

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS
DOUTORADO EM CIÊNCIAS - FÍSICA**

DANILO CIUS

HAMILTONIANOS NÃO-HERMITIANOS DEPENDENTES DO TEMPO

**PONTA GROSSA
2022**

DANILO CIUS

HAMILTONIANOS NÃO-HERMITIANOS DEPENDENTES DO TEMPO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências, área de concentração em Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências-Física.

Orientador: Dr. Fabiano Manoel de Andrade

PONTA GROSSA
2022

C581 Cius, Danilo
Hamiltonianos não-Hermitianos dependentes do tempo / Danilo Cius. Ponta
Grossa, 2022.
109 f.

Tese (Doutorado em Ciências - Área de Concentração: Física), Universidade
Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade.

1. Não-hermiticidade. 2. Efeito Casimir dinâmico. 3. Derivada de Caputo. 4.
Emaranhamento. I. Andrade, Fabiano Manoel de. II. Universidade Estadual de
Ponta Grossa. Física. III.T.

CDD: 530

TERMO DE APROVAÇÃO

Danilo Cius

“HAMILTONIANOS NÃO-HERMITIANOS DEPENDENTES DO TEMPO”

Tese aprovada como requisito parcial para obtenção no grau de Doutor no Programa de Pós-Graduação em Ciências – Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

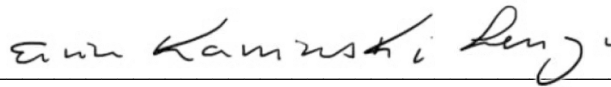
Orientador: _____



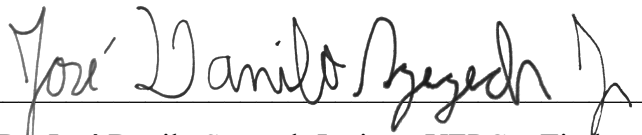
Dr. Fabiano Manoel de Andrade – UEPG – Presidente



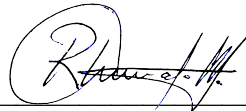
Dr. Diogo de Oliveira Soares Pinto – IFSC-USP – Titular



Dr. Ervin Kaminski Lenzi – UEPG – Titular



Dr. José Danilo Szezech Junior – UEPG – Titular



Dr. Renato Moreira Ângelo – UFPR – Titular

Ponta Grossa, 27 de setembro de 2022.

Dedico à minha Família e aos meus amigos

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade (UEPG) pela orientação neste projeto de doutoramento, pelas frutíferas discussões e todo conhecimento compartilhado durante a realização do presente trabalho. Também sou grato pela relação de amizade construída ao longo desse tempo.

Em especial, agradeço ao Prof. Dr. Antonio Sérgio Magalhães de Castro (UEPG) que sempre me inspirou e motivou no estudo de Física Teórica, mostrando-me os caminhos a serem trilhados. Agradeço ainda a disposição em discutir ideias (por mais absurdas que estas fossem), por toda a dedicação e ajuda durante os anos de estudo e colaboração, além da amizade prestada.

Tenho muito a agradecer ao Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa, do Instituto de Física de São Carlos (IFSC-USP), por ter me recebido muito bem ao longo do primeiro semestre de 2019 em São Carlos. Com certeza, aprendi muita física neste período. Ensinou-me muito sobre mecânica quântica não-Hermitiana e óptica quântica.

Devo muito ao Prof. Dr. Ruben Auccaise (UEPG) e minha cara amiga Adriane Leal (IFSC-USP) pelos ensinamentos e discussões sobre realizações experimentais em RMN, e pela ajuda prestada durante o período que passei em São Carlos.

Gostaria de agradecer aos amigos Gustavo Mehanna Uhdre (UEPG), Maíke Antonio Faustino dos Santos (PUC-RJ) e Luiz Menon Jr. (PUC-RJ) pelas colaborações e discussões sobre física. Também ao pessoal do grupo de Física Quântica e Informação Quântica (FQIQ) da UEPG pelas inúmeras discussões.

Meu maior agradecimento fica aos meus familiares por todo o suporte dado durante a minha formação. Tenho absoluta certeza de que sem o imenso sacrifício dos meus pais, Lúcia e Cláudio, jamais chegaria até aqui.

Àqueles que participaram de forma direta ou indireta, mas que não citei, deixo meu muito obrigado.

Por fim, agradeço à CAPES pelo fomento deste trabalho (código do financiamento 001).

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho consiste em investigar Hamiltonianos dependentes do tempo através da representação pseudo-Hermitiana da mecânica quântica. Nesta formulação é estabelecido um espaço de Hilbert dinâmico definido em termos de uma métrica dependente do tempo definida em termos do Hamiltoniano, em relação a esta métrica o sistema evolui unitariamente, e podemos atribuir uma interpretação quântica adequada conforme a teoria quântica usual. Neste contexto, estudamos três problemas interessantes: efeito Casimir dinâmico pseudo-Hermitiano; sistemas de dois níveis descrito pela equação de Schrödinger fracionária no tempo; e ainda emaranhamento entre dois bosônicos aparentemente desacoplados modulados por frequência complexa, no contexto das simetrias dinâmicas $SU(1, 1)$ e $SU(2)$. O problema do efeito Casimir dinâmico pseudo-Hermitiano foi construído de maneira *ad hoc* a partir do Hamiltoniano de Law, o qual descreve o efeito Casimir dinâmico Hermitiano, e mostramos que por meio desta descrição é possível obter uma taxa de criação de fótons muito maior quando comparada ao caso Hermitiano. Também utilizamos o formalismo pseudo-Hermitiano dependente do tempo, para encontrar uma métrica adequada em termos da qual a solução da equação de Schrödinger fracionária no tempo evolui unitariamente. Além disso, consideramos as simetrias dinâmicas $SU(1, 1)$ e $SU(2)$ e suas respectivas representações bosônicas de dois modos, para os quais consideramos um mapa de Dyson genérico, o qual leva Hamiltonianos não-Hermitianos que aparentemente não possuem termos de interação a apresentarem correlações quânticas através da métrica não trivial do espaço de Hilbert.

Palavras-chave: Não-hermiticidade; Efeito Casimir Dinâmico; Derivada de Caputo; Emaranhamento

ABSTRACT

The main goal of this work is to investigate time-dependent Hamiltonians through the pseudo-Hermitian representation of quantum mechanics. In this formulation a dynamic Hilbert space defined in terms of a time-dependent metric defined in terms of the Hamiltonian is established, in relation to this metric the system evolves unitarily, and we can assign an adequate quantum interpretation according to the usual quantum theory. In this context, we study three interesting problems: Pseudo-Hermitian Dynamic Casimir Effect; two-level systems described by the time-fractional Schrödinger equation; and entanglement between two apparently uncoupled bosonic modes modulated by complex frequency, in the context of the dynamic symmetries $SU(1,1)$ and $SU(2)$. The pseudo-Hermitian Dynamic Casimir Effect problem was constructed in an *ad hoc* way from Law's Hamiltonian, which describes the Hermitian Dynamic Casimir Effect, and we show that through this description it is possible to obtain a rate of creation of photons much higher when compared to the Hermitian case. We also use the time-dependent pseudo-Hermitian formalism to find a suitable metric in terms of which the solution of the time-fractional Schrödinger equation evolves unitarily. Furthermore, we consider the dynamic symmetries $SU(1,1)$ and $SU(2)$ and their respective two-way bosonic representations, for which we consider a generic Dyson map, which takes non-Hermitian Hamiltonians that apparently do not have interaction terms presenting quantum correlations through the non-trivial metric of Hilbert space.

Keywords: Non-hermiticity; Dynamic Casimir Effect; Caputo's Derivative; Entanglement

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Espectro de energia do Hamiltoniano não-Hermitiano (1.4) como função de N 17
- Figura 2 – Gráfico de $\phi(t)$ contra $\tau = \omega_0 t$, com $\omega_0 = 1$, $\tilde{\alpha}_0 = 10\tilde{\beta}_0 = \varepsilon = 10^{-2}$, $\chi = -2\Phi - 1 = 1,0002$, $\varphi_0 = \pi/2$. O estado inicial corresponde ao estado de vácuo com $r_0 = 0$ e $\phi_0 = -3\pi/2$. As linhas sólida e tracejada representam, respectivamente, as soluções analítica (2.128) e numérica para $\phi(t)$, as quais são calculadas numericamente a partir das equações em (2.88). 52
- Figura 3 – Gráfico de $r(t)$ contra τ considerando os mesmos parâmetros da Figura 2. As linhas sólida e tracejada representam a função $r(t)$ nos casos analítico (2.129) e numérico calculados a partir das equações em (2.88). 53
- Figura 4 – Gráfico do número médio de fótons $\mathcal{N}(t)$ em função de τ , considerando os mesmos valores de parâmetros das Figuras 2 e 3, mas com dois diferentes valores de $\tilde{\beta}_0$: $\tilde{\beta}_0 = 10^{-3}$ (linha sólida) e $\tilde{\beta}_0 = 10^{-4}$ (linha tracejada). O *inset* corresponde ao caso Hermitiano descrito pelo Hamiltoniano de Law (2.59), obtido quando $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\beta}_0 = 1$ 54
- Figura 5 – A evolução temporal dos parâmetros do mapa de Dyson κ_α , Λ_α e λ_α são representados para $\alpha = 1,0$ (linha sólida), $\alpha = 0,75$ (linha tracejada), $\alpha = 0,5$ (linha traço-ponto) e $\alpha = 0,25$ (linha pontilhada). Seleccionamos $\Delta_\alpha = 1 \text{ s}^{-\alpha}$, e as condições iniciais: $\kappa_\alpha(0) = 0$, $\Lambda_\alpha(0) = 2$ e $|\lambda_\alpha(0)| = 3/2$ 67
- Figura 6 – Consideramos que o sistema é inicialmente preparado no estado de *spin up*. Representamos a evolução temporal das componentes de magnetização $M_k(t)$ para um sistema de *spin-1/2* na presença de um campo magnético longitudinal para os seguintes casos: (a) $\alpha = 1,0$ (b) $\alpha = 0,75$ (c) $\alpha = 0,5$ (d) $\alpha = 0,25$. Em cada caso as componentes transversais $M_1(t)$ e $M_2(t)$ estão representadas pelas linhas sólida e tracejada, respectivamente, enquanto a componente longitudinal $M_3(t)$ está representada pela linha pontilhada. 68

- Figura 7 – A evolução temporal dos parâmetros do mapa de Dyson κ_α , Λ_α e λ_α são representados para $\alpha = 1,0$ (linha sólida), $\alpha = 0,75$ (linha tracejada), $\alpha = 0,5$ (linha traço-ponto) e $\alpha = 0,25$ (linha pontilhada). Seleccionamos $\Delta_\alpha \approx 0,433 \text{ s}^{-\alpha}$ ($\xi_\alpha = 1/2 \text{ s}^{-\alpha}$), e as condições iniciais: $\kappa_\alpha(0) = 0$, $\Lambda_\alpha(0) = 2$ e $|\lambda_\alpha(0)| = 3/2$ 70
- Figura 8 – Consideramos que o sistema inicia do estado de *spin down*. Representamos a diferença de população $\langle \hat{\sigma}_3(t) \rangle$ entre os dois estados de *spin* para os casos: $\alpha = 1,0$ (linha sólida), $\alpha = 0,75$ (linha tracejada), $\alpha = 0,5$ (linha traço-ponto) e $\alpha = 0,25$ (linha pontilhada). 71
- Figura 9 – As distribuições espaciais dos parâmetros do mapa de Dyson κ_α , Λ_α e λ_α são representados para $\alpha = 1,0$ (linha sólida), $\alpha = 0,75$ (linha tracejada), $\alpha = 0,5$ (linha traço-ponto) e $\alpha = 0,25$ (linha pontilhada). Seleccionamos $\Delta_\alpha \approx 0,866$ ($\zeta_\alpha = 1$ e $\varepsilon_\alpha = 1/2$), e as condições iniciais: $\kappa_\alpha(0) = 0$, $\Lambda_\alpha(0) = 2$ e $|\lambda_\alpha(0)| = 3/2$ 72
- Figura 10 – Partindo da intensidade igual dos campos normalizados em ambas as guias de onda na posição $x_3 = 0$, representamos a distribuição espacial das intensidades normalizadas $I_\pm^\alpha(x_3) \sim |E_\pm^\alpha(x_3)|^2$ para os casos: (a) $\alpha = 1,0$ (b) $\alpha = 0,75$ (c) $\alpha = 0,5$ (d) $\alpha = 0,25$ 73
- Figura 11 – O módulo do parâmetro livre do mapa de Dyson $|z_-(t)|$ em termos da escala de tempo adimensional γt com $\gamma = 1/2 \text{ s}^{-1}$ para os valores iniciais $\Phi_-(0) = 10^2$ e $\Lambda_-(0) = 10^{-2}$. Calculamos a evolução temporal até o tempo adimensional $\gamma T \approx 2.15$ 87
- Figura 12 – Os parâmetros do mapa de Dyson (a) $\Phi_-(t)$ e (b) $\Lambda_-(t)$ em termos da escala adimensional γt com $\gamma = 1/2 \text{ s}^{-1}$ para os valores iniciais $\Phi_-(0) = 10^2$ and $\Lambda_-(0) = 10^{-2}$. Calculamos a evolução temporal até o tempo adimensional $\gamma T \approx 2.15$ 88
- Figura 13 – A entropia linear $\mathcal{S}_-(t)$ em termos da escala de tempo adimensional γt com $\gamma = 1/2 \text{ s}^{-1}$ para os valores iniciais $\Phi_-(0) = 10^2$ e $\Lambda_-(0) = 10^{-2}$. Além disso, representamos o grau de compressão $r_-(t)$ no *inset*. Calculamos a evolução temporal até o tempo adimensional $\gamma T \approx 2.15$ 88

- Figura 14 – A entropia linear como função do número total de bósons n quando $r_+ = \pi/4$. Cada ponto corresponde a medida máxima de emaranhamento para um dado valor de n . Neste caso, a entropia linear se aproxima da unidade no limite $n \rightarrow \infty$. Os losangos pretos são utilizados para indicar os casos plotados da entropia como função do tempo na Fig. 17. 90
- Figura 15 – O módulo do parâmetro livre do mapa de Dyson $|z_+(t)|$ em termos da escala de tempo adimensional γt com $\gamma = 1/2 \text{ s}^{-1}$ para os valores iniciais $\Phi_+(0) = 10^2$ e $\Lambda_+(0) = 10^{-2}$. Calculamos a evolução temporal até o tempo adimensional $\gamma T \approx 2.15$ 91
- Figura 16 – Os parâmetros do mapa de Dyson (a) $\Phi_+(t)$ e (b) $\Lambda_+(t)$ em termos da escala adimensional γt com $\gamma = 1/2 \text{ s}^{-1}$ para os valores iniciais $\Phi_+(0) = 10^2$ and $\Lambda_+(0) = 10^{-2}$. Calculamos a evolução temporal até o tempo adimensional $\gamma T \approx 2.15$ 92
- Figura 17 – Para $n = 1$ (linha sólida), $n = 10$ (linha tracejada) e $n = 100$ (linha pontilhada), representamos a entropia linear $\mathcal{S}_+(t)$ em termos da escala de tempo adimensional γt com $\gamma = 1/2 \text{ s}^{-1}$ para os valores iniciais $\Phi_+(0) = 10^2$ e $\Lambda_+(0) = 10^{-2}$. O tempo adimensional para o qual o emaranhamento máximo ocorre é $\gamma T \approx 2.15$. Os losangos pretos nos valores máximos da entropia foram utilizados para indicar os correspondentes valores da entropia máxima em função do número de bósons n na Fig. 14 pelos mesmos símbolos. 93

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	BREVE HISTÓRIA DA MECÂNICA QUÂNTICA	12
1.2	MECÂNICA QUÂNTICA NÃO-HERMITIANA: UMA REVISÃO	14
1.2.1	Descrição quântica de um sistema pseudo-Hermitiano	20
1.2.1.1	Hamiltoniano Independente do Tempo	21
1.2.1.2	Hamiltoniano Dependente do Tempo	23
1.3	ORGANIZAÇÃO DA TESE	26
2	EFEITO CASIMIR DINÂMICO	28
2.1	O HAMILTONIANO EFETIVO DE LAW	30
2.1.1	Hamiltoniano de um único modo	40
2.2	HAMILTONIANO QUADRÁTICO NÃO-HERMITIANO	41
2.2.1	Hamiltoniano não-Hermitiano e mapa de Dyson	41
2.2.2	Contraparte Hermitiana	43
2.2.3	Evolução temporal	44
2.3	EFEITO CASIMIR DINÂMICO PSEUDO-HERMITIANO	46
2.4	DISCUSSÃO	53
3	SISTEMAS DE DOIS NÍVEIS COM TEMPO FRACIONÁRIO	57
3.1	DINÂMICA FRACIONÁRIA DE UM SISTEMA QUÂNTICO DE DOIS NÍVEIS	59
3.1.1	Evolução temporal unitária	62
3.2	APLICAÇÕES	66
3.2.1	$Spin-1/2$ no campo magnético longitudinal	66
3.2.2	Cadeia de Lee-Yang de um único sítio	67
3.2.3	Dois guias de onda acoplados	70
3.3	DISCUSSÃO	73
4	EMARANHAMENTO ENTRE DOIS MODOS DESACOPLADOS MODULADOS POR FREQUÊNCIA COMPLEXA	75
4.1	Simetrias dinâmicas $SU(1, 1)$ e $SU(2)$	76
4.1.1	Hamiltoniano não-Hermitiano e o Mapa de Dyson	76

4.1.2	Contraparte Hermitiana	77
4.1.3	Evolução temporal	79
4.2	O caso \hat{K}_0	82
4.3	Dois modos desacoplados e Emaranhamento	84
4.3.1	Emaranhamento $\mathfrak{su}(1, 1)$	85
4.3.2	Emaranhamento $\mathfrak{su}(2)$	89
4.4	Discussão	92
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS	95
	REFERÊNCIAS	97

1 INTRODUÇÃO

1.1 BREVE HISTÓRIA DA MECÂNICA QUÂNTICA

No século XIX, a Física estava dividida em cinco grandes áreas: Mecânica, Óptica, Ondulatória, Termodinâmica e Eletromagnetismo. Cada área explicava uma grande quantidade de fenômenos com muita precisão. Um dos renomados físicos desse período, *sir* William Thomson, conhecido como Lorde Kelvin, teria afirmado que: a Física Clássica tinha apenas duas nuvens a serem removidas do límpido céu por ela construído. Com certeza esta afirmação não passa de um aforismo (1), uma vez que a comunidade científica, inclusive Lorde Kelvin, sabia bem dos problemas endereçados à Física naquele momento — vide o longo artigo de Lord Kelvin intitulado "*Nineteenth century clouds over the dynamical theory of heat and light*" (2).

Uma das nuvens era o resultado inesperado do experimento de Michelson e Morley que ficou conhecido pelo nome dos físicos que o propuseram. O experimento tinha como objetivo caracterizar o Éter luminífero (meio hipotético pelo qual a luz se propagaria) (3). A outra nuvem se tratava do problema da radiação de corpo negro, em que os resultados previstos pelos modelos clássicos falhavam em descrever os resultados experimentais, e ainda levavam a absurdos como a catástrofe do ultra-violeta (4). Tais problemas acabaram por dar origem a duas novas teorias: a Relatividade Restrita que descreve o mundo das velocidades próximas à da luz, e a Física Quântica que descreve o mundo na escala atômica. Ambas são os pilares fundamentais da ciência moderna.

Atribui-se o nascimento da Física Quântica à apresentação de um modelo para a descrição da radiação de um corpo negro dada por Max Planck, em 1900, após tentativas frustradas de explicar o espectro eletromagnético de um corpo negro a partir de teorias clássicas — mecânica estatística e termodinâmica. Planck percebeu que podia obter previsões teóricas em perfeito acordo com a experiência adotando uma hipótese *ad hoc* de que a radiação eletromagnética é emitida de forma descontínua, em pequenos “pacotes” de energia (batizados de *quanta*) cada um destes pacotes com energia proporcional à frequência (ν) emitida $E = h\nu$, em que $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J.s é a constante de Planck. A *quantização* da energia proposta por Planck conflitava com o caráter contínuo da energia conforme se concebia até então. Mesmo assim, a ideia de Planck foi utilizada por Albert Einstein, em 1905, para explicar o efeito fotoelétrico.

Niels Bohr utilizou a ideia de quantização para corrigir o modelo atômico proposto em 1911 por Ernest Rutherford, que consistia em um núcleo muito pequeno carregado positivamente, rodeado por uma nuvem de elétrons esférica, análogo ao Sistema Solar. O problema deste modelo está na perda de energia dos elétrons acelerados através da radiação síncrotron: uma partícula com carga elétrica quando acelerada emite radiação eletromagnética. Portanto, o elétron ao orbitar o núcleo atômico deveria emitir radiação e cada vez mais aproximar-se do núcleo, em uma órbita espiralada, até chocar-se contra ele. Bohr então fornece uma solução para o problema da órbita do elétron através das descrições quânticas da radiação eletromagnética propostas por Planck e Einstein, postulando que as órbitas dos elétrons têm energias quantizadas. O modelo de Rutherford-Bohr previu os vários níveis de energia para o átomo de hidrogênio em acordo com a observação das linhas emitidas no espectro do hidrogênio.

Em analogia ao comportamento dual da luz — ondulatório de acordo com os experimentos de dupla fenda de Thomas Young e corpuscular de acordo com as explicações de Einstein para o efeito fotoelétrico — buscando validar uma simetria entre os constituintes do universo (radiação e matéria), o físico Louis Victor de Broglie, em 1923, postulou o comportamento ondulatório da matéria: elétrons, por exemplo, têm também natureza dupla de partícula e onda. Associou então ao elétron a frequência $\nu = E/h$ (de acordo com a equação de Planck) e o comprimento de onda $\lambda = h/p$, sendo p o *momentum* do elétron. Em 1927, experiências de difração realizadas com elétrons comprovaram as hipóteses de de Broglie.

Ainda era necessário descobrir qual grandeza física estaria associada à onda de matéria. Nenhuma grandeza física conhecida explicava a natureza dessas ondas, portanto a letra grega Ψ foi utilizada para designar a função de onda da matéria. Em 1926, Erwin Schrödinger descobriu uma equação que permite encontrar a função de onda de uma partícula a partir do conhecimento da energia potencial à qual está submetida:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t) = i\hbar\partial_t\Psi(\vec{r}, t). \quad (1.1)$$

No entanto, foi Max Born que, em 1928, descobriu a relação entre a função de onda e a probabilidade de se encontrar a partícula em uma determinada posição. Ele concluiu que $|\Psi|^2$ é a grandeza estatística que representa a densidade de probabilidade, de modo que esta função carrega a probabilidade de se encontrar uma partícula em uma determinada região do espaço.

Portanto, a Física Quântica tem mostrado que a natureza apresenta um caráter estatístico. Tal ideia incomodou muitos físicos, inclusive Einstein, que expressou sua insatisfação dizendo a famosa frase: "Deus não joga dados com o Universo". Contudo, os resultados experimentais dão o veredito a favor da formulação quântica.

1.2 MECÂNICA QUÂNTICA NÃO-HERMITIANA: UMA REVISÃO

A estrutura matemática da mecânica quântica é formulada no espaço de Hilbert — um espaço vetorial complexo de dimensão finita ou infinita munido de um produto interno definido. Neste espaço matemático, os estados físicos de um sistema quântico são representados por vetores unitários, enquanto os observáveis físicos, que atuam sobre ele, são representados por operadores auto-adjuntos (5). Segundo Cohen (6), a noção de observável é matemática: operador auto-adjunto cujo conjunto de autovetores forma uma base para o espaço. Ou seja, "observável" não é, a priori, aquilo que se vê no laboratório.

Assim, o ponto central da estrutura matemática da mecânica quântica é a descrição de sistemas quânticos por meio de um vetor de estado $|\psi\rangle$. Este objeto matemático contém todas as informações sobre a dinâmica do sistema, a qual é descrita pela equação de Schrödinger

$$i\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle, \quad (1.2)$$

sendo i a unidade imaginária, $\hbar = 1,05 \times 10^{-34}$ J.s a constante de Planck reduzida, $|\psi(t)\rangle$ o vetor de estado no instante de tempo t e \hat{H} o Hamiltoniano do sistema.

Uma vez que o vetor de estado $|\psi(t)\rangle$ seja obtido, pode-se calcular o valor esperado de qualquer observável \hat{O} do sistema, conforme

$$O(t) = \langle\psi(t)|\hat{O}|\psi(t)\rangle. \quad (1.3)$$

São exemplos de tais observáveis: energia, posição, *momentum* e *spin*. Portanto, obter soluções para o vetor de estado é essencial para calcular tais quantidades.

Nos livros-texto de mecânica quântica (7, 8, 6, 9, 10, 11, 12), em geral, os autores insistem no fato de que o Hamiltoniano e qualquer outro observável deve ser representado por um operador auto-adjunto (ou mais amplamente referido como Hermitiano). Auto-adjunticidade e hermiticidade são conceitos distintos. Entretanto, seguiremos os passos da literatura, e utilizaremos a terminologia hermiticidade sempre

nos referirmos a auto-adjunticidade. Há casos em que um operador é Hermitiano, porém, não é auto-adjunto ver (13, 14). Isso é assumido a priori porque a hermiticidade garante que o valor esperado (e os autovalores) do operador que representa uma variável física seja real (6). Portanto, o operador \hat{O} deve satisfazer a propriedade

$$\langle \psi(t) | \hat{O} \psi(t) \rangle = \langle \hat{O}^\dagger \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \hat{O} \psi(t) | \psi(t) \rangle,$$

de modo que podemos afirmar que o domínio do operador \hat{O} é igual ao do seu adjunto \hat{O}^\dagger (14) e, neste caso, o observável representado pelo operador \hat{O} é Hermitiano:

$$\hat{O} = \hat{O}^\dagger.$$

Outra consequência direta da hermiticidade é que os autovetores de um operador Hermitiano são ortogonais entre si (6).

Além disso, em se tratando do operador Hamiltoniano \hat{H} , a hermiticidade não só garante que as energias sejam números reais, como também garante que a evolução temporal do estado quântico seja unitária de acordo com a equação de Schrödinger (1.2). A unitariedade da evolução temporal é importante, pois ela garante a conservação da probabilidade associada ao vetor de estado $|\psi(t)\rangle$. Portanto, a hermiticidade do Hamiltoniano é um ponto central para prosseguir com uma teoria quântica viável munida de uma interpretação probabilística.

Apesar da hermiticidade do operador Hamiltoniano (e dos demais observáveis) implicar em propriedades essenciais para uma interpretação quântica adequada a respeito de um sistema físico, Hamiltonianos não-Hermitianos são frequentemente utilizados em abordagens fenomenológicas para simular perdas em sistemas quânticos abertos (15, 16, 17, 18). Por exemplo: estados de decaimento (19, 20), ionização multi-fótons (21, 22), espalhamento quântico e transporte em potenciais complexos (23, 24, 25, 26), elétrons fortemente correlacionados (27), e processos de relaxação em sistemas de spin em RMN (28). Vale mencionar que perdas de energia e/ou coerência quântica são estudados formalmente no campo conhecido como mecânica quântica de sistemas abertos.

Embora operadores não-Hermitianos possam fornecer resultados interessantes do ponto de vista fenomenológico, esta abordagem não constitui uma teoria quântica consistente de maneira geral. Entretanto, o que se chama de mecânica quântica não-Hermitiana não se limita a uma teoria heurística, como as mencionadas no parágrafo anterior.

Na verdade, o que se chama de mecânica quântica não-Hermitiana é uma forma menos restritiva de descrever um sistema quântico em um dado espaço de Hilbert do ponto de vista matemático. Pois, como veremos mais adiante, a hermiticidade está intimamente relacionada ao espaço de Hilbert, mais precisamente, ao seu produto interno. Então, a questão aqui é que, diferentemente da mecânica quântica convencional, não definimos a priori o produto interno, o qual deve ser determinado a partir da definição do Hamiltoniano que, neste caso, apesar de não ser Hermitiano ainda assim possui autovalores reais.

A discussão sobre a inclusão de Hamiltonianos não-Hermitianos em uma teoria quântica consistente foi iniciada por Scholtz, Geyer e Hahne (29). Os autores mostraram que para isso ser possível haveria a necessidade de se construir uma métrica (se ela existir) para um dado conjunto de observáveis não-Hermitianos. No entanto, o tema se popularizou alguns anos depois, após a publicação do trabalho seminal de Bender e Boettcher (30), no qual eles contestam a necessidade da condição de hermiticidade com relação à realidade do espectro de energia. Eles conjecturaram que o espectro de um operador Hamiltoniano não-Hermitiano que possui uma simetria anti-linear conhecida como simetria \mathcal{PT} — invariância sob paridade (\mathcal{P}) e reversão temporal (\mathcal{T}) — é real ainda que este não seja Hermitiano. Eles analisaram o seguinte Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \hat{p}^2 - (i\hat{x})^N, \quad (1.4)$$

sendo N um parâmetro real.

A ação dos operadores de paridade e reversão temporal são tais que

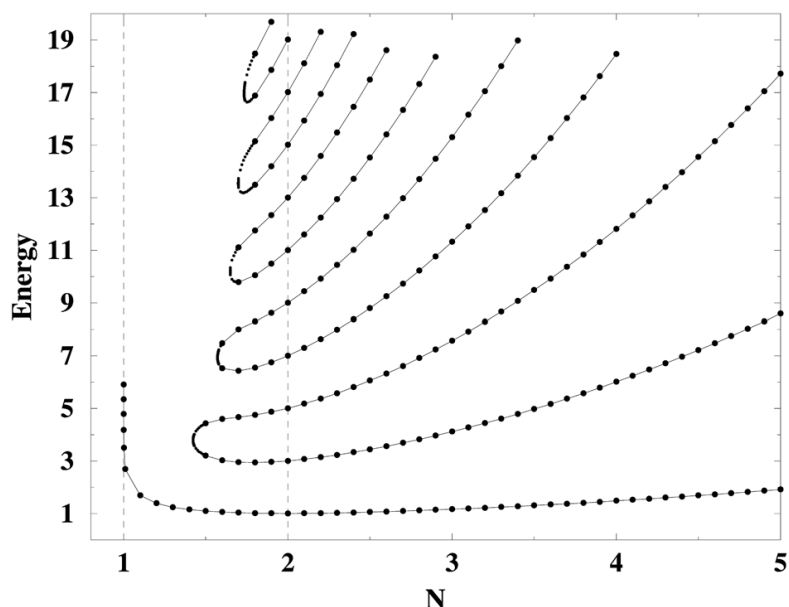
$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \quad \hat{x} &\rightarrow -\hat{x}, \quad \hat{p} \rightarrow -\hat{p}, \\ \mathcal{T} : \quad \hat{x} &\rightarrow \hat{x}, \quad \hat{p} \rightarrow -\hat{p}, \quad i \rightarrow -i, \end{aligned}$$

em que \hat{p} e \hat{x} sendo os respectivos operadores *momentum* e posição, enquanto $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária e t é o tempo. Uma análise matemática rigorosa a respeito do espectro de um operador \mathcal{PT} -simétrico foi feita por Dorey, Dunning e Tateo (31). Em relação à ação do operador anti-linear de reversão temporal \mathcal{T} , o caso em que há dependência explícita do tempo no operador Hamiltoniano, ainda gera algumas discussões: alguns autores consideram a transformação $t \rightarrow -t$ de reversão temporal assim como nas referências (32, 33, 34), embora nas Refs. (35, 36) os autores enfatizem que na mecânica quântica não-relativística e na teoria quântica de campos relativística, a

coordenada de tempo t é um parâmetro e, portanto, o operador de reversão de tempo \mathcal{T} não inverte de fato o sinal de t .

Como resultado, Bender e Boettcher obtiveram um espectro de energia completamente real, discreto e infinito para $N \geq 2$: no limite inferior ($N = 2$) tem-se o espectro de energia do oscilador harmônico quântico $E = 2n + 1$. No intervalo $1 < N < 2$ há um número finito de energias reais e um número infinito de pares complexo conjugados. A energia do estado fundamental diverge para $N \rightarrow 1^+$ e, ainda, para $N \leq 1$ não há valores reais de energia. O espectro de energia do Hamiltoniano (1.4) como função do parâmetro N é mostrado na Figura 1. Para $N < 2$ ocorre o que se chama de quebra

Figura 1 – Espectro de energia do Hamiltoniano não-Hermitiano (1.4) como função de N .



Fonte: *Introduction to PT-symmetric quantum theory* (37)

espontânea da simetria \mathcal{PT} , o que significa os valores de energia começam a coalescer e se tornar complexos. O instante em que isso acontece é conhecido como ponto excepcional.

Portanto, mesmo que o Hamiltoniano seja \mathcal{PT} -simétrico não há garantia, em geral, que o espectro de energia seja real. De fato, para que o sistema apresente um espectro real de energia é necessário não só que o Hamiltoniano seja \mathcal{PT} -simétrico,

$$[\hat{H}, \mathcal{PT}] = 0, \quad (1.5)$$

mas também que o Hamiltoniano e o operador \mathcal{PT} compartilhem os mesmos autoesta-

dos

$$\hat{H}|\phi\rangle = E|\phi\rangle, \quad \mathcal{PT}|\phi\rangle = e^{i\theta}|\phi\rangle. \quad (1.6)$$

Se isso ocorre, diz-se que o sistema possui simetria \mathcal{PT} inquebrável. E quando o Hamiltoniano e o operador anti-linear \mathcal{PT} deixam de compartilhar os mesmos autoestados, diz-se que há quebra de simetria \mathcal{PT} , ainda que \hat{H} e \mathcal{PT} comutem. Observe que quando dois operadores lineares comutam, eles podem ser diagonalizados simultaneamente, indicando que ambos compartilham a mesma base. Entretanto, isso não é necessariamente verdade aqui, uma vez que o operador \mathcal{PT} é anti-linear (37).

