i-1)}(x) \right]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 g^{(n)}(x) \frac{B_n(x)}{n!} dx. \quad (5.2)$$

Queremos então provar o caso $n+1$. Com efeito, usando a proposição 2.1 (i) e integração por partes obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 g^{(n)}(x) \frac{B_n(x)}{n!} dx &= \int_0^1 g^{(n)}(x) \frac{B_{n+1}'(x)}{(n+1)n!} dx \\ &= \left[g^{(n)}(x) \frac{B_{n+1}(x)}{(n+1)n!} \right]_0^1 - \int_0^1 g^{(n+1)}(x) \frac{B_{n+1}(x)}{(n+1)!} dx. \end{aligned}$$

Daí, inserindo esta expressão em (5.2), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(x)dx &= \frac{g(0)+g(1)}{2} - \sum_{i=2}^n (-1)^i \frac{B_i}{i!} \left[g^{(i-1)}(x) \right]_0^1 + \\ &+ (-1)^n \frac{B_{n+1}(x)}{(n+1)n!} \left[g^{(n)}(x) \right]_0^1 + (-1)^{n+1} \int_0^1 g^{(n+1)}(x) \frac{B_{n+1}(x)}{(n+1)!} dx \\ &= \frac{g(0)+g(1)}{2} - \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^i \frac{B_i}{i!} \left[g^{(i-1)}(x) \right]_0^1 + (-1)^{n+1} \int_0^1 g^{(n+1)}(x) \frac{B_{n+1}(x)}{(n+1)!} dx. \end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio de indução matemática, o lema está provado. \square

Demonstração do Teorema 5.3. Tomando $g(x) = f(x+k)$, para $k = a, \dots, b-1$, no lema 5.4, e levando em conta que $B_m = 0$ se $m \geq 3$ e ímpar, obtemos

$$\frac{f(k)+f(k+1)}{2} = \int_k^{k+1} f(x)dx + \sum_{i=2}^m \frac{B_i}{i!} \left[g^{(i-1)}(x) \right]_k^{k+1} - (-1)^m \int_k^{k+1} g^{(m)}(x) \frac{B_m(x-k)}{m!} dx.$$

Somando em k ambos os lados da última equação, de k igual a a até $b-1$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{f(a)}{2} + \sum_{k=a+1}^{b-1} f(k) + \frac{f(b)}{2} &= \\ &= \int_a^b f(x)dx + \sum_{i=2}^m \frac{B_i}{i!} \left[f^{(i-1)}(x) \right]_a^b - (-1)^m \int_a^b f^{(m)}(x) \frac{B_m(x-[x])}{m!} dx, \end{aligned}$$

em que $[x]$ denota o maior inteiro menor ou igual a x . Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{a \leq x < b} f(x) &= \\ \frac{f(a)}{2} - \frac{f(b)}{2} + \int_a^b f(x)dx + \sum_{i=2}^m \frac{B_i}{i!} \left[f^{(i-1)}(x) \right]_a^b - (-1)^m \frac{1}{m!} \int_a^b f^{(m)}(x) B_m(x-[x]) dx. \end{aligned}$$

Já que $B_1 = -\frac{1}{2}$, a última equação é equivalente à fórmula de Euler-Maclaurin. As estimativas de erro são óbvias. \square

Exemplo 5.5. Se $f(x) = x^2$, então $f'(x) = 2x$, e $f''(x) = 2$ e $f^{(i)}(x) = 0$, se $i \geq 3$. Portanto,

$R_3 = 0$ e temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq k < n} f(k) &= \int_1^n x^2 dx + \sum_{i=1}^2 \frac{B_i}{i!} [f^{(i-1)}(x)]_1^n \\
 &= \int_1^n x^2 dx + \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{1!} [x^2]_1^n + \frac{1}{6} \frac{1}{2!} [2x]_1^n \\
 &= \left[\frac{x^3}{2}\right]_1^n - \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{n}{6} - \frac{1}{6} \\
 &= \frac{n^3}{2} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.
 \end{aligned}$$

De forma mais geral, se f é uma função polinomial de grau menor ou igual a m , então a derivada de ordem $(m+1)$ de f é zero, e assim o resto R_{m+1} na fórmula de Euler-Maclaurin é igual a 0.

Corolário 5.6. *Seja f uma função polinomial de grau $m \geq 1$. Então*

$$\sum_{a \leq k < b} f(k) = EM_{m+1}(f; [a, b]) = \int_a^b f(x) dx + \sum_{i=1}^m \frac{B_i}{i!} [f^{(i-1)}(x)]_a^b.$$

Corolário 5.7 (Fórmula de Faulhaber). *Seja $n \in \mathbb{N}$. Para cada $m \geq 1$ temos*

$$\sum_{0 \leq k < n} k^m = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m \binom{m+1}{i} B_i n^{m+1-i}.$$

Demonstração. De fato, se $f(x) = x^m$, para cada inteiro $1 \leq i \leq m$ temos

$$\begin{aligned}
 f^{(i-1)}(x) &= m(m-1) \cdots (m-i+2) x^{m-i+1} \\
 &= \frac{1}{m+1} \frac{(m+1)!}{(m+1-i)!} x^{m-i+1}.
 \end{aligned}$$

Logo, pelo corolário 5.6

$$\begin{aligned}
 \sum_{0 \leq k < n} f(k) &= \int_0^n x^m dx + \sum_{i=1}^m \frac{B_i}{i!} [f^{(i-1)}(x)]_0^n \\
 &= \frac{1}{m+1} n^{m+1} + \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^m \binom{m+1}{i} B_i n^{m+1-i} \\
 &= \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m \binom{m+1}{i} B_i n^{m+1-i}.
 \end{aligned}$$

□

A seguir temos alguns exemplos da aplicação da Fórmula de Faulhaber.

Exemplo 5.8. Para $m=1$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{0 \leq k < n} k^1 &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 \binom{2}{i} B_i n^{2-i} = \frac{1}{2} \left(\binom{2}{0} B_0 n^2 + \binom{2}{1} B_1 n^1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 \cdot 1 \cdot n^2 + 2 \cdot \frac{-1}{2} n^1 \right) = \frac{1}{2} (n^2 - n) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}.\end{aligned}$$

Exemplo 5.9. Para $m=2$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{0 \leq k < n} k^2 &= \frac{1}{3} \sum_{i=0}^2 \binom{3}{i} B_i n^{3-i} = \frac{1}{3} \left(\binom{3}{0} B_0 n^3 + \binom{3}{1} B_1 n^2 + \binom{3}{2} B_2 n^1 \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 \cdot 1 \cdot n^3 + 3 \cdot \frac{-1}{2} n^2 + 3 \cdot \frac{1}{6} n^1 \right) = \frac{1}{3} \left(n^3 - n \frac{3n^2}{2} + \frac{n}{2} \right) = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.\end{aligned}$$