Para descrever uma teoria quântica consistente ainda seria necessário que os autoestados do operador Hamiltoniano fossem ortonormais, o que diz respeito a construção de um produto interno adequado para o espaço de Hilbert. Para este fim, foi introduzido de início um produto interno modificado,

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{PT}} \equiv \langle \cdot | \mathcal{PT} \cdot \rangle, \quad (1.7)$$

em relação ao qual os autoestados do operador Hamiltoniano eram ortogonais. Entretanto, este é um produto interno indefinido, não sendo aceitável para descrever uma teoria física, uma vez que as normas dos vetores de estado não são necessariamente positivas, o que não permite interpretá-lo probabilisticamente. Produtos internos indefinidos são utilizados no estudo de espaços de Kreĭn (38).

Este problema foi contornado por Bender, Brody e Jones (39, 40), que propuseram a introdução de mais uma simetria, chamada de conjugação (\mathcal{C}), à simetria \mathcal{PT} . Com esta simetria, foi possível construir um produto interno definido,

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{CPT}} \equiv \langle \cdot | \mathcal{CPT} \cdot \rangle, \quad (1.8)$$

em que os autoestados do Hamiltoniano são ortogonais, e a norma do vetor de estado é sempre positiva: estando de acordo, portanto, com a interpretação probabilística da mecânica quântica convencional. Com isso, Bender e colaboradores mostraram ser possível construir uma extensão complexa da mecânica quântica (39, 40) conhecida também como mecânica quântica \mathcal{PT} -simétrica (37, 41).

Pouco tempo depois de Bender e Boettcher publicarem seu trabalho sobre \mathcal{PT} -simetria, Ali Mostafazadeh (42, 43, 44) demonstrou que a simetria \mathcal{PT} é um caso específico da condição mais geral denominada pseudo-hermiticidade (45), e que esta é uma condição necessária para se descrever uma teoria quântica consistente.

Um operador \hat{A} que satisfaz a chamada relação de pseudo-hermiticidade

$$\hat{A}^\dagger \hat{\Theta} = \hat{\Theta} \hat{A}, \quad (1.9)$$

é um operador pseudo-Hermitiano. Esta propriedade está relacionada diretamente ao produto interno modificado no espaço de Hilbert (46)

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_{\Theta} \equiv \langle \cdot | \hat{\Theta} \cdot \rangle = \langle \hat{\Theta} \cdot | \cdot \rangle, \quad (1.10)$$

em relação ao qual o operador \hat{A} , que satisfaz (1.9), é Hermitiano

$$\langle \tilde{\psi} | \hat{A} \psi \rangle_{\Theta} = \langle \tilde{\psi} | \hat{\Theta} \hat{A} \psi \rangle = \langle \hat{\Theta} \hat{A} \tilde{\psi} | \psi \rangle = \langle \hat{A} \tilde{\psi} | \psi \rangle_{\Theta}, \quad (1.11)$$

em que $\hat{\Theta}$ é conhecido como operador métrico. Note que o operador métrico é Hermitiano em relação ao produto interno usual, por isso, $\hat{\Theta}^\dagger = \hat{\Theta}$. Observa-se que a condição de hermiticidade ($\hat{A}^\dagger = \hat{A}$) é um caso particular da pseudo-hermiticidade quando $\hat{\Theta} = \hat{1}$. Portanto, um operador pode ser Hermitiano em relação a um produto interno desde que este operador seja pseudo-Hermitiano.

Contudo, o espectro de um operador pseudo-Hermitiano não é necessariamente real (42), como no exemplo apresentado na referência (47). Isto acontece quando não existe um operador métrico positivo-definido (autovalores de $\hat{\Theta}$ estritamente positivos) tal que a relação de pseudo-hermiticidade seja satisfeita.

A condição necessária e suficiente para que o espectro de um operador seja real é que exista um $\hat{\Theta}$ positivo-definido que satisfaça a Eq. (1.9). Quando isso ocorre, a relação de pseudo-hermiticidade é chamada de quasi-hermiticidade e, portanto, os operadores que satisfazem esta relação são ditos quasi-Hermitianos (29). Neste caso, tem-se um produto interno definido de modo que a norma do vetor de estado neste espaço é positiva

$$\|\psi\|_{\Theta}^2 = \langle \psi | \psi \rangle_{\Theta} = \langle \psi | \hat{\Theta} \psi \rangle \geq 0, \quad (1.12)$$

para todo $|\psi\rangle$. A igualdade é válida somente quando $|\psi\rangle$ for um vetor nulo. Portanto, a interpretação probabilística da mecânica quântica é assegurada.

Para que se possa dar uma interpretação física ao sistema quântico pseudo-Hermitiano, o operador métrico deve ser considerado como sendo positivo-definido. Neste caso, uma fatoração conveniente é a seguinte:

$$\hat{\Theta} = \hat{\eta}^\dagger \hat{\eta}, \quad (1.13)$$

em que $\hat{\eta}$ é conhecido como mapa de Dyson. Então, ao substituir (1.13) em (1.9), tem-se

$$\hat{A}^\dagger \hat{\eta}^\dagger \hat{\eta} = \hat{\eta}^\dagger \hat{\eta} \hat{A}. \quad (1.14)$$

Se $\hat{\eta}$ é um operador inversível, pode-se multiplicar esta relação por $(\hat{\eta}^\dagger)^{-1}$ à esquerda e por $\hat{\eta}^{-1}$ à direita, obtém-se a igualdade

$$(\hat{\eta} \hat{A} \hat{\eta}^{-1})^\dagger = \hat{\eta} \hat{A} \hat{\eta}^{-1}, \quad (1.15)$$

que mostra que o operador $\hat{\eta} \hat{A} \hat{\eta}^{-1}$ é Hermitiano. Por isso, define-se a contra-parte Hermitiana como sendo dada por

$$\hat{a} = \hat{\eta} \hat{A} \hat{\eta}^{-1}. \quad (1.16)$$

Isso garante que o espectro de autovalores de \hat{A} é real, uma vez que o operador não-Hermitiano \hat{A} está relacionado ao operador Hermitiano \hat{a} através da transformação de similaridade expressa em (1.16). Destaca-se ainda que o mapa de Dyson $\hat{\eta}$ não é único, podendo ser escolhido de forma genérica e, em seguida, forçando-o a satisfazer a relação (1.16).

O valor esperado de um observável não-Hermitiano \hat{A} está relacionado ao valor esperado da sua contra-parte Hermitiana \hat{a} conforme segue

$$\langle \hat{A} \rangle_{\Theta, \Psi} = \langle \Psi | \hat{\Theta} \hat{A} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{\eta}^\dagger \hat{\eta} (\hat{\eta}^{-1} \hat{a} \hat{\eta}) | \Psi \rangle = \langle \psi | \hat{a} | \psi \rangle = \langle \hat{a} \rangle_\psi, \quad (1.17)$$

em que os vetores das representações não-Hermitiana ($|\Psi\rangle$) e Hermitiana ($|\psi\rangle$) estão conectados por meio do mapa de Dyson $\hat{\eta}$ através da relação

$$|\psi\rangle = \hat{\eta} |\Psi\rangle. \quad (1.18)$$

Então, uma vez que o mapa de Dyson esteja definido podemos fazer todos os cálculos na representação Hermitiana.

1.2.1 Descrição quântica de um sistema pseudo-Hermitiano

No formalismo pseudo-Hermitiano, primeiro definimos uma métrica do espaço de Hilbert e depois derivamos os observáveis. Isto se faz necessário para que possamos primeiro garantir a unitariedade da evolução temporal do sistema descrito e, assim, dar uma interpretação probabilística adequada, para na sequência obter os observáveis pseudo-Hermitianos a partir dos observáveis Hermitianos bem conhecidos

no formalismo quântico convencional. Derivamos a métrica a partir do Hamiltoniano, e dizemos então, que a métrica é Hamiltoniano-dependente:

$$\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(\hat{H}).$$

Algumas sutilezas devem ser levadas em conta quando consideramos dependência temporal explícita no Hamiltoniano e, por isso, separamos os casos em que o Hamiltoniano independe ou depende explicitamente do tempo.

1.2.1.1 Hamiltoniano Independente do Tempo

A evolução temporal do sistema é descrito pela equação de Schrödinger

$$i\hbar\partial_t|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle, \quad \hat{H}^\dagger \neq \hat{H}, \quad (1.19)$$

em que o Hamiltoniano não-Hermitiano \hat{H} deve satisfazer a relação (1.9), temos

$$\hat{H}^\dagger \hat{\Theta} = \hat{\Theta} \hat{H}. \quad (1.20)$$

Se existe um mapa de Dyson invertível $\hat{\eta}$ que permita mapear o Hamiltoniano pseudo-Hermitiano \hat{H} em um Hamiltoniano Hermitiano \hat{h} segundo (1.16), pode-se escrever

$$\hat{H} = \hat{\eta}^{-1} \hat{h} \hat{\eta}. \quad (1.21)$$

Ao substituírmos (1.21) na equação de Schrödinger (1.19) seguida da multiplicação pela esquerda por $\hat{\eta}$, obtemos

$$i\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle = \hat{h}|\psi(t)\rangle, \quad \hat{h}^\dagger = \hat{h}, \quad (1.22)$$

em que

$$|\psi(t)\rangle = \hat{\eta}|\Psi(t)\rangle. \quad (1.23)$$

A solução formal da equação de Schrödinger pseudo-Hermitiana (1.19) pode ser escrita da seguinte forma

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\Psi(t_0)\rangle, \quad (1.24)$$

em que $\hat{U}(t, t_0)$ é o operador de evolução temporal pseudo-unitário. Enquanto a equação de Schrödinger Hermitiana (1.22) tem como solução formal

$$|\psi(t)\rangle = \hat{u}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \quad (1.25)$$

em que $\hat{u}(t, t_0)$ é o operador de evolução temporal unitário. A partir das relações (1.23), (1.24) e (1.25), pode-se escrever

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \hat{\eta}^{-1}|\psi(t)\rangle \\ &= \hat{\eta}^{-1}\hat{u}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \\ &= \hat{U}(t, t_0)\hat{\eta}^{-1}|\psi(t_0)\rangle, \end{aligned} \quad (1.26)$$

de modo que a relação entre os operadores de evolução temporal \hat{U} e \hat{u} , em ambas as representações, é dada por

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{\eta}^{-1}\hat{u}(t, t_0)\hat{\eta}. \quad (1.27)$$

As amplitudes de probabilidade em ambas representações ficam relacionadas de acordo com

$$\langle \tilde{\Psi}(t)|\Psi(t)\rangle_{\Theta} = \langle \tilde{\Psi}(t)|\hat{\Theta}|\Psi(t)\rangle = \langle \tilde{\psi}(t)|\psi(t)\rangle, \quad (1.28)$$

em que novamente $|\psi(t)\rangle = \hat{\eta}|\Psi(t)\rangle$. Verifica-se que a densidade de probabilidade em ambas as representações deve ser conservada no tempo,

$$\partial_t \langle \Psi(t)|\Psi(t)\rangle_{\Theta} = \partial_t \langle \psi(t)|\psi(t)\rangle = 0, \quad (1.29)$$

uma vez que

$$\langle \Psi(t)|\Psi(t)\rangle_{\Theta} = \langle \Psi(t_0)|\Psi(t_0)\rangle_{\Theta} = \langle \psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle = \langle \psi(t)|\psi(t)\rangle. \quad (1.30)$$

Uma vez que conhecemos o pseudo-produto interno definido em termos da métrica não-trivial representada pelo operador $\hat{\Theta}$, e sua relação com a métrica usual (identidade), definimos um observável pseudo-Hermitiano $\hat{\mathcal{O}}$ por meio do mapa de Dyson $\hat{\eta}$, que “hermitiza” o Hamiltoniano \hat{H} , por meio da transformação:

$$\hat{\mathcal{O}} = \hat{\eta}^{-1}\hat{o}\hat{\eta}, \quad (1.31)$$

em que \hat{o} representa o observável Hermitiano conhecido na formulação quântica convencional. Nota-se que no caso do Hamiltoniano esta expressão é exatamente a mesma expressa na Eq. (1.21) e, por isso, o Hamiltoniano é dito como sendo um observável. Os valores esperadores de ambas representações ficam relacionados conforme

$$\langle \hat{\mathcal{O}}\rangle_{\Theta, \Psi(t)} = \langle \Psi(t)|\hat{\Theta}\hat{\mathcal{O}}|\Psi(t)\rangle = \langle \psi(t)|\hat{o}|\psi(t)\rangle = \langle \hat{o}\rangle_{\psi(t)}. \quad (1.32)$$

Assim, uma vez que o mapa de Dyson seja definido, podemos sempre fazer todos os cálculos na representação Hermitiana, sem nos preocuparmos com a questão da métrica e dos observáveis não-Hermitianos, pois essas representações são equivalentes. Isso nos mostra que não há uma diferença direta em utilizar o formalismo pseudo-Hermitiano no sentido operacional. No entanto, a generalização pseudo-Hermitiana permite explorar os aspectos geométricos associados à métrica não-trivial do espaço de Hilbert (48, 49).

1.2.1.2 Hamiltoniano Dependente do Tempo

Quando lidamos com Hamiltonianos não-Hermitianos dependentes do tempo, devemos esperar, pelo menos a princípio, que a métrica também dependa. Isso porque a métrica depende do Hamiltoniano $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}[\hat{H}(t)]$. Quando um operador métrico depende do tempo é considerado para o tratamento de Hamiltonianos não-Hermitianos também dependentes do tempo, diferentes propostas têm sido apresentadas para restabelecer a propriedade de hermiticidade a estes operadores Hamiltonianos (50, 51, 52, 53). Neste contexto, algumas contribuições interessantes são apresentadas para Hamiltonianos \mathcal{PT} -simétricos nas Refs. (54, 55, 56, 57, 58, 59).

No caso em que o Hamiltoniano depende do tempo, o operador métrico do espaço de Hilbert, em geral, também depende. Desta forma, como proposto por Fring e Moussa (52), inicialmente considera-se duas equações de Schrödinger

$$i\hbar\partial_t|\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\Psi(t)\rangle, \quad \hat{H}(t) \neq \hat{H}^\dagger(t), \quad (1.33a)$$

$$i\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle = \hat{h}(t)|\psi(t)\rangle, \quad \hat{h}(t) = \hat{h}^\dagger(t), \quad (1.33b)$$

cujas soluções estão conectadas através do mapa de Dyson dependente do tempo conforme a relação

$$|\psi(t)\rangle = \hat{\eta}(t)|\Psi(t)\rangle, \quad (1.34)$$

de maneira similar a que ocorre no caso independente do tempo.

Podemos encontrar a relação entre os Hamiltonianos $\hat{H}(t)$ e $\hat{h}(t)$ por meio da substituição de (1.34) em (1.33), o que resulta em

$$\hat{h}(t) = \hat{\eta}(t)\hat{H}(t)\hat{\eta}^{-1}(t) + i\hbar[\partial_t\hat{\eta}(t)]\hat{\eta}^{-1}(t). \quad (1.35)$$

Assume-se que $\hat{h}(t)$ é um operador Hermitiano de modo que, aplicando-se a condição $\hat{h}(t) = \hat{h}^\dagger(t)$ em (1.35), obtém-se a relação de quasi-hermiticidade dependente do

tempo

$$\hat{H}^\dagger(t)\hat{\Theta}(t) - \hat{\Theta}(t)\hat{H}(t) = i\hbar\partial_t\hat{\Theta}(t), \quad (1.36)$$

em que identificamos o operador métrico dependente do tempo $\hat{\Theta}(t) = \hat{\eta}^\dagger(t)\hat{\eta}(t)$. Esse operador define um espaço de Hilbert dinâmico no qual as amplitudes de probabilidade nas representações, Hermitiana e não-Hermitiana, ficam relacionadas conforme segue

$$\langle\tilde{\Psi}(t)|\Psi(t)\rangle_{\Theta(t)} = \langle\tilde{\Psi}(t)|\hat{\Theta}(t)|\Psi(t)\rangle = \langle\tilde{\psi}(t)|\psi(t)\rangle, \quad (1.37)$$

em que os estados $|\Psi(t)\rangle$ e $|\psi(t)\rangle$, bem como $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$ e $|\tilde{\psi}(t)\rangle$, estão relacionados pela equação (1.34).

Além disso, os observáveis não-Hermitiano e Hermitiano, $\hat{O}(t)$ e $\hat{o}(t)$, respectivamente, estão vinculados por meio da relação

$$\hat{O}(t) = \hat{\eta}^{-1}(t)\hat{o}(t)\hat{\eta}(t), \quad (1.38)$$

que implica a igualdade

$$\langle\hat{O}(t)\rangle_{\Theta(t),\Psi(t)} = \langle\Psi(t)|\hat{\Theta}(t)\hat{O}(t)|\Psi(t)\rangle = \langle\psi(t)|\hat{o}(t)|\psi(t)\rangle = \langle\hat{o}(t)\rangle_{\psi(t)}. \quad (1.39)$$

Nota-se que, diferentemente do caso em que a métrica é independente do tempo, o Hamiltoniano não é um observável em geral, uma vez que ele não satisfaz a relação de pseudo-hermiticidade

$$\hat{H}^\dagger(t)\hat{\Theta}(t) = \hat{\Theta}(t)\hat{H}(t) + i\hbar\partial_t\hat{\Theta}(t) \neq \hat{\Theta}(t)\hat{H}(t),$$

e, conseqüentemente, não está associado a um Hamiltoniano Hermitiano via transformação de similaridade, visto que ambos Hamiltonianos, $\hat{H}(t)$ e $\hat{h}(t)$, relacionam-se via

$$\hat{H}(t) = \hat{\eta}^{-1}(t)\hat{h}(t)\hat{\eta}(t) - i\hbar\hat{\eta}^{-1}(t)[\partial_t\hat{\eta}(t)] \neq \hat{\eta}^{-1}(t)\hat{h}(t)\hat{\eta}(t).$$

O Hamiltoniano dependente do tempo é um observável apenas quando a métrica é independente do tempo $\hat{\Theta}(t) = \hat{\Theta}_0 = \hat{\eta}_0^\dagger\hat{\eta}_0$, pois a relação de quasi-hermiticidade dependente do tempo expressa em (1.36) se reduz a

$$\hat{H}^\dagger(t)\hat{\Theta}_0 = \hat{\Theta}_0\hat{H}(t), \quad (1.40)$$

e, por conseguinte,

$$\hat{H}(t) = \hat{\eta}_0^{-1}\hat{h}(t)\hat{\eta}_0. \quad (1.41)$$

Mas, vejamos que insistir na observabilidade do Hamiltoniano é algo bastante restritivo neste caso, pois apesar dos parâmetros do Hamiltoniano dependerem do tempo, a métrica deve ser independente do tempo. Além disso, quando o Hamiltoniano depende explicitamente do tempo, ele não representa necessariamente a energia total do sistema na formulação Hamiltoniana e, por isso, não há razão pela qual seja necessário considerá-lo como representando um observável. Portanto, no caso em que a métrica depende do tempo, é conveniente tratar o operador Hamiltoniano como sendo apenas o gerador de evolução temporal.

Em suma, para que haja uma dinâmica unitária deve-se fazer a escolha: (i) Métrica independente do tempo e Hamiltoniano observável ou (ii) Métrica dependente do tempo e Hamiltoniano não-observável. Ainda assim, é possível definir um observável associado ao operador \hat{h} a partir da relação (1.35)

$$\hat{H}(t) = \hat{\eta}^{-1}(t)\hat{h}(t)\hat{\eta}(t) = \hat{H}(t) + i\hbar\hat{\eta}^{-1}(t)\partial_t\hat{\eta}(t). \quad (1.42)$$

Note que $\hat{H}(t)$ não satisfaz as equações de Schrödinger em (1.33) e, por isso, não devemos nos referir a ele como sendo um operador Hamiltoniano. Além disso, este operador é comumente chamado de operador de energia (54).

A solução formal da equação de Schrödinger pseudo-Hermitiana (1.33a) pode ser escrita da seguinte forma

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\Psi(t_0)\rangle, \quad (1.43)$$

em que $\hat{U}(t, t_0)$ é o operador de evolução temporal pseudo-unitário. Enquanto a equação de Schrödinger Hermitiana (1.33b) tem como solução formal

$$|\psi(t)\rangle = \hat{u}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \quad (1.44)$$

em que $\hat{u}(t, t_0)$ é o operador de evolução temporal unitário. A partir das relações (1.34), (1.43) e (1.44), pode-se escrever

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \hat{\eta}^{-1}(t)|\psi(t)\rangle \\ &= \hat{\eta}^{-1}(t)\hat{u}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \\ &= \hat{U}(t, t_0)\hat{\eta}^{-1}(t_0)|\psi(t_0)\rangle, \end{aligned} \quad (1.45)$$

de modo que a relação entre os operadores de evolução temporal \hat{U} e \hat{u} , em ambas as representações, é dada por

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{\eta}^{-1}(t)\hat{u}(t, t_0)\hat{\eta}(t_0). \quad (1.46)$$

Com isso podemos obter o operador de evolução temporal pseudo-unitário, através do operador de evolução temporal unitário e do mapa de Dyson nos instantes de tempo t e t_0 .

1.3 ORGANIZAÇÃO DA TESE

Após a breve revisão histórica da mecânica quântica, e do formalismo pseudo-Hermitiano da mecânica quântica que está bem estabelecido, a partir do segundo capítulo iniciamos os trabalhos autorais.

No Capítulo 2, tratamos do efeito Casimir dinâmico quando descrito por meio de um Hamiltoniano pseudo-Hermitiano dependente do tempo. A não-hermiticidade é introduzida de forma *ad hoc* por meio de um bombeio paramétrico desbalanceado. Esse tratamento permite encontrar uma taxa de produção de fótons muito maior quando comparado com o caso Hermitiano descrito pelo Hamiltoniano de Law. Vale destacar que este trabalho tem um papel central na elaboração desta tese, pois é a partir deste estudo que verificamos a possibilidade de eventuais ganhos, por meio da construção adequada de métricas do espaço de Hilbert, em sistemas não-Hermitianos quando comparamos com sistemas Hermitianos.

No Capítulo 3, utilizamos o formalismo não-Hermitiano para obter uma dinâmica unitária de um sistema de dois níveis que evolui de acordo com a equação de Schrödinger fracionária. A evolução temporal de um sistema que evolui de acordo com a equação de Schrödinger fracionária não é unitária, o que leva ao problema da não-conservação de probabilidade. Este problema, no entanto, pode ser resolvido mapeando esta evolução em um espaço de Hilbert com uma métrica dependente do tempo, no qual o sistema evolui unitariamente e, por conseguinte, a probabilidade é conservada. Para elucidar este procedimento, investigamos três exemplos simples para os quais encontramos o operador de evolução temporal unitário, e calculamos algumas quantidades observáveis.

No Capítulo 4, apresentamos um estudo envolvendo as simetrias dinâmicas dos grupos $SU(1, 1)$ e $SU(2)$ no contexto não-Hermitiano. Na representação bosônica de dois-modos das álgebras associadas a esses grupos, é possível analisar que um Hamiltoniano não-Hermitiano modulado por frequência complexa, que aparentemente não-possui termos de interação, pode apresentar emaranhamento devido à métrica do espaço de Hilbert. Isso é ilustrado através do cálculo da entropia linear para os

sistemas que incorporam as álgebras de Lie, $\mathfrak{su}(1, 1)$ e $\mathfrak{su}(2)$, para o caso em que a parte imaginária da frequência complexa é linear no tempo.

As considerações finais e perspectivas futuras seguem no Capítulo 5, e são seguidas das Referências. Por fim, no Anexo A listamos as publicações referentes a presente tese, e também outras contribuições feitas durante o doutoramento.

2 EFEITO CASIMIR DINÂMICO

Em 1948, H. B. G. Casimir demonstrou que duas placas metálicas paralelas e neutras sofrem uma força de atração mútua (60). Esta força pode ser interpretada como consequência da alteração da energia de ponto zero do vácuo eletromagnético devido à presença das placas, constituindo, portanto, um fenômeno intrinsecamente quântico (61). Este fenômeno, então conhecido como efeito Casimir estático, foi confirmado experimentalmente, pela primeira vez em 1958, por M. Sparnaay (62) e, mais recentemente, no final da década de 1990, por Lamoreaux (63) e Mohideen (64), através de experimentos mais precisos que os precedentes.

Foi o próprio Casimir que primeiro considerou a importância dos aspectos geométricos das fronteiras impostas pelas placas metálicas na distorção do estado de vácuo, propondo em 1953, em termos dessa consideração, um modelo semiclássico para a estabilidade do elétron (65). Neste modelo, assume-se que o elétron seja constituído por uma casca esférica perfeitamente condutora com carga total q , na qual a força de repulsão de Coulomb é balanceada pela força atrativa de Casimir. Em 1968, T. H. Boyer (66) demonstrou que a força de Casimir associada à geometria esférica é repulsiva, invalidando a tentativa de explicar a estabilidade do elétron através da energia de Casimir. Apesar deste resultado negativo, o modelo do elétron teve o mérito de demonstrar que o sinal da força de Casimir depende da geometria do problema. No início da década de 1990, tornou-se evidente que esta força depende também das propriedades eletromagnéticas do meio (67). O desenvolvimento do *bag model* no início da década de 1970 (68, 69, 70), descrevendo os hadrons, como quarks e anti-quarks, confinados no interior de uma cavidade esférica, renovou o interesse pelo efeito Casimir com geometria esférica (71, 72, 73). Mais recentemente, em uma abordagem geral, calculou-se a energia de Casimir entre objetos compactos arbitrários (74).

O efeito Casimir pode ser descrito, de maneira geral, como sendo uma perturbação causada no vácuo quântico devido à presença de um potencial clássico externo: uma fronteira física, como originalmente verificado por Casimir, ou um campo clássico arbitrário. Na situação em que este potencial apresenta dependência temporal decorre o efeito Casimir dinâmico que, dentre outros fenômenos, pode levar à criação e aniquilação de partículas a partir do vácuo. Este efeito tem sido estudado desde a quantização do campo de radiação em uma cavidade com espelhos móveis, empre-

endida por Moore (75) na década de 1970. A partir desta contribuição, o problema da quantização do campo eletromagnético em um meio dielétrico com propriedades dependentes do tempo, inserido em uma cavidade estática, foi desenvolvido duas décadas mais tarde por Dodonov e co-autores (76). Verifica-se que tanto o movimento não uniforme das fronteiras da cavidade como a mudança súbita no índice de refração do dielétrico produzem efeitos similares: criação de fótons a partir do vácuo. As propriedades estatísticas quânticas dos fótons criados, que devem exibir aspectos não clássicos, foram abordadas nas referências (77) e (78), onde se prediz a ocorrência do efeito de antiagrupamento, típico do campo de radiação quando em um estado comprimido (79), no qual a variância de uma das quadraturas é menor que o ruído do vácuo.

A consideração dos efeitos da temperatura no processo de criação de partículas foi também investigado, tanto através da consideração de um modelo formal para o reservatório térmico (80) como através da suposição de um sistema fechado em equilíbrio térmico (81). Com relação à relevância dos efeitos térmicos para a verificação experimental do efeito Casimir dinâmico, demonstra-se que temperaturas finitas aumentam a taxa temporal de criação de partículas em ordens de magnitude (81).

É importante mencionar a formulação do efeito Casimir dinâmico desenvolvida por Law (82, 83), que se vale de um Hamiltoniano efetivo para a descrição dinâmica do campo da cavidade via representação de Schrödinger. Através deste Hamiltoniano efetivo, que descreve os aspectos essenciais da física do efeito Casimir dinâmico, torna-se possível obter, em princípio, a forma explícita do estado do campo. Mais que isso, torna-se possível uma abordagem direta das ressonâncias envolvidas no processo de criação de partículas, o que é igualmente relevante, além da temperatura, para a verificação experimental do efeito Casimir dinâmico. Estas ressonâncias envolvem a frequência de oscilação da fronteira móvel e algum modo da cavidade estática. Em linhas gerais, o Hamiltoniano efetivo obtido por Law, exhibe tanto o acoplamento entre os modos instantâneos da cavidade, responsável pelos espalhamentos intermodais das excitações criadas na cavidade, bem como o (dominante) processo de amplificação paramétrica do modo ressonante com a oscilação da fronteira móvel. Uma generalização do procedimento de Law foi proposta em (84), no qual os autores obtiveram um Hamiltoniano efetivo para o efeito Casimir dinâmico no caso de uma cavidade não ideal.

Nos últimos anos, o efeito Casimir tem sido reivindicado para a explicação dos mais diversos fenômenos. Na nanotecnologia, tornou-se imprescindível a consideração da força de Casimir em função do grau de miniaturização que se atingiu na fabricação dos dispositivos eletrônicos (85, 86, 87, 88). Esforços em tecnologia têm sido direcionados no sentido a controlar a inevitável ocorrência da força de atração de Casimir entre os dispositivos (89). Destacamos também as possíveis implicações do efeito Casimir no campo da biologia, como apontado por Davies (90), em um contexto no qual a denominada força de Casimir-Polder (91), associada à atração entre um átomo e um dielétrico, pode desempenhar um papel importante.

2.1 O HAMILTONIANO EFETIVO DE LAW

Nesta seção discutiremos o resultado de C. K. Law (82, 83) para obter o Hamiltoniano efetivo que descreve o efeito Casimir dinâmico, o qual permite derivar características importantes sobre este fenômeno através da equação de Schrödinger.

Law considerou uma cavidade unidimensional formada por dois espelhos perfeitamente refletivos. Um dos espelhos é deixado fixo na posição $x = 0$ e o outro pode se mover em uma trajetória prescrita $x = q(t)$. O espaço entre os espelhos contém um meio dielétrico linear, sem perdas e não dispersivo. A permissividade dielétrica relativa ao meio $\epsilon_d(x, t)$ é uma função real do espaço e do tempo. Além disso, considera-se que a permeabilidade magnética μ_d é constante em toda a cavidade.

Para escrever a densidade Lagrangiana clássica do campo eletromagnético de uma cavidade, pode-se assumir que o campo elétrico $\mathbf{E}(x, t)$ é polarizado linearmente na direção \mathbf{e}_z , de modo que as equações de Maxwell fornecem (75)

$$\mathbf{E}(x, t) = E(x, t)\mathbf{e}_z = -\dot{A}(x, t)\mathbf{e}_z, \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{A}(x, t) = A(x, t)\mathbf{e}_z \quad (2.1b)$$

$$\mathbf{B}(x, t) = \nabla \times \mathbf{A}(x, t) = -\partial_x A(x, t)\mathbf{e}_y = B(x, t)\mathbf{e}_y. \quad (2.1c)$$

em que em que $\mathbf{A}(x, t)$ é o potencial vetor e $\mathbf{B}(x, t)$ é o campo magnético. Denotamos a derivada em relação ao tempo com um ponto sobreposto. Com isso, pode-se escrever a densidade Lagrangiana do sistema (considerando unidades naturais $c = 1$ e $\mu_d = 1$) como sendo (75, 82):

$$\mathcal{L}(A, \dot{A}, \partial_x A) = \frac{1}{2} \left\{ \epsilon_d(x, t) \dot{A}^2(x, t) - [\partial_x A(x, t)]^2 \right\}. \quad (2.2)$$

As equações de onda são então construídas através das equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_j} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_j} - \sum_{i=x,y,z} \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i A_j)} \right). \quad (2.3)$$

que fornece a seguinte equação:

$$\frac{d}{dt} \left[\epsilon_d(x, t) \dot{A}(x, t) \right] = \partial_{xx} A(x, t). \quad (2.4)$$

Além disso, deve-se impor as condições de contorno

$$A(0, t) = 0, \quad A(q(t), t) = 0, \quad (2.5)$$

as quais garantem que o campo elétrico é sempre nulo no referencial de repouso nas superfícies dos espelhos.

A quantização do campo é obtida pela construção de um operador de campo $\hat{A}(x, t)$ associado ao potencial vetor $A(x, t)$ tal que satisfaz a equação

$$\frac{d}{dt} \hat{\pi}(x, t) = \partial_{xx} \hat{A}(x, t), \quad \hat{A}(x, t) = 0, \quad \hat{A}(q(t), t) = 0, \quad (2.6)$$

em que o operador $\hat{\pi}(x, t)$ representa o *momentum* conjugado identificado a partir da densidade Lagrangiana como sendo

$$\hat{\pi}(x, t) = \epsilon_d(x, t) \dot{\hat{A}}(x, t), \quad (2.7)$$

sendo as soluções para o operador de campo indiferente do Hamiltoniano. Além disso, os campos quantizados devem satisfazer as seguintes relações de comutação:

$$[\hat{A}(x, t), \hat{A}(x', t)] = 0, \quad [\hat{\pi}(x, t), \hat{\pi}(x', t)] = 0, \quad [\hat{A}(x, t), \hat{\pi}(x', t)] = i\delta(x - x'), \quad (2.8)$$

em que x e x' são as coordenadas espaciais definidas na região entre os espelhos, excluindo-se as bordas.

De acordo com Law (82), uma formulação Hamiltoniana completa do problema da cavidade com espelho móvel é complicada, porque envolve a descrição da interação entre o campo e as correntes de superfície induzidas nos espelhos. Então, para escrever o Hamiltoniano precisaríamos conhecer essas correntes e as interações com o campo. Para contornar este problema, torna-se conveniente impor condições de contorno sobre os campos para obter uma descrição simplificada da ação das fronteiras sobre os campos. Assim, no caso de espelhos perfeitamente refletivos, pode-se considerar a condição de que os campos são nulos sobre eles. Entretanto, uma vez

que as condições de contorno são impostas não é possível encontrar um Hamiltoniano fundamental consistente, como apontado por Moore (75). Isso pode ser verificado por contradição: para isso supõe-se a existência de um Hamiltoniano, gerador do operador unitário de evolução temporal $\hat{U}(t)$, de acordo com o qual o operador de campo $\hat{A}(x, t)$ evolui conforme a transformação

$$\hat{A}(x, t) = \hat{U}(t)\hat{A}(x, 0)\hat{U}^\dagger(t), \quad t \geq 0. \quad (2.9)$$

Considerando-se inicialmente um ponto sobre o espelho móvel $(q(0), 0)$ tem-se, devido às condições de contorno, $\hat{A}(q(t), t) = 0$, o que torna impossível a obtenção de um valor não nulo para o operador de campo através de uma transformação unitária.

Contudo é possível construir um Hamiltoniano efetivo introduzindo uma base dependente do tempo $\{\phi_k(x, t)\}$ tal que a fronteira muda no tempo de acordo com $q(t)$. Nota-se que no caso em que $q(t) \rightarrow q_0$, tem-se $\{\phi_k(x, t)\} \rightarrow \{\phi_k(x)\}$ que nada mais é do que a base usual do problema de Sturm-Liouville para fronteiras estáticas. Então, o conjunto instantâneo de funções $\{\phi_k(x, t)\}$ surgem como soluções do problema de Sturm-Liouville (92) instantâneo dado pela equação

$$\partial_{xx}\phi_k(x, t) + \epsilon_d(x, t)\omega_k^2(t)\phi_k(x, t) = 0, \quad (2.10)$$

cujas soluções estão sujeitas às condições de contorno:

$$\phi_k(0, t) = 0, \quad \phi_k(q(t), t) = 0. \quad (2.11)$$

com $\omega_k^2(t)$ sendo os correspondentes autovalores do problema de Sturm-Liouville instantâneo. O significado físico das funções $\phi_k(x, t)$ pode ser pensado como se o sistema fosse “congelado” em um instante de tempo t_0 , de modo que a permissividade dielétrica e a posição do espelho móvel $\epsilon_d(x, t_0)$ e $q(t_0)$, respectivamente, estão parados e o conjunto de funções da base para o sistema é $\{\phi_k(x, t_0)\}$. Ou seja, o tempo tem papel de parâmetro em $\phi_k(x, t)$. Além disso, as funções do conjunto de base $\{\phi_k(x, t)\}$ obedecem a condição de ortonormalidade

$$\int_0^{q(t)} dx \epsilon_d(x, t) \phi_n(x, t) \phi_m(x, t) = \delta_{n,m}, \quad (2.12)$$

sendo um conjunto completo.

Os operadores $\hat{A}(x, t)$ e $\hat{\pi}(x, t)$ podem ser expandidos em termos das funções características instantâneas $\phi_n(x, t)$ em um instante de tempo t qualquer conforme:

$$\hat{A}(x, t) = \sum_k \hat{Q}_k(t) \phi_k(x, t), \quad (2.13a)$$

$$\hat{\pi}(x, t) = \epsilon_d(x, t) \sum_k \hat{P}_k(t) \phi_k(x, t), \quad (2.13b)$$

em que os operadores $\hat{Q}_k(t)$ e $\hat{P}_k(t)$ são dados por

$$\hat{Q}_k(t) = \int_0^{q(t)} dx \epsilon_d(x, t) \hat{A}(x, t) \phi_k(x, t), \quad (2.14a)$$

$$\hat{P}_k(t) = \int_0^{q(t)} dx \hat{\pi}(x, t) \phi_k(x, t), \quad (2.14b)$$

e, de acordo com as relações de comutação (2.8), devem satisfazer os seguintes comutadores:

$$[\hat{Q}_k(t), \hat{Q}_j(t)] = 0, \quad [\hat{P}_k(t), \hat{P}_j(t)] = 0, \quad [\hat{Q}_k(t), \hat{P}_j(t)] = i\delta_{k,j}. \quad (2.15)$$

O Hamiltoniano efetivo nas variáveis $\hat{Q}_k(t)$ e $\hat{P}_k(t)$ pode ser intuído das equações de movimento de Heisenberg $i\hbar d\hat{O}/dt = [\hat{O}, \hat{\mathcal{H}}]$. Mas, antes de entrarmos nas equações de movimento, calcula-se a derivada total em relação ao tempo do operador $\hat{Q}_k(t)$ que resulta na expressão

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{Q}_k(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^{q(t)} dx \epsilon_d(x, t) \hat{A}(x, t) \phi_k(x, t) \\ &= \int_0^{q(t)} dx \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon_d(x, t) \hat{A}(x, t) \phi_k(x, t)] + \frac{dq(t)}{dt} \epsilon_d(q(t), t) \hat{A}(q(t), t) \phi_k(q(t), t) \\ &= \hat{P}_k(t) + \int_0^{q(t)} dx \dot{\epsilon}_d(x, t) \hat{A}(x, t) \phi_k(x, t) + \int_0^{q(t)} dx \epsilon_d(x, t) \hat{A}(x, t) \dot{\phi}_k(x, t), \end{aligned} \quad (2.16)$$

em que os dois últimos termos podem ser reescritos por meio de (2.13a) conforme

$$\begin{aligned} &\int_0^{q(t)} dx \dot{\epsilon}_d(x, t) \hat{A}(x, t) \phi_k(x, t) + \int_0^{q(t)} dx \epsilon_d(x, t) \hat{A}(x, t) \dot{\phi}_k(x, t) \\ &= \sum_j \hat{Q}_j(t) \left[\int_0^{q(t)} dx \dot{\epsilon}_d(x, t) \phi_j(x, t) \phi_k(x, t) + \int_0^{q(t)} dx \epsilon_d(x, t) \phi_j(x, t) \dot{\phi}_k(x, t) \right]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

O termo entre colchetes pode ser reescrito aplicando-se a derivada total em relação ao tempo da condição de ortonormalidade expressa em (2.12),

$$\frac{d}{dt} \int_0^{q(t)} dx \epsilon_d(x, t) \phi_j(x, t) \phi_k(x, t) = 0, \quad (2.18)$$

o que leva ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} & \int_0^{q(t)} dx \dot{\epsilon}_d(x, t) \phi_j(x, t) \phi_k(x, t) + \int_0^{q(t)} dx \epsilon_d(x, t) \phi_j(x, t) \dot{\phi}_k(x, t) \\ &= - \int_0^{q(t)} dx \epsilon_d(x, t) \phi_k(x, t) \dot{\phi}_j(x, t). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Assim, pode-se reescrever a expressão em (2.17) conforme segue

$$\begin{aligned} & \int_0^{q(t)} dx \dot{\epsilon}_d(x, t) \hat{A}(x, t) \phi_k(x, t) + \int_0^{q(t)} dx \epsilon_d(x, t) \hat{A}(x, t) \dot{\phi}_k(x, t) \\ &= - \sum_j \hat{Q}_j(t) \int_0^{q(t)} dx \epsilon_d(x, t) \phi_k(x, t) \dot{\phi}_j(x, t), \end{aligned} \quad (2.20)$$

e a equação (2.16) se torna

$$\frac{d\hat{Q}_k(t)}{dt} = \hat{P}_k(t) + \sum_j \hat{Q}_j(t) G_{k,j}(t), \quad (2.21)$$

em que os coeficientes anti-simétricos $G_{k,j}$ são dados por

$$G_{k,j}(t) \equiv - \int_0^{q(t)} dx \epsilon_d(x, t) \phi_k(x, t) \dot{\phi}_j(x, t). \quad (2.22)$$

Estes coeficientes descrevem a intensidade do acoplamento entre dois modos, de tal forma que devem se anular no caso em que o espelho se encontra em repouso (caso estático).

De forma análoga, aplica-se a derivada em relação ao tempo para a variável $\hat{P}_k(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{P}_k(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^{q(t)} dx \hat{\pi}(x, t) \phi_k(x, t) \\ &= \int_0^{q(t)} dx \frac{\partial}{\partial t} [\hat{\pi}(x, t) \phi_k(x, t)] + \frac{dq(t)}{dt} \hat{\pi}(q(t), t) \phi_k(q(t), t), \\ &= \int_0^{q(t)} dx \dot{\hat{\pi}}(x, t) \phi_k(x, t) + \int_0^{q(t)} dx \hat{\pi}(x, t) \dot{\phi}_k(x, t). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Verifica-se que

$$\frac{d\hat{\pi}(x, t)}{dt} = \frac{\partial \hat{\pi}(x, t)}{\partial t},$$

de modo que o primeiro termo do lado direito da equação (2.23) pode ser reescrito

utilizando as equações (2.6), (2.13a) e (2.10), de tal forma que

$$\begin{aligned}
\int_0^{q(t)} dx \dot{\pi}(x, t) \phi_k(x, t) &= \int_0^{q(t)} dx \partial_{xx} \hat{A}(x, t) \phi_k(x, t) \\
&= \sum_j \hat{Q}_j(t) \int_0^{q(t)} dx \partial_{xx} \phi_j(x, t) \phi_k(x, t) \\
&= - \sum_j \hat{Q}_j(t) \omega_j^2(t) \delta_{j,k} \\
&= -\hat{Q}_k(t) \omega_k^2(t).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Já o segundo termo do lado direito de (2.23), utilizando-se (2.13b), fica dado por

$$\int_0^{q(t)} dx \hat{\pi}(x, t) \dot{\phi}_k(x, t) = - \sum_j \hat{P}_j(t) G_{j,k}(t), \tag{2.25}$$

em que a função $G_{j,k}(t)$ está definida em (2.22). Com isso, a equação (2.23) se torna

$$\frac{d\hat{P}_k(t)}{dt} = -\omega_k^2(t) \hat{Q}_k(t) - \sum_j \hat{P}_j(t) G_{j,k}(t). \tag{2.26}$$

Em suma, tem-se as seguintes equações:

$$\frac{d\hat{Q}_k(t)}{dt} = \hat{P}_k(t) + \sum_j \hat{Q}_j(t) G_{k,j}(t), \tag{2.27a}$$

$$\frac{d\hat{P}_k(t)}{dt} = -\omega_k^2(t) \hat{Q}_k(t) - \sum_j \hat{P}_j(t) G_{j,k}(t). \tag{2.27b}$$

Neste momento, no sentido de construir o Hamiltoniano efetivo da dinâmica, evocam-se as equações de movimento de Heisenberg ($\hbar = 1$) para $\hat{Q}_k(t)$ e $\hat{P}_k(t)$

$$i \frac{d\hat{Q}_k(t)}{dt} = [\hat{Q}_k(t), \hat{H}_{\text{eff}}(t)], \tag{2.28a}$$

$$i \frac{d\hat{P}_k(t)}{dt} = [\hat{P}_k(t), \hat{H}_{\text{eff}}(t)], \tag{2.28b}$$

em que o Hamiltoniano efetivo $\hat{H}_{\text{eff}}(t)$ depende das variáveis $\hat{Q}_k(t)$ e $\hat{P}_k(t)$. Intui-se da forma das equações (2.27a) e (2.27b) que a forma geral do Hamiltoniano efetivo deve ser quadrática, o que significa que

$$\hat{H}_{\text{eff}}(t) = \sum_{i,j} [a_{ij} \hat{P}_i \hat{P}_j + b_{ij} \hat{Q}_i \hat{Q}_j + c_{ij} (\hat{Q}_i \hat{P}_j + \hat{P}_i \hat{Q}_j)], \tag{2.29}$$

em que todos os coeficientes a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} e d_{ij} também dependem do tempo. Omitimos aqui a dependência explícita do tempo apenas para simplificar a notação.

Assim, com a forma geral do Hamiltoniano efetivo, determina-se o comutador do lado direito da equação (2.28a)

$$[\hat{Q}_k, \hat{H}_{\text{eff}}] = \sum_{i,j} \left\{ a_{ij} [\hat{Q}_k, \hat{P}_i \hat{P}_j] + b_{ij} [\hat{Q}_k, \hat{Q}_i \hat{Q}_j] + c_{ij} \left([\hat{Q}_k, \hat{Q}_i \hat{P}_j] + [\hat{Q}_k, \hat{P}_i \hat{Q}_j] \right) \right\}. \quad (2.30)$$

Das relações de comutação expressas em (2.15), tem-se

$$[\hat{Q}_k, \hat{P}_i \hat{P}_j] = i\delta_{k,i} \hat{P}_j + i\delta_{k,j} \hat{P}_i, \quad (2.31a)$$

$$[\hat{Q}_k, \hat{Q}_i \hat{Q}_j] = 0, \quad (2.31b)$$

$$[\hat{Q}_k, \hat{Q}_i \hat{P}_j] = i\delta_{k,i} \hat{Q}_j, \quad (2.31c)$$

$$[\hat{Q}_k, \hat{P}_i \hat{Q}_j] = i\delta_{k,i} \hat{Q}_j, \quad (2.31d)$$

que permite escrever

$$[\hat{Q}_k, \hat{H}_{\text{eff}}] = i \sum_j \left[(a_{kj} + a_{jk}) \hat{P}_j + (c_{jk} + c_{kj}) \hat{Q}_j \right]. \quad (2.32)$$

Enquanto, o comutador do lado direito da equação (2.28b) fica dado por

$$[\hat{P}_k, \hat{H}_{\text{eff}}] = \sum_{i,j} \left\{ a_{ij} [\hat{P}_k, \hat{P}_i \hat{P}_j] + b_{ij} [\hat{P}_k, \hat{Q}_i \hat{Q}_j] + c_{ij} \left([\hat{P}_k, \hat{Q}_i \hat{P}_j] + [\hat{P}_k, \hat{P}_i \hat{Q}_j] \right) \right\}, \quad (2.33)$$

em que as relações de comutação (2.15) permitem escrever

$$[\hat{P}_k, \hat{P}_i \hat{P}_j] = 0, \quad (2.34a)$$

$$[\hat{P}_k, \hat{Q}_i \hat{Q}_j] = -i\delta_{k,i} \hat{Q}_j - i\delta_{k,j} \hat{Q}_i, \quad (2.34b)$$

$$[\hat{P}_k, \hat{Q}_i \hat{P}_j] = -i\delta_{k,i} \hat{P}_j, \quad (2.34c)$$

$$[\hat{P}_k, \hat{P}_i \hat{Q}_j] = -i\delta_{k,i} \hat{P}_j, \quad (2.34d)$$

que leva a

$$[\hat{P}_k, \hat{H}_{\text{eff}}] = -i \sum_j \left[(b_{kj} + b_{jk}) \hat{Q}_j + (c_{kj} + c_{jk}) \hat{P}_j \right]. \quad (2.35)$$

Com os resultados expressos em (2.32) e (2.35), as equações de movimento de Heisenberg (2.28a) e (2.28b) fornecem

$$\frac{d\hat{Q}_k}{dt} = \sum_j \left[(a_{kj} + a_{jk}) \hat{P}_j + (c_{jk} + c_{kj}) \hat{Q}_j \right], \quad (2.36a)$$

$$\frac{d\hat{P}_k}{dt} = - \sum_j \left[(b_{kj} + b_{jk}) \hat{Q}_j + (c_{kj} + c_{jk}) \hat{P}_j \right], \quad (2.36b)$$

de modo que essas equações podem ser comparadas com aquelas em (2.27a) e (2.27b) conforme

$$\hat{P}_k + \sum_j \hat{Q}_j G_{k,j} = \sum_j [(a_{kj} + a_{jk})\hat{P}_j + (c_{jk} + c_{kj})\hat{Q}_j], \quad (2.37a)$$

$$-\omega_k^2 \hat{Q}_k - \sum_j \hat{P}_j G_{j,k} = -\sum_j [(b_{kj} + b_{jk})\hat{Q}_j + (c_{kj} + c_{jk})\hat{P}_j], \quad (2.37b)$$

que leva ao conjunto de equações,

$$a_{kj} + a_{jk} = \delta_{jk}, \quad (2.38a)$$

$$b_{kj} + b_{jk} = \delta_{jk} \omega_k^2, \quad (2.38b)$$

$$c_{jk} + c_{kj} = G_{k,j}, \quad (2.38c)$$

e, portanto,

$$a_{kj} = -a_{jk}, \quad j \neq k, \quad (2.39a)$$

$$a_{kk} = 1/2, \quad j = k, \quad (2.39b)$$

$$b_{kj} = -b_{jk}, \quad j \neq k, \quad (2.39c)$$

$$b_{kk} = \omega_k^2/2, \quad j = k. \quad (2.39d)$$

O Hamiltoniano efetivo $\hat{H}_{\text{eff}}(t)$ pode ser reescrito da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{eff}}(t) = & \sum_j a_{jj} \hat{P}_j \hat{P}_j + \sum_{j>i} (a_{ij} + a_{ji}) \hat{P}_i \hat{P}_j + \sum_j b_{jj} \hat{Q}_j \hat{Q}_j + \sum_{j>i} (b_{ij} + b_{ji}) \hat{Q}_i \hat{Q}_j \\ & + \sum_j c_{jj} (\hat{Q}_j \hat{P}_j + \hat{P}_j \hat{Q}_j) + \sum_{i \neq j} (c_{ij} + c_{ji}) \hat{P}_j \hat{Q}_i. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Uma vez que $a_{ij} = -a_{ji}$, $b_{ij} = -b_{ji}$ e $c_{ij} + c_{ji} = G_{j,i}$ para $i \neq j$; e $a_{jj} = 1/2$, $b_{jj} = \omega_j^2(t)/2$ para $i = j$, tem-se

$$\hat{H}_{\text{eff}}(t) = \frac{1}{2} \sum_j \left(\hat{P}_j^2 + \omega_j^2 \hat{Q}_j^2 \right) + \sum_j G_{j,j} \left(\hat{Q}_j \hat{P}_j + \hat{P}_j \hat{Q}_j \right) + \sum_{i \neq j} G_{j,i} \hat{P}_j \hat{Q}_i. \quad (2.41)$$

Para descrever o sistema no espaço de Fock é conveniente introduzir os modos bosônicos instantâneos,

$$\hat{a}_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k(t)}} \left[\omega_k(t) \hat{Q}_k(t) + i \hat{P}_k(t) \right], \quad (2.42a)$$

$$\hat{a}_k^\dagger(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k(t)}} \left[\omega_k(t) \hat{Q}_k(t) - i \hat{P}_k(t) \right], \quad (2.42b)$$

de forma que os operadores $\hat{Q}_k(t)$ e $\hat{P}_k(t)$ podem ser reescritos conforme

$$\hat{Q}_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k(t)}} \left[\hat{a}_k(t) + \hat{a}_k^\dagger(t) \right], \quad (2.43a)$$

$$\hat{P}_k(t) = -i\sqrt{\frac{\omega_k(t)}{2}} \left[\hat{a}_k(t) - \hat{a}_k^\dagger(t) \right]. \quad (2.43b)$$

Calculamos a derivada em relação ao tempo de \hat{Q}_k e \hat{P}_k :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{Q}_k}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger \right), \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \frac{1}{2\omega_k} \frac{d\omega_k}{dt} \left(\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger \right) + \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(\frac{d\hat{a}_k}{dt} + \frac{d\hat{a}_k^\dagger}{dt} \right), \end{aligned} \quad (2.44a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{P}_k}{dt} &= -i \frac{d}{dt} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left(\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger \right), \\ &= -\frac{i}{2\sqrt{2\omega_k}} \frac{d\omega_k}{dt} \left(\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger \right) - i\sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left(\frac{d\hat{a}_k}{dt} - \frac{d\hat{a}_k^\dagger}{dt} \right), \end{aligned} \quad (2.44b)$$

e das equações de movimento de Heisenberg (2.28a) e (2.28b), temos

$$i \left(\frac{d\hat{a}_k}{dt} + \frac{d\hat{a}_k^\dagger}{dt} \right) = \frac{i}{2\omega_k} \frac{d\omega_k}{dt} \left(\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger \right) + [\hat{a}_k, \hat{H}_{\text{eff}}] + [\hat{a}_k^\dagger, \hat{H}_{\text{eff}}], \quad (2.45)$$

$$i \left(\frac{d\hat{a}_k}{dt} - \frac{d\hat{a}_k^\dagger}{dt} \right) = -\frac{i}{2\omega_k} \frac{d\omega_k}{dt} \left(\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger \right) + [\hat{a}_k, \hat{H}_{\text{eff}}] - [\hat{a}_k^\dagger, \hat{H}_{\text{eff}}], \quad (2.46)$$

de modo que

$$i \frac{d\hat{a}_k}{dt} = \frac{i}{2\omega_k} \frac{d\omega_k}{dt} \hat{a}_k^\dagger + [\hat{a}_k, \hat{H}_{\text{eff}}], \quad (2.47)$$

$$i \frac{d\hat{a}_k^\dagger}{dt} = \frac{i}{2\omega_k} \frac{d\omega_k}{dt} \hat{a}_k + [\hat{a}_k^\dagger, \hat{H}_{\text{eff}}]. \quad (2.48)$$

Uma vez que $[\hat{a}_k, \hat{a}_j^{\dagger 2}] = 2\delta_{k,j}\hat{a}_k^\dagger$ e $[\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_j^2] = -2\delta_{k,j}\hat{a}_k$, podemos reescrever o lado direito na forma de um comutador da seguinte maneira:

$$i \frac{d\hat{a}_k}{dt} = \left[\hat{a}_k, \hat{H}_{\text{eff}} + \sum_j \frac{i}{4\omega_j} \frac{d\omega_j}{dt} (\hat{a}_j^{\dagger 2} - \hat{a}_j^2) \right], \quad (2.49)$$

$$i \frac{d\hat{a}_k^\dagger}{dt} = \left[\hat{a}_k^\dagger, \hat{H}_{\text{eff}} + \sum_j \frac{i}{4\omega_j} \frac{d\omega_j}{dt} (\hat{a}_j^{\dagger 2} - \hat{a}_j^2) \right], \quad (2.50)$$

em que a dependência temporal na frequência ω_k faz com que um termo adicional surja no Hamiltoniano efetivo na representação bosônica e, por isso, devemos redefinir o Hamiltoniano efetivo como sendo

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{eff}}(t) \equiv \hat{H}_{\text{eff}}(t) + i \sum_j \frac{1}{4\omega_j(t)} \frac{d\omega_j(t)}{dt} (\hat{a}_j^{\dagger 2} - \hat{a}_j^2). \quad (2.51)$$

Note que $\hat{H}_{\text{eff}}(t)$, em termos dos operadores bosônicos, assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{eff}}(t) = & \sum_j \omega_j \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \frac{1}{2} \right) + \frac{i}{2} \sum_j G_{jj} (\hat{a}_j^{\dagger 2} - \hat{a}_j^2) \\ & + \frac{i}{2} \sum_{i \neq j} \sqrt{\frac{\omega_j}{\omega_k}} G_{ji} (\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_j \hat{a}_i + \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i - \hat{a}_j \hat{a}_i^\dagger). \end{aligned} \quad (2.52)$$

e, por fim, o Hamiltoniano efetivo de Law $\hat{\mathcal{H}}_{\text{eff}}(t)$ fica dado por

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{\text{eff}}(t) = & \sum_j \omega_j(t) \left[\hat{a}_j^\dagger(t) \hat{a}_j(t) + \frac{1}{2} \right] + i \sum_j \xi_j(t) [\hat{a}_j^{\dagger 2}(t) - \hat{a}_j^2(t)] \\ & + \frac{i}{2} \sum_{i \neq j} \mu_{ji}(t) [\hat{a}_j^\dagger(t) \hat{a}_i^\dagger(t) - \hat{a}_j(t) \hat{a}_i(t) + \hat{a}_j^\dagger(t) \hat{a}_i(t) - \hat{a}_j(t) \hat{a}_i^\dagger(t)], \end{aligned} \quad (2.53)$$

em que $\xi_k(t)$ e $\mu_{ji}(t)$ ficam dadas por

$$\xi_j(t) \equiv \frac{G_{jj}(t)}{2} + \frac{1}{4\omega_j(t)} \frac{d\omega_j(t)}{dt}, \quad (2.54)$$

$$\mu_{ji}(t) \equiv \sqrt{\frac{\omega_j(t)}{\omega_i(t)}} G_{ji}(t). \quad (2.55)$$

Essas funções estão associadas à intensidade dos acoplamentos entre os modos — em que os termos $\hat{a}_j^{\dagger 2}(t) - \hat{a}_j^2(t)$ e $\hat{a}_j^\dagger(t) \hat{a}_i^\dagger(t) - \hat{a}_j(t) \hat{a}_i(t)$ estão relacionados à criação degenerada e não degenerada de partículas, respectivamente, enquanto o termo $\hat{a}_j^\dagger(t) \hat{a}_i(t) - \hat{a}_j(t) \hat{a}_i^\dagger(t)$ leva em conta processo de troca (espalhamento). Por fim, as equações de Heisenberg para os modos bosônicos ficam dadas por

$$i \frac{d\hat{a}_k(t)}{dt} = [\hat{a}_k(t), \hat{\mathcal{H}}_{\text{eff}}(t)], \quad (2.56)$$

$$i \frac{d\hat{a}_k^\dagger(t)}{dt} = [\hat{a}_k^\dagger(t), \hat{\mathcal{H}}_{\text{eff}}(t)]. \quad (2.57)$$

É importante notar que os operadores instantâneos dos modos dependem implicitamente do tempo, caso contrário, se houvesse dependência explícita no tempo, a equação de Heisenberg teria um termo adicional $\partial_t \hat{a}_k^{(\dagger)}(t)$ nas equações acima, levando em conta a dependência explícita do tempo. Este fato permite escrever o Hamiltoniano na representação de Schrödinger diretamente conforme

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{\text{eff}}(t) = & \sum_j \omega_j(t) \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \frac{1}{2} \right) + i \sum_j \xi_j(t) (\hat{a}_j^{\dagger 2} - \hat{a}_j^2) \\ & + \frac{i}{2} \sum_{i \neq j} \mu_{ji}(t) (\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_j \hat{a}_i + \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i - \hat{a}_j \hat{a}_i^\dagger), \end{aligned} \quad (2.58)$$

de modo que a dinâmica é descrita via equação de Schrödinger dependente do tempo.

O Hamiltoniano efetivo de Law tem sido utilizado para o monitoramento contínuo do efeito Casimir dinâmico com um detector amortecido (93), e uma versão com dissipação deste Hamiltoniano também foi obtida em (94), permitindo analisar os mecanismos de decoerência no contexto do efeito Casimir dinâmico não-ideal. Um modelo análogo para o efeito Casimir dinâmico foi proposto para sistemas de cavidades optomecânicas, em que a modulação do comprimento da cavidade é simulada pela modulação temporal do laser em um amplificador paramétrico dentro da cavidade (95).

A taxa extremamente pequena na criação de fótons no efeito Casimir dinâmico, que vem da amplificação paramétrica do Hamiltoniano de Law (2.53), ainda é um desafio experimental. Isto leva a contínuas melhorias nas propostas experimentais na direção, por exemplo, da ciência de materiais (96). Alguns esquemas experimentais têm sido sugeridos teoricamente para simular o efeito Casimir dinâmico, como a geração de fótons e fônons em sistemas optomecânicos no regime dispersivo (97), e em sistemas híbridos considerando a interação entre uma cavidade e um condensado de Bose-Einstein sob ruído e dissipação (98).

2.1.1 Hamiltoniano de um único modo

O Hamiltoniano efetivo (2.53) leva em consideração os modos instantâneos da cavidade parametricamente excitados e acoplados entre si devido ao movimento do espelho. Quando consideramos um meio espacialmente homogêneo tal que $\epsilon_d(x, t) = \epsilon_d(t)$, todos os termos $G_{k,j}$ se anulam, os modos tornam-se desacoplados uma vez que $\mu_{ji} = 0$. Entretanto os termos de auto-interação dos modos não se anulam devido à dependência temporal na frequência, pois apesar de $G_{j,j} = 0$, a intensidade se torna $\xi_j = [4\omega_j(t)]^{-1} d\omega_j(t)/dt$. Assim, na representação de Schrödinger, quando consideramos um único modo da cavidade, o Hamiltoniano de Law se reduz a

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{eff}}(t) = \omega(t) \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + i\xi(t)(\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2). \quad (2.59)$$

Em geral, considera-se que a frequência não-estacionária associada ao modo da cavidade é modulada conforme

$$\omega(t) = \omega_0 [1 + \varepsilon \sin(\kappa t + \delta)], \quad (2.60)$$

com ω_0 sendo a frequência natural do modo, $\varepsilon \ll 1$ a amplitude de excitação do modo, κ a frequência de oscilação do espelho móvel, e δ é apenas uma fase. A intensidade

do processo de amplificação paramétrica, em primeira ordem de ε , fica dado por

$$\xi(t) = \frac{1}{4\omega(t)} \frac{d\omega(t)}{dt} \approx \frac{\varepsilon\kappa}{2} \cos(\kappa t + \delta). \quad (2.61)$$

Verifica-se que a lei senoidal que rege a frequência do modo pode maximizar o número médio de fótons partindo do estado de vácuo quando $\kappa = 2\omega_0$ (99, 100). Mostra-se que o número médio de fótons cresce proporcionalmente com $\sinh^2(\varepsilon\omega_0 t/2)$, em que $\varepsilon\omega_0 t/2$ corresponde ao grau de compressão (101).

Na seção seguinte, vamos considerar a descrição pseudo-Hermitiana geral de um Hamiltoniano quadrático dependente do tempo, conhecido como Modelo de Swanson, a partir do qual sugerimos a versão pseudo-Hermitiana do Hamiltoniano de Law motivados pela possibilidade de potencializar a produção de fótons a partir do estado de vácuo.

2.2 HAMILTONIANO QUADRÁTICO NÃO-HERMITIANO

Um Hamiltoniano quadrático não-Hermitiano descreve o chamado modelo de Swanson. Este modelo é um *toy model* utilizado no estudo de sistemas quânticos não-Hermitianos proposto por Mark. S. Swanson (102). Estamos interessados na versão dependente do tempo do modelo de Swanson (103), a qual é descrita pelo Hamiltoniano

$$\hat{H}(t) = \omega(t) \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \alpha(t) \hat{a}^2 + \beta(t) \hat{a}^{\dagger 2}, \quad (2.62)$$

com os coeficientes dependentes do tempo $\omega(t), \alpha(t), \beta(t) \in \mathbb{C}$.

2.2.1 Hamiltoniano não-Hermitiano e mapa de Dyson

No sentido de obter um Hamiltoniano Hermitiano associado ao Hamiltoniano não-Hermitiano (2.62), introduz-se o mapa de Dyson dependente do tempo $\hat{\eta}(t)$ na forma (103, 104, 105, 106)

$$\hat{\eta}(t) = \exp \left[\varepsilon(t) \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \mu(t) \hat{a}^2 + \mu^*(t) \hat{a}^{\dagger 2} \right], \quad (2.63)$$

$$= \exp [2\varepsilon(t) \hat{K}_+ + 2\mu(t) \hat{K}_- + 2\mu^*(t) \hat{K}_+], \quad (2.64)$$

em que identificam-se os operadores

$$\hat{K}_0 = \frac{1}{2} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \quad \hat{K}_+ = \hat{K}_-^\dagger = \frac{\hat{a}^{\dagger 2}}{2}, \quad (2.65)$$

como sendo os geradores do grupo $SU(1, 1)$, os quais satisfazem a seguinte álgebra:

$$[\hat{K}_0, \hat{K}_\pm] = \pm \hat{K}_\pm, \quad [\hat{K}_+, \hat{K}_-] = -2\hat{K}_0. \quad (2.66)$$

Note que o mapa de Dyson (2.64) é Hermitiano e corresponde à versão dependente do tempo da forma quadrática primeiramente introduzida em (107). Além disso, este mapa pode ser reescrito por meio da decomposição de Gauss (108) para o grupo $SU(1, 1)$ como sendo

$$\hat{\eta}(t) = \exp[\lambda(t)\hat{K}_+] \exp[\ln \Lambda(t)\hat{K}_0] \exp[\lambda^*(t)\hat{K}_-]. \quad (2.67)$$

Os coeficientes em (2.67) têm as formas

$$\lambda(t) = \frac{2\mu^*(t) \sinh \Xi(t)}{\Xi(t) \cosh \Xi(t) - \epsilon(t) \sinh \Xi(t)}, \quad (2.68a)$$

$$\Lambda(t) = \frac{\Xi^2(t)}{[\Xi(t) \cosh \Xi(t) - \epsilon(t) \sinh \Xi(t)]^2}. \quad (2.68b)$$

Daqui em frente, vamos omitir a dependência temporal, por simplicidade. O argumento das funções hiperbólicas

$$\Xi = \sqrt{\epsilon^2 - 4|\mu|^2}, \quad (2.69)$$

em que ϵ é considerado como sendo uma função real positiva tal que $\epsilon^2 - 4|\mu|^2 \geq 0$ e, conseqüentemente, $\Xi \in \mathbb{R}$.