Exemplo 5.10. Para $m=3$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{0 \leq k < n} k^3 &= \frac{1}{4} \sum_{i=0}^3 \binom{4}{i} B_i n^{4-i} \\ &= \frac{1}{4} \left(\binom{4}{0} B_0 n^4 + \binom{4}{1} B_1 n^3 + \binom{4}{2} B_2 n^2 + \binom{4}{3} B_3 n^1 \right) \\ &= \frac{1}{4} (n^4 + 2n^3 + n^2) = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}.\end{aligned}$$

Exemplo 5.11. Para $m=4$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{0 \leq k < n} k^4 &= \frac{1}{5} \sum_{i=0}^4 \binom{5}{i} B_i n^{5-i} \\ &= \frac{1}{5} \left(\binom{5}{0} B_0 n^5 + \binom{5}{1} B_1 n^4 + \binom{5}{2} B_2 n^3 + \binom{5}{3} B_3 n^2 + \binom{5}{4} B_4 n^1 \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(n^5 + \frac{5n^4}{2} + \frac{10n^3}{6} - \frac{n}{6} \right) = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}.\end{aligned}$$

Exemplo 5.12. Para $m=5$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{0 \leq k < n} k^5 &= \frac{1}{6} \sum_{i=0}^5 \binom{6}{i} B_i n^{6-i} \\ &= \frac{1}{6} \left(\binom{6}{0} B_0 n^6 + \binom{6}{1} B_1 n^5 + \binom{6}{2} B_2 n^4 + \binom{6}{3} B_3 n^3 + \binom{6}{4} B_4 n^2 + \binom{6}{5} B_5 n^1 \right) \\ &= \frac{1}{6} \left(n^6 + 3n^5 + \frac{5n^4}{2} - \frac{n^2}{2} \right) = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}.\end{aligned}$$

O próximo corolário estende a expansão de Euler-Maclaurin para intervalos de comprimento infinito.

Corolário 5.13. Seja $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^m , com $m \geq 1$ e $a \in \mathbb{N}$. Se $N, n \in \mathbb{N}$ e $a \leq n \leq N$,

temos

$$\sum_{a \leq k < N} f(k) = \sum_{a \leq k < n} f(k) + \int_n^N f(x) dx + \sum_{i=1}^m \frac{B_i}{i!} [f^{(i-1)}(x)]_n^N + E_m(n, N),$$

sendo

$$E_m(n, N) = \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_n^N B_m(x - [x]) f^{(m)}(x) dx$$

e

$$|E_m(n, N)| \leq \frac{\mu_m}{m!} \int_n^N |f^{(m)}(x)| dx \leq \frac{\mu_m}{m!} \int_n^\infty |f^{(m)}(x)| dx,$$

com $\mu_m = \|B_m(\cdot)\|_{L^\infty([0,1])}$.

Demonstração. Basta aplicar a fórmula de Euler-Maclaurin para a soma

$$\sum_{n \leq k < N} f(k) = \sum_{a \leq k < N} f(k) - \sum_{a \leq k < n} f(k).$$

□

Definição 5.14. Seja $f \in C^\infty([a, b])$, com $a, b \in \mathbb{N}$. A série de Euler-Maclaurin de f em $[a, b]$ é:

$$EM_\infty(f; [a, b]) = \int_a^b f(x) dx + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i}{i!} [f^{(i-1)}(x)]_a^b.$$

Para a aplicação da série de Euler-Maclaurin devemos sempre levar em conta as estimativas de resto que estudamos anteriormente.

Passamos agora a apresentar um argumento intuitivo e não rigoroso devido a Lagrange sobre a validade da fórmula de Euler-Maclaurin. A ideia central do argumento é pensar no operador de diferenças Δ como sendo o inverso (à esquerda) do operador de soma Σ , assim como o operador derivação D é o inverso (à esquerda) do operador integral indefinida \int . (Para uma discussão mais detalhada sobre o Cálculo de Diferenças Finitas veja (KONDO, 2014)).

Considere a série de Taylor de uma função f dada por

$$f(n+1) = f(n) + f'(n) + \frac{f''(n)}{2!} + \frac{f'''(n)}{3!} + \dots$$

Já que $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$, temos

$$\Delta f(n) = (D/1! + D^2/2! + D^3/3! + \dots) f(n) = (e^D - 1) f(n),$$

sendo por definição

$$e^D = 1 + D/1! + D^2/2! + D^3/3! + \dots$$

Assim, $\Delta = e^D - 1$ e Σ é o inverso de $e^D - 1$. Agora, pela proposição 4.1,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = \frac{x}{e^x - 1},$$

de modo que

$$D\Sigma = \frac{D}{e^D - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} D^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} D^n.$$

Já que $D^{-1} = \int$ temos

$$\Sigma = \frac{1}{D} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} D^{n-1} = \int + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} D^{n-1},$$

do qual se segue que

$$\sum_{a \leq n \leq b} f(x) = \int_a^b f(x) dx + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i}{i!} [f^{i-1}(x)]_a^b.$$

6 A FUNÇÃO TETA

Neste capítulo temos como metas definir a função teta de Jacobi e provar a lei de simetria que ela obedece. Nossa demonstração dessa lei fará uso da expansão de Euler-Maclaurin. Para obter essa demonstração, provaremos antes alguns resultados auxiliares que também serão importantes mais adiante.

Lema 6.1. *Sejam $u, a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$. Então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-iux} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{u^2}{4a}}.$$

Demonstração. Seja

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-av^2} dv.$$

Então

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-av^2} dv \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2} du \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(v^2+u^2)} dudv. \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares (r, θ) , com $u = r \cos(\theta)$ e $v = r \sin(\theta)$, obtemos

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} re^{-ar^2} dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} re^{-ar^2} dr = 2\pi \left[\frac{e^{-ar^2}}{-2a} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{a}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-av^2} dv = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Se α é um número real,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-\alpha x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2 + \frac{\alpha}{a}x)} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x + \frac{\alpha}{2a})^2} e^{\frac{\alpha^2}{4a}} dx \\
 &= e^{\frac{\alpha^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x + \frac{\alpha}{2a})^2} dx \\
 &= e^{\frac{\alpha^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-av^2} dv \quad (\text{Mudança de variável } v = x + \frac{\alpha}{2a}) \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{\alpha^2}{4a}}.
 \end{aligned}$$

Ou seja, verificamos que para todo número real α ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-\alpha x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{\alpha^2}{4a}}.$$

A fórmula do enunciado do lema é obtida quando trocamos α por iu , o que é justificado usando o procedimento de continuação analítica¹ da Teoria de Análise Complexa. \square

Lema 6.2. *Sejam $a, u \in \mathbb{R}$ com $a > 0$. Então, para $k \in \mathbb{R}$*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos(2\pi kx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2 k^2}{a}}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos(2\pi kx) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \frac{e^{2\pi kxi} + e^{-2\pi kxi}}{2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{2\pi kxi} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-2\pi kxi} dx \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{(-2\pi k)^2}{4a}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{(+2\pi k)^2}{4a}} \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2 k^2}{a}}.
 \end{aligned}$$

\square

Para cada $t > 0$, definimos $g_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g_t(x) = e^{-\pi t x^2}.$$

¹Para maiores detalhes sobre o procedimento de continuação analítica consultar (AVILA, 2008, p.179).