Analogamente àquilo feito por Musumbu (107), introduzimos o parâmetro livre

$$z = \frac{2\mu}{\epsilon} = |z| e^{i\varphi}, \quad (2.70)$$

de modo que $\Xi = \epsilon\sqrt{1 - |z|^2}$, com $|z| \in [0, 1]$. Além disso, podemos escrever

$$\lambda = \Phi e^{-i\varphi}, \quad (2.71)$$

com

$$\Phi = |z| \frac{\epsilon \frac{\tanh \Xi}{\Xi}}{1 - \epsilon \frac{\tanh \Xi}{\Xi}}, \quad (2.72)$$

o que permite escrever ϵ em termos de z e Φ conforme

$$\epsilon = \frac{1}{2\sqrt{1 - |z|^2}} \ln \frac{(1 + \sqrt{1 - |z|^2}) \Phi + |z|}{(1 - \sqrt{1 - |z|^2}) \Phi + |z|}. \quad (2.73)$$

Também é conveniente definir a função real χ como sendo

$$\chi = |\lambda|^2 - \Lambda = -\frac{2\Phi}{|z|} - 1, \quad (2.74)$$

de modo que podemos escrever as transformações

$$\hat{\eta}\hat{K}_0\hat{\eta}^{-1} = -\frac{\Phi^2 + \chi}{\Lambda}\hat{K}_0 + \frac{\lambda^*}{\Lambda}\hat{K}_- + \frac{\lambda\chi}{\Lambda}\hat{K}_+, \quad (2.75a)$$

$$\hat{\eta}\hat{K}_-\hat{\eta}^{-1} = -\frac{2\lambda}{\Lambda}\hat{K}_0 + \frac{1}{\Lambda}\hat{K}_- + \frac{\lambda^2}{\Lambda}\hat{K}_+, \quad (2.75b)$$

$$\hat{\eta}\hat{K}_+\hat{\eta}^{-1} = -\frac{2\lambda^*\chi}{\Lambda}\hat{K}_0 + \frac{\lambda^{*2}}{\Lambda}\hat{K}_- + \frac{\chi^2}{\Lambda}\hat{K}_+, \quad (2.75c)$$

e também o seguinte resultado

$$\partial_t\hat{\eta}\hat{\eta}^{-1} = \frac{\dot{\Lambda} - 2\dot{\lambda}^*\lambda}{\Lambda}\hat{K}_0 + \frac{\dot{\lambda}^*}{\Lambda}\hat{K}_- + \frac{\dot{\lambda}\Lambda - \dot{\Lambda}\lambda + \dot{\lambda}^*\lambda^2}{\Lambda}\hat{K}_+. \quad (2.76)$$

2.2.2 Contraparte Hermitiana

Estas transformações permitem obter o Hamiltoniano \hat{h} , a partir da expressão (1.35), na seguinte forma

$$\begin{aligned} \hat{h} &= \hat{\eta}\hat{H}\hat{\eta}^{-1} + i\hbar[\partial_t\hat{\eta}]\hat{\eta}^{-1} \\ &= W\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) + T\hat{a}^2 + V\hat{a}^{\dagger 2}, \end{aligned} \quad (2.77)$$

em que os coeficientes dependentes do tempo são dados por

$$W = -\frac{1}{\Lambda}\left[\omega(\Phi^2 + \chi) + 2(\alpha\lambda + \beta\lambda^*\chi) + i\left(\lambda\dot{\lambda}^* - \frac{\dot{\Lambda}}{2}\right)\right], \quad (2.78a)$$

$$T = \frac{1}{\Lambda}\left[\omega\lambda^* + \alpha + \beta\lambda^{*2} + i\frac{\dot{\lambda}^*}{2}\right], \quad (2.78b)$$

$$V = \frac{1}{\Lambda}\left[\omega\lambda\chi + \alpha\lambda^2 + \beta\chi^2 + \frac{i}{2}(\dot{\lambda}\Lambda - \dot{\Lambda}\lambda + \dot{\lambda}^*\lambda^2)\right]. \quad (2.78c)$$

Vemos que o Hamiltoniano \hat{h} ainda não é Hermitiano, pois nenhuma condição *a priori* foi imposta sobre os parâmetros do mapa de Dyson.

Como discutido no capítulo anterior, o Hamiltoniano (2.77) deve ser Hermitiano e, portanto, impomos a condição $\hat{h} = \hat{h}^\dagger$, de modo que surgem as condições

$$W = W^*, \quad V = T^*, \quad (2.79)$$

as quais levam às seguintes restrições nos parâmetros do mapa de Dyson:

$$|\dot{z}| = -|z|^2\left\{\frac{\Phi^2 + \chi}{\Phi}\omega_1 - 2[|\alpha|\sin(\varphi - \varphi_\alpha) - \chi|\beta|\sin(\varphi + \varphi_\beta)]\right\} + \frac{|z|}{\Phi}\dot{\Phi}, \quad (2.80a)$$

$$\dot{\Phi} = \frac{2(1 - \Phi^2)}{\chi - 1}[\Phi\omega_1 - |\alpha|\sin(\varphi - \varphi_\alpha)] - \frac{2[(2\chi - 1)\Phi^2 - \chi^2]}{\chi - 1}|\beta|\sin(\varphi + \varphi_\beta), \quad (2.80b)$$

$$\dot{\varphi} = 2\omega_R + \frac{2}{(1 - \chi)\Phi} [|\alpha|(1 - \Phi^2)\cos(\varphi - \varphi_\alpha) + |\beta|(\Phi^2 - \chi^2)\cos(\varphi + \varphi_\beta)], \quad (2.80c)$$

em que ω_R e ω_I correspondem, respectivamente, às partes real e imaginária de $\omega(t)$. Além disso, definimos as formas polares de α e β como sendo $\alpha = |\alpha|e^{i\varphi_\alpha}$ e $\beta = |\beta|e^{i\varphi_\beta}$, respectivamente. A Eq. (2.80a) pode ser substituída pela forma equivalente

$$\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} = -2 \left\{ \left(1 + \frac{2\Phi^2}{\chi - 1} \right) \omega_I - \frac{2\Phi}{\chi - 1} [|\alpha| \sin(\varphi - \varphi_\alpha) - |\beta| (2\chi - 1) \sin(\varphi + \varphi_\beta)] \right\}. \quad (2.81)$$

Assim, o conjunto de equações diferenciais (2.80) permite reescrever os parâmetros expressos em (2.77), de modo que W , V e T se tornam

$$W = \omega_R + \frac{2\Phi}{\chi - 1} [|\alpha| \cos(\varphi - \varphi_\alpha) - |\beta| \cos(\varphi + \varphi_\beta)], \quad (2.82)$$

$$V = T^* = \frac{1}{1 - \chi} [\alpha - \chi\beta^* + i\omega_I\Phi e^{i\varphi}]. \quad (2.83)$$

Pode-se ainda escrever $V = T^* = |T|e^{-i\varphi_T}$ com

$$|T| = \frac{1}{|1 - \chi|} \left\{ |\alpha|^2 + |\beta|^2\chi^2 - 2|\alpha||\beta|\chi \cos(\varphi_\alpha + \varphi_\beta) + \Phi\omega_I [\Phi\omega_I - 2|\alpha| \sin(\varphi - \varphi_\alpha) + 2|\beta|\chi \sin(\varphi + \varphi_\beta)] \right\}^{1/2}, \quad (2.84a)$$

$$\tan \varphi_T = -\frac{\Phi\omega_I \cos \varphi + |\alpha| \sin \varphi_\alpha + |\beta|\chi \sin \varphi_\beta}{\Phi\omega_I \sin \varphi - |\alpha| \cos \varphi_\alpha + |\beta|\chi \cos \varphi_\beta}. \quad (2.84b)$$

Como discutido em (103, 104, 105, 106), z é o único parâmetro livre que determina o mapa de Dyson, com Φ e φ vindos das equações diferenciais (2.80), e ϵ da equação (2.73). Isto implica que um dado par $(|z|, \Phi)$ deve colaborar para que ϵ seja real e positivo, como inicialmente assumido, o que implica a condição $|z| > -2\Phi/(1 + \Phi^2)$.

2.2.3 Evolução temporal

As soluções das equações de Schrödinger expressas em (1.33) com os Hamiltonianos Hermitiano $\hat{h}(t)$ e não-Hermitiano $\hat{H}(t)$ podem ser obtidas pelo método dos invariantes de Lewis-Riesenfeld (109), através do procedimento descrito em (110, 111). A solução formal da equação de Schrödinger $i\partial_t|\psi(t)\rangle = \hat{h}(t)|\psi(t)\rangle$ é escrita como

$$|\psi(t)\rangle = \hat{u}(t)|\psi(0)\rangle, \quad (2.85)$$

em que $\hat{u}(t)$ é o operador de evolução temporal, o qual é dado por

$$\hat{u}(t) = \Upsilon(t)\hat{S}[\zeta(t)]\hat{D}[\theta(t)]\hat{R}[\tilde{\Omega}(t)]\hat{D}^\dagger[\theta(0)]\hat{S}^\dagger[\zeta(0)]. \quad (2.86)$$

O operador de compressão $\hat{S}[\zeta(t)]$ é definido

$$\hat{S}[\zeta(t)] = \exp [\zeta(t)\hat{a}^{\dagger 2}/2 - \zeta^*(t)\hat{a}^2/2] \quad (2.87)$$

em que $\zeta(t) = r(t)e^{i\phi(t)}$, sendo $r(t)$ o grau e $\phi(t)$ a direção de compressão no espaço de fase quântico (112, 113), os quais devem obedecer as seguintes equações diferenciais acopladas

$$\dot{r}(t) = -2|T(t)| \operatorname{sen} [\varphi_T(t) + \phi(t)], \quad (2.88a)$$

$$\dot{\phi}(t) = -2W(t) - 4|T(t)| \operatorname{coth} 2r(t) \cos [\varphi_T(t) + \phi(t)]. \quad (2.88b)$$

O operador deslocamento $\hat{D}[\theta(t)]$ é dado por

$$\hat{D}[\theta(t)] = \exp [\theta(t)\hat{a}^\dagger - \theta^*(t)\hat{a}], \quad (2.89)$$

em que o deslocamento no espaço de fase quântico $\theta(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$i\dot{\theta}(t) = \Omega(t)\theta(t), \quad (2.90)$$

em que

$$\Omega(t) = W(t) + 2|T(t)| \tanh r(t) \cos [\varphi_T(t) + \phi(t)]. \quad (2.91)$$

Também definimos o operador de rotação $R[\tilde{\Omega}(t)]$ como sendo

$$R[\tilde{\Omega}(t)] = \exp[-i\tilde{\Omega}(t)\hat{a}^\dagger\hat{a}], \quad (2.92)$$

e uma fase global $\Upsilon(t) = \exp[-i\tilde{\Omega}(t)/2]$, com $\tilde{\Omega}(t) = \int_0^t d\tau \Omega(\tau)$.

Para avaliarmos o número médio de fótons é conveniente obter as seguintes transformações

$$\hat{u}^\dagger(t)\hat{a}\hat{u}(t) = u(t)\hat{a} + v(t)\hat{a}^\dagger + w(t), \quad (2.93a)$$

$$\hat{u}^\dagger(t)\hat{a}^\dagger\hat{u}(t) = v^*(t)\hat{a} + u^*(t)\hat{a}^\dagger + w^*(t), \quad (2.93b)$$

em que as funções $u(t)$, $v(t)$ e $w(t)$ são dadas por

$$u(t) = e^{-i\tilde{\Omega}(t)} \cosh r(0) \cosh r(t) - e^{i[\tilde{\Omega}(t)+\phi(t)-\phi(0)]} \operatorname{senh} r(0) \operatorname{senh} r(t), \quad (2.94a)$$

$$v(t) = e^{i[\tilde{\Omega}(t)+\phi(t)]} \cosh r(0) \operatorname{senh} r(t) - e^{-i[\tilde{\Omega}(t)-\phi(0)]} \operatorname{senh} r(0) \cosh r(t), \quad (2.94b)$$

$$w(t) = [\theta(t) - \theta(0)e^{-i\tilde{\Omega}(t)}] \cosh r(t) + e^{i\phi(t)}[\theta^*(t) - \theta^*(0)e^{i\tilde{\Omega}(t)}] \operatorname{senh} r(t) = 0, \quad (2.94c)$$

em que $u(t)$ e $v(t)$ obedecem a relação $|u(t)|^2 - |v(t)|^2 = 1$. Note que $w(t)$ se anula devido à solução da equação (2.90) ser dada por $\theta(t) = \theta(0)e^{-i\tilde{\Omega}(t)}$. As transformações expressas (2.93) nada mais são do que a representação dos operadores de criação e

aniquilação na representação de Heisenberg. Assim, o número médio de fótons $\mathcal{N}(t)$ é dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(t) &= \langle \psi(t) | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi(t) \rangle \\
&= \langle \psi(0) | [\hat{u}^\dagger(t) \hat{a}^\dagger \hat{u}(t)] [\hat{u}^\dagger(t) \hat{a} \hat{u}(t)] | \psi(0) \rangle \\
&= |v(t)|^2 + [|u(t)|^2 + |v(t)|^2] \langle \psi(0) | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi(0) \rangle \\
&\quad + u(t)v^*(t) \langle \psi(0) | \hat{a}^2 | \psi(0) \rangle + v(t)u^*(t) \langle \psi(0) | \hat{a}^{\dagger 2} | \psi(0) \rangle.
\end{aligned} \tag{2.95}$$

Note que se o sistema é preparado inicialmente no estado de vácuo $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$ que corresponde a $r(0) = 0$, a equação (2.95) se reduz a

$$\mathcal{N}(t) = \sinh^2 r(t), \tag{2.96}$$

que está de acordo com a forma previamente obtida através de diferentes abordagens (101, 114, 115).

Uma vez que os aspectos gerais da dinâmica foram descritos, na próxima seção discutimos como a não-hermiticidade pode potencializar o efeito Casimir dinâmico, aumentando consideravelmente o número de fótons gerados.

2.3 EFEITO CASIMIR DINÂMICO PSEUDO-HERMITIANO

Trabalhos recentes em sistemas quânticos pseudo-Hermitianos dependentes do tempo, mais especificamente Hamiltonianos bosônicos quadráticos, mostram a possibilidade de alcance de um grau de compressão infinito em um intervalo de tempo finito (104, 105, 106). O efeito Casimir dinâmico é descrito por um Hamiltoniano quadrático dependente do tempo e, portanto, se assumirmos um Hamiltoniano pseudo-Hermitiano como regendo a dinâmica, ainda que *ad hoc*, podemos potencializar consideravelmente o taxa de produção de fótons como ocorre com a taxa de compressão em (104, 105, 106).

Consideramos a versão pseudo-Hermitiana do modelo de Law como sendo dada por

$$\hat{H}(t) = \omega(t) \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + i\xi(t) [\tilde{\beta}(t) \hat{a}^{\dagger 2} - \tilde{\alpha}(t) \hat{a}^2], \tag{2.97}$$

ou seja, o modelo de Law com o termo de amplificação paramétrica desbalanceado pelas funções reais adimensionais $\tilde{\alpha}(t)$ e $\tilde{\beta}(t)$. Na verdade, trata-se de um caso particular do modelo de Swanson descrito na seção anterior pelo Hamiltoniano (2.62)

quando consideramos a frequência $\omega(t)$ como sendo real e dada por (2.60), e com os parâmetros $\alpha(t) = -i\tilde{\alpha}(t)\xi(t)$ e $\beta(t) = i\tilde{\beta}(t)\xi(t)$, em que $\xi(t)$ é dado por (2.61). Nota-se que $\tilde{\alpha}(t), \tilde{\beta}(t) \rightarrow 1$ o Hamiltoniano Hermitiano de Law (2.59) é recuperado.

A possibilidade de fazer uma engenharia de tal desbalanço no Hamiltoniano efetivo (2.97) para o efeito Casimir dinâmico ainda é um desafio. A engenharia de interações tem tido um papel relevante nas últimas décadas, principalmente nos campos de interação radiação-matéria, focando-se na construção de estados quânticos específicos (116, 117, 118, 119, 120, 121, 122) e reservatórios (123, 124, 125, 126, 127, 128) através do método de eliminação adiabática (129, 130). Por isso, vamos assumir que as funções reais positivas $\tilde{\alpha}(t), \tilde{\beta}(t) \in [0, 1]$, no sentido de imaginar a possibilidade de fazer a engenharia deste tipo de interação por meio da técnica de eliminação adiabática.

Aqui impomos a condição de \mathcal{PT} -simetria ao Hamiltoniano (2.62), que consiste em aplicar as seguintes transformações: $\hat{a}^{(\dagger)} \rightarrow \hat{a}^{(\dagger)}, i \rightarrow -i$ e $t \rightarrow -t$, de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{PT}\hat{H}(t)\mathcal{PT} &= \omega^*(-t) \left[(-\hat{a}^\dagger)(-\hat{a}) + \frac{1}{2} \right] + \alpha^*(-t)(-\hat{a})^2 + \beta^*(-t)(-\hat{a})^{\dagger 2} \\ &= \omega^*(-t) \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \alpha^*(-t)\hat{a}^2 + \beta^*(-t)\hat{a}^{\dagger 2}, \end{aligned} \quad (2.98)$$

e, portanto, para que o Hamiltoniano seja \mathcal{PT} -simétrico devemos ter que

$$\mathcal{PT}\hat{H}(t)\mathcal{PT} = \hat{H}(t),$$

o que leva as condições

$$\omega(t) = \omega^*(-t), \quad \alpha(t) = \alpha^*(-t), \quad \beta(t) = \beta^*(-t). \quad (2.99)$$

Essas condições implicam que as funções $\omega(t)$, $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ precisam ter suas partes reais como sendo funções pares do tempo, enquanto suas partes imaginárias devem ser compostas por funções ímpares. Para que $\omega(t) = \omega^*(-t)$ ajustamos a fase $\delta = \pi/2$ em (2.60), de modo que

$$\omega(t) = \omega_0[1 + \varepsilon \cos(\kappa t)] = \omega^*(-t), \quad (2.100)$$

e isto faz com que $\xi(t)$ assuma a seguinte forma:

$$\xi(t) \approx -\frac{\varepsilon\kappa}{2} \text{sen}(\kappa t). \quad (2.101)$$

Notamos aqui que $\xi(t)$ é uma função ímpar, de modo que é conveniente definir $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}_0$ e $\tilde{\beta}(t) = \tilde{\beta}_0$ com $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0 \in \mathbb{R}$, no sentido de satisfazer diretamente as condições (2.99).

Então temos

$$\alpha(t) = -i\tilde{\alpha}_0\xi(t) = \alpha^*(-t), \quad (2.102)$$

$$\beta(t) = i\tilde{\beta}_0\xi(t) = \beta^*(-t). \quad (2.103)$$

Antes de escrevermos a contraparte Hermitiana do Hamiltoniano $\hat{H}(t)$, precisamos escrever as formas polares $\alpha(t) = |\alpha(t)|e^{i\varphi_\alpha(t)}$ e $\beta(t) = |\beta(t)|e^{i\varphi_\beta(t)}$, em que

$$|\alpha(t)| = \tilde{\alpha}_0|\xi(t)|, \quad \varphi_\alpha(t) = \mathfrak{h} [\text{sen}(\kappa t)] \pi + \frac{\pi}{2}, \quad (2.104)$$

$$|\beta(t)| = \tilde{\beta}_0|\xi(t)|, \quad \varphi_\beta(t) = \mathfrak{h} [\text{sen}(\kappa t)] \pi - \frac{\pi}{2}, \quad (2.105)$$

em que definimos a função degrau

$$\mathfrak{h}[f(t)] = \frac{1 - \text{sgn}[f(t)]}{2} = \begin{cases} 0, & \text{sgn}[f(t)] = +1 \\ 1, & \text{sgn}[f(t)] = -1 \end{cases},$$

e a função sinal

$$\text{sgn}[f(t)] = \frac{f(t)}{|f(t)|} = \begin{cases} -1, & f(t) < 0 \\ +1, & f(t) \geq 0 \end{cases}.$$

para levar em conta as trocas de sinais devido à dependência temporal em $\xi(t)$.

Assim, o Hamiltoniano Hermitiano $\hat{h}(t)$ associado ao Hamiltoniano $\hat{H}(t)$, de acordo com a equação (2.77), fica dado por

$$\hat{h}(t) = W(t) \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + |T(t)| [e^{i\varphi_T(t)} \hat{a}^2 + e^{-i\varphi_T(t)} \hat{a}^{\dagger 2}], \quad (2.106)$$

em que

$$W = \omega - \frac{2\xi\Phi}{\chi - 1} (\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\beta}_0) \text{sen} \varphi, \quad (2.107a)$$

$$T = -i\xi \frac{\tilde{\alpha}_0 - \chi\tilde{\beta}_0}{1 - \chi}, \quad (2.107b)$$

sendo a forma polar de $T = |T|e^{i\varphi_T}$ definida por

$$|T| = \left| \xi \frac{\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\beta}_0\chi}{1 - \chi} \right|, \quad (2.108)$$

$$\varphi_T = \mathfrak{h} [\text{sen}(\kappa t)] \pi + \mathfrak{h}(1 - \chi)\pi + \mathfrak{h}(\tilde{\alpha}_0 - \chi\tilde{\beta}_0)\pi + \frac{\pi}{2}. \quad (2.109)$$

O sistema de equações diferenciais não-lineares (2.80) que descreve os parâmetros do mapa de Dyson se reduz a

$$|\dot{z}| = 2\xi|z|^2(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\beta}_0\chi) \cos \varphi + \frac{|z|}{\Phi} \dot{\Phi}, \quad (2.110a)$$

$$\dot{\Phi} = \frac{2\xi}{1-\chi} \left\{ \tilde{\alpha}_0(1-\Phi^2) + \tilde{\beta}_0[(2\chi-1)\Phi^2 - \chi^2] \right\} \cos \varphi, \quad (2.110b)$$

$$\dot{\varphi} = 2\omega - \frac{2\xi}{(1-\chi)\Phi} \left[\tilde{\alpha}_0(1-\Phi^2) + \tilde{\beta}_0(\Phi^2 - \chi^2) \right] \sin \varphi, \quad (2.110c)$$

enquanto (2.81) assume a forma

$$\dot{\Lambda} = \frac{4\xi\Phi(\Phi^2 - \chi)}{\chi - 1} \left[\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\beta}_0(2\chi - 1) \right] \cos \varphi, \quad (2.111)$$

em que substituímos $\Lambda = \Phi^2 - \chi$, de acordo com (2.74), ao lado direito da equação (2.81).

Para resolver o conjunto de equações expresso em (2.110), vamos focar no caso particular em que escolhemos um valor fixo para o módulo do parâmetro livre $|z| = 2|\mu|/\epsilon \lesssim 1$. Isto significa que podemos escrever $\epsilon \gtrsim 2|\mu|$, de modo que o parâmetro livre fica dado por

$$z \approx e^{i\varphi}, \quad (2.112)$$

que leva ao seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &\approx -2\xi\Phi(\tilde{\alpha}_0 - \chi\tilde{\beta}_0) \cos \varphi \\ &= \frac{2\xi}{1-\chi} \left\{ \tilde{\alpha}_0(1-\Phi^2) + \tilde{\beta}_0[(2\chi-1)\Phi^2 - \chi^2] \right\} \cos \varphi, \end{aligned} \quad (2.113a)$$

$$\dot{\varphi} \approx 2\omega - \frac{2\xi}{(1-\chi)\Phi} \left[\tilde{\alpha}_0(1-\Phi^2) + \tilde{\beta}_0(\Phi^2 - \chi^2) \right] \sin \varphi, \quad (2.113b)$$

$$\dot{\Lambda} \approx \frac{4\xi\Phi(\Phi^2 - \chi)}{\chi - 1} \left[\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\beta}_0(2\chi - 1) \right] \cos \varphi. \quad (2.113c)$$

Então, para $|z| \lesssim 1$ podemos considerar (2.74) na forma aproximada $\chi \approx -2\Phi - 1$, a qual aplicamos na Eq. (2.113a) levando ao seguinte resultado:

$$\xi(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\beta}_0)(\Phi + 1) \cos \varphi \approx 0, \quad (2.114)$$

enquanto as equações (2.113b) e (2.113c) se tornam

$$\dot{\varphi} \approx 2\omega - \frac{\xi}{\Phi} \left[\tilde{\alpha}_0(1-\Phi) - \tilde{\beta}_0(3\Phi+1) \right] \sin \varphi, \quad (2.115a)$$

$$\dot{\Lambda} \approx -2\xi\Phi(\Phi+1) \left[\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\beta}_0(4\Phi+3) \right] \cos \varphi. \quad (2.115b)$$

Uma vez que assumimos $\tilde{\alpha}_0 \neq \tilde{\beta}_0$, da equação (2.114) segue que

$$\Phi = \Phi_0 \lesssim -1, \quad (2.116)$$

de modo que

$$\dot{\varphi} \approx 2\omega + 2\xi(\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\beta}_0) \text{sen } \varphi, \quad (2.117a)$$

$$\dot{\Lambda} \approx 0, \quad (2.117b)$$

e, com isso, temos

$$\chi = \chi_0 \gtrsim 1, \quad (2.118)$$

$$\Lambda = \Lambda_0 \gtrsim 0. \quad (2.119)$$

A equação (2.117a) pode ser resolvida facilmente se considerarmos o regime de tempo longo, tal que $\omega_0 t \gg 1$, como geralmente é assumido no problema do efeito Casimir dinâmico (101)

$$\varphi \approx \varphi_0 + 2\omega_0 t, \quad (2.120)$$

em que os termos com ε , neste caso, são desprezíveis.

Agora precisamos resolver o conjunto de equações(2.88) para os parâmetros de compressão r e ϕ . Uma vez que $\chi_0 \gtrsim 1$, temos que o termo $\mathfrak{h}(1 - \chi_0) = 1$ na fase $\varphi_T(t)$, de modo que as equações (2.88) se tornam

$$\dot{r} = 2\xi \left| \frac{\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\beta}_0 \chi_0}{1 - \chi_0} \right| \text{sen } \phi', \quad (2.121a)$$

$$\dot{\phi}' = -2\omega + \frac{4\Phi_0 \xi}{\chi_0 - 1} (\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\beta}_0) \text{sen } \varphi + 4\xi \left| \frac{\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\beta}_0 \chi_0}{1 - \chi_0} \right| \coth 2r \cos \phi', \quad (2.121b)$$

em que aplicamos a mudança de variável:

$$\phi' = \phi + \frac{3\pi}{2} + \mathfrak{h}(\tilde{\alpha}_0 - \chi_0 \tilde{\beta}_0) \pi. \quad (2.122)$$

Estas equações podem ser ainda mais simplificadas se considerarmos apenas o regime para $r > 1$, no qual $\coth 2r \approx 1$ e, portanto, temos o seguinte conjunto de equações diferenciais

$$\dot{r} \approx 2\xi \left| \frac{\tilde{\alpha}_0 - \chi_0 \tilde{\beta}_0}{\chi_0 - 1} \right| \text{sen } \phi', \quad (2.123a)$$

$$\dot{\phi}' \approx -2\omega + \frac{4\Phi_0 \xi}{\chi_0 - 1} (\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\beta}_0) \text{sen } (\varphi_0 + 2\omega_0 t) + 4\xi \left| \frac{\tilde{\alpha}_0 - \chi_0 \tilde{\beta}_0}{\chi_0 - 1} \right| \cos \phi'. \quad (2.123b)$$

Assumimos $\varphi_0 = \pi/2$ de modo que o segundo termo contribui apenas com oscilações e, desta forma, no regime de tempos longos $\omega_0 t \gg 1$, podemos desprezar termos de ordem ε . Com isso, obtemos a seguinte solução para ϕ' :

$$\phi' \approx \phi'_0 - 2\omega_0 t, \quad (2.124)$$

de modo que no regime ressonante $\kappa = 2\omega_0$, a equação (2.122) se torna

$$\dot{r} \approx \varepsilon \omega_0 \left| \frac{\tilde{\alpha}_0 - \chi_0 \tilde{\beta}_0}{\chi_0 - 1} \right| \sin(2\omega_0 t) [\cos \phi'_0 \sin(2\omega_0 t) - \sin \phi'_0 \cos(2\omega_0 t)], \quad (2.125)$$

cuja solução é dada por

$$r \approx r_0 + \frac{\varepsilon}{8} \left| \frac{\tilde{\alpha}_0 - \chi_0 \tilde{\beta}_0}{\chi_0 - 1} \right| \{ \cos \phi'_0 [4\omega_0 t - \sin(4\omega_0 t)] - \sin \phi'_0 [1 - \cos(4\omega_0 t)] \}. \quad (2.126)$$

Logo, para maximizar o parâmetro r , consideramos $\phi'_0 = 0$, o que resulta em

$$r \approx r_0 + \frac{\varepsilon}{8} \left| \frac{\tilde{\alpha}_0 - \chi_0 \tilde{\beta}_0}{\chi_0 - 1} \right| [4\omega_0 t - \sin(4\omega_0 t)]. \quad (2.127)$$

Assim, para tempos longos, podemos escrever as soluções aproximadas para as equações (2.121)

$$\phi \approx -3\pi/2 - \mathfrak{h}(\tilde{\alpha}_0 - \chi_0 \tilde{\beta}_0)\pi - 2\omega_0 t, \quad (2.128)$$

$$r \approx r_0 + \mathfrak{R} \frac{\varepsilon \omega_0 t}{2}, \quad (2.129)$$

com

$$\mathfrak{R} = \left| \frac{\tilde{\alpha}_0 - \chi_0 \tilde{\beta}_0}{\chi_0 - 1} \right|, \quad (2.130)$$

definido em termos dos parâmetros do mapa de Dyson. Nota-se que o fator \mathfrak{R} se reduz à unidade para o caso Hermitiano, $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\beta}_0 = 1$, descrito pelo Hamiltoniano de Law (2.59), em que (2.129) recupera o bem conhecido resultado $r \approx r_0 + \varepsilon \omega_0 t / 2$ (101). Estes resultados aproximados são comparados com os numéricos nas Figuras 2 e 3.

Como consequência direta da escolha $z \approx e^{i\varphi}$, temos que $\Xi = \varepsilon \sqrt{1 - |z|^2} \approx 0$ e $\tanh \Xi / \Xi \approx 1$. Além disso, o parâmetro Φ , definido em (2.71), torna-se $\Phi \approx \varepsilon / (1 - \varepsilon)$ o que implica $\varepsilon \gg 1$ para que $\Phi \lesssim -1$. Estes resultados são consistentes com a expressão $\varepsilon \approx \Phi / (1 + \Phi)$, que vem da equação (2.73) quando consideramos $|z| \approx 1$. Além disso, com a escolha $\varphi_0 = \pi/2$, finalmente temos os parâmetros que definem o mapa de Dyson, ε e $\mu = |\mu|e^{i\varphi}$, como sendo dados por

$$\varphi \approx \frac{\pi}{2} + 2\omega_0 t, \quad (2.131a)$$

$$|\mu| \approx \frac{\varepsilon}{2}, \quad \varepsilon \gg 1. \quad (2.131b)$$

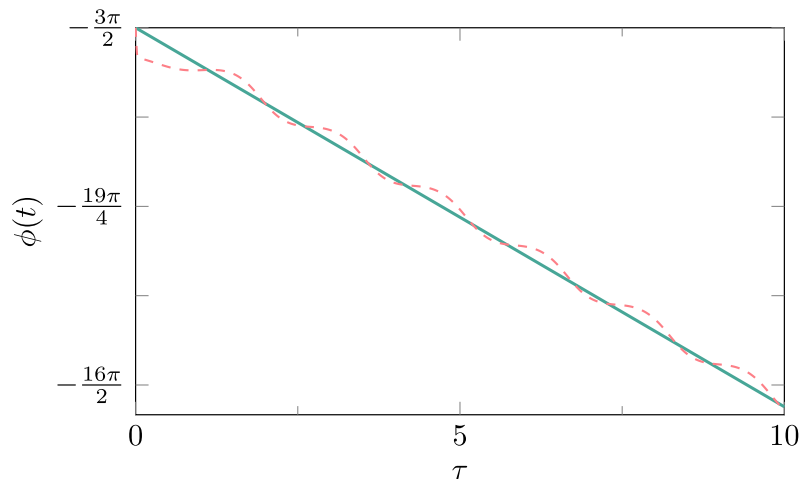
Da equação (2.96), o número médio de fótons gerados a partir do estado de vácuo, o que corresponde a escolha $r_0 = 0$ e $|\psi(0)\rangle = e^{i\phi_0}|0\rangle$, depende apenas do parâmetro de compressão r que, neste caso, é dado por (2.129). Então, temos

$$\mathcal{N}(t) = \sinh^2\left(\Re\frac{\varepsilon\omega_0 t}{2}\right). \quad (2.132)$$

Assim, para que o número médio de fótons no cenário pseudo-Hermitiano seja maior que no caso Hermitiano, devemos construir um mapa de Dyson tal que $\Re \gg 1$, o que deve ocorrer para $\chi_0 \gtrsim 1$ exatamente como mostrado nas equações (2.116), (2.118) e (2.119). Os parâmetros do mapa de Dyson necessários para ampliar a taxa de fótons criados, que levam ao resultado $\chi_0 \gtrsim 1$, são dados em (2.131).

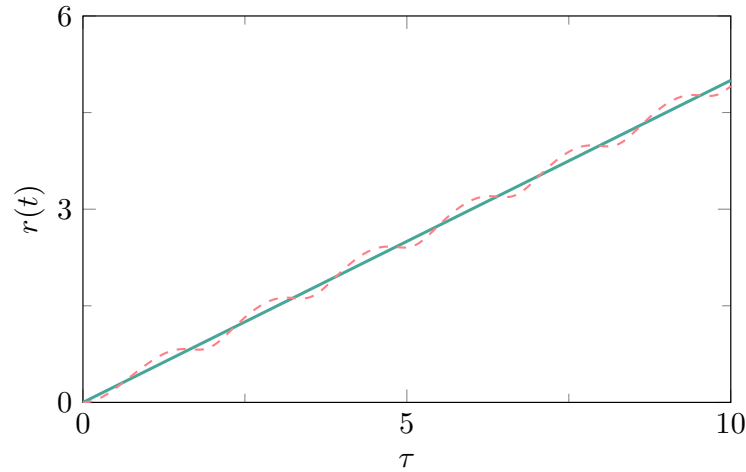
As soluções aproximadas obtidas para os parâmetros de compressão, r e ϕ , são comparadas àquelas calculadas numericamente a partir das equações em (2.88) nas Figuras 2 e 3. Ilustramos as curvas que representam os parâmetros $\phi(t)$ e $r(t)$ em função do tempo adimensional $\tau = \omega_0 t$, respectivamente. Para isso, consideramos os seguintes valores (unidades arbitrárias): $\omega_0 = 1$, $\tilde{\alpha}_0 = 10\tilde{\beta}_0\varepsilon = 10^{-2}$, $\chi = -2\Phi - 1 = 1.0002$, $\varphi_0 = \pi/2$, com o estado inicial sendo o vácuo com $r_0 = 0$ e $\phi_0 = -3\pi/2$. As soluções analíticas expressas em (2.128) e as numéricas são representadas pelas linhas sólida e tracejada, respectivamente. Verificamos que as curvas são aproximadamente iguais, o que valida as considerações feitas para resolver as equações em (2.88).

Figura 2 – Gráfico de $\phi(t)$ contra $\tau = \omega_0 t$, com $\omega_0 = 1$, $\tilde{\alpha}_0 = 10\tilde{\beta}_0 = \varepsilon = 10^{-2}$, $\chi = -2\Phi - 1 = 1,0002$, $\varphi_0 = \pi/2$. O estado inicial corresponde ao estado de vácuo com $r_0 = 0$ e $\phi_0 = -3\pi/2$. As linhas sólida e tracejada representam, respectivamente, as soluções analítica (2.128) e numérica para $\phi(t)$, as quais são calculadas numericamente a partir das equações em (2.88).



Fonte: O autor

Figura 3 – Gráfico de $r(t)$ contra τ considerando os mesmos parâmetros da Figura 2. As linhas sólida e tracejada representam a função $r(t)$ nos casos analítico (2.129) e numérico calculados a partir das equações em (2.88).



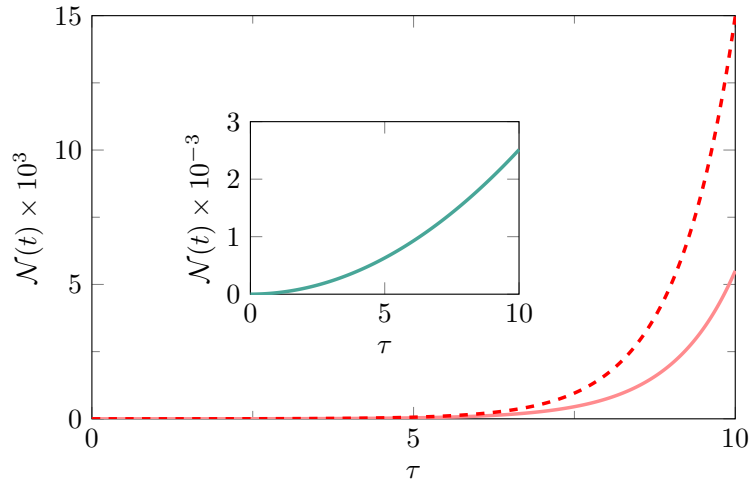
Fonte: O autor

Na Figura 4, representamos o número médio de fótons $\mathcal{N}(t)$ em função de τ com os mesmos parâmetros das Figuras 2 e 3, levando em conta duas situações: $\tilde{\beta}_0 = 10^{-3}$ (linha sólida) e também $\tilde{\beta}_0 = 10^{-4}$ (linha tracejada) no sentido de distanciar o Hamiltoniano (2.62) muito além da hermiticidade. Isto significa que a taxa de criação de fótons é maior quanto mais longe o Hamiltoniano está da hermiticidade. No *inset*, graficamos a taxa de criação de fótons para o caso Hermitiano ($\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\beta}_0 = 1$). Nota-se que a taxa de criação de fótons no caso Hermitiano é pelo menos seis ordens de magnitude menor que a taxa de criação de fótons para o caso não-Hermitiano com $\tilde{\beta}_0 = 10^{-3}$.

2.4 DISCUSSÃO

O principal objetivo do estudo apresentado neste capítulo é comparar a taxa de produção de fótons pelo efeito Casimir dinâmico resultante do Hamiltoniano efetivo de Law (2.59) com a produzida pela versão pseudo-Hermitiana (2.62). O Hamiltoniano não-Hermitiano (2.62) foi construído de maneira *ad hoc* somente considerando um desbalanço entre os termos de amplificação paramétrica no Hamiltoniano (2.59). Ou seja, o bombeio paramétrico balanceado $-i\xi(t)(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})$ em (2.59) é trocado por um não-balanceado $\alpha(t)\hat{a}^2 + \beta(t)\hat{a}^{\dagger 2}$ em (2.62), em que assumimos $\alpha(t) = -i\tilde{\alpha}_0\xi(t)$ e $\beta(t) = i\tilde{\beta}_0\xi(t)$, com $\tilde{\alpha}_0 \neq \tilde{\beta}_0$ sendo parâmetros reais positivos, tal que $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0 \in [0, 1]$.

Figura 4 – Gráfico do número médio de fótons $\mathcal{N}(t)$ em função de τ , considerando os mesmos valores de parâmetros das Figuras 2 e 3, mas com dois diferentes valores de $\tilde{\beta}_0$: $\tilde{\beta}_0 = 10^{-3}$ (linha sólida) e $\tilde{\beta}_0 = 10^{-4}$ (linha tracejada). O *inset* corresponde ao caso Hermitiano descrito pelo Hamiltoniano de Law (2.59), obtido quando $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\beta}_0 = 1$.



Fonte: O autor

Tratamos o Hamiltoniano pseudo-Hermitiano (2.62) utilizando o formalismo não-Hermitiano dependente do tempo apresentado na Ref. (52), o qual corresponde à generalização do método proposto por Mostafazadeh para o caso independente do tempo (42, 43, 44). Tal formalismo requer a construção de uma contraparte Hermitiana do Hamiltoniano (2.62), a qual é dada em (2.106). O operador Hamiltoniano Hermitiano (2.106) é tido como sendo apenas um equivalente matemático, que descreve o sistema modelado pelo Hamiltoniano (2.62) na métrica usual do espaço de Hilbert. Assim, utilizamos o Hamiltoniano (2.106) para obter a taxa de criação de fótons gerada pelo Hamiltoniano pseudo-Hermitiano (2.62), e a comparamos com a taxa obtida através do Hamiltoniano de Law (2.59).

Verificamos que o termo de amplificação desbalanceado gera um aumento significativo da taxa de criação de fótons por efeito Casimir, devido ao incremento na taxa de compressão do campo de radiação, como também acontece nas Refs. (104, 105, 106). Nestas referências, os autores demonstram a possibilidade de alcançar um grau de compressão infinito em um intervalo de tempo finito. Com isso, pode-se concluir que Hamiltonianos pseudo-Hermitianos permitem taxas de bombeio maiores que em processos Hermitianos, verificando que quanto mais longe da hermiticidade o Hamiltoniano está, mais alta é taxa de bombeio ajustando adequadamente os parâmetros associados

à métrica do espaço de Hilbert.

Evidentemente, se o Hamiltoniano Hermitiano (2.106) fosse de alguma maneira construído (com seus parâmetros singulares dados em Eq. (2.107)), teríamos a mesma taxa de produção de fótons obtida com o Hamiltoniano (2.62). Entretanto, a pergunta que deve ser feita é: O Hamiltoniano (2.106) descreve o efeito Casimir dinâmico? A resposta é negativa, uma vez que os parâmetros do Hamiltoniano (2.106) não satisfazem a relação: $i|T(t)|e^{i\varphi_T(t)} = [4W(t)]^{-1} dW(t)/dt$ como derivado por Law (82). Assim, dizemos que o Hamiltoniano (2.106) descreve o que chamamos de efeito Casimir dinâmico pseudo-Hermitiano devido à similaridade do nosso modelo construído a partir daquele apresentado na Ref. (52), que para um dado mapa de Dyson, fornece uma contraparte Hermitiana do Hamiltoniano pseudo-Hermitiano (2.62) que, neste sentido, não modela o efeito Casimir dinâmico Hermitiano ao todo.

Os resultados aqui apresentados juntamente com aqueles das Refs. (104, 105, 106) colocam o desafio sobre a possibilidade de fazer a engenharia de Hamiltonianos efetivos não-Hermitianos, que são capazes de produzir altas taxas de bombeio necessárias, por exemplo, na melhoria da sensibilidade de processos interferométricos, e da observação experimental do efeito Casimir dinâmico. Neste caso, também devemos ser capazes de construir o mapa de Dyson necessário para computar os observáveis associados ao sistema pseudo-Hermitiano dados por: $\hat{O}(t) = \hat{\eta}^{-1}(t)\hat{o}(t)\hat{\eta}(t)$. Além disso, como observado em (106), os observáveis pseudo-Hermitianos $\hat{O}(t)$ geralmente dependem da combinação linear dos observáveis Hermitianos $\hat{o}(t)$, como por exemplo, $\hat{X} \sim \hat{x}, \hat{p}$ e $\hat{P} \sim \hat{x}, \hat{p}$. Consequentemente, os valores esperados $\langle \hat{O}(t) \rangle$ requerem medições sobre variáveis canonicamente conjugadas, como os fornecidos pelas Refs. (131, 132).

Entretanto, quanto mais longe da hermiticidade quisermos construir estes Hamiltonianos, mais energia é necessária no processo se assumirmos a possibilidade de construí-los por meio do método de eliminação adiabática (129, 130), que fornece a aproximação

$$\hat{H}_{\text{eff}}(t) \approx -\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{\text{int}}(t) \int_0^t d\tau \hat{H}_{\text{int}}(\tau). \quad (2.133)$$

para sistemas fortemente oscilantes fora da ressonância. Embora este método não seja capaz, aparentemente, de produzir operadores efetivos longe da hermiticidade, uma vez que ele requer muitas restrições entre os parâmetros envolvidos, ainda pode ser empregado para produzir operadores efetivos próximos da hermiticidade. Em particular,

a intensidade do bombeio deve ser muito menor que as dessintonias entre o campo aplicado e as frequências naturais dos modos da cavidade, o que deve comprometer o suprimento de energia necessário para a construção dos Hamiltonianos efetivos. Portanto, esta técnica deve possibilitar a engenharia de Hamiltonianos não-Hermitianos não muito longe da hermiticidade. Então, concluímos que o custo para se obter uma alta taxa de produção de fótons controlada por um parâmetro $\chi_0 \gtrsim 1$, é um forte bombeio de energia para fazer a engenharia do Hamiltoniano pseudo-Hermitiano (2.62).

Apesar de considerarmos inicialmente um mapa de Dyson no qual o módulo $|z(t)|$ e a fase $\varphi(t)$ do parâmetro livre $z(t) = |z(t)|e^{i\varphi(t)}$ são funções dependentes do tempo, acabamos por fixar $|z| \lesssim 1$ e deixamos apenas a fase $\varphi(t)$ dependente do tempo. Esta escolha tornou nossa análise mais simples do que aquela feita nas Refs. (104, 105, 106), em que os parâmetros do mapa devem ser controlados de modo a garantir que $|z(t)|$ esteja sempre limitado ao intervalo $|z(t)| \in [0, 1]$. Assim, os parâmetros que definem o mapa de Dyson, dado pela Eq.(2.131), são: $\varphi \approx \pi/2 + 2\omega_0 t$ e $|\mu| \approx \epsilon/2$, com $\epsilon \gg 1$. Tais parâmetros são necessários para preparar o estado $|\Psi(0)\rangle = \hat{\eta}^{-1}(0)|\psi(0)\rangle$.

Finalmente, a observação do efeito Casimir pseudo-Hermitiano depende não somente da engenharia do Hamiltoniano pseudo-Hermitiano (2.62), mas também deve garantir que os parâmetros estejam afastados suficientemente da hermiticidade, de modo que a alta taxa de produção de fótons possa ser medida.

Os resultados apresentados neste Capítulo também podem ser encontrados na Ref. (133).

3 SISTEMAS DE DOIS NÍVEIS COM TEMPO FRACIONÁRIO

Atualmente a física quântica tem sido frequentemente investigada e aplicada sob o ponto de vista das generalizações fracionárias (134, 135, 136, 137). A chave para essa abordagem é o cálculo fracionário, que consiste em considerar o operador diferencial com ordem fracionária, ou seja, $D_z^\alpha f(z)$. Diferentes definições fracionárias são possíveis e cada uma delas é adequada para uma dada situação, dependendo das características matemáticas do problema (138).

Em física estatística, o cálculo fracionário é geralmente aplicado no contexto de transporte para descrever passeios aleatórios de tempo contínuo. Neste contexto, a equação de difusão com derivada espacial fracionária implica em caminhantes que podem realizar voos de Lévy, enquanto a consideração de derivada temporal fracionária leva os caminhantes a apresentarem um processo de sub-difusão (139).

Em mecânica quântica, a equação de Schrödinger fracionária foi introduzida por Nick Laskin (140, 141, 142, 143) considerando um operador Laplaciano fracionário definido pela derivada de Reisz em vez da derivada de segunda ordem espacial da equação de Schrödinger. Em seguida, Mark Naber (144) propôs a equação de Schrödinger de tempo fracionário

$$i^\alpha \hbar_\alpha {}^C D_t^\alpha |\Psi^\alpha(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}}_0^\alpha |\Psi^\alpha(t)\rangle, \quad (3.1)$$

em que utiliza a derivada fracionária de Caputo no lugar da derivada de primeira ordem no tempo, a qual é dada por

$${}^C D_t^\alpha |\Psi^\alpha(t)\rangle = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t d\tau (t-\tau)^{-\alpha} \frac{d}{d\tau} |\Psi^\alpha(\tau)\rangle, \quad (3.2)$$

com o parâmetro fracionário $\alpha \in [0, 1)$. No primeiro momento podemos considerar todas as variáveis, e a constante de Planck modificada \hbar_α na Eq. (3.1) como sendo adimensionais (144, 145). Na Ref. (144), o autor argumenta que, ao realizar uma rotação de Wick, a unidade imaginária é elevada à mesma potência que a coordenada de tempo, embora exista também uma forma alternativa que consiste na troca $i^\alpha \rightarrow i$ na Eq. (3.1), como na Ref. (146). No entanto, a equação de Schrödinger fracionária utilizada por nós tem sido mais investigada na literatura. A solução para esta equação tem sido obtida em diversas situações que incluem partículas livres (144) e sob influência de potenciais do tipo delta (147). Além disso, uma observação interessante é que existe

uma correspondência matemática entre a equação de difusão de tempo-fracionário, que é um processo não-Markoviano, e a equação de Schrödinger de tempo-fracionário. Para ver essa mudança, é necessário fazer a troca de tempo real para tempo imaginário ($t \rightarrow it$) na equação de difusão fracionária (144).

O Hamiltoniano no contexto da mecânica quântica fracionária às vezes é chamado de pseudo-Hamiltoniano (não confundir com o termo pseudo-Hermitiano), porque para a dinâmica quântica fracionária muitos resultados indesejados costumam aparecer, como por exemplo: a inexistência de níveis de energia estacionários, a não-unitariedade do operador de evolução e, conseqüentemente, a não-conservação da probabilidade (148).

Uma característica notável na dinâmica quântica fracionária é a evolução temporal não-unitária do vetor de estado do sistema $|\Psi^\alpha(t)\rangle$, o que revela que o sistema evolui por meio de um Hamiltoniano não-Hermitiano dependente do tempo. Este fato pode ser explorado pela aplicação do operador ${}_0^C\mathcal{D}_t^{1-\alpha}$ em ambos os lados da Eq. (3.1), e evocando a seguinte propriedade da derivada de Caputo por $0 < \alpha < 1$:

$${}_0^C\mathcal{D}_t^{1-\alpha} {}_0^C\mathcal{D}_t^\alpha |\Psi^\alpha(t)\rangle = \partial_t |\Psi^\alpha(t)\rangle - \frac{[{}_0^C\mathcal{D}_t^\alpha |\Psi^\alpha(t)\rangle]_{t=0}}{t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)}. \quad (3.3)$$

Com isso, a Eq. (3.1) pode ser reescrita em termos da derivada de primeira ordem, conforme

$$i^\alpha \hbar_\alpha \partial_t |\Psi^\alpha(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}}_0^\alpha {}_0^C\mathcal{D}_t^{1-\alpha} |\Psi^\alpha(t)\rangle + \frac{[i^\alpha \hbar_\alpha {}_0^C\mathcal{D}_t^\alpha |\Psi^\alpha(t)\rangle]_{t=0}}{t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)}. \quad (3.4)$$

Nesta forma, verificamos que o operador Hamiltoniano é não-local no tempo devido à integral na definição da derivada fracionária Eq. (3.2), o que implica soluções que não são invariantes sob transformação de reversão no tempo (144).

Existem diferentes investigações para mapear o operador de evolução fracionária não-unitária em uma forma unitária (145, 148, 149). Aqui, abordaremos o operador de evolução fracionária não-unitária usando os procedimentos do formalismo da mecânica quântica pseudo-Hermitiana com métricas dependentes do tempo para fazer uma descrição quântica consistente de um sistema de dois níveis.

Em suma, nossa abordagem consiste em descrever a evolução temporal não-unitária gerada pela Schrödinger fracionária no tempo para sistemas quânticos de dois níveis à luz do formalismo pseudo-Hermitiano da mecânica quântica com métrica dependente do tempo (52). Quando consideramos um operador métrico dependente

do tempo, o operador Hamiltoniano deixa de ser um observável, e deve ser tratado como um mero gerador da evolução temporal unitária (54): neste caso, portanto, não precisamos nos preocupar com o fato do espectro do Hamiltoniano ser real. A métrica dependente do tempo permite construir um espaço de Hilbert dinâmico onde os estados evoluem unitariamente. Três aplicações são feitas para elucidar nossa abordagem considerando Hamiltonianos Hermitianos e não-Hermitianos na equação de Schrödinger fracionária.

3.1 DINÂMICA FRACIONÁRIA DE UM SISTEMA QUÂNTICO DE DOIS NÍVEIS

Consideramos um sistema quântico de dois níveis não-Hermitiano descrito pelo operador Hamiltoniano de traço nulo

$$\hat{\mathcal{H}}_0^\alpha = \hbar_\alpha \hat{\sigma} \cdot \omega^\alpha, \quad (3.5)$$

em que $\omega^\alpha = (\omega_1^\alpha, \omega_2^\alpha, \omega_3^\alpha)$ é vetor tridimensional complexo. O vetor $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3)$ é composto pela k -ésima matriz de Pauli $\hat{\sigma}_k$ ($k = 1, 2, 3$) que satisfaz a álgebra de Lie do $SU(2)$,

$$[\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_\pm] = \pm 2\hat{\sigma}_\pm, \quad [\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = \hat{\sigma}_3, \quad (3.6)$$

sendo $\hat{\sigma}_\pm = (\hat{\sigma}_1 \pm i\hat{\sigma}_2)/2$ os operadores de levantamento (+) e abaixamento (-).

A dinâmica do vetor de estado quântico no cenário de tempo fracionário é obtida através da solução da equação de Schrödinger fracionária (3.1). No sentido de encontrar a forma desta solução, assumimos a seguinte forma:

$$|\Psi^\alpha(t)\rangle = \hat{U}_\alpha(t)|\Psi^\alpha(0)\rangle, \quad (3.7)$$

em que o sistema evolui de um estado inicial $|\Psi^\alpha(0)\rangle$ para o estado $|\Psi^\alpha(t)\rangle$ através do operador de evolução temporal não-unitário $\hat{U}_\alpha(t)$. Substituímos a solução formal (3.7) em (3.1) e, verificamos que o operador de evolução temporal deve satisfazer a equação

$$i^\alpha \hbar_\alpha {}^C \mathcal{D}_t^\alpha \hat{U}_\alpha(t) = \hat{\mathcal{H}}_0^\alpha \hat{U}_\alpha(t). \quad (3.8)$$

Então, escrevemos a forma matricial do Hamiltoniano (3.5)

$$\hat{\mathcal{H}}_0^\alpha \doteq \hbar_\alpha \begin{bmatrix} \omega_3^\alpha & \omega_1^\alpha - i\omega_2^\alpha \\ \omega_1^\alpha + i\omega_2^\alpha & -\omega_3^\alpha \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

e do operador de evolução temporal

$$\hat{U}_\alpha(t) \doteq \begin{bmatrix} W_+^\alpha(t) & T_-^\alpha(t) \\ T_+^\alpha(t) & W_-^\alpha(t) \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

em que os coeficientes devem satisfazer as condições iniciais:

$$W_\pm^\alpha(0) = 1, \quad T_\pm^\alpha(0) = 0, \quad (3.11)$$

devido à Eq. (3.7). Podemos substituir as formas matriciais na Eq. (3.8) para obter o seguinte conjunto de equações diferenciais acopladas:

$$i^\alpha {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha W_+^\alpha(t) = \omega_3 W_+^\alpha(t) + (\omega_1^\alpha - i\omega_2^\alpha) T_+^\alpha(t), \quad (3.12a)$$

$$i^\alpha {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha T_+^\alpha(t) = (\omega_1^\alpha + i\omega_2^\alpha) W_+^\alpha(t) - \omega_3^\alpha T_+^\alpha(t), \quad (3.12b)$$

$$i^\alpha {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha T_-^\alpha(t) = \omega_3^\alpha T_-^\alpha(t) + (\omega_1^\alpha - i\omega_2^\alpha) W_-^\alpha(t), \quad (3.12c)$$

$$i^\alpha {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha W_-^\alpha(t) = (\omega_1^\alpha + i\omega_2^\alpha) T_-^\alpha(t) - \omega_3^\alpha W_-^\alpha(t), \quad (3.12d)$$

que pode ser resolvido.

Assim, para resolvermos este conjunto equações diferenciais (3.12), utilizamos o resultado da transformada de Laplace sobre a derivada fracionária, a qual resulta em

$$\mathcal{L}[{}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f(t)] = s^\alpha \mathcal{L}[f(t)] - s^{\alpha-1} f(0). \quad (3.13)$$

Isso nos permite obter as formas:

$$\mathcal{L}[W_+^\alpha(t)] = \frac{s^{2\alpha-1}}{s^{2\alpha} - (-1)^\alpha \Delta_\alpha^2} + i^{-\alpha} \omega_3^\alpha \frac{s^{\alpha-1}}{s^{2\alpha} - (-1)^\alpha \Delta_\alpha^2}, \quad (3.14a)$$

$$\mathcal{L}[T_+^\alpha(t)] = i^{-\alpha} (\omega_1^\alpha + i\omega_2^\alpha) \frac{s^{\alpha-1}}{s^{2\alpha} - (-1)^\alpha \Delta_\alpha^2}, \quad (3.14b)$$

$$\mathcal{L}[T_-^\alpha(t)] = i^{-\alpha} (\omega_1^\alpha - i\omega_2^\alpha) \frac{s^{\alpha-1}}{s^{2\alpha} - (-1)^\alpha \Delta_\alpha^2}, \quad (3.14c)$$

$$\mathcal{L}[W_-^\alpha(t)] = \frac{s^{2\alpha-1}}{s^{2\alpha} - (-1)^\alpha \Delta_\alpha^2} - i^{-\alpha} \omega_3^\alpha \frac{s^{\alpha-1}}{s^{2\alpha} - (-1)^\alpha \Delta_\alpha^2}. \quad (3.14d)$$

em que definimos

$$\Delta_\alpha = \sqrt{(\omega_1^\alpha)^2 + (\omega_2^\alpha)^2 + (\omega_3^\alpha)^2}. \quad (3.15)$$

Aplicamos a transformada inversa de Laplace no conjunto de expressões (3.14), de modo que identificamos a forma geral

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{a-b}}{s^a - g} \right] = t^{b-1} E_{a,b}[gt^a], \quad (3.16)$$

com

$$E_{a,b}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(ak + b)}, \quad (3.17)$$

sendo a chamada função de Mittag-Leffler de dois parâmetros (a e b). Com isso, temos as seguintes soluções para o conjunto de equações (3.12):

$$W_+^\alpha(t) = E_{2\alpha,1}[(i^{-\alpha}\Delta_\alpha t^\alpha)^2] + i^{-\alpha}\omega_3^\alpha t^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}[(i^{-\alpha}\Delta_\alpha t^\alpha)^2], \quad (3.18a)$$

$$T_+^\alpha(t) = i^{-\alpha}(\omega_1^\alpha + i\omega_2^\alpha) t^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}[(i^{-\alpha}\Delta_\alpha t^\alpha)^2], \quad (3.18b)$$

$$T_-^\alpha(t) = i^{-\alpha}(\omega_1^\alpha - i\omega_2^\alpha) t^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}[(i^{-\alpha}\Delta_\alpha t^\alpha)^2], \quad (3.18c)$$

$$W_-^\alpha(t) = E_{2\alpha,1}[(i^{-\alpha}\Delta_\alpha t^\alpha)^2] - i^{-\alpha}\omega_3^\alpha t^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}[(i^{-\alpha}\Delta_\alpha t^\alpha)^2]. \quad (3.18d)$$

Podemos ainda utilizar a definição da função de Mittag-Leffler para definir as funções

$$\mathcal{C}_\alpha(\Delta_\alpha t^\alpha) \equiv E_{2\alpha,1}[(i^{-\alpha}\Delta_\alpha t^\alpha)^2] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{ak} \frac{(\Delta_\alpha t^\alpha)^{2k}}{\Gamma(2k\alpha + 1)}, \quad (3.19a)$$

$$\mathcal{S}_\alpha(\Delta_\alpha t^\alpha) \equiv \Delta_\alpha t^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}[(i^{-\alpha}\Delta_\alpha t^\alpha)^2] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{ak} \frac{(\Delta_\alpha t^\alpha)^{2k+1}}{\Gamma[(2k+1)\alpha + 1]}, \quad (3.19b)$$

de modo que, finalmente, obtemos as soluções do conjunto de equações (3.12) na seguinte forma:

$$W_\pm^\alpha(t) = \mathcal{C}_\alpha(\Delta_\alpha t^\alpha) \pm i^{-\alpha} \frac{\omega_3^\alpha}{\Delta_\alpha} \mathcal{S}_\alpha(\Delta_\alpha t^\alpha), \quad (3.20a)$$

$$T_\pm^\alpha(t) = i^{-\alpha} \frac{\omega_1^\alpha \pm i\omega_2^\alpha}{\Delta_\alpha} \mathcal{S}_\alpha(\Delta_\alpha t^\alpha). \quad (3.20b)$$

Nesta forma, podemos verificar que no limite $\alpha \rightarrow 1$, as funções \mathcal{C}_α e \mathcal{S}_α se tornam as funções cosseno e seno, respectivamente.

Além disso, é possível ainda reescrevermos as funções complexas $\mathcal{C}_\alpha(\Delta_\alpha t^\alpha)$ e $\mathcal{S}_\alpha(\Delta_\alpha t^\alpha)$ da maneira que segue:

$$\mathcal{C}_\alpha(\Delta_\alpha t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{ak} \frac{(\Delta_\alpha t^\alpha)^{2k}}{\Gamma(2k\alpha + 1)} = \frac{E_\alpha(i^{-\alpha}\Delta_\alpha t^\alpha) + E_\alpha(-i^{-\alpha}\Delta_\alpha t^\alpha)}{2}, \quad (3.21a)$$

$$\mathcal{S}_\alpha(\Delta_\alpha t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{ak} \frac{(\Delta_\alpha t^\alpha)^{2k+1}}{\Gamma[(2k+1)\alpha + 1]} = \frac{E_\alpha(i^{-\alpha}\Delta_\alpha t^\alpha) - E_\alpha(-i^{-\alpha}\Delta_\alpha t^\alpha)}{2i^{-\alpha}}, \quad (3.21b)$$

em que

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (3.22)$$

é a chamada função de Mittag-Leffler de um parâmetro. Esta forma de escrevermos as funções \mathcal{C}_α e \mathcal{S}_α é interessante, pois é semelhante àquela para as funções trigonométricas obtidas através da fórmula de Euler $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$. Podemos ainda escrever

o operador de evolução temporal na forma:

$$\hat{U}_\alpha(t) = E_\alpha \left[\frac{\hat{\mathcal{H}}_0^\alpha}{i^\alpha \hbar_\alpha} t^\alpha \right] = \mathcal{C}_\alpha(\Delta_\alpha t^\alpha) + i^{-\alpha} \frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\omega}^\alpha}{\Delta_\alpha} \mathcal{S}_\alpha(\Delta_\alpha t^\alpha). \quad (3.23)$$

Note que para $\alpha \rightarrow 1$ a função de Mittag-Leffler se reduz à função exponencial.

3.1.1 Evolução temporal unitária

Assumimos que o comportamento não-unitário da evolução temporal, associado ao sistema quântico fracionário de dois níveis, pode ser descrito por um estado que evolui unitariamente em relação à métrica trivial do espaço de Hilbert conforme

$$|\psi^\alpha(t)\rangle = \hat{\eta}_\alpha(t) |\Psi^\alpha(t)\rangle, \quad (3.24)$$

o que corresponde a Eq. (1.34) conforme foi discutido no Capítulo 1. Queremos, portanto, encontrar uma solução unitária assumindo um espaço de Hilbert dinâmico com uma métrica dependente do tempo e, para isso escrevemos que o estado evolui unitariamente da seguinte forma:

$$|\psi^\alpha(t)\rangle = \hat{u}_\alpha(t) |\psi^\alpha(0)\rangle, \quad (3.25)$$

de modo que podemos utilizar a expressão dada na Eq. (1.46) para obter o operador de evolução unitário $\hat{u}_\alpha(t)$ em termos do mapa de Dyson e do operador de evolução temporal não unitário $\hat{U}_\alpha(t)$ conforme

$$\hat{u}_\alpha(t) = \hat{\eta}_\alpha(t) \hat{U}_\alpha(t) \hat{\eta}_\alpha^{-1}(0), \quad (3.26)$$

em que $\hat{U}_\alpha(t)$ é dado por (3.23) e, portanto, precisamos especificar o mapa de Dyson.

A escolha do mapa de Dyson dependente do tempo, $\hat{\eta}_\alpha(t)$, em geral, não é única e, portanto, aplicamos o Ansatz

$$\hat{\eta}_\alpha(t) = e^{\kappa_\alpha(t)} e^{\lambda(t)\hat{\sigma}_+} e^{\ln \Lambda(t)\hat{\sigma}_3/2} e^{\lambda^*(t)\hat{\sigma}_-}, \quad (3.27)$$

em que consideramos os parâmetros do mapa $\lambda_\alpha(t) \in \mathbb{C}$ e $\kappa_\alpha(t), \Lambda_\alpha(t) \in \mathbb{R}$, de modo que o mapa de Dyson é Hermitiano. A Eq. (3.27), pode ser reescrita na forma matricial:

$$\hat{\eta}_\alpha(t) \doteq \frac{e^{\kappa_\alpha(t)}}{\sqrt{\Lambda_\alpha(t)}} \begin{bmatrix} |\lambda_\alpha(t)|^2 + \Lambda_\alpha(t) & \lambda_\alpha(t) \\ \lambda_\alpha^*(t) & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Agora substituímos na expressão (3.26) as formas matriciais de $\hat{\eta}_\alpha$ e \hat{U}_α , expressas nas Eqs. (3.10) e (3.28), respectivamente. Com isso, o operador \hat{u}_α pode ser representado na forma

$$\hat{u}_\alpha(t) \doteq \begin{bmatrix} \varpi_+^\alpha(t) & \varpi_-^\alpha(t) \\ \tau_+^\alpha(t) & \tau_-^\alpha(t) \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

em que os coeficientes ϖ_\pm^α e τ_\pm^α são dados por

$$\varpi_\pm^\alpha(t) = \pm \frac{e^{\kappa_\alpha(t) - \kappa_\alpha(0)}}{\sqrt{\Lambda_\alpha(t)\Lambda_\alpha(0)}} \{ \lambda_\alpha(t)\zeta_\pm^\alpha(t) + [|\lambda_\alpha(t)|^2 + \Lambda_\alpha(t)]\xi_\pm^\alpha(t) \}, \quad (3.30a)$$

$$\tau_\pm^\alpha(t) = \pm \frac{e^{\kappa_\alpha(t) - \kappa_\alpha(0)}}{\sqrt{\Lambda_\alpha(t)\Lambda_\alpha(0)}} [\zeta_\pm^\alpha(t) + \lambda_\alpha^*(t)\xi_\pm^\alpha(t)], \quad (3.30b)$$

e as funções ζ_\pm^α e ξ_\pm^α são definidas como

$$\zeta_+^\alpha(t) = T_+^\alpha(t) - \lambda_\alpha^*(0)W_-^\alpha(t), \quad (3.31a)$$

$$\zeta_-^\alpha(t) = \lambda_\alpha(0)T_+^\alpha(t) - [|\lambda_\alpha(0)|^2 + \Lambda_\alpha(0)]W_-^\alpha(t), \quad (3.31b)$$

$$\xi_+^\alpha(t) = W_+^\alpha(t) - \lambda_\alpha^*(0)T_-^\alpha(t), \quad (3.31c)$$

$$\xi_-^\alpha(t) = \lambda_\alpha(0)W_+^\alpha(t) - [|\lambda_\alpha(0)|^2 + \Lambda_\alpha(0)]T_-^\alpha(t), \quad (3.31d)$$

com $W_\pm^\alpha(t)$ e $T_\pm^\alpha(t)$ dadas na Eq. (3.20). Além disso, o operador de evolução temporal $\hat{u}_\alpha(t)$ pertence ao grupo de Lie $U(2)$, de modo que o determinante deve satisfazer a relação

$$|\det \hat{u}_\alpha(t)|^2 = 1. \quad (3.32)$$

Então, calculamos o determinante de $\hat{u}_\alpha(t)$ a partir da Eq. (3.26) e obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \det \hat{u}_\alpha(t) &= \det [\hat{\eta}_\alpha(t)\hat{U}_\alpha(t)\hat{\eta}_\alpha^{-1}(0)] \\ &= e^{2[\kappa_\alpha(t) - \kappa_\alpha(0)]} D_\alpha(t), \end{aligned} \quad (3.33)$$

em que definimos

$$\begin{aligned} D_\alpha(t) &\equiv \det \hat{U}_\alpha(t) \\ &= W_+^\alpha(t)W_-^\alpha(t) - T_+^\alpha(t)T_-^\alpha(t) \\ &= \mathcal{C}_\alpha^2(\Delta_\alpha t^\alpha) - (-1)^{-\alpha} \mathcal{S}_\alpha^2(\Delta_\alpha t^\alpha). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Podemos reescrever na forma exponencial utilizando a propriedade $D_\alpha(t) = e^{\ln D_\alpha(t)}$, de modo que o número complexo $\ln D_\alpha$ pode ser decomposto na forma cartesiana

$\ln D_\alpha(t) = \text{Re}[\ln D_\alpha(t)] + i\text{Im}[\ln D_\alpha(t)]$ e, com essa manipulação algébrica, obtemos o resultado

$$\det \hat{u}_\alpha(t) = e^{2[\kappa_\alpha(t) - \kappa_\alpha(0)] + \text{Re}[\ln D_\alpha(t)]} e^{i\text{Im}[\ln D_\alpha(t)]}. \quad (3.35)$$

Logo, para que $|\det \hat{u}_\alpha(t)|^2 = 1$ precisamos ter $\det \hat{u}_\alpha(t)$ como sendo uma fase complexa, o que nos leva a ajustar o coeficiente $\kappa_\alpha(t)$ do mapa de Dyson para satisfazer a seguinte igualdade:

$$\kappa_\alpha(t) = \kappa_\alpha(0) - \frac{1}{2}\text{Re}[\ln D_\alpha(t)], \quad (3.36)$$

de modo que

$$\det \hat{u}_\alpha(t) = e^{i\text{Im}[\ln D_\alpha(t)]}, \quad (3.37)$$

cujos módulos são iguais a unidade.