Se N é um inteiro positivo, a fórmula de Euler-Maclaurin de ordem 1, nos dá

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} g_t(x) &= \int_0^N g_t(x) dx + B_1[g_t(x)]_1^N + \int_0^N B_1(x - [x])g'_t(x) dx \\ &= \int_0^N g_t(x) dx + \frac{g(0) - g(1)}{2} + \int_0^N B_1(x - [x])g'_t(x) dx\end{aligned}$$

Mas pela proposição 3.1(i), temos

$$B_1(x - [x]) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k},$$

para todo $x \notin \mathbb{Z}$. Logo, multiplicando por $g'_t(x)$ e integrando termo a termo,

$$\begin{aligned}\int_0^N B_1(x - [x])g'_t(x) dx &= \int_0^N \left(-\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k} \right) g'_t(x) dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^N \sin(2\pi kx) g'_t(x) dx.\end{aligned}$$

Agora, por integração por partes

$$\begin{aligned}\int_0^N \sin(2\pi kx) g'_t(x) dx &= [\sin(2\pi kx) g_t(x)]_0^N - \int_0^N (2\pi k) \cos(2\pi kx) g_t(x) dx \\ &= -(2\pi k) \int_0^N \cos(2\pi kx) g_t(x) dx.\end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{k=0}^{N-1} g_t(k) = \int_0^N g_t(x) dx + \frac{g_t(0) - g_t(N)}{2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^N \cos(2\pi kx) g_t(x) dx.$$

Tomando o limite quando $N \rightarrow \infty$ na última equações obtemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_t(x) = \int_0^{\infty} g_t(x) dx + \frac{1}{2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \cos(2\pi kx) g_t(x) dx,$$

já que $g_t(0) = 1$ e $\lim_{N \rightarrow \infty} g_t(N) = 0$.

Pelo lema 6.2,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} g_t(x) dx &= \int_0^{\infty} e^{-\pi t x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t x^2} dx \quad (\text{já que } g_t \text{ é par.}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{t}}.\end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \cos(2\pi kx) g_t(x) dx &= \int_0^{\infty} \cos(2\pi kx) e^{-\pi t x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi kx) e^{-\pi t x^2} dx \quad (\text{já que o integrando é par}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi k^2}{t}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} g_t(k) &= \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi k^2}{t}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=1}^{\infty} g_{\frac{1}{t}}(k). \end{aligned}$$

Ou seja, vale a seguinte identidade:

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_t(k) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=1}^{\infty} g_{\frac{1}{t}}(k), \quad (6.1)$$

já que $g_t(0) = 1$.

Definimos agora a **função teta** $\Theta : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Theta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_t(k). \quad (6.2)$$

A lei de simetria da função teta é apresentada no próximo teorema.

Teorema 6.3. Para todo $t > 0$,

$$\Theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \Theta(1/t).$$

Demonstração. Já que g_t é par, temos

$$\Theta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_t(k) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} g_t(k).$$

Portanto, fazendo uso da identidade 6.1,

$$\begin{aligned} \Theta(t) &= 1 + 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=1}^{\infty} g_{\frac{1}{t}}(k) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} g_{\frac{1}{t}}(k) \right) = \frac{1}{\sqrt{t}} \Theta\left(\frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

□

7 A FUNÇÃO GAMA

Neste capítulo estudaremos outra função especial célebre – a função gama. Inicialmente, ela será definida com domínio real e mostraremos que ela é uma extensão da função fatorial. Posteriormente, será possível estendê-la ao domínio complexo e encontrar uma fórmula que relaciona as funções gama, zeta e os números de Bernoulli.

Para todo número real $s > 0$, Euler definiu a **função gama** Γ , como segue

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt. \quad (7.1)$$

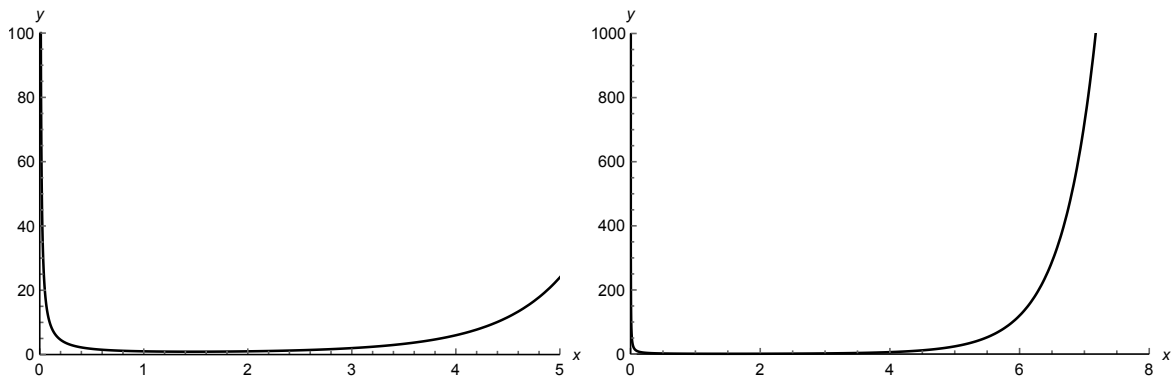


Figura 7.1: Gráfico da função $\Gamma(s)$, para $s > 0$

Como se trata de uma integral imprópria, devemos estudar sua convergência para verificar que a função está bem definida.

Primeiro observe que se $t > 0$, então todo termo da série

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$$

é positivo. Logo, para todo inteiro positivo n ,

$$\frac{t^n}{n!} < e^t,$$

ou ainda,

$$e^{-t} < \frac{n!}{t^n}.$$

Agora, para s fixo e $n > s$, temos

$$\begin{aligned} \int_1^\infty e^{-t} t^{s-1} dt &< n! \int_1^\infty t^{s-n-1} dt \\ &= n! \frac{t^{s-n}}{s-n} \Big|_1^\infty = n! \frac{1}{n-s}. \end{aligned}$$

Note que s pode ser menor ou igual a 0. Portanto,

$$\int_1^\infty e^{-t} t^{s-1} dt,$$

converge, usando o teste de comparação para integrais.

Para $t > 0$, temos $e^t > 1$. Logo,

$$e^{-t} t^{s-1} < t^{s-1},$$

de modo que

$$\int_0^1 e^{-t} t^{s-1} dt < \int_0^1 t^{s-1} dt = \frac{t^s}{s} \Big|_0^1 = \frac{1}{s}.$$

Ou seja,

$$\int_0^1 e^{-t} t^{s-1} dt,$$

converge se $s > 0$, pelo teste de comparação de integrais.