Para encontrar os outros coeficientes do mapa de Dyson, impomos a condição de unitariedade sobre o operador $\hat{u}_\alpha(t)$, o que significa que

$$\hat{u}_\alpha^{-1}(t) = \hat{u}_\alpha^\dagger(t), \quad (3.38)$$

e, na forma matricial, a propriedade de unitariedade nos fornece

$$e^{-i\text{Im}[\ln D_\alpha(t)]} \begin{bmatrix} \tau_-^\alpha(t) & -\varpi_-^\alpha(t) \\ -\tau_+^\alpha(t) & \varpi_+^\alpha(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\varpi_+^\alpha(t)]^* & [\tau_+^\alpha(t)]^* \\ [\varpi_-^\alpha(t)]^* & [\tau_-^\alpha(t)]^* \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

e nos leva às igualdades:

$$\tau_\pm^\alpha(t) = \mp e^{i\text{Im}[\ln D_\alpha(t)]} [\varpi_\mp^\alpha(t)]^*. \quad (3.40)$$

Substituímos as formas dadas na Eq. (3.30) nas igualdades acima (3.40) de maneira que, após algumas manipulações, obtemos as equações

$$[\zeta_\mp^\alpha \mp e^{i\text{Im}[\ln D_\alpha]} (\xi_\pm^\alpha)^*] \lambda_\alpha + \xi_\mp^\alpha (\Lambda_\alpha + |\lambda_\alpha|^2) = \pm e^{i\text{Im}[\ln D_\alpha]} (\zeta_\pm^\alpha)^*, \quad (3.41)$$

em que omitimos a dependência temporal por um momento por simplicidade. Podemos resolvê-las para λ_α e $\Lambda_\alpha + |\lambda_\alpha|^2$ reescrevendo ambas equações na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \zeta_-^\alpha - e^{i\text{Im}[\ln D_\alpha]} (\xi_+^\alpha)^* & \xi_-^\alpha \\ \zeta_+^\alpha + e^{i\text{Im}[\ln D_\alpha]} (\xi_-^\alpha)^* & \xi_+^\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_\alpha \\ \Lambda_\alpha + |\lambda_\alpha|^2 \end{bmatrix} = e^{i\text{Im}[\ln D_\alpha]} \begin{bmatrix} (\zeta_+^\alpha)^* \\ -(\zeta_-^\alpha)^* \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

de modo que ao invertemos a equação, obtemos os seguintes resultados

$$\lambda_\alpha = -\frac{\xi_+^\alpha (\zeta_+^\alpha)^* + \xi_-^\alpha (\zeta_-^\alpha)^*}{|\xi_+^\alpha|^2 + |\xi_-^\alpha|^2 + (\zeta_+^\alpha \xi_-^\alpha - \zeta_-^\alpha \xi_+^\alpha) e^{-i\text{Im}[\ln D_\alpha]}}, \quad (3.43a)$$

$$\Lambda_\alpha + |\lambda_\alpha|^2 = \frac{|\zeta_+^\alpha|^2 + |\zeta_-^\alpha|^2 + [(\zeta_+^\alpha \xi_-^\alpha - \zeta_-^\alpha \xi_+^\alpha) e^{-i\text{Im}[\ln D_\alpha]}]^*}{|\xi_+^\alpha|^2 + |\xi_-^\alpha|^2 + (\zeta_+^\alpha \xi_-^\alpha - \zeta_-^\alpha \xi_+^\alpha) e^{-i\text{Im}[\ln D_\alpha]}}. \quad (3.43b)$$

Além disso, utilizamos a Eq. (3.31) para reescrever o termo

$$\begin{aligned} [\zeta_+^\alpha(t)\xi_-^\alpha(t) - \zeta_-^\alpha(t)\xi_+^\alpha(t)]e^{-i\text{Im}[\ln D_\alpha(t)]} &= \Lambda_\alpha(0)[W_+^\alpha(t)W_-^\alpha(t) - T_+^\alpha(t)T_-^\alpha(t)]e^{-i\text{Im}[\ln D_\alpha(t)]} \\ &= \Lambda_\alpha(0)D_\alpha(t)e^{-i\text{Im}[\ln D_\alpha(t)]} \\ &= \Lambda_\alpha(0)e^{\text{Re}[\ln D_\alpha(t)]}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

e, desta forma, temos os parâmetros do mapa de Dyson λ_α e Λ_α escritos nas formas exatas:

$$\lambda_\alpha(t) = -\frac{\xi_-^\alpha(t)[\zeta_-^\alpha(t)]^* + \xi_+^\alpha(t)[\zeta_+^\alpha(t)]^*}{|\xi_+^\alpha(t)|^2 + |\xi_-^\alpha(t)|^2 + \Lambda_\alpha(0)e^{\text{Re}[\ln D_\alpha(t)]}}, \quad (3.45a)$$

$$\Lambda_\alpha(t) = \frac{|\zeta_+^\alpha(t)|^2 + |\zeta_-^\alpha(t)|^2 + \Lambda_\alpha(0)e^{\text{Re}[\ln D_\alpha(t)]}}{|\xi_+^\alpha(t)|^2 + |\xi_-^\alpha(t)|^2 + \Lambda_\alpha(0)e^{\text{Re}[\ln D_\alpha(t)]}} - |\lambda_\alpha(t)|^2. \quad (3.45b)$$

O fato de impormos a unitariedade sobre o operador $\hat{u}_\alpha(t)$, permitiu-nos obter a forma exata dos parâmetros do mapa de Dyson diretamente da solução da equação de Schrödinger fracionária. Logo, a matriz que representa o operador de evolução unitário pode ser reescrita na forma

$$\hat{u}_\alpha(t) \doteq e^{\frac{i}{2}\text{Im}[\ln D_\alpha(t)]} \begin{bmatrix} \varpi^\alpha(t) & \tau^\alpha(t) \\ -[\tau^\alpha(t)]^* & [\varpi^\alpha(t)]^* \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

em que

$$\varpi^\alpha(t) = e^{-\frac{i}{2}\text{Im}[\ln D_\alpha(t)]}\varpi_+^\alpha(t) = e^{\frac{i}{2}\text{Im}[\ln D_\alpha(t)]}[\tau_-^\alpha(t)]^*, \quad (3.47a)$$

$$\tau^\alpha(t) = e^{-\frac{i}{2}\text{Im}[\ln D_\alpha(t)]}\varpi_-^\alpha(t) = -e^{\frac{i}{2}\text{Im}[\ln D_\alpha(t)]}[\tau_+^\alpha(t)]^*, \quad (3.47b)$$

satisfazem a relação

$$|\varpi^\alpha(t)|^2 + |\tau^\alpha(t)|^2 = 1. \quad (3.48)$$

Agora, podemos afirmar que a dinâmica fracionária é unitária em relação ao produto interno modificado

$$\langle \tilde{\Psi}^\alpha(t) | \Psi^\alpha(t) \rangle_{\Theta_\alpha(t)} = \langle \tilde{\Psi}^\alpha(t) | \hat{\Theta}_\alpha(t) | \Psi^\alpha(t) \rangle, \quad (3.49)$$

de modo que

$$\langle \Psi^\alpha(t) | \Psi^\alpha(t) \rangle_{\Theta_\alpha(t)} = \langle \Psi^\alpha(0) | \Psi^\alpha(0) \rangle_{\Theta_\alpha(0)} = \langle \psi^\alpha(0) | \psi^\alpha(0) \rangle = \langle \psi^\alpha(t) | \psi^\alpha(t) \rangle, \quad (3.50)$$

em que $\hat{\Theta}_\alpha(t) = \hat{\eta}_\alpha^\dagger(t)\hat{\eta}_\alpha(t)$ é o operador métrico. Esta relação reflete a conservação de probabilidade na mecânica quântica de tempo fracionário quando se considera uma métrica dependente do tempo adequada.

3.2 APLICAÇÕES

3.2.1 *Spin*-1/2 no campo magnético longitudinal

Vamos considerar um núcleo com *spin*-1/2 colocado em um campo magnético longitudinal $\mathbf{B}^\alpha = (0, 0, B_0^\alpha)$. A interação entre o núcleo com o campo magnético externo é caracterizada pelo Hamiltoniano de Zeeman

$$\hat{\mathcal{H}}_0^\alpha = -\hat{\boldsymbol{\mu}}_1^\alpha \cdot \mathbf{B}^\alpha = -\frac{\hbar_\alpha \omega_L^\alpha}{2} \hat{\sigma}_3, \quad (3.51)$$

em que momento magnético do núcleo é definido como $\hat{\boldsymbol{\mu}}_1^\alpha = \hbar_\alpha \gamma_\alpha \hat{\boldsymbol{\sigma}}/2$ com γ_α sendo a razão giromagnética, e $\omega_L^\alpha = \gamma_\alpha B_0^\alpha$ a frequência de Larmor do núcleo. Então, identificamos os coeficientes do Hamiltoniano na Eq. (3.5) como sendo $\omega_1^\alpha = \omega_2^\alpha = 0$ e $\omega_3^\alpha = -\omega_L^\alpha/2$.

Os parâmetros do mapa Dyson dependentes do tempo κ_α , Λ_α and λ_α estão representados na Fig. 5 para os valores iniciais $\kappa_\alpha(0) = 0$, $\Lambda_\alpha(0) = 2$ e $|\lambda_\alpha(0)| = 3/2$. Além disso, aplicamos a evolução temporal unitária para calcular a k -ésima componente da magnetização normalizada adimensional $M_k^\alpha(t)$ ($k = 1, 2, 3$)

$$M_k^\alpha(t) = \frac{\langle \psi^\alpha(t) | \hat{\sigma}_k | \psi^\alpha(t) \rangle}{\langle \psi^\alpha(t) | \psi^\alpha(t) \rangle}, \quad (3.52)$$

em que o estado quântico $|\psi^\alpha(t)\rangle$ é dado pela Eq. (3.25). Consideramos que o sistema é inicialmente preparado no estado de *spin up* representado pelo vetor de estado $|\psi^\alpha(0)\rangle = (1 \ 0)^T$, de modo que as componentes das magnetizações ficam dadas por

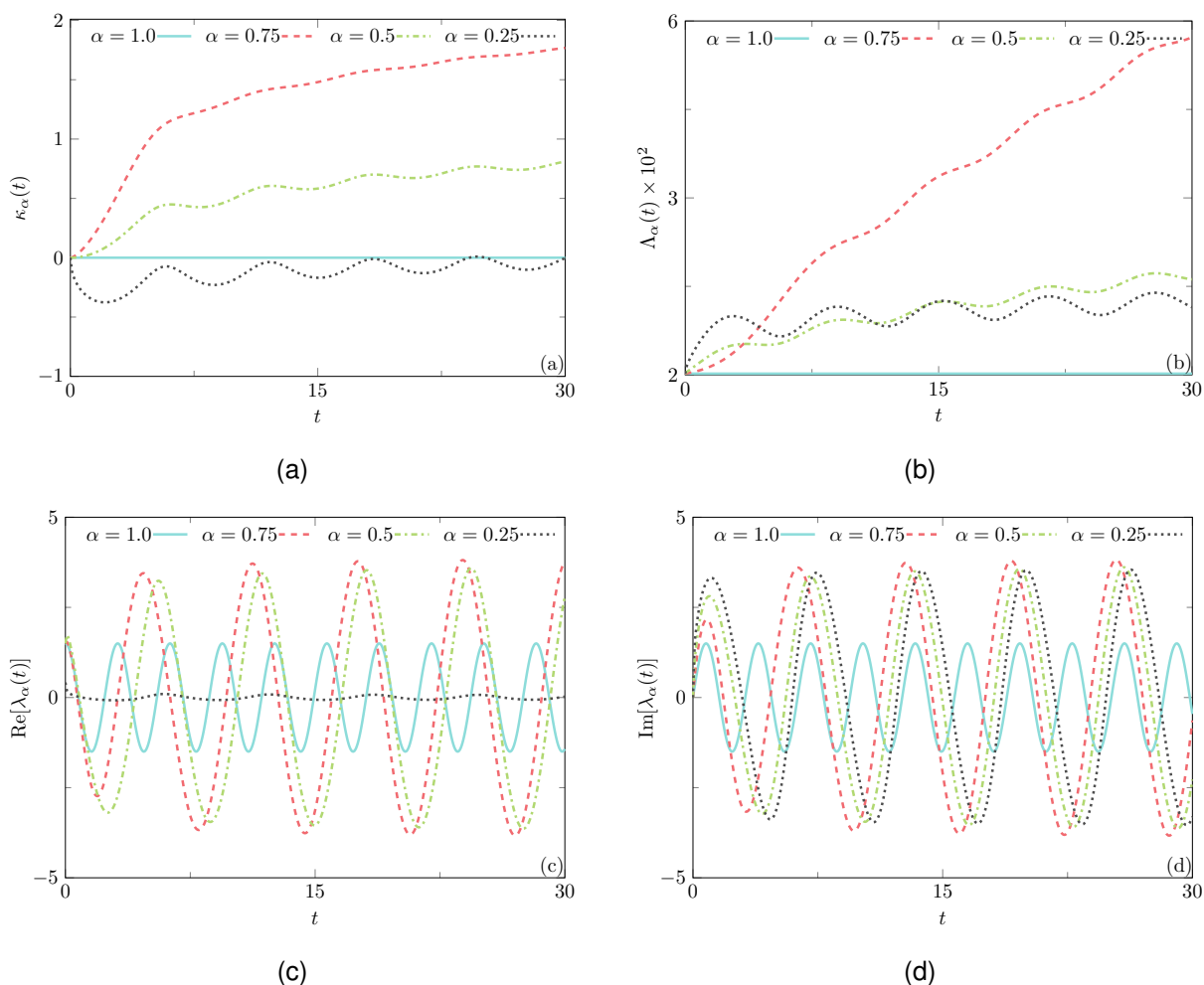
$$M_1^\alpha(t) = -2\text{Re}[\varpi^\alpha(t)\tau^\alpha(t)], \quad (3.53a)$$

$$M_2^\alpha(t) = 2\text{Im}[\varpi^\alpha(t)\tau^\alpha(t)], \quad (3.53b)$$

$$M_3^\alpha(t) = |\varpi^\alpha(t)|^2 - |\tau^\alpha(t)|^2. \quad (3.53c)$$

Avaliamos as componentes de magnetização para diferentes valores do parâmetro fracionário α considerando $\Delta_\alpha = 1 \text{ s}^{-\alpha}$ na Fig. 6. No caso em que $\alpha = 1$, como esperado, o estado quântico permanece no estado de *spin up* com o passar do tempo, pois este estado corresponde ao autoestado do Hamiltoniano Hermitiano $\hat{\mathcal{H}}_0^\alpha$. Já nos casos em que $\alpha \neq 1$ o sistema fracionário introduz não-hermiticidade de modo que o mapa de Dyson desperta campos transversais que perturbam o estado inicial do sistema e oferecem um torque que rotaciona o momento magnético nuclear em torno de um campo magnético efetivo. Os efeitos destes campos estão codificados nos elementos

Figura 5 – A evolução temporal dos parâmetros do mapa de Dyson κ_α , Λ_α e λ_α são representados para $\alpha = 1, 0$ (linha sólida), $\alpha = 0, 75$ (linha tracejada), $\alpha = 0, 5$ (linha traço-ponto) e $\alpha = 0, 25$ (linha pontilhada). Selecionamos $\Delta_\alpha = 1 \text{ s}^{-\alpha}$, e as condições iniciais: $\kappa_\alpha(0) = 0$, $\Lambda_\alpha(0) = 2$ e $|\lambda_\alpha(0)| = 3/2$.

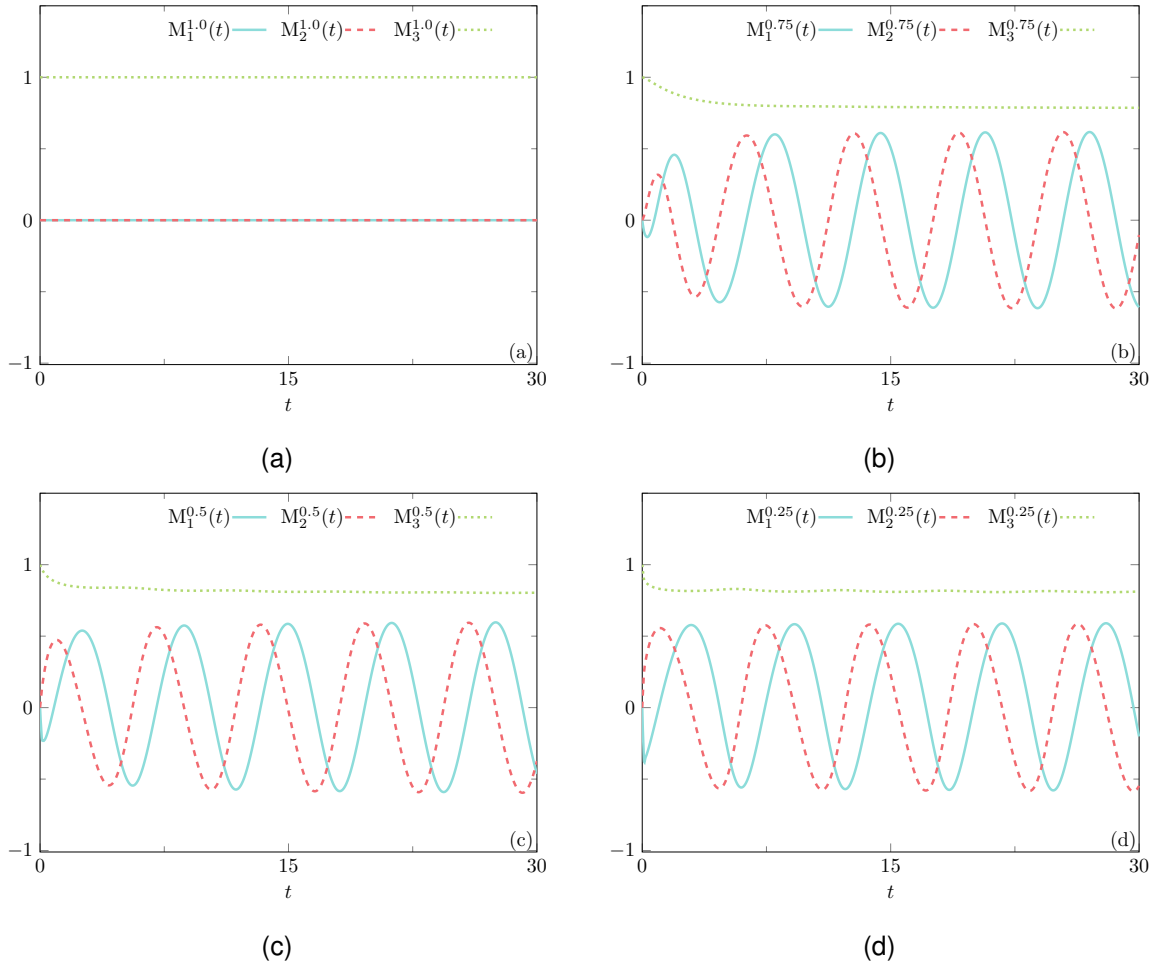


fora da diagonal do operador de evolução temporal. Esse comportamento é ligeiramente modificado por mudanças no parâmetro fracionário α , e o efeito do parâmetro α é um bombeio de energia de curta duração na configuração inicial causada por uma notável mudança nas magnetizações, o que faz com que as componentes transversais da magnetização comecem a oscilar em torno do eixo x_3 .

3.2.2 Cadeia de Lee-Yang de um único sítio

Uma versão de rede discreta do modelo Lee-Yang foi proposta na Ref. (150), e consiste em uma cadeia de Ising na presença de um campo magnético unitário longitudinal na direção x_3 junto de um "campo" imaginário puro transversal na direção

Figura 6 – Consideramos que o sistema é inicialmente preparado no estado de *spin up*. Representamos a evolução temporal das componentes de magnetização $M_k(t)$ para um sistema de *spin*-1/2 na presença de um campo magnético longitudinal para os seguintes casos: (a) $\alpha = 1,0$ (b) $\alpha = 0,75$ (c) $\alpha = 0,5$ (d) $\alpha = 0,25$. Em cada caso as componentes transversais $M_1(t)$ e $M_2(t)$ estão representadas pelas linhas sólida e tracejada, respectivamente, enquanto a componente longitudinal $M_3(t)$ está representada pela linha pontilhada.



x_1 . O Hamiltoniano total é dado por

$$\hat{\mathcal{H}}_0^\alpha = -\frac{\hbar_\alpha}{2} \sum_{i=1}^N \left(\hat{\sigma}_3^{(i)} + J_\alpha \hat{\sigma}_1^{(i)} \hat{\sigma}_1^{(i+1)} + i\xi_\alpha \hat{\sigma}_1^{(i)} \right), \quad (3.54)$$

sendo J_α a constante de acoplamento e ξ_α proporcional à intensidade do "campo" imaginário na direção x_1 . Além disso, a condição periódica $\hat{\sigma}_1^{(N+1)} = \hat{\sigma}_1^{(1)}$ é considerada.

Consideramos o caso particular da cadeia de *spin* de um único sítio ($N = 1$). Definimos a constante de acoplamento como $J_\alpha = 0$ e, portanto, o Hamiltoniano não-Hermitiano (3.54) se reduz ao seguinte operador Hamiltoniano não-Hermitiano

$$\hat{\mathcal{H}}_0^\alpha = -\frac{\hbar_\alpha}{2} \hat{\sigma}_3 - i\frac{\hbar_\alpha \xi_\alpha}{2} \hat{\sigma}_1, \quad (3.55)$$

em que o único *spin* interage com o campo real na direção z e um "campo" imaginário puro na direção x com intensidade proporcional ao parâmetro real ξ_α . Assim, identificamos os coeficientes do Hamiltoniano na Eq. (3.5) como sendo $\omega_1^\alpha = -i\xi_\alpha/2$, $\omega_2^\alpha = 0$ e $\omega_3^\alpha = -1/2 \text{ s}^{-\alpha}$.

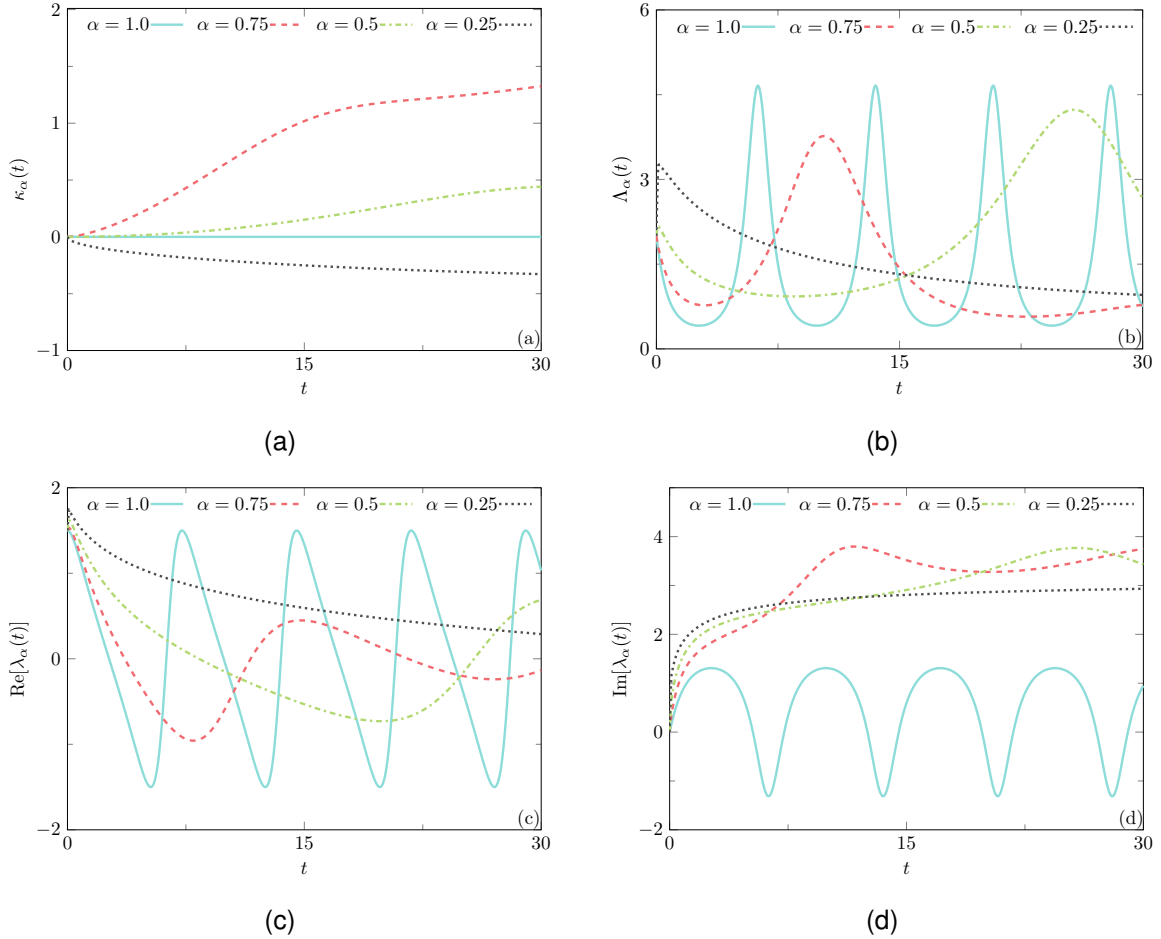
Diferentemente da primeira aplicação em que o Hamiltoniano inicial é Hermitiano, neste caso partimos de um Hamiltoniano não-Hermitiano no cenário de tempo fracionário. Assim, a não-unitariedade da evolução temporal vem tanto da não-hermiticidade do Hamiltoniano original, devido ao "campo" imaginário na direção x_1 , quanto da derivada no tempo de ordem fracionária. Portanto, para encontrarmos uma contrapartida unitária \hat{u}^α , o mapa de Dyson deve levar em conta ambas as características que refletem a não-unitariedade na evolução temporal. Os parâmetros do mapa Dyson dependentes do tempo são representados na Fig. 7 para diferentes valores do parâmetro fracionário α nas mesmas condições iniciais da primeira aplicação. Além disso, consideramos também o valor numérico para o parâmetro $\xi_\alpha = 1/2 \text{ s}^{-\alpha}$ e, por conseguinte, temos $\Delta_\alpha \approx 0,433 \text{ s}^{-\alpha}$.

Sob a evolução temporal unitária, analisamos a diferença de população entre os dois níveis considerando a população inicialmente no estado de *spin down* correspondente ao estado $|\psi^\alpha(0)\rangle = (0 \ 1)^T$. Neste caso, a diferença de população evolui de acordo com a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma}_3(t) \rangle &= \frac{\langle \psi^\alpha(t) | \hat{\sigma}_3 | \psi^\alpha(t) \rangle}{\langle \psi^\alpha(t) | \psi^\alpha(t) \rangle} \\ &= |\tau^\alpha(t)|^2 - |\varpi^\alpha(t)|^2. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Representamos esta expressão para diferentes valores do parâmetro fracionário α na Fig. 8. Quando $\alpha = 1$, a diferença da população oscila com uma amplitude pequena perto de -1 , o que significa que a maior parte da população permanece no estado *spin down* e há uma população muito pequena no estado *spin up*. Para os casos $\alpha = 0,75$ e $\alpha = 0,5$, uma população maior passa a ocupar o estado de *spin up* e, portanto, a diferença de população oscila de -1 para perto de $-1/2$ conforme o tempo passa: a diferença de populações oscila mais rápido para o caso em que $\alpha = 0,75$ do que quando $\alpha = 0,5$. Para o caso em que $\alpha = 0,25$, ocorre uma mudança muito pequena na diferença de população que retorna para -1 .

Figura 7 – A evolução temporal dos parâmetros do mapa de Dyson κ_α , Λ_α e λ_α são representados para $\alpha = 1, 0$ (linha sólida), $\alpha = 0, 75$ (linha tracejada), $\alpha = 0, 5$ (linha traço-ponto) e $\alpha = 0, 25$ (linha pontilhada). Selecionamos $\Delta_\alpha \approx 0, 433 \text{ s}^{-\alpha}$ ($\xi_\alpha = 1/2 \text{ s}^{-\alpha}$), e as condições iniciais: $\kappa_\alpha(0) = 0$, $\Lambda_\alpha(0) = 2$ e $|\lambda_\alpha(0)| = 3/2$.



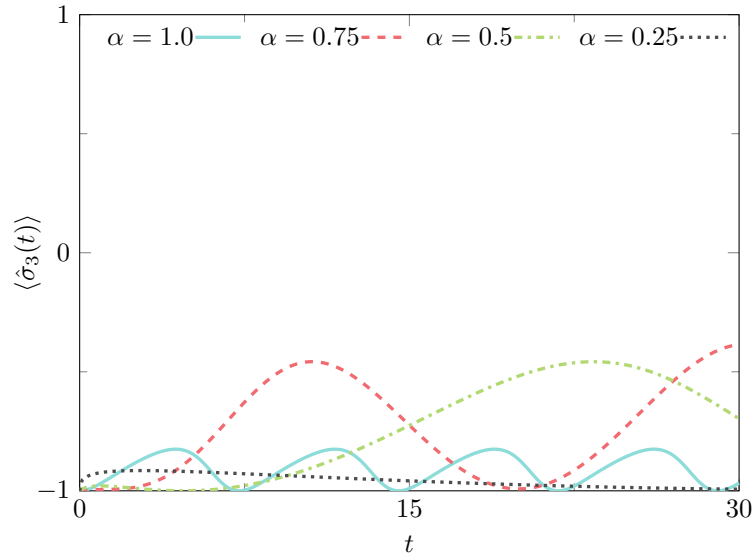
3.2.3 Dois guias de onda acoplados

Um sistema não-Hermitiano \mathcal{PT} -simétrico interessante no contexto físico de propagação de feixes ópticos em guias de ondas acoplados é investigado em (151). Sob certas condições (151), a dinâmica do campo óptico em guias de ondas são descritos pela equação tipo-Schrödinger (ver Apêndice da Ref. (152)).

$$i \frac{d}{dx_3} \begin{bmatrix} E_+(x_3) \\ E_-(x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\varepsilon & \varsigma \\ \varsigma & i\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_+(x_3) \\ E_-(x_3) \end{bmatrix},$$

em que $E_\pm(x_3)$ representam as amplitudes normalizadas dos campos no primeiro (+) e no segundo (−) guia, respectivamente. O parâmetro ε representa o coeficiente de ganho efetivo, ς a constante de acoplamento entre os guias de onda, e x_3 a coordenada

Figura 8 – Consideramos que o sistema inicia do estado de *spin down*. Representamos a diferença de população $\langle \hat{\sigma}_3(t) \rangle$ entre os dois estados de *spin* para os casos: $\alpha = 1, 0$ (linha sólida), $\alpha = 0, 75$ (linha tracejada), $\alpha = 0, 5$ (linha traço-ponto) e $\alpha = 0, 25$ (linha pontilhada).



de posição dos sinais dentro dos guias. O "Hamiltoniano" não-Hermitiano que governa a dinâmica, em termos das matrizes de Pauli, pode ser identificado como sendo $\hat{\mathcal{H}}_0 = \varsigma \hat{\sigma}_1 - i\varepsilon \hat{\sigma}_3$.

Note que todo o procedimento adotado anteriormente na descrição feita em relação ao tempo t , pode agora ser aplicado para a coordenada espacial x_3 bastando, portanto, efetuar a transformação $t \rightarrow x_3$. Então, por simplicidade, vamos considerar todos os parâmetros como sendo adimensionais. Desta forma, para aplicar nosso estudo a este sistema, fazemos a adaptação para o contexto fracionário diante das transformações *ad hoc*:

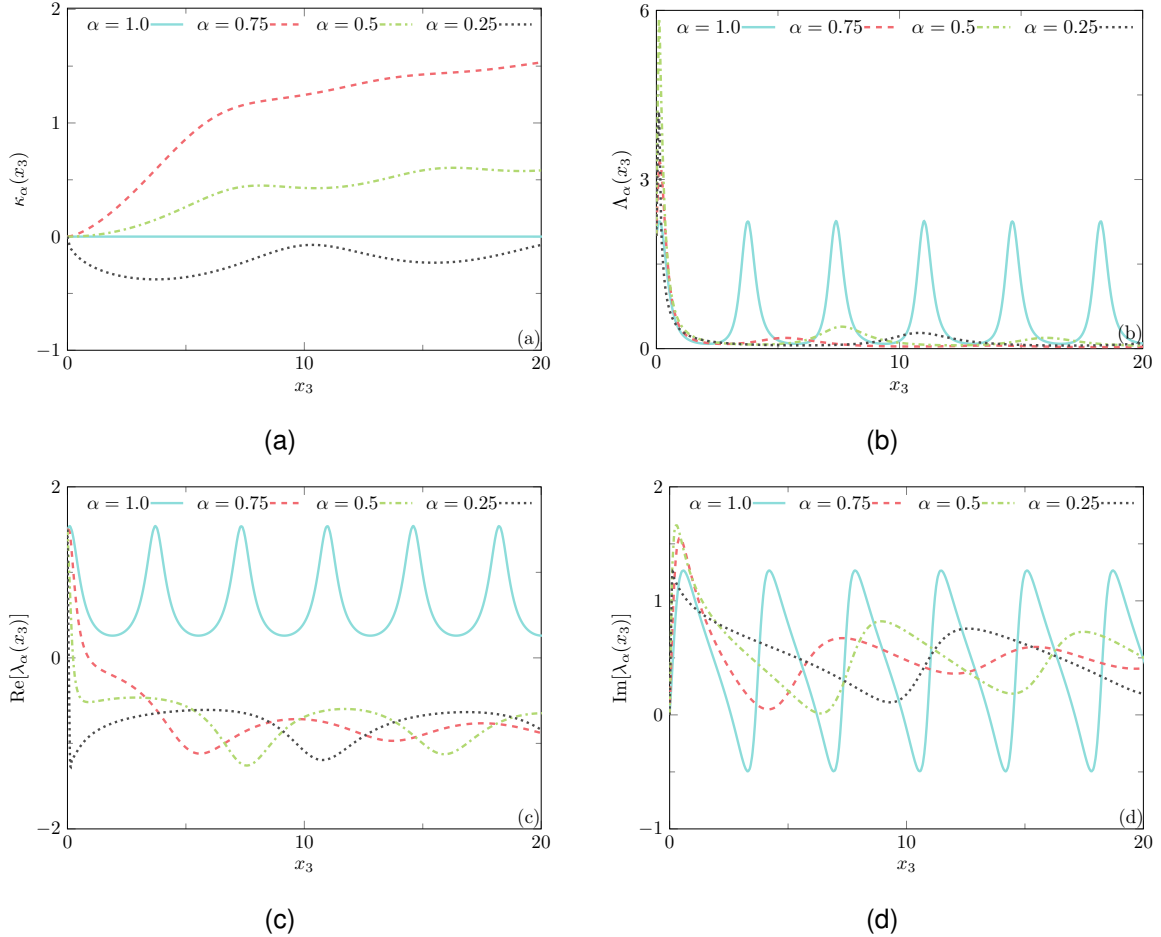
$$i \frac{d}{dx_3} \rightarrow i^\alpha {}_0^C \mathcal{D}_{x_3}^\alpha, \quad E_i(x_3) \rightarrow E_i^\alpha(x_3), \quad \hat{\mathcal{H}}_0 \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_0^\alpha,$$

sendo o Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_0^\alpha$ dado por

$$\hat{\mathcal{H}}_0^\alpha = \varsigma_\alpha \hat{\sigma}_1 - i\varepsilon_\alpha \hat{\sigma}_3, \quad (3.57)$$

de modo que identificamos os coeficientes do "Hamiltoniano" na Eq. (3.5) como sendo $\omega_1^\alpha = \varsigma_\alpha$, $\omega_2^\alpha = 0$ e $\omega_3^\alpha = -i\varepsilon_\alpha$, com $\hbar_\alpha = 1$. Atribuímos ao coeficiente de ganho efetivo e a constante de acoplamento os respectivos valores $\varepsilon_\alpha = 1/2$ e $\varsigma_\alpha = 1$ e, conseqüentemente, temos $\Delta_\alpha \approx 0,866$.