Com isso, podemos afirmar que

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{s-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{s-1} dt,$$

converge para todo $s > 0$.

Lema 7.1. Para todo $s > 0$,

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Demonstração. De fato, usando integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma(s+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s dt = \frac{e^{-t} t^s}{-1} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(-1)} s t^{s-1} dt \\ &= s \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt = s\Gamma(s), \end{aligned}$$

em que usamos o fato de que para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} t^s = 0.$$

□

Note que,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1.$$

Daí, usando o lema 7.1,

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1,$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1 = 2!,$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3.2! = 3!.$$

Mais geralmente, é fácil verificar que

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

para todo inteiro positivo n . Assim, a função gama de Euler estende a função fatorial para além dos números naturais.

Proposição 7.2.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Demonstração. Pela definição da função gama,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{1/2-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt.$$

Daí, fazendo uso da mudança de variável $t = v^2$, obtemos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-v^2} \frac{1}{v} 2v dv = 2 \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi},$$

pelo lema 6.1. □

Exemplo 7.3. Calcular $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Logo, $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$.

Proposição 7.4. *Valem as igualdades*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-4)^n n!}{(2n)!} \sqrt{\pi} \quad e \quad \Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}.$$

Demonstração. Indução sobre n .

Para $n = 1$, temos

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

pela proposição 7.2. Suponhamos por indução que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2} + (n+1)\right) &= \left(\frac{1}{2} + n\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) \\ &= \left(\frac{2n+1}{2}\right) \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{2n+2}{2(n+1)} \left(\frac{2n+1}{2}\right) \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2(n+1))!}{4^{n+1} (n+1)!} \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

o que prova a primeira fórmula pelo princípio de indução matemática. A segunda fórmula também pode ser provada da mesma forma usando indução matemática. Outra maneira de prová-la, entretanto, é fazer uso da Fórmula de reflexão de Euler (OLIVEIRA, 2013, p.32) que afirma que, para x não inteiro, temos

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(x\pi)}.$$

De fato, fazendo $x = n + 1/2$ nesta relação obtemos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{\pi}{\sin((n+1/2)\pi)},$$

de modo que usando a primeira fórmula obtemos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{\pi}{(-1)^n} \frac{4^n n!}{(2n)! \sqrt{\pi}} = \frac{(-4)^n n!}{(2n)!} \sqrt{\pi}.$$

□

Lema 7.5. *Para todo número real $s > 0$, temos*

$$\Gamma(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{s+k} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt. \quad (7.2)$$

Demonstração. Primeiro note que

$$e^{-t}t^{s-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} t^{s-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{s+k-1}.$$

Além disso, é claro que a série acima converge absolutamente, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Agora, usando integração termo a termo, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-t}t^{s-1} dt &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} t^{s-1} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{s+k-1} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{t^{s+k}}{s+k} \Big|_0^1 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{s+k}. \end{aligned}$$

A integração termo a termo é possível porque a série converge absolutamente. Por fim, temos

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \int_0^{\infty} e^{-t}t^{s-1} dt = \int_0^1 e^{-t}t^{s-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t}t^{s-1} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{s+k} + \int_1^{\infty} e^{-t}t^{s-1} dt. \end{aligned}$$

□

Vamos agora usar o lema 7.5 para estender a função gama $\Gamma(s)$, para valores complexos de s . Em primeiro lugar, note que

$$\int_1^{\infty} e^{-t}t^{s-1} dt$$

converge para todo número complexo s . De fato,

$$|e^{-t}t^{s-1}| = e^{-t} |e^{(s-1)\log(t)}| = e^{-t} e^{(\Re(s)-1)\log(t)} = e^{-t} t^{\Re(s)-1},$$

e daí,

$$\int_1^{\infty} |e^{-t}t^{s-1}| dt = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{\Re(s)-1} dt < \infty.$$

Ou seja, para todo $s \in \mathbb{C}$,

$$\int_1^{\infty} e^{-t}t^{s-1} dt$$

converge absolutamente e, portanto, converge.

Por outro lado, para todo $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 0, -1, -2, \dots$, temos

$$\left| \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{s+k} \right| = \frac{1}{k!} \frac{1}{|s+k|} \leq \frac{1}{k!} \frac{1}{|s+k_0|},$$

em que $k_0 \in \mathbb{N}$ é tal que $|s+k_0| \leq |s+k|$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Daí, como $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e^1$ é convergente, segue-se do teste de comparação que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{s+k}$ converge absolutamente e, portanto, converge.

A equação (7.2) nos permite então definir $\Gamma(s)$ para todo $s \in \mathbb{C}$, exceto para $s = 0, -1, -2, \dots$. Além disso, o lema 7.5 garante que a nova definição concorda com a definição antiga quando s era um número real positivo. (Isso é mais um exemplo de aplicação do procedimento de continuação analítica¹ da Teoria de Análise Complexa).

A equação (7.2) também nos permite concluir de forma imediata o seguinte teorema.

Teorema 7.6. $\Gamma(s)$ tem um polo simples em $s = -k$ para $k = 0, 1, 2, \dots$, com resíduo $(-1)^k/k!$.

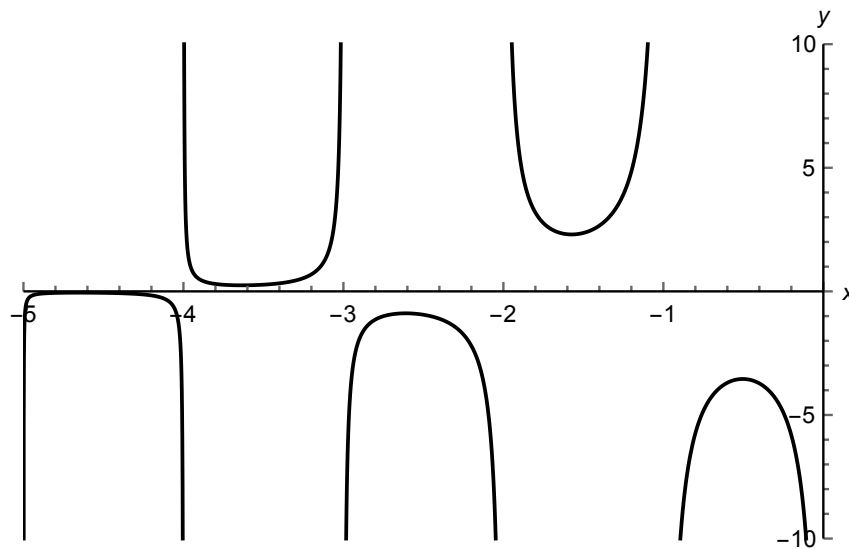


Figura 7.2: Função Gama para $s \in (-6, 0)$

Originalmente, definimos a função zeta de Riemann através de

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

para números reais $s > 1$. Entretanto, é fácil verificar que a mesma definição é possível se $s \in \mathbb{C}$ é tal que $\Re(s) > 1$.

Temos a seguinte relação entre as funções zeta, gama e os números de Bernoulli.

¹Para maiores detalhes sobre o procedimento de continuação analítica consultar (AVILA, 2008, p.179).

Teorema 7.7. Se $s \in \mathbb{C}$ é tal que $\Re(s) > 1$, então

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k!} \frac{1}{s+2k-1} + \int_1^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x-1} dx. \quad (7.3)$$

Demonstração. Seja n um inteiro positivo. Usando mudança de variável $u = nx$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx &= \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{u^{s-1}}{n^{s-1}} \frac{du}{n} \\ &= \frac{1}{n^s} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{s-1} du \\ &= \frac{1}{n^s} \Gamma(s). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\zeta(s) &= \Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(s) \frac{1}{n^s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx \\ &= \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} \right) dx \\ &= \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \right) x^{s-1} dx. \end{aligned}$$

Note que trocamos a ordem da somatória e da integral. Isso se justifica para $\Re(s) > 1$, pois a integral que define $\Gamma(s)$ para $\Re(s) > 1$ converge absolutamente. Agora, note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-x})^n = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{e^x-1},$$

já que se trata de uma série geométrica. Temos então

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x-1} x^{s-1} dx.$$

Pela proposição 4.2, se $x \in (-2\pi, 2\pi)$ e $x \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^x-1} &= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}, \end{aligned}$$

usando o fato que $B_{2k+1} = 0$ se $k \geq 1$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{e^x - 1} x^{s-1} dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1} \right) x^{s-1} dx \\ &= \int_0^1 \left(x^{s-2} - \frac{1}{2} x^{s-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k} x^{2k+s-2}}{(2k)!} \right) dx \\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \frac{1}{s+2k-1}, \end{aligned}$$

integrando termo a termo a somatória. Isso pode ser feito porque, como verificamos na proposição 4.2, a série em questão converge absolutamente.

Por fim, temos

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\zeta(s) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x - 1} x^{s-1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{e^x - 1} x^{s-1} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{e^x - 1} x^{s-1} dx \\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \frac{1}{s+2k-1} + \int_1^{\infty} \frac{1}{e^x - 1} x^{s-1} dx. \end{aligned}$$

□

Consideremos agora as funções

$$F(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \frac{1}{s+2k-1},$$

e

$$G(s) = \int_1^{\infty} \frac{1}{e^x - 1} x^{s-1} dx.$$

Pelo teorema 7.7, temos

$$\Gamma(s)\zeta(s) = F(s) + G(s),$$

sempre que $\Re(s) > 1$. Todavia, $G(s)$, como vimos, está definida para todo $s \in \mathbb{C}$. Já $F(s)$ está definida para todo $s \in \mathbb{C}$, exceto para $s = 0, 1$ ou qualquer inteiro negativo ímpar.

Agora, é possível verificar que $\Gamma(s) \neq 0$, para todo $s \in \mathbb{C}$ (OLIVEIRA, 2013, p. 31). Logo, podemos definir para todo $s \in \mathbb{C}$, exceto em $s = 0, 1$ ou inteiros negativos ímpares (ver figuras 7.3 e 7.4),

$$\zeta(s) = \frac{F(s) + G(s)}{\Gamma(s)}.$$

Essa definição concorda com a definição antiga de $\zeta(s)$ para $\Re(s) > 1$, em virtude do teorema

7.7.

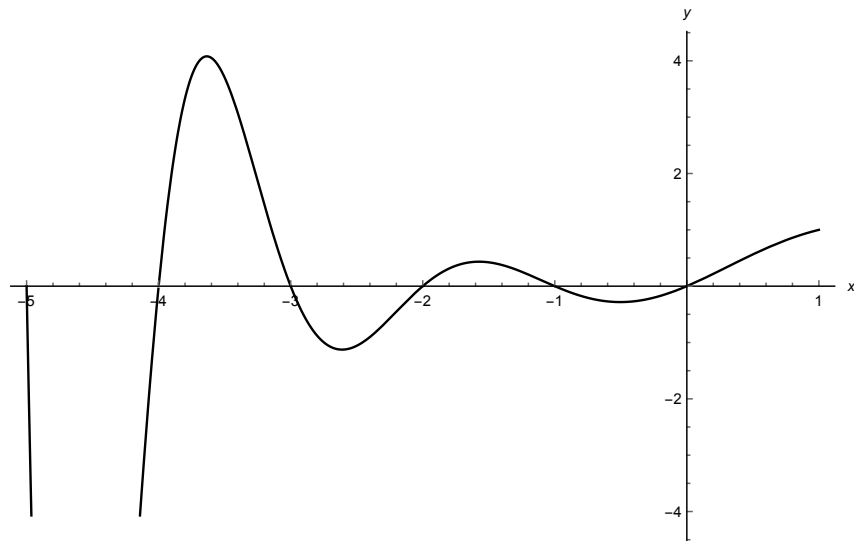


Figura 7.3: $1/\Gamma(s)$ para $s \in (-6, 0)$

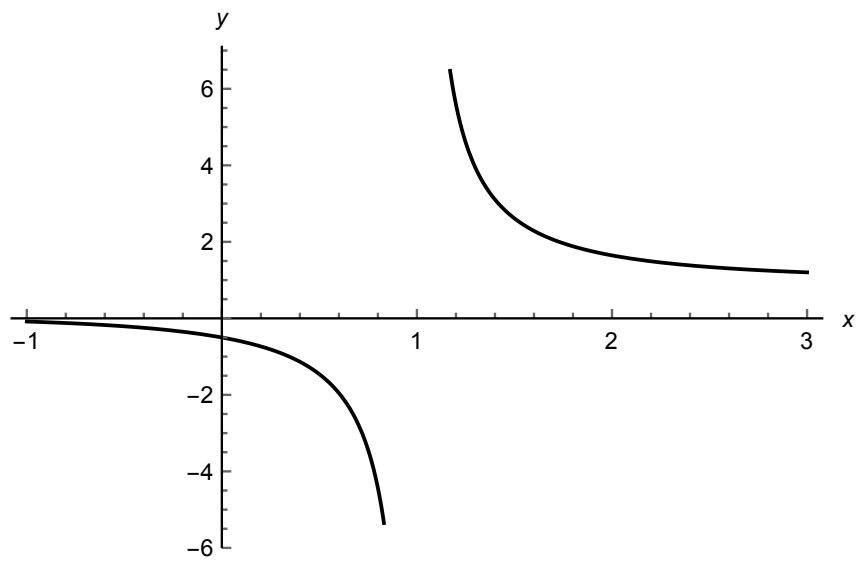


Figura 7.4: $\zeta(s)$ para $s \in (-1, 3)$

8 A EQUAÇÃO FUNCIONAL E OS NÚMEROS DE BERNOULLI

A função zeta de Riemann obedece a uma lei de simetria conhecida por equação funcional da função zeta. Ela foi conjecturada por Euler e provada por Riemann na forma mais geral em seu artigo seminal de 1859¹. Nesse artigo Riemann utilizou a equação funcional para estudar a distribuição dos números primos. Para prová-la faremos uso da equação funcional da função zeta. Depois disso extrairemos algumas consequências simples envolvendo valores da função zeta e os números de Bernoulli.