Figura 9 – As distribuições espaciais dos parâmetros do mapa de Dyson κ_α , Λ_α e λ_α são representados para $\alpha = 1, 0$ (linha sólida), $\alpha = 0, 75$ (linha tracejada), $\alpha = 0, 5$ (linha traço-ponto) e $\alpha = 0, 25$ (linha pontilhada). Selecionamos $\Delta_\alpha \approx 0, 866$ ($\varsigma_\alpha = 1$ e $\varepsilon_\alpha = 1/2$), e as condições iniciais: $\kappa_\alpha(0) = 0$, $\Lambda_\alpha(0) = 2$ e $|\lambda_\alpha(0)| = 3/2$.



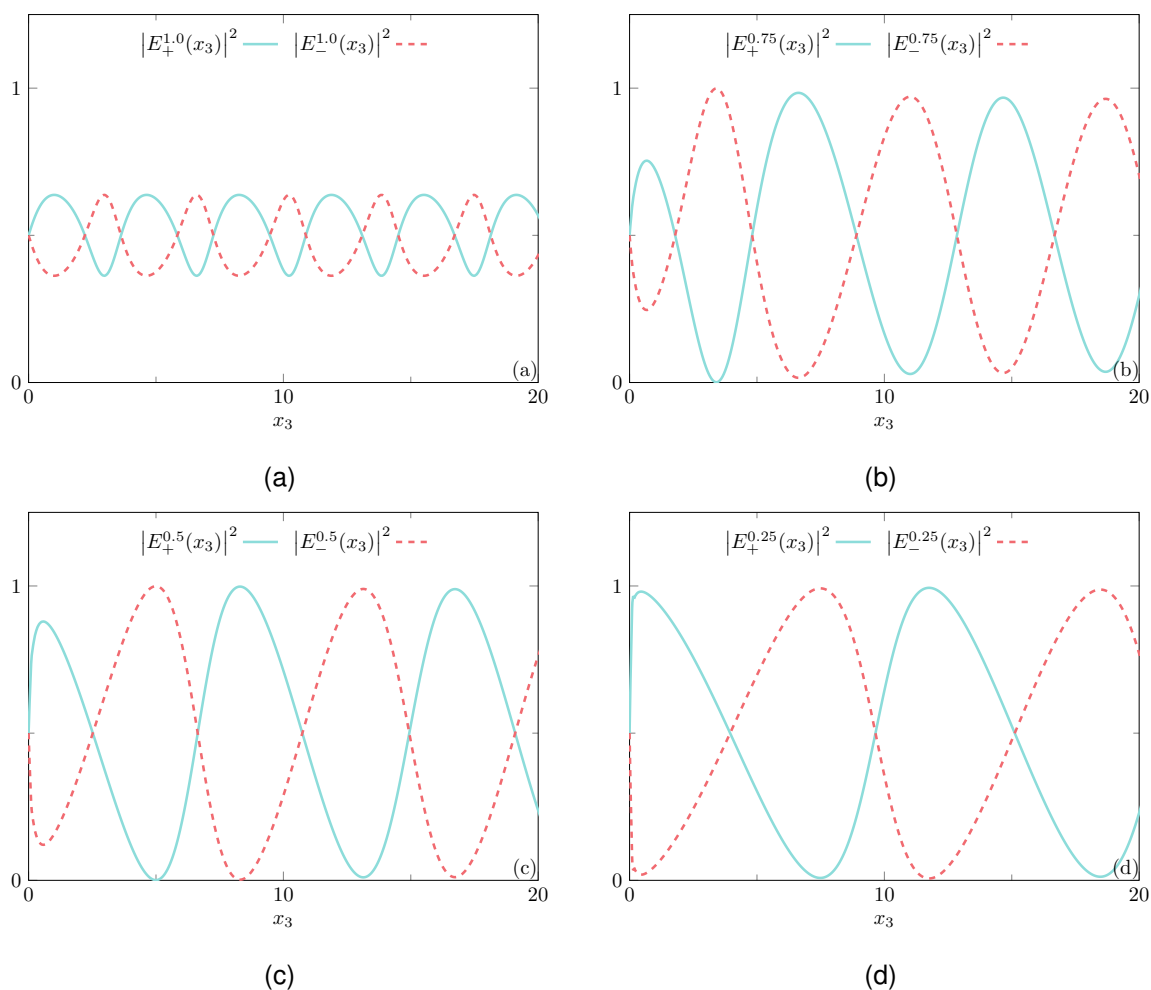
Os comportamentos dos parâmetros do mapa de Dyson estão ilustrados na Fig. 9. Além disso, avaliamos as intensidades dos campos $I_{\pm}^{\alpha}(x_3) \sim |E_{\pm}^{\alpha}(x_3)|^2$. Consideramos o sistema inicialmente no estado $|\psi^{\alpha}(0)\rangle = (1 \ 1)^T/\sqrt{2}$, de modo que as intensidades aparecem distribuídas ao longo da direção x_3 de acordo com as seguintes expressões:

$$|E_{\pm}^{\alpha}(x_3)|^2 = \frac{1}{2} |\varpi^{\alpha}(x_3) \pm \tau^{\alpha}(x_3)|^2, \quad (3.58a)$$

Representamos essas intensidades normalizadas para diferentes valores do parâmetro fracionário α na Fig. 10. Consideramos que, em $x_3 = 0$ as intensidades em ambas as guias são iguais de modo que, as intensidades dos campos em ambas as guias se alternam entre uma e outra ao longo da direção x_3 . Isso acontece devido ao

acoplamento entre os dois guias de onda, o que permite que os guias troquem energia entre si. Para $\alpha = 1$, há uma pequena troca de energia entre os guias em função da posição x_3 . Enquanto para o parâmetro fracionário $\alpha \neq 1$ há um aumento da energia e da distância de troca entre os guias de onda como visto para $\alpha = 0,75, 0,5$ e $0,25$. Note que nestes últimos casos, há posições em que todo o campo se concentra em um único guia o que parece ser um comportamento interessante em ser investigado com mais detalhes futuramente.

Figura 10 – Partindo da intensidade igual dos campos normalizados em ambas as guias de onda na posição $x_3 = 0$, representamos a distribuição espacial das intensidades normalizadas $I_{\pm}^{\alpha}(x_3) \sim |E_{\pm}^{\alpha}(x_3)|^2$ para os casos: (a) $\alpha = 1,0$ (b) $\alpha = 0,75$ (c) $\alpha = 0,5$ (d) $\alpha = 0,25$.



3.3 DISCUSSÃO

Nosso estudo propõe uma descrição diferente da dinâmica de sistemas quânticos de dois níveis no cenário de tempo fracionário aplicando a derivada de Caputo. De

fato, consideramos os conceitos do formalismo de sistemas quânticos não-Hermitianos dependentes do tempo proposto na Ref. (52, 54), para obter uma métrica não-trivial para o espaço de Hilbert, no qual o sistema evolui unitariamente. Isso foi possível através da suposição de que existe um estado que evolui unitariamente, o qual está associado ao estado que evolui de acordo com a equação de Schrödinger fracionária segundo a Eq. (3.24).

Ao considerar a derivada fracionária no tempo (derivada de Caputo) ou os Hamiltonianos não-Hermitianos, ambos falham em conservar a probabilidade do ponto de vista dos princípios da mecânica quântica padrão, quando analisados por meio da métrica trivial do espaço de Hilbert. Isso acontece porque a evolução no tempo não é unitária em relação ao produto interno usual. No entanto, nossa abordagem permite contornar a não-unitariedade da evolução do tempo proveniente da equação de Schrödinger fracionária do tempo, considerando o formalismo não-Hermitiano com métrica dependente do tempo. Reformulando a dinâmica do sistema original em um espaço de Hilbert dinâmico com uma métrica dependente do tempo, todos os postulados da mecânica quântica padrão são assegurados.

Em nossa descrição, consideramos a dinâmica fracionária gerada por um Hamiltoniano não-Hermitiano independente do tempo. Observamos que o mapa de Dyson dependente do tempo fornece tanto a não-hermiticidade proveniente do Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_0^\alpha$ quanto a derivada fracionária do tempo. Diferentemente do caso analisado no Capítulo anterior, em que os parâmetros do mapa de Dyson devem satisfazer um conjunto de equações diferenciais, aqui é possível encontrar os parâmetros do mapa de forma exata, uma vez que a evolução temporal não-unitária é conhecida. Aqui o problema é relativamente simples porque se trata de um problema de matrizes 2×2 . Extensões para outras simetrias com dimensões maiores ou ainda infinitas ainda é um desafio. Este trabalho abre caminho para novos estudos em mecânica quântica fracionária.

O assunto discutido neste capítulo está disponível na Ref. (153).

4 EMARANHAMENTO ENTRE DOIS MODOS DESACOPLADOS MODULADOS POR FREQUÊNCIA COMPLEXA

O emaranhamento como recurso quântico pode surgir naturalmente quando mais de um sistema quântico é considerado e, portanto, tornou-se uma ferramenta indispensável para caracterizar sistemas quânticos de muitos corpos (154). É essencial para muitas aplicações no campo da informação quântica, como distribuição de chaves quânticas (155), teletransporte quântico (156) e computação quântica (157). A geração de emaranhamento em arranjos ópticos pode ser conseguida, por exemplo, por meio de amplificadores paramétricos considerados para modos de cavidades cuja dinâmica de acoplamento é modelada por um Hamiltoniano bilinear $\hat{H} \propto \hat{a}_1 \hat{a}_2 + \text{H.c}$ (158, 159). Além disso, um divisor de feixe atua como um emaranhador e é descrito pelo Hamiltoniano $\hat{H} \propto \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + \text{H.c}$ (160, 161). No entanto, o emaranhamento também pode ser produzido e manipulado em diferentes cenários físicos como RMN (162), qubits supercondutores (163), sistemas optomecânicos (164) e outros (165, 166).

A caracterização do emaranhamento é baseada em critérios bem estabelecidos que fornecem várias condições e requerem diferentes técnicas experimentais para serem avaliadas (167, 168). Como exemplo, em sistemas de variáveis contínuas, os critérios de Hillery e Zubairy (169, 170), e o critério de Nha e Zubairy (171, 172) fornecem uma classe de desigualdades envolvendo as realizações bosônicas de dois modos das álgebras de Lie $\mathfrak{su}(1, 1)$ e $\mathfrak{su}(2)$, cuja violação indica a presença de emaranhamento. Algumas condições para emaranhamento em sistemas multipartidos são derivadas na Ref. (173). Além disso, emaranhamento multipartido genuíno e *steering* para variáveis contínuas são discutidos por Teh e Reid (174), os quais são aplicados, por exemplo, em conversão paramétrica descendente espontânea de três modos para detectar emaranhamento não-gaussiano genuíno tripartido (175). Nesse capítulo, estendemos o estudo de sistemas quânticos emaranhados considerados no âmbito da não-hermiticidade.

As referências (176, 177) contêm resultados com foco nas propriedades de emaranhamento e *steering* em um sistema quântico \mathcal{PT} -simétrico com ganho e perda balanceados no cenário independente do tempo para duas e três cavidades ópticas acopladas. Além disso, para a formulação pseudo-Hermitiana dependente do tempo, Frith (178) estuda a versão não-Hermitiana de Jaynes-Cummings na qual um comportamento exótico do emaranhamento aparece no regime de quebra de simetria

\mathcal{PT} .

Observamos aqui que um Hamiltoniano pseudo-Hermitiano que descreve modos aparentemente desacoplados, modulados por uma função complexa dependente do tempo, pode apresentar emaranhamento mesmo quando os operadores que contêm a interação entre tais modos estão ausentes. Avaliamos o emaranhamento entre dois modos por meio da entropia linear (167). O emaranhamento não trivial entre modos desacoplados são devidos ao mapa de Dyson dependente do tempo, que gera um espaço de Hilbert dinâmico inseparável no qual as correlações quânticas estão codificadas. Nesse contexto, é importante entender a relevância da física derivada dos Hamiltonianos pseudo-Hermitianos e suas possíveis aplicações à informação quântica (46).

4.1 SIMETRIAS DINÂMICAS $SU(1, 1)$ E $SU(2)$

4.1.1 Hamiltoniano não-Hermitiano e o Mapa de Dyson

Para nosso propósito principal, consideramos o operador Hamiltoniano não-Hermitiano da seguinte forma

$$\hat{H}_s(t) = 2\omega(t)\hat{K}_0 + 2\alpha(t)\hat{K}_- + 2\beta(t)\hat{K}_+, \quad (4.1)$$

onde o operador \hat{K}_i é usado para representar o i -ésimo elemento das álgebras de Lie $\mathfrak{su}(1, 1)$ ou $\mathfrak{su}(2)$, que podem ser escritas na forma unificada:

$$[\hat{K}_0, \hat{K}_\pm] = \pm\hat{K}_\pm, \quad [\hat{K}_+, \hat{K}_-] = 2s\hat{K}_0. \quad (4.2)$$

Aqui a escolha do parâmetro $s = \pm 1$ determina as correspondentes álgebras $\mathfrak{su}(2)$ e $\mathfrak{su}(1, 1)$, respectivamente. No contexto das álgebras de Lie, introduzimos agora a aplicação Hermitiana do mapa de Dyson dependente do tempo definida em termos dos geradores \hat{K}_i , e que tem a forma

$$\hat{\eta}_s(t) = \exp [2\epsilon_s\hat{K}_0 + 2\mu_s\hat{K}_- + 2\mu_s^*\hat{K}_+], \quad (4.3a)$$

$$= \exp [\lambda_s\hat{K}_+] \exp [\ln \Lambda_s\hat{K}_0] \exp [\lambda_s^*\hat{K}_-]. \quad (4.3b)$$

Observe que os parâmetros em ambas as Eqs. (4.3a)-(4.3b) são dependentes do tempo, e nós o suprimimos na notação para simplificar. A Eq. (4.3b) vem da decomposição de

Gauss (108) aplicada na Eq. (4.3a), com λ_s e Λ_s convenientemente escritos na forma

$$\lambda_s = \Phi_s e^{-i\varphi_s}, \quad (4.4a)$$

$$\Lambda_s = \frac{1 - \tanh^2 \Xi_s}{(1 - \epsilon_s \tanh \Xi_s / \Xi_s)^2}, \quad (4.4b)$$

com $\Lambda_s > 0$, e

$$\Phi_s = \frac{\epsilon_s \tanh \Xi_s / \Xi_s}{1 - \epsilon_s \tanh \Xi_s / \Xi_s} |z_s|. \quad (4.5)$$

Na Eq. (4.5) o parâmetro z_s

$$z_s = \frac{2\mu_s}{\epsilon_s} = |z_s| e^{i\varphi_s}, \quad (4.6)$$

é conhecido por ser o parâmetro livre do mapa, onde estamos assumindo o parâmetro ϵ_s como uma função real positiva ($\epsilon_s \geq 0$) e $\mu_s = |\mu_s| e^{i\varphi_s}$. Além disso, temos o parâmetro $\Xi_s = \sqrt{\epsilon_s^2 + 4s|\mu_s|^2} = \epsilon_s \sqrt{1 + s|z_s|^2}$ tal que assumimos $\Xi_s \in \mathbb{R}$. Ao contrário do caso $\mathfrak{su}(2)$ que não implica nenhuma restrição aos valores numéricos de $|z_s|$, a imposição $\Xi_s \in \mathbb{R}$ implica a condição adicional $|z_s| \leq 1$ para o caso da álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1, 1)$.

O fato de considerarmos $\epsilon_s \geq 0$ permite, a partir da Eq. (4.5), expressar o parâmetro ϵ_s em termos de z_s e Φ_s na forma

$$\epsilon_s = \frac{1}{2\sqrt{1 + s|z_s|^2}} \ln \frac{(1 + \sqrt{1 + s|z_s|^2})\Phi_s + |z_s|}{(1 - \sqrt{1 + s|z_s|^2})\Phi_s + |z_s|}. \quad (4.7)$$

Convenientemente, também definimos a função real

$$\chi_s = -s\Phi_s^2 - \Lambda_s = -\frac{2\Phi_s}{|z_s|} - 1, \quad (4.8)$$

a qual simplifica a notação dos cálculos ao longo deste capítulo. Além disso, o módulo do parâmetro livre $|z_s|$ em termos dos parâmetros dependentes do tempo Φ_s e Λ_s é obtido a partir da Eq. (4.8) como sendo

$$|z_s| = \frac{2\Phi_s}{\Lambda_s + s\Phi_s^2 - 1}. \quad (4.9)$$

Por ora apenas definimos o mapa de Dyson, e agora podemos construir a contraparte Hermitiana (1.35) e conectar os parâmetros do mapa com os coeficientes do Hamiltoniano (4.1).

4.1.2 Contraparte Hermitiana

Como estamos considerando a estrutura do operador Hamiltoniano não-Hermitiano em termos dos geradores das álgebras de Lie $\mathfrak{su}(2)$ e $\mathfrak{su}(1, 1)$, o operador correspondente a contrapartida Hermitiana $\hat{h}(t)$, obtida através da estrutura expressa na Eq.

(1.35), deve ser escrito em termos dos mesmos geradores de álgebra de Lie:

$$\hat{h}_s(t) = 2\mathcal{W}_s(t)\hat{K}_0 + 2\mathcal{U}_s(t)\hat{K}_- + 2\mathcal{V}_s(t)\hat{K}_+. \quad (4.10)$$

Para determinar a forma explícita dos coeficientes em (4.10), aplicamos as seguintes transformações

$$\hat{\eta}_s\hat{K}_0\hat{\eta}_s^{-1} = \frac{1}{\Lambda_s} \left[(\mathfrak{s}\Phi_s^2 - \chi_s)\hat{K}_0 + \lambda_s^*\hat{K}_- + \lambda_s\chi_s\hat{K}_+ \right], \quad (4.11a)$$

$$\hat{\eta}_s\hat{K}_-\hat{\eta}_s^{-1} = \frac{1}{\Lambda_s} \left[2\mathfrak{s}\lambda_s\hat{K}_0 + \hat{K}_- - \mathfrak{s}\lambda_s^2\hat{K}_+ \right], \quad (4.11b)$$

$$\hat{\eta}_s\hat{K}_+\hat{\eta}_s^{-1} = \frac{1}{\Lambda_s} \left[2\mathfrak{s}\lambda_s^*\chi_s\hat{K}_0 - \mathfrak{s}\lambda_s^{*2}\hat{K}_- + \chi_s^2\hat{K}_+ \right], \quad (4.11c)$$

junto do resultado adicional correspondente ao termo envolvendo a derivada temporal no mapa de Dyson que aparece na Eq. (1.35):

$$\partial_t\hat{\eta}_s\hat{\eta}_s^{-1} = \frac{1}{\Lambda_s} (\dot{\Lambda}_s + 2\mathfrak{s}\dot{\lambda}_s^*\lambda_s)\hat{K}_0 + \frac{\dot{\lambda}_s^*}{\Lambda_s}\hat{K}_- + \frac{1}{\Lambda_s} (\dot{\lambda}_s\Lambda_s - \dot{\Lambda}_s\lambda_s - \mathfrak{s}\dot{\lambda}_s^*\lambda_s^2)\hat{K}_+. \quad (4.12)$$

Após simples manipulações algébricas, obtemos os coeficientes dependentes do tempo na Eq. (4.10), que são escritos como

$$\mathcal{W}_s(t) = \frac{1}{\Lambda_s} \left[\omega(\mathfrak{s}\Phi_s^2 - \chi_s) + 2\mathfrak{s}(\alpha\lambda_s + \beta\lambda_s^*\chi_s) + \frac{i}{2}(\dot{\Lambda}_s + 2\mathfrak{s}\dot{\lambda}_s^*\lambda_s) \right], \quad (4.13a)$$

$$\mathcal{U}_s(t) = \frac{1}{\Lambda_s} \left[\omega\lambda_s^* + \alpha - \mathfrak{s}\beta\lambda_s^{*2} + i\frac{\dot{\lambda}_s^*}{2} \right], \quad (4.13b)$$

$$\mathcal{V}_s(t) = \frac{1}{\Lambda_s} \left[\omega\lambda_s\chi_s - \mathfrak{s}\alpha\lambda_s^2 + \beta\chi_s^2 + \frac{i}{2}(\dot{\lambda}_s\Lambda_s - \dot{\Lambda}_s\lambda_s - \mathfrak{s}\dot{\lambda}_s^*\lambda_s^2) \right]. \quad (4.13c)$$

Observe que o operador Hamiltoniano obtido da transformação Eq. (1.35) não é Hermitiano em geral, devido à estrutura algébrica geral do mapeamento de Dyson. Temos que impor a condição de hermiticidade, $\hat{h}_s(t) = \hat{h}_s^\dagger(t)$, que leva às seguintes relações

$$\mathcal{W}_s(t) = \mathcal{W}_s^*(t), \quad \mathcal{V}_s(t) = \mathcal{U}_s^*(t). \quad (4.14)$$

Assim, a condição de hermiticidade em $\hat{h}_s(t)$ implica a forma

$$\hat{h}_s(t) = 2\mathcal{W}_s(t)\hat{K}_0 + 2\mathcal{U}_s(t)\hat{K}_- + 2\mathcal{U}_s^*(t)\hat{K}_+, \quad (4.15)$$

em que os coeficientes dependentes do tempo $\mathcal{W}_s(t)$ e $\mathcal{U}_s(t)$ são dados por:

$$\mathcal{W}_s(t) = \omega_R - \frac{2\mathfrak{s}\Phi_s}{\chi_s - 1} [|\alpha| \cos(\varphi_s - \varphi_\alpha) - |\beta| \cos(\varphi_s + \varphi_\beta)], \quad (4.16a)$$

$$\mathcal{U}_s(t) = \frac{1}{1 - \chi_s} [\alpha - \chi_s\beta^* + ie^{i\varphi_s}\Phi_s\omega]. \quad (4.16b)$$

Aqui $\alpha = |\alpha|e^{i\varphi_\alpha}$, $\beta = |\beta|e^{i\varphi_\beta}$ e $\omega = \omega_R + i\omega_I$ com ω_R e ω_I a parte real e imaginária de ω , respectivamente. Os parâmetros do mapa Dyson agora são restritos ao seguinte conjunto de equações diferenciais não lineares acopladas:

$$\dot{\Phi}_s = \frac{2}{\chi_s - 1} \left\{ [\Phi_s \omega_I - |\alpha| \sin(\varphi_s - \varphi_\alpha)](1 + s\Phi_s^2) + |\beta| \sin(\varphi_s + \varphi_\beta) [s(2\chi_s - 1)\Phi_s^2 + \chi_s^2] \right\}, \quad (4.17a)$$

$$\dot{\varphi}_s = 2\omega_R - \frac{2}{(\chi_s - 1)\Phi_s} \left\{ |\alpha| \cos(\varphi_s - \varphi_\alpha)(1 + s\Phi_s^2) - |\beta| \cos(\varphi_s + \varphi_\beta)(s\Phi_s^2 + \chi_s^2) \right\}, \quad (4.17b)$$

$$\dot{\Lambda}_s = 2\Lambda_s \left\{ \left(\frac{2s\Phi_s^2}{\chi_s - 1} - 1 \right) \omega_I - \frac{2s\Phi_s}{\chi_s - 1} [|\alpha| \sin(\varphi_s - \varphi_\alpha) - |\beta| (2\chi_s - 1) \sin(\varphi_s + \varphi_\beta)] \right\}, \quad (4.17c)$$

que surgem devido às condições de hermiticidade expressas na Eq. (4.14). Então, o Hamiltoniano (4.15) é Hermitiano para cada parâmetro do mapa de Dyson que satisfaz o conjunto de equações (4.17). Também, como nas Refs. (104, 105, 106), nos referimos a z_s como sendo o único parâmetro livre determinando o mapa Dyson, com Φ_s , φ_s e Λ_s provenientes do conjunto de equações acopladas (4.17), e ϵ_s vem da Eq. (4.7). Isso implica que um determinado par $(|z_s|, \Phi_s)$ deve colaborar para um valor real e positivo do parâmetro ϵ_s .

Os resultados descritos até a Eq. (4.13) foram obtidos nas Refs. (179, 180) para o qual os autores consideraram apenas o caso mais simples $\mathcal{V}_s(t) = \mathcal{U}_s(t) = 0$. Por outro lado, impomos condições mais gerais (4.14) para atingir a hermiticidade de $\hat{h}_s(t)$. Além disso, observe que para o caso da álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1, 1)$, nossos resultados reproduzem exatamente o mesmo obtido em (103, 104, 105), onde os autores consideraram a realização de um único modo da álgebra de Lie: o que reforça o fato de que a contrapartida Hermitiana é independente da realização da álgebra de Lie, como no caso independente do tempo tratado na Ref. (181).

4.1.3 Evolução temporal

O primeiro passo no estudo do comportamento dinâmico do sistema descrito pelo operador Hamiltoniano não-Hermitiano (4.1) foi dado pela obtenção do operador Hamiltoniano Hermitiano associado (4.15) por meio do mapeamento de Dyson dependente do tempo. A partir de agora, nossa discussão diz respeito ao procedimento para resolver a equação de Schrödinger (1.33b). Para isso, seguimos uma estratégia

semelhante adotada na Ref. (111), onde temos que considerar a transformação

$$|\psi_s(t)\rangle = \hat{S}_s(t)|\tilde{\psi}_s(t)\rangle, \quad (4.18)$$

com o operador unitário $\hat{S}_s(t)$ definido da seguinte forma

$$\hat{S}_s(t) = \exp [\xi_s(t)\hat{K}_+ - \xi_s^*(t)\hat{K}_-]. \quad (4.19)$$

Na Eq. (4.19) o parâmetro dependente do tempo é $\xi_s(t) = r_s(t)e^{i\phi_s(t)}$ com $r_s(t)$ e $\phi_s(t)$ sendo funções reais tal que $r_s(t) \geq 0$. Substituindo a Eq. (4.18) na Eq. (1.33b), obtemos a equação de Schrödinger para o vetor de estado $|\tilde{\psi}_s(t)\rangle$

$$i\partial_t|\tilde{\psi}_s(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}}_s(t)|\tilde{\psi}_s(t)\rangle, \quad (4.20)$$

para o qual o Hamiltoniano transformado fica dado por

$$\hat{\mathcal{H}}_s(t) = \hat{S}_s^{-1}\hat{h}_s\hat{S}_s + i\partial_t\hat{S}_s^{-1}\hat{S}_s. \quad (4.21)$$

Para escrever a forma explícita do Hamiltoniano transformado acima, precisamos calcular as seguintes transformações:

$$\begin{aligned} \hat{S}_s^{-1}\hat{K}_0\hat{S}_s &= [1 + 2\sinh^2(\sqrt{-s}r_s)]\hat{K}_0 + \frac{e^{-i\phi_s}}{\sqrt{-s}}\sinh(\sqrt{-s}r_s)\cosh(\sqrt{-s}r_s)\hat{K}_- \\ &+ \frac{e^{i\phi_s}}{\sqrt{-s}}\sinh(\sqrt{-s}r_s)\cosh(\sqrt{-s}r_s)\hat{K}_+, \end{aligned} \quad (4.22a)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_s^{-1}\hat{K}_-\hat{S}_s &= -\frac{2s}{\sqrt{-s}}e^{i\phi_s}\sinh(\sqrt{-s}r_s)\cosh(\sqrt{-s}r_s)\hat{K}_0 + \cosh^2(\sqrt{-s}r_s)\hat{K}_- \\ &+ e^{i2\phi_s}\sinh^2(\sqrt{-s}r_s)\hat{K}_+, \end{aligned} \quad (4.22b)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_s^{-1}\hat{K}_+\hat{S}_s &= -\frac{2s}{\sqrt{-s}}e^{-i\phi_s}\sinh(\sqrt{-s}r_s)\cosh(\sqrt{-s}r_s)\hat{K}_0 + e^{-2i\phi_s}\sinh^2(\sqrt{-s}r_s)\hat{K}_- \\ &+ \cosh^2(\sqrt{-s}r_s)\hat{K}_+, \end{aligned} \quad (4.22c)$$

bem como o termo

$$\begin{aligned} \partial_t\hat{S}_s^{-1}\hat{S}_s &= -2i\dot{\phi}_s\sinh^2(\sqrt{-s}r_s)\hat{K}_0 \\ &+ \left[\dot{r}_s - \frac{i}{\sqrt{-s}}\dot{\phi}_s\sinh(\sqrt{-s}r_s)\cosh(\sqrt{-s}r_s) \right] e^{-i\phi_s}\hat{K}_- \\ &- \left[\dot{r}_s + \frac{i}{\sqrt{-s}}\dot{\phi}_s\sinh(\sqrt{-s}r_s)\cosh(\sqrt{-s}r_s) \right] e^{i\phi_s}\hat{K}_+. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Com estas transformações podemos reescrever o Hamiltoniano transformado $\hat{\mathcal{H}}_s$ na forma

$$\hat{\mathcal{H}}_s = 2\Omega_s(t)\hat{K}_0 + 2\vartheta_s(t)\hat{K}_- + 2\vartheta_s^*(t)\hat{K}_+, \quad (4.24)$$

em que

$$\begin{aligned}\Omega_s(t) &= \mathcal{W}_s \cosh(2\sqrt{-s}r_s) - \frac{2s}{\sqrt{-s}} |\mathcal{U}_s| \cos(\phi_s + \varphi_{\mathcal{U}_s}) \sinh(2\sqrt{-s}r_s) \\ &+ \dot{\phi}_s \sinh^2(\sqrt{-s}r_s),\end{aligned}\quad (4.25a)$$

$$\begin{aligned}\vartheta_s(t) &= e^{-i\phi_s} \left\{ \left[\frac{\mathcal{W}_s}{2\sqrt{-s}} + \frac{\dot{\phi}_s}{4\sqrt{-s}} \right] \sinh(2\sqrt{-s}r_s) + |\mathcal{U}_s| \cos(\phi_s + \varphi_{\mathcal{U}_s}) \cosh(2\sqrt{-s}r_s) \right. \\ &+ \left. i \left[|\mathcal{U}_s| \sin(\phi_s + \varphi_{\mathcal{U}_s}) + \frac{\dot{r}_s}{2} \right] \right\}.\end{aligned}\quad (4.25b)$$

Agora impomos a condição $\vartheta_s(t) = 0$, de modo que o Hamiltoniano transformado $\hat{\mathcal{H}}_s$ se reduz a

$$\hat{\mathcal{H}}_s(t) = 2\Omega_s(t)\hat{K}_0, \quad (4.26)$$

com

$$\Omega_s(t) = \mathcal{W}_s - 2\sqrt{-s}|\mathcal{U}_s| \tanh(\sqrt{-s}r_s) \cos(\phi_s + \varphi_{\mathcal{U}_s}), \quad (4.27)$$

de modo que impor a condição $\vartheta(t) = 0$, faz com que os parâmetros r_s e ϕ_s devam satisfazer o conjunto de equações diferenciais acopladas

$$\dot{r}_s = -2|\mathcal{U}_s| \sin(\phi_s + \varphi_{\mathcal{U}_s}), \quad (4.28a)$$

$$\dot{\phi}_s = -2\mathcal{W}_s - 4\sqrt{-s}|\mathcal{U}_s| \coth(2\sqrt{-s}r_s) \cos(\phi_s + \varphi_{\mathcal{U}_s}), \quad (4.28b)$$

em que adotamos a forma polar $\mathcal{U}_s = |\mathcal{U}_s|e^{i\varphi_{\mathcal{U}_s}}$. Portanto, a solução formal da Eq. (4.20) torna-se

$$|\tilde{\psi}_s(t)\rangle = \hat{R}_s(t)|\tilde{\psi}_s(0)\rangle, \quad (4.29)$$

na qual $\hat{R}_s(t)$ é definido como

$$\hat{R}_s(t) = \exp[-2i\tilde{\Omega}_s(t)\hat{K}_0], \quad (4.30)$$

com a função real dependente do tempo $\tilde{\Omega}_s(t) = \int_0^t d\tau \Omega_s(\tau)$. Finalmente, a solução formal da Eq. (1.33b) fica dada por

$$|\psi_s(t)\rangle = \hat{u}_s(t)|\psi_s(0)\rangle, \quad (4.31)$$

sendo o operador unitário de evolução no tempo $\hat{u}_s(t)$ dado por

$$\hat{u}_s(t) = \hat{S}_s(t)\hat{R}_s(t)\hat{S}_s^\dagger(0). \quad (4.32)$$

Além disso, a solução da equação de Schrödinger (1.33a) torna-se

$$\begin{aligned} |\Psi_s(t)\rangle &= \hat{\eta}_s^{-1}(t)\hat{u}_s(t)|\psi_s(0)\rangle \\ &= \hat{\eta}_s^{-1}(t)\hat{u}_s(t)\hat{\eta}_s(0)|\Psi_s(0)\rangle, \end{aligned} \quad (4.33)$$

de onde identificamos o operador de evolução temporal $\hat{U}_s(t)$ como

$$\hat{U}_s(t) = \hat{\eta}_s^{-1}(t)\hat{u}_s(t)\hat{\eta}_s(0). \quad (4.34)$$

Depois de discutir o formalismo que estabelece a conexão entre os aspectos não-Hermitianos da dinâmica do sistema com sua contraparte Hermitiana, podemos analisar quaisquer casos associados ao operador Hamiltoniano (4.1) sem nos preocupar com a realização da álgebra.