A equação funcional de Riemann é apresentada no próximo teorema.

Teorema 8.1. *Seja $\Lambda(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$, para $\Re(s) > 1$. Então, $\Lambda(s)$ possui uma extensão analítica a todo plano complexo, exceto nos polos em $s = 0$ e $s = 1$. Além disso, para todo s complexo temos*

$$\Lambda(1-s) = \Lambda(s). \quad (8.1)$$

Demonstração. Seja n um inteiro positivo. Usando a mudança de variáveis $u = \pi n^2 x$, obtemos a seguinte identidade

$$\begin{aligned} \frac{\pi^{-s/2}}{n^s} \Gamma(s/2) &= \frac{\pi^{-s/2}}{n^s} \int_0^\infty e^{-u} u^{s/2-1} du \\ &= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 x} x^{s/2} \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Vamos supor inicialmente que $\Re(s) > 1$. Daí, somando ambos os lados da identidade anterior para todo $n \geq 1$, obtemos

$$\Lambda(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\pi n^2 x} x^{s/2} \frac{dx}{x}.$$

Agora, como a integral converge absolutamente, conforme verificaremos no final da prova,

¹Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse - On the number of primes less than a given quantity - Sobre o número de números primos que não excedem uma grandeza dada.

podemos trocar a ordem do somatório e da integral e obter

$$\Lambda(s) = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x} x^{s/2} \frac{dx}{x} = \int_0^\infty f(x) x^{s/2} \frac{dx}{x},$$

com

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x} = \sum_{n=1}^\infty g_x(n).$$

Já que $\Theta(x) = 1 + 2f(x)$, podemos usar o teorema 6.3 (equação funcional da função zeta) para escrever

$$\begin{aligned} 1 + 2f(x) &= x^{-1/2}(1 + 2f(x^{-1})), \\ 2f(x) &= x^{-1/2} - 1 + 2x^{-1/2}f(x^{-1}), \\ f(x) &= \frac{1}{2}(x^{-1/2} - 1) + x^{-1/2}f(x^{-1}). \end{aligned}$$

Separando a integral que define $\Lambda(s)$ em uma soma de integrais nos intervalos $[0, 1]$ e $[1, \infty]$, e usando ??, obtemos

$$\Lambda(s) = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^{-1/2} - 1) x^{s/2} \frac{dx}{x} + \int_0^1 (x^{-1/2} f(x^{-1})) x^{s/2} \frac{dx}{x} + \int_1^\infty f(x) x^{s/2} \frac{dx}{x}.$$

A primeira integral é fácil de calcular:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (x^{s/2-3/2} - x^{s/2-1}) dx = \frac{x^{s/2-1/2}}{s-1} \Big|_0^1 - \frac{x^{s/2}}{s} \Big|_0^1 = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}.$$

Para a segunda integral, usamos a mudança de variáveis $v = 1/x$, de modo que $dv/v = -dx/x$, e quando $x \rightarrow 0$, $v \rightarrow \infty$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^{-1/2} f(x^{-1})) x^{s/2} \frac{dx}{x} &= - \int_\infty^1 v^{1/2} f(v) v^{-s/2} \frac{dv}{v} \\ &= \int_1^\infty v^{1/2} f(v) v^{-s/2} \frac{dv}{v} \\ &= \int_1^\infty f(x) x^{(1-s)/2} \frac{dx}{x}, \end{aligned}$$

sendo que na última linha trocamos v por x apenas por conveniência. Com isso verificamos que se $\Re(s) > 1$, então

$$\Lambda(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty f(x) (x^{(1-s)/2} + x^{s/2}) \frac{dx}{x}. \quad (8.2)$$

Agora vamos provar a convergência absoluta da integral $\int_0^\infty e^{-\pi n^2 x} x^{s/2} \frac{dx}{x}$ por duas

razões. Primeiro para justificar a mudança de ordem do somatório e da integral

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 x} x^{s/2} \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} f(x) x^{s/2} \frac{dx}{x}.$$

Segundo porque isso nos permitirá estender $\Lambda(s)$ a todo o plano complexo, exceto nos polos em $s = 0$ e $s = 1$.

Inicialmente, observe que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^{n^2} = t + O(t^4) \quad \text{para } t \rightarrow 0$$

converge absolutamente para $|t| < 1$ pelo teste da comparação com a série geométrica. Sendo $t = e^{-\pi x}$, vemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\pi x} + O(e^{-4\pi x}) \quad x \rightarrow \infty, \\ \Theta(x) &= 1 + O(e^{-\pi x}). \end{aligned}$$

Então, $\int_1^{\infty} |f(x) x^{s/2-1}| dx$ é finita porque $\int_1^{\infty} |e^{-\pi x} x^{s/2-1}| dx$ é finita.

Para a integral no intervalo $[0, 1]$, note que quando $x \rightarrow 0$ todos os termos da somatória de $f(x)$ tendem a 1, o que faz com que $f(x)$ tenda a infinito. Todavia, note que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\Theta(x) - 1}{2} = \frac{x^{-1/2} \theta(x^{-1}) - 1}{2} \\ &= \frac{x^{-1/2} (1 + O(e^{-\pi x^{-1}})) - 1}{2} \\ &\sim \frac{x^{-1/2}}{2} \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Agora, se $\Re(s) > 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 |x^{-1/2} x^{s/2-1}| dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^{\Re(s)/2-3/2} dx \\ &= \frac{x^{(\Re(s)-1)/2}}{s-1} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{s-1}, \end{aligned}$$

ou seja, esta integral é finita. Portanto, usando o teste de comparação podemos concluir que $\int_0^1 |f(x) x^{s/2-1}| dx$ é finita também. Observe que a integral imprópria não é finita para $\Re(s) < 1$, porque $\lim_{x \rightarrow 0} x^{(\Re(s)-1)/2} = \infty$ neste caso.

Agora usamos a fórmula 8.2 e o procedimento de continuação analítica² para estender $\Lambda(s)$ a todo o plano complexo, exceto nos polos em $s = 0$ e $s = 1$. Em 8.2 é evidente a simetria sob $s \rightarrow 1 - s$. \square

De forma mais explícita, a equação funcional da função zeta de Riemann é dada por

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{(s-1)/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s). \quad (8.3)$$

Queremos utilizá-la agora para encontrar outros valores da função zeta. Para tanto, lembremos que pela proposição 3.4,

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{1}{2} \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (8.4)$$

Teorema 8.2. *Se n é um inteiro positivo, então*

$$\zeta(-2n+1) = -\frac{B_{2n}}{2n}, \quad (8.5)$$

sendo B_{2n} o $2n$ -ésimo número de Bernoulli.

Demonstração.

Tomando $s = 2n$ na equação (8.3), obtemos

$$\pi^{-n} \Gamma(n) \zeta(2n) = \pi^{-(1-2n)/2} \Gamma\left(\frac{1-2n}{2}\right) \zeta(1-2n).$$

Agora, fazemos uso da identidade 8.4 e da proposição 7.4 na equação acima e obtemos

$$\begin{aligned} \pi^{-n+(1-2n)/2} (n-1)! \left((-1)^{n+1} \frac{1}{2} \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_{2n} \right) &= \left(\frac{(-4)^n n!}{(2n)!} \sqrt{\pi} \right) \zeta(1-2n) \\ \pi^{-n+1/2-n} \left((-1)^{n+1} \frac{1}{2} (2\pi)^{2n} B_{2n} \right) &= ((-1)^n (2)^{2n} n \sqrt{\pi}) \zeta(1-2n) \\ (-1) \frac{1}{2} B_{2n} &= n \zeta(1-2n) \\ \zeta(1-2n) &= -\frac{B_{2n}}{2n}. \end{aligned}$$

\square

Na tabela 8.1 apresentamos alguns valores de $\zeta(1-2n)$, para n inteiro positivo.

Teorema 8.3. *Se n é um inteiro positivo, então*

$$\zeta(-2n) = 0. \quad (8.6)$$

²Para maiores detalhes sobre o procedimento de continuação analítica consultar (AVILA, 2008, p.179).

$n:$	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10
$\zeta(n):$	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{120}$	0	$-\frac{1}{252}$	0	$\frac{1}{240}$	0	$-\frac{1}{132}$	0

Tabela 8.1: Valores de $\zeta(1-2n)$ para inteiros positivos n

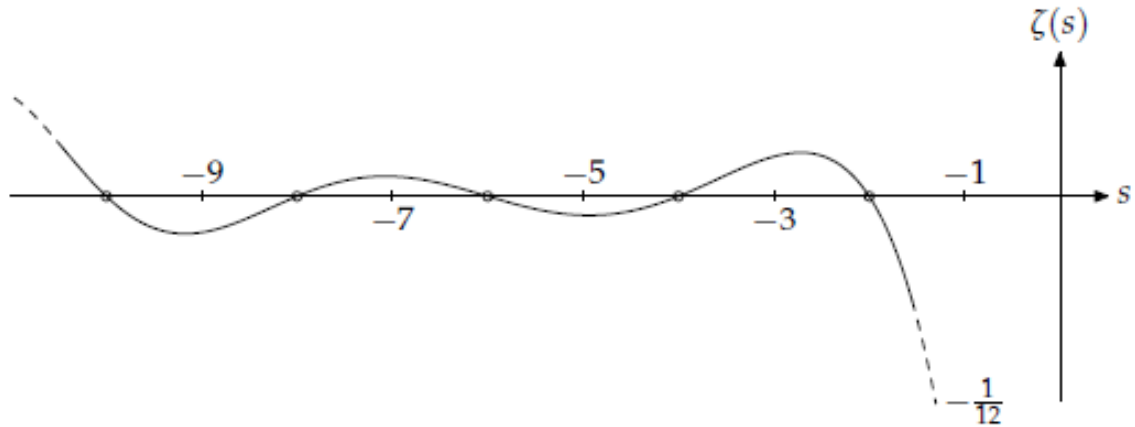


Figura 8.1: $\zeta(1-2n)$ para $n \in \mathbb{N}$

Demonstração.

Multiplicando a equação funcional (8.3) por $\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)$, obtemos

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{(s-1)/2} \left(\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\right)^2 \zeta(1-s).$$

Daí, pela fórmula de reflexão de Euler (OLIVEIRA, 2013, p.32),

$$\pi^{-s/2} \frac{\pi}{\sin(\pi s/2)} \zeta(s) = \pi^{(s-1)/2} \left(\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\right)^2 \zeta(1-s), \quad (8.7)$$

ou ainda,

$$\zeta(s) = \pi^{s-2} \sin(\pi s/2) \left(\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\right)^2 \zeta(1-s).$$

Tomando $s = -2n$ na última equação e fazendo uso da identidade $\sin(-\pi n) = 0$, constatamos que $\zeta(-2n) = 0$ para todo inteiro positivo n . \square

Podemos visualizar o comportamento da função zeta nos reais negativos nas figuras 8.2 e 8.3.

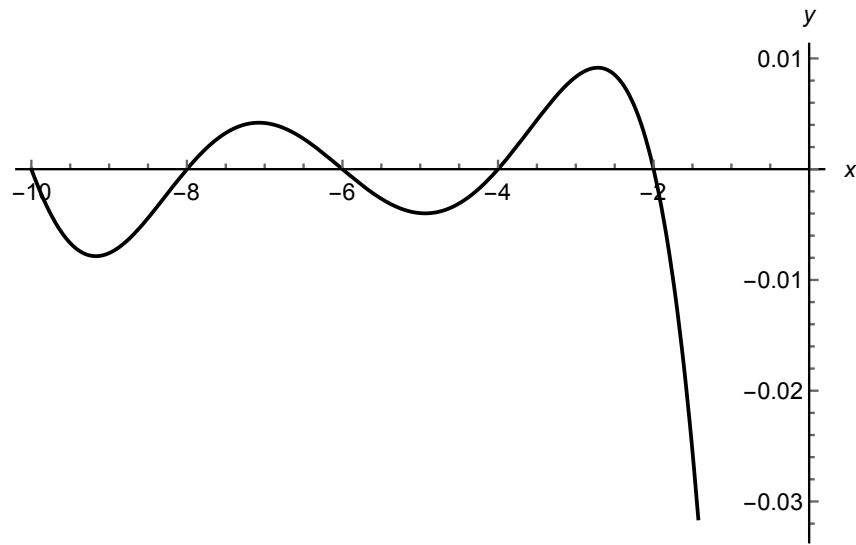


Figura 8.2: $\zeta(n)$ para $n \in (-10, 0)$

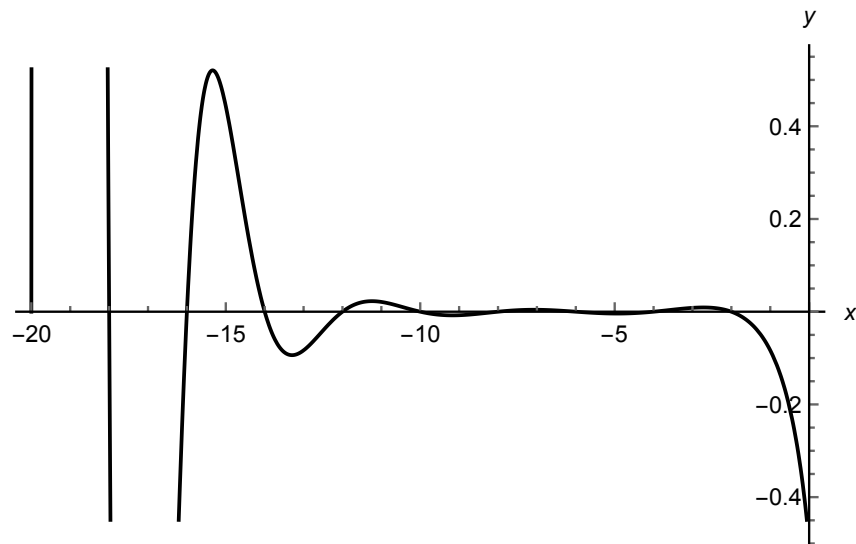


Figura 8.3: $\zeta(n)$ para $n \in (-20, 0)$

Em suma, se n é um inteiro positivo, temos os seguintes valores para a função zeta:

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad (8.8)$$

$$\zeta(-2n) = 0, \quad (8.9)$$

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n} B_{2n}}{2(2n)!}, \quad (8.10)$$

$$\zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}. \quad (8.11)$$

O valor exato da função zeta nos inteiros positivos ímpares ainda é um problema em aberto, embora algum progresso já tenha ocorrido. Em 1977 o matemático francês Roger Apéry

demonstrou que o número

$$\zeta(3) \approx 1,20205690315959428539973816\dots$$

é irracional. Todavia, os métodos de Apéry não se generalizam para demonstrar que $\zeta(5)$ é irracional. Há poucos resultados nesta direção. O matemático francês Tanguy Rivoal demonstrou em 2000 que entre os números $\zeta(3), \zeta(7), \zeta(9), \dots$ há infinitos números irracionais. Já o matemático russo Wadim Zudilin demonstrou em 2001 que pelo menos um número entre $\zeta(3), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ é irracional (ARAKAWA et al., 2014, p. 73).

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, discutimos aspectos gerais sobre os polinômios e os números de Bernoulli e algumas de suas aplicações, sendo essas, principalmente, em problemas de Teoria dos Números. De fato, estudamos algumas das mais belas fórmulas de toda a Matemática, que embora clássicas, estão relacionadas com problemas em aberto. Para ilustrar esse ponto, basta citar a equação funcional da função zeta, que é fundamental no estudo da distribuição dos números primos. De fato, ela está relacionada com a famosa Hipótese de Riemann, que muitos consideram como sendo o problema em aberto mais importante da Matemática na atualidade. Devido à importância histórica dos tópicos estudados, buscamos contextualizar alguns pontos históricos no decorrer do texto.

A construção do texto foi feita com o devido cuidado, de modo a contemplar também, como um objetivo, o enriquecimento do conhecimento sobre o tema por parte dos professores do ensino básico. Ou seja, não presumimos pré-requisitos além dos que são vistos durante o curso de licenciatura em Matemática. Embora grande parte do texto não possa ser desenvolvida com alunos do ensino básico, pois fica evidente que no mínimo seriam necessários conhecimentos de Cálculo Diferencial e Integral, muitas das ideias expostas podem ser utilizadas na educação básica. Por exemplo, como obter os números de Bernoulli de forma recursiva. Isso poderia ser uma atividade para fixação do cálculo com números binomiais, aproveitando ainda o momento para dar uma pincelada na história da Matemática.

Outra ideia interessante, contida em nosso trabalho, é a função gama como uma extensão do conceito de fatorial. Ela poderia despertar no aluno uma curiosidade sobre conceitos matemáticos mais avançados. Outro ponto, é que, ainda que não seja possível justificar totalmente aos alunos o porquê dessa função ou como usá-la, o conhecimento por parte do professor da história e das ferramentas que são necessárias para estudá-la cria uma base sólida sobre o assunto, dando a ele uma segurança maior para transmitir aos alunos os assuntos básicos.

Nessa dissertação tivemos a preocupação especial em exibir o conteúdo da maneira auto-contida. Tentamos expor as demonstrações com rigor matemático, sem abrir mão dos

detalhes que facilitam o entendimento e a leitura, com notações expressas de forma clara e objetiva. Acreditamos que o Educador deva conhecer com mais profundidade os assuntos que são abordados em sala com seus alunos, pois tal atitude amplia as possibilidades de inovação no ensino.

Por fim, gostaríamos de contribuir para os diversos níveis de ensino produzindo uma bibliografia na área em Língua Portuguesa. De fato, na realização deste trabalho tivemos que utilizar quase que exclusivamente referências estrangeiras. Acreditamos também que o presente trabalho pode ser útil como um material auxiliar e de apoio para as disciplinas de Matemática Discreta, Aritmética e Fundamentos de Cálculo do PROFMAT. Também pode ser útil para alunos de graduação e até despertar o interesse em uma iniciação científica na área. Também achamos que é possível utilizá-lo, como já foi dito acima, parcialmente e com adaptações, no Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

- APOSTOL, T. M. An elementary view of euler's summation formula. **The American Mathematical Monthly**, Mathematical Association of America, v. 106, n. 5, p. 409–418, 1999.
- APOSTOL, T. M. A primer on bernoulli numbers and polynomials. **Mathematics Magazine**, Mathematical Association of America, v. 81, n. 3, p. 178–190, 2008.
- ARAKAWA, T. et al. **Bernoulli Numbers and Zeta Functions**. New York: Springer, 2014.
- AVILA, G. **Variável Complexa e aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- COMTET. **Analyse combinatoire**. Paris: Presses Universitaires de France, 1970.
- COMTET. **Advanced combinatorics. The art of finite and infinite expansions**. Boston: Dordrecht, 1974.
- IRELAND, K.; ROSEN, M. **A classical introduction to modern number theory**. New York: Springer-Verlag, 1982.
- KONDO, P. K. **Cálculo finito: demonstrações e aplicações**. PROFMAT - Dissertação de mestrado, UEPG, 2014.
- NÖRLUND. **Vorlesungen über Differenzenrechnung**. Berlin: Springer-Verlag, 1924.
- OLIVEIRA, W. D. **Zeros da função zeta de Riemann e o teorema dos números primos**. Dissertação de mestrado, UNESP, 2013.
- STOPPLE, J. **A Primer of Analytic Number Theory: From Pythagoras to Riemann**. New York: Cambridge University Press, 2003.
- TEMPESTA, P. On a Generalization of Bernoulli and Euler Polynomials. **ArXiv Mathematics**, jan 2006.