4.2 O CASO \hat{K}_0

O modelo mais simples associado ao Hamiltoniano não-Hermitiano (4.1) é obtido assumindo-se os coeficientes dependentes do tempo $\alpha(t) = \beta(t) = 0$, tal que o operador Hamiltoniano tem a forma

$$\hat{H}_s(t) = 2\omega(t)\hat{K}_0, \quad (4.35)$$

com $\omega(t) \in \mathbb{C}$. A contraparte Hermitiana (4.15) correspondente se torna

$$\hat{h}_s(t) = 2\omega_R\hat{K}_0 + 2i\omega_I\frac{\Phi_s}{1-\chi_s}[e^{i\varphi_s}\hat{K}_- - e^{-i\varphi_s}\hat{K}_+], \quad (4.36)$$

em que os coeficientes dependentes do tempo da Eq. (4.16) são identificados como sendo $\mathcal{W}_s(t) = \omega_R$ e $\mathcal{U}_s(t) = ie^{i\varphi_s}\Phi_s\omega_I/(1-\chi_s)$. Os parâmetros do mapa Dyson dependentes do tempo dados pela Eq. (4.17) se reduzem para as seguintes formas:

$$\dot{\Phi}_s = \frac{2\Phi_s(1 + \mathfrak{s}\Phi_s^2)}{\chi_s - 1}\omega_I, \quad (4.37a)$$

$$\dot{\varphi}_s = 2\omega_R, \quad (4.37b)$$

$$\dot{\Lambda}_s = 2\Lambda_s\left(\frac{2\mathfrak{s}\Phi_s^2}{\chi_s - 1} - 1\right)\omega_I. \quad (4.37c)$$

As soluções deste conjunto de equações diferenciais são dadas por

$$\Phi_s(t) = \Phi_s(0)\frac{\Lambda_s(0) + \mathfrak{s}\Phi_s^2(0) + 1}{\Lambda_s(0) + [\mathfrak{s}\Phi_s^2(0) + 1]e^{2\int_0^t d\tau\omega_I(\tau)}}, \quad (4.38a)$$

$$\varphi_s(t) = \varphi_s(0) + 2\int_0^t d\tau\omega_R(\tau), \quad (4.38b)$$

$$\Lambda_s(t) = \Lambda_s(0)\frac{\mathfrak{s}\Phi_s^2(t) + 1}{\mathfrak{s}\Phi_s^2(0) + 1}e^{-2\int_0^t d\tau\omega_I(\tau)}, \quad (4.38c)$$

enquanto o módulo do parâmetro livre z_s fica completamente definido pela Eq. (4.9).

Para obter a evolução temporal do sistema quântico, temos que resolver o conjunto de equações diferenciais expressas na Eq. (4.28). Para isso, observe que

$$\mathcal{U}_s(t) = |\mathcal{U}_s| e^{i\varphi_{\mathcal{U}_s}} = -i \frac{\Phi_s}{\chi_s - 1} \omega_l e^{i\varphi_s}, \quad (4.39)$$

leva às identidades

$$|\mathcal{U}_s| \cos \varphi_{\mathcal{U}_s} = \frac{\Phi_s \omega_l}{\chi_s - 1} \sin \varphi_s, \quad (4.40a)$$

$$|\mathcal{U}_s| \sin \varphi_{\mathcal{U}_s} = -\frac{\Phi_s \omega_l}{\chi_s - 1} \cos \varphi_s, \quad (4.40b)$$

o que nos permite reescrever a Eq. (4.28) como

$$\dot{r}_s = \frac{2\Phi_s}{\chi_s - 1} \omega_l \cos(\varphi_s + \phi_s), \quad (4.41a)$$

$$\dot{\phi}_s = -2\omega_R - \frac{4\sqrt{-s}\Phi_s \omega_l}{\chi_s - 1} \coth(2\sqrt{-s}r_s) \sin(\varphi_s + \phi_s). \quad (4.41b)$$

Uma simplificação considerável é obtida para as Eqs. (4.40) se assumirmos que

$$\varphi_s = l\pi - \phi_s, \quad (4.42)$$

o que implica na taxa máxima de variação no tempo da função r_s para um dado \mathcal{U}_s . Além disso, a partir da Eq. (4.37a), obtemos a seguinte igualdade

$$\frac{2\Phi_s}{\chi_s - 1} \omega_l = \frac{\dot{\Phi}_s}{1 + s\Phi_s^2}, \quad (4.43)$$

o que leva ao conjunto mais simples de equações diferenciais

$$\dot{r}_s = (-1)^l \frac{\dot{\Phi}_s}{1 + s\Phi_s^2}, \quad (4.44a)$$

$$\dot{\phi}_s = -2\omega_R. \quad (4.44b)$$

Notamos que ambas as equações da Eq. (4.44) tornam-se desacopladas e podem ser integradas diretamente para gerar as soluções na forma

$$r_s(t) = r_s(0) + \frac{(-1)^l}{2\sqrt{-s}} \ln \frac{\varpi_s(t)}{\varpi_s(0)}, \quad (4.45a)$$

$$\phi_s(t) = l\pi - \varphi_s(0) - 2 \int_0^t d\tau \omega_R(\tau), \quad (4.45b)$$

com a função $\varpi_s(t)$ dada como

$$\varpi_s(t) = \frac{1 + \sqrt{-s}\Phi_s(t)}{1 - \sqrt{-s}\Phi_s(t)}. \quad (4.46)$$

O inteiro l pode ser escolhido para fazer $r_s > 0$. Além disso, para determinar o operador unitário de evolução temporal na Eq. (4.32), ainda temos que calcular o parâmetro $\Omega_s(t)$ dado na Eq. (4.27), que produz

$$\Omega_s(t) = \omega_R, \quad (4.47)$$

sob as hipóteses anteriores. Embora $r_s(t)$ pareça ser uma função complexa quando $s = 1$, cálculos diretos mostram que o logaritmo complexo pode ser reescrito em termos da função real arco-tangente. Estas soluções são semelhantes às obtidas em (106) considerando a realização de um único modo de $\mathfrak{su}(1, 1)$, e correspondem ao conhecido oscilador de Swanson dependente do tempo com uma frequência imaginária pura dependente do tempo ($\omega_R = 0$).

Como mencionado anteriormente, reforçamos que as soluções obtidas até este ponto em nossa discussão são independentes das realizações da álgebra de Lie. Focamos nosso interesse no emaranhamento que ocorre no cenário não-Hermitiano, a seguir, consideramos as realizações bosônicas de dois modos de ambas as álgebras de Lie.

4.3 DOIS MODOS DESACOPLADOS E EMARANHAMENTO

As álgebras de Lie $\mathfrak{su}(1, 1)$ e $\mathfrak{su}(2)$ têm relevância imediata em questões relativas às propriedades não clássicas da luz no contexto da óptica quântica (182, 183, 184). Por exemplo, as realizações bosônicas de $\mathfrak{su}(1, 1)$ são aplicadas para descrever o amplificador paramétrico degenerado e não-degenerado (158, 159, 185, 186), enquanto divisores de feixe (160, 161, 187) são descritos por meio da álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$. Resultados importantes sobre as realizações bosônicas multimodo das álgebras de Lie são relevantes para o estudo de estados coerentes generalizados (188, 189, 190, 191, 192). A seguir, restringimos nossa análise às realizações bosônicas de dois modos usuais dos três elementos de $\mathfrak{su}(1, 1)$ e $\mathfrak{su}(2)$ conforme definido na Ref. (188).

Como medida de emaranhamento, a entropia linear é determinada a partir da expressão (167)

$$\mathcal{S}_s(t) = 1 - \text{Tr}[\hat{\rho}_s^{(1)}(t)]^2, \quad (4.48)$$

com $\hat{\rho}_s^{(1)}(t)$ sendo a matriz de densidade reduzida para o primeiro modo, que é obtida pela soma sobre todo o grau de liberdade do segundo modo, ou seja, $\hat{\rho}_s^{(1)}(t) = \text{Tr}_2 |\psi_s(t)\rangle \langle \psi_s(t)|$.

Além disso, a seguir, adotamos a seguinte notação: quando explicitamos o valor de ε , em vez de usar o subscrito $\varepsilon = \pm 1$ nas funções e nos operadores, indexamos pelos sinais de $-$ ou $+$ de acordo com o sinal de ε .

4.3.1 Emaranhamento $\mathfrak{su}(1, 1)$

Temos os elementos de $\mathfrak{su}(1, 1)$ relacionados com os operadores bosônicos \hat{a}_i e \hat{a}_j^\dagger que satisfazem a álgebra de Weyl-Heisenberg (193),

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}. \quad (4.49)$$

As relações são escritas como (182, 188)

$$\hat{K}_0 = \frac{1}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + 1), \quad (4.50a)$$

$$\hat{K}_+^\dagger = \hat{K}_- = \hat{a}_1 \hat{a}_2, \quad (4.50b)$$

e é apenas a conhecida realização comumente aplicada na descrição da compressão de dois modos de campos de luz (183).

Para nosso propósito, consideramos o estado de vácuo de dois modos separável inicial $|\psi_-(0)\rangle = |0, 0\rangle$ para o qual a condição $r_-(0) = 0$ é verdadeira, e para o qual a Eq. (4.31) fornece

$$|\psi_-(t)\rangle = \frac{e^{-i\tilde{\Omega}_-}}{\cosh r_-} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\phi_-} \tanh^n r_- |n, n\rangle, \quad (4.51)$$

de modo que a matriz de densidade reduzida se torna

$$\hat{\rho}_-^{(1)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh^{2n} r_-}{\cosh^2 r_-} |n\rangle \langle n|, \quad (4.52)$$

e a entropia linear correspondente (4.48) é dada por

$$\mathcal{S}_-(t) = 1 - \operatorname{sech}[2r_-(t)]. \quad (4.53)$$

Da Eq. (4.53) vemos que o emaranhamento é nulo quando $r_-(t) = 0$, o que é verdade para o estado inicial $|\psi_-(0)\rangle = |0, 0\rangle$. A intensificação do emaranhamento é sempre verificada sempre que o valor de $r_-(t)$ aumenta com o tempo, e notamos que o emaranhamento máximo ocorre com compressão infinita, o que parece ser possível como recentemente demonstrado por Dourado e colaboradores (106). Segundo eles, uma compressão infinita em um intervalo de tempo finito é possível, para a realização

bosônica de um único modo de $\mathfrak{su}(1, 1)$, considerando uma frequência imaginária pura dependente do tempo gerada por um forte bombeamento de energia. Uma vez que os resultados representados nas Eqs. (4.38) e (4.45) são independentes da realização, nossas soluções correspondem àsquelas de (106) aplicando a mudança $\Phi_-(t) \rightarrow -\Phi_-(t)$ para todos os resultados, e tomando $l = 1$ na Eq. (4.45a).

Consideremos a parte imaginária da frequência complexa sendo linear no tempo tal que

$$\omega_1(t) = \gamma^2 t. \quad (4.54)$$

A seguir, examinamos a validade dos parâmetros do mapa de Dyson dependentes do tempo expressos em (4.38) sob a parte imaginária da frequência acima, alterando $\Phi_- \rightarrow -\Phi_-$ em todos os resultados anteriores. Na verdade, esta transformação é apenas conveniente para recuperar os resultados obtidos na Ref. (106). Além disso, os autores demonstraram que existe uma região onde o módulo do parâmetro livre excede a unidade. Nesta região, o processo de hermitização falha, pois assumimos inicialmente a condição $|z_-(t)| \leq 1$.

Para realizar uma análise mais rigorosa, verificamos que o módulo do parâmetro livre $|z(t)|$ se torna igual à unidade em dois momentos distintos, a saber, T_{\pm} dado por

$$T_{\pm} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\ln \left[\Phi_-(0) - \frac{\Lambda_-(0)}{\Phi_-(0) \pm 1} \right]}, \quad (4.55)$$

e então calculamos o tempo T em que o valor máximo de $|z_-(t)|$ ocorre resolvendo a equação

$$\left. \frac{d|z_-(t)|}{dt} \right|_{t=T} = 0.$$

Esta equação nos fornece o valor de tempo

$$T = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{T_-^2 + T_+^2}, \quad (4.56)$$

e, neste instante de tempo, o módulo do parâmetro livre assume o seguinte valor

$$|z_-(T)| = \frac{1 - \frac{\Lambda_-(0)}{\Phi_-^2(0)} - \frac{1}{\Phi_-^2(0)}}{\sqrt{\left[\left(1 - \frac{\Lambda_-(0)}{\Phi_-^2(0)}\right)^2 - \frac{1}{\Phi_-^2(0)} \right] \left[1 - \frac{1}{\Phi_-^2(0)}\right]}}, \quad (4.57)$$

considerando $\Phi_-(0) > 0$. Isso implica definir $\Phi_-^2(0) - \Lambda_-(0) \geq 1$ para garantir $|z_-(T)| \geq 0$. Se $\Phi_-(0) \gg 1$, podemos desprezar termos de ordem $\mathcal{O}[1/\Phi_-^2(0)]$, e então a Eq. (4.57) se reduz a

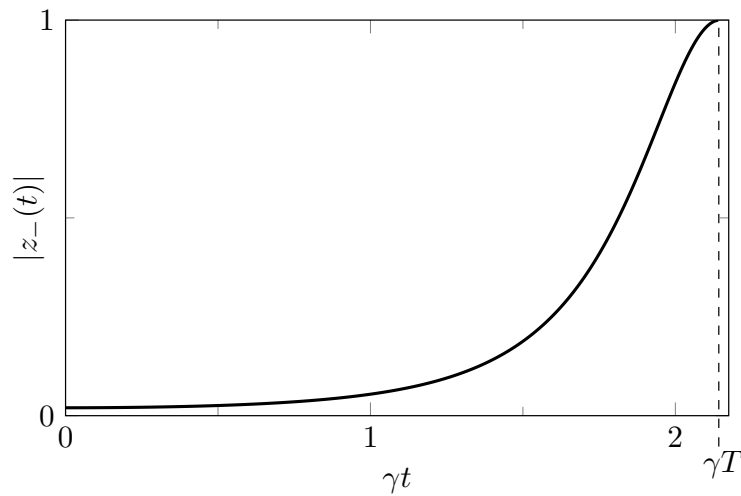
$$|z_-(T)| \approx 1. \quad (4.58)$$

Assim como esperado, sob essas considerações, notamos que ambas os tempos T_{\pm} se tornam aproximadamente iguais a T . Em outras palavras, temos a aproximação

$$T \approx T_{\pm} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\ln \left[\Phi_{-}(0) - \frac{\Lambda_{-}(0)}{\Phi_{-}(0)} \right]}. \quad (4.59)$$

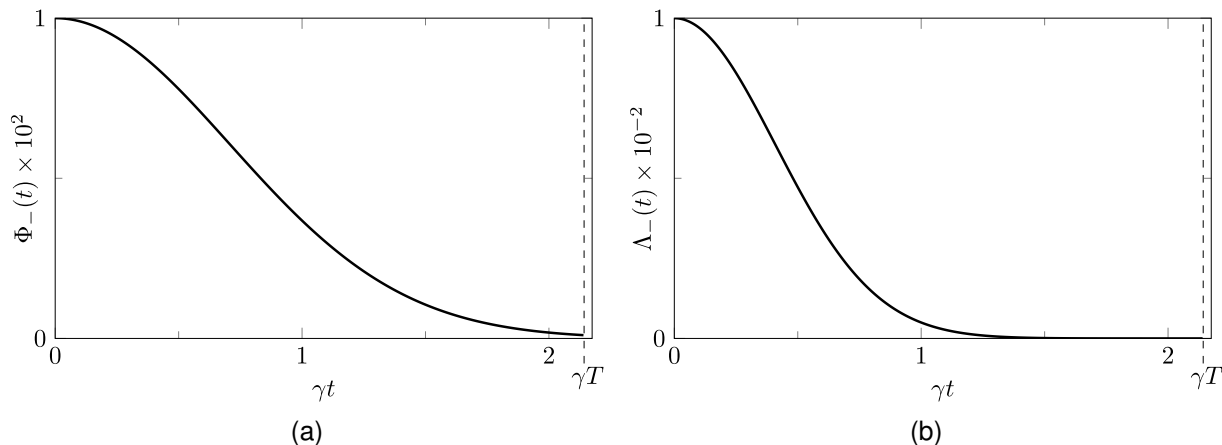
Então, verificamos numericamente as aproximações anteriores para $|z_{-}(T)|$ na Fig. 11, em que o módulo do parâmetro livre $|z_{-}(t)|$ é representado na escala de tempo adimensional γt com $\gamma = 1/2 \text{ s}^{-1}$ assumindo os seguintes valores iniciais para os parâmetros do mapa de Dyson: $\Phi_{-}(0) = 10^2$ e $\Lambda_{-}(0) = 10^{-2}$. Enquanto a Fig. 12 mostra os parâmetros do mapa de Dyson $\Phi_{-}(t)$ e $\Lambda_{-}(t)$ na escala de tempo adimensional γt assumindo-se os mesmos parâmetros iniciais definidos na Fig. 11. Conforme o tempo vai para T , temos $\Phi_{-}(T) \gtrsim 1$ e $\Lambda_{-}(T) \gtrsim 0$. No momento inicial, os parâmetros do mapa de Dyson na Eq. (4.3a) assume os valores $\epsilon_{-}(0) \approx 11.52$ e $\mu_{-}(0) \approx 0.12 e^{i\varphi_{-}(0)}$. Observe que ambos os parâmetros são necessários para construir o estado inicial $|\Psi_{-}(0)\rangle = \hat{\eta}_{-}^{-1}(0)|0,0\rangle$ necessário para alcançar compressão infinita. Além disso, diante de nossas premissas, $\Phi_{-}(0) \gg 1$, os resultados associados aos parâmetros do mapa de Dyson estão totalmente de acordo com a análise feita nas Refs. (104, 105, 106).

Figura 11 – O módulo do parâmetro livre do mapa de Dyson $|z_{-}(t)|$ em termos da escala de tempo adimensional γt com $\gamma = 1/2 \text{ s}^{-1}$ para os valores iniciais $\Phi_{-}(0) = 10^2$ e $\Lambda_{-}(0) = 10^{-2}$. Calculamos a evolução temporal até o tempo adimensional $\gamma T \approx 2.15$.



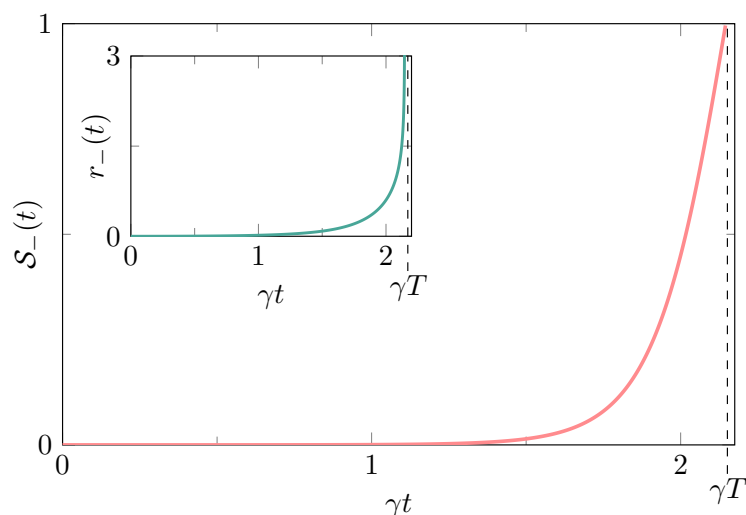
Além disso, como mencionado anteriormente, de acordo com a Eq. (4.53) o emaranhamento máximo ocorre no limite $r_{-}(t) \rightarrow \infty$ e, portanto, da Eq. (4.45a) com $l = 1$, vemos que isso acontece exatamente em $t = T_{+}$ expresso na Eq. (4.55). No entanto,

Figura 12 – Os parâmetros do mapa de Dyson (a) $\Phi_-(t)$ e (b) $\Lambda_-(t)$ em termos da escala adimensional γt com $\gamma = 1/2 \text{ s}^{-1}$ para os valores iniciais $\Phi_-(0) = 10^2$ and $\Lambda_-(0) = 10^{-2}$. Calculamos a evolução temporal até o tempo adimensional $\gamma T \approx 2.15$.



T_+ pode ser aproximado de T como dado pela Eq. (4.59) considerando $\Phi_-(0) \gg 1$. Na Fig. 13, plotamos a entropia linear (4.53) na escala de tempo adimensional γt assumindo os mesmos parâmetros iniciais dos gráficos anteriores. Além disso, também representamos o grau de compressão $r_-(t)$ no *inset* da Fig. 13, na qual observamos que quanto maior for a compressão do estado, maior será a medida de emaranhamento entre os modos. No nosso caso, o grau de compressão tende ao infinito, e a entropia linear se aproxima de seu valor máximo que corresponde à unidade.

Figura 13 – A entropia linear $\mathcal{S}_-(t)$ em termos da escala de tempo adimensional γt com $\gamma = 1/2 \text{ s}^{-1}$ para os valores iniciais $\Phi_-(0) = 10^2$ e $\Lambda_-(0) = 10^{-2}$. Além disso, representamos o grau de compressão $r_-(t)$ no *inset*. Calculamos a evolução temporal até o tempo adimensional $\gamma T \approx 2.15$.



4.3.2 Emaranhamento $\mathfrak{su}(2)$

A álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ pode ser expressa em termos de dois operadores bosônicos como segue (188, 194):

$$\hat{K}_0 = \frac{1}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2), \quad (4.60a)$$

$$\hat{K}_+ = \hat{K}_-^\dagger = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2, \quad (4.60b)$$

que nada mais é do que a representação do momento angular de Schwinger. Na representação unitária da álgebra de Lie assumida anteriormente, o número total n de bósons no sistema é constante. O estado de vácuo é entendido como o estado sem bósons no modo 1 e $n = 2j$ bósons no modo 2 com $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ significando que $|\psi_+(0)\rangle = |0, n\rangle$, tal que $\hat{K}_-|0, n\rangle = 0$, para o qual assumimos $r_+(0) = 0$. Sob essas condições, o estado evoluído no tempo na Eq. (4.31) se reduz a

$$|\psi_+(t)\rangle = e^{in\tilde{\Omega}_+} \cos^n r_+ \sum_{k=0}^n C_{n,k}^{\frac{1}{2}} e^{ik\phi_+} \tan^k r_+ |k, n-k\rangle, \quad (4.61)$$

em que $C_{n,k} = \binom{n}{k}$ é o coeficiente binomial.

Da mesma forma que foi feito antes para o caso de $\mathfrak{su}(1, 1)$, partimos do operador densidade reduzido para o primeiro modo escrito como

$$\hat{\rho}_+^{(1)}(t) = \sum_{k=0}^n \frac{C_{n,k} \tan^{2k} r_+}{[1 + \tan^2 r_+]^n} |k\rangle \langle k|, \quad (4.62)$$

para a qual a entropia linear correspondente $\mathcal{S}_+(t)$ é dada por

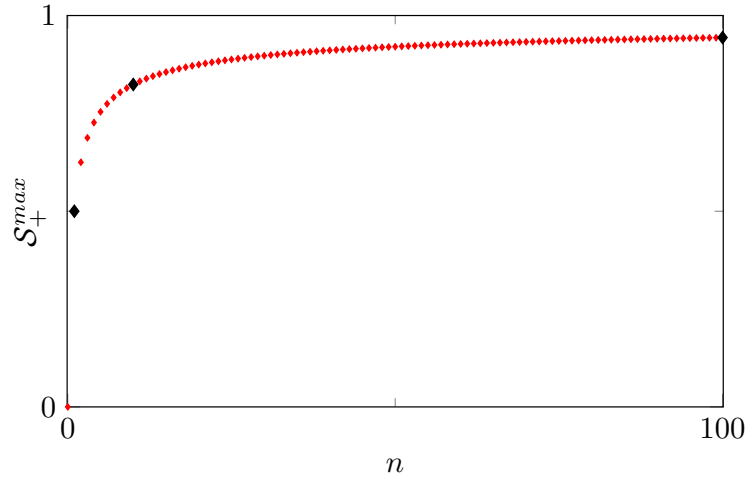
$$\mathcal{S}_+(t) = 1 - \cos^n(2r_+) P_n \left[\frac{1 + \cos^2(2r_+)}{2 \cos(2r_+)} \right], \quad (4.63)$$

determinado em termos do Polinômio Legendre $P_n(\cdot)$. Observe que enquanto para o $\mathfrak{su}(1, 1)$ a entropia linear depende das funções hiperbólicas em r_- , para o caso de $\mathfrak{su}(2)$ a dependência ocorre em termos de formas polinomiais de funções trigonométricas, evidenciando o comportamento periódico da entropia no tempo. Além disso, pode-se verificar que, para um dado n , a medida máxima de emaranhamento ocorre para $r_+ \rightarrow \pi/4 + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Nesse limite, a entropia linear (4.63) se reduz a

$$\mathcal{S}_+^{\max} = 1 - \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} n!}. \quad (4.64)$$

Vemos que a medida de emaranhamento tem uma dependência direta do número total de bósons n , e vai para o valor máximo $\mathcal{S}_+^{\max} = 1$ quando $n \rightarrow \infty$. Esta dependência de n está representada na Fig. 14.

Figura 14 – A entropia linear como função do número total de bósons n quando $r_+ = \pi/4$. Cada ponto corresponde a medida máxima de emaranhamento para um dado valor de n . Neste caso, a entropia linear se aproxima da unidade no limite $n \rightarrow \infty$. Os losangos pretos são utilizados para indicar os casos plotados da entropia como função do tempo na Fig. 17.



Aqui, também restringimos nossa análise à parte imaginária linear $\omega_1(t)$ dada pela Eq. (4.54). Assim, antes de analisarmos a possibilidade de atingir o emaranhamento máximo, como feito para o caso $\mathfrak{su}(1, 1)$, investigamos os parâmetros do mapa de Dyson.

Da Eq. (4.9), podemos obter o tempo em que o módulo do parâmetro livre vai para seu limite superior, que corresponde a $|z_+(t)| \rightarrow \infty$. Temos que isso acontece quando a seguinte condição é alcançada:

$$\Phi_+^2(T) = 1 - \Lambda_+(T), \quad (4.65)$$

para $0 < \Lambda_+(T) \leq 1$, onde estamos supondo que $|z_+(t)| \rightarrow \infty$ é alcançado no instante de tempo T , o qual é dado por

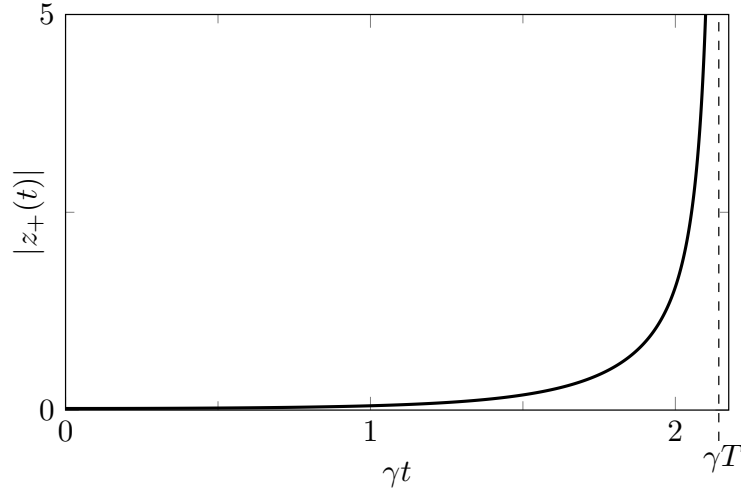
$$T = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{1}{2} \ln \left[\Phi_+^2(0) \frac{\left(1 + \frac{\Lambda_+(0)}{\Phi_+^2(0)}\right)^2 + \frac{1}{\Phi_+^2(0)}}{1 + \frac{1}{\Phi_+^2(0)}} \right]}. \quad (4.66)$$

De fato, T representa o maior tempo em que o mapa de Dyson (4.3a) pode hermitizar o Hamiltoniano não-Hermitiano através da relação expressa na Eq. (1.35). O comportamento do parâmetro livre do mapa Dyson $|z_+(t)|$ é representado na Fig. 15.

Podemos supor a função $r_+(t) \rightarrow \pi/4$ no instante $t = T'$, tal que

$$\lim_{t \rightarrow T'} r_+(t) = \frac{\pi}{4},$$

Figura 15 – O módulo do parâmetro livre do mapa de Dyson $|z_+(t)|$ em termos da escala de tempo adimensional γt com $\gamma = 1/2 \text{ s}^{-1}$ para os valores iniciais $\Phi_+(0) = 10^2$ e $\Lambda_+(0) = 10^{-2}$. Calculamos a evolução temporal até o tempo adimensional $\gamma T \approx 2.15$.



que é obtido quando a seguinte equação é válida

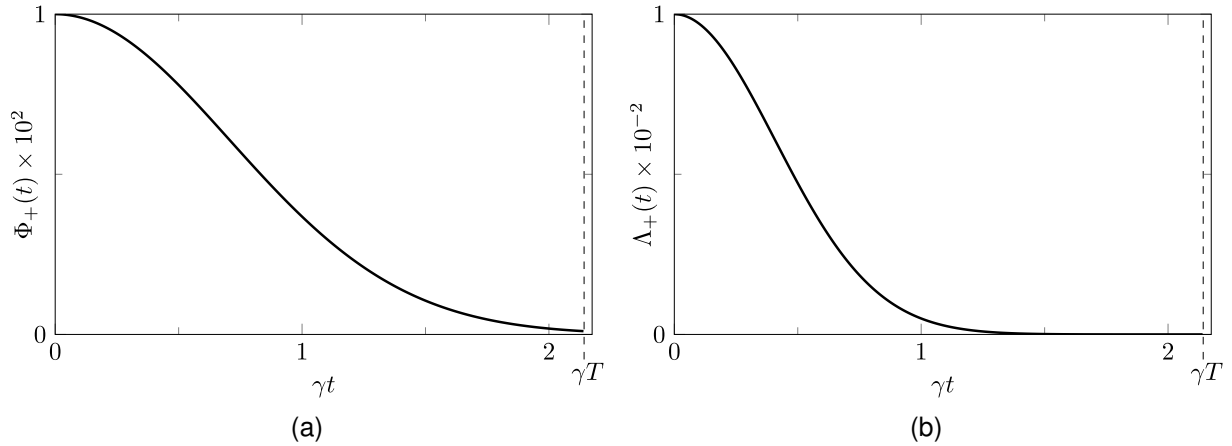
$$T' = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\ln \left[\Phi_+(0) \frac{1 + \frac{1}{\Phi_+(0)} + \frac{\Lambda_+(0)}{\Phi_+^2(0)}}{1 - \frac{1}{\Phi_+^2(0)}} \right]}, \quad (4.67)$$

assumindo $r_+(T) = \pi/4$ e $l = 1$ na Eq. (4.45a). Além disso, se considerarmos $\Phi_+ \gg 1$ e $\Lambda_+ \ll 1$, podemos desprezar termos de ordem $\mathcal{O}[1/\Phi_+(0)]$. De modo que, sob essas suposições, ambas as vezes T e T' expressas nas Eqs. (4.66) e (4.67), respectivamente, tornam-se aproximadamente iguais entre si, e então

$$T \approx T' \approx \frac{1}{\gamma} \sqrt{\ln \Phi_+(0)}. \quad (4.68)$$

Portanto, não há inconsistências ocorrendo na evolução temporal dos parâmetros do mapa de Dyson como pode ser visto numericamente na Fig. 16. Para esses gráficos, consideramos uma escala de tempo adimensional γt com $\gamma = 1/2 \text{ s}^{-1}$, e os parâmetros iniciais do mapa de Dyson de tempo $\Phi_+(0) = 10^2$ e $\Lambda_+(0) = 10^{-2}$. Além disso, os parâmetros do mapa de Dyson dependentes do tempo $\epsilon_+(t)$ e $|\mu_+(t)| = \epsilon_+(t)|z_+(t)|/2$ podem ser obtido a partir das Eqs. (4.7) e (4.9). Ambos os parâmetros são necessários para construir o estado inicial $|\Psi_+(0)\rangle = \hat{\eta}_+^{-1}(0)|0, n\rangle$ necessário para alcançar o valor máximo de emaranhamento. Assim, no momento inicial, os parâmetros do mapa de Dyson $\epsilon_+(0) \approx 11.51$ e $\mu_+(0) \approx 0.12 e^{i\varphi_+(0)}$.

Figura 16 – Os parâmetros do mapa de Dyson (a) $\Phi_+(t)$ e (b) $\Lambda_+(t)$ em termos da escala adimensional γt com $\gamma = 1/2 \text{ s}^{-1}$ para os valores iniciais $\Phi_+(0) = 10^2$ and $\Lambda_+(0) = 10^{-2}$. Calculamos a evolução temporal até o tempo adimensional $\gamma T \approx 2.15$.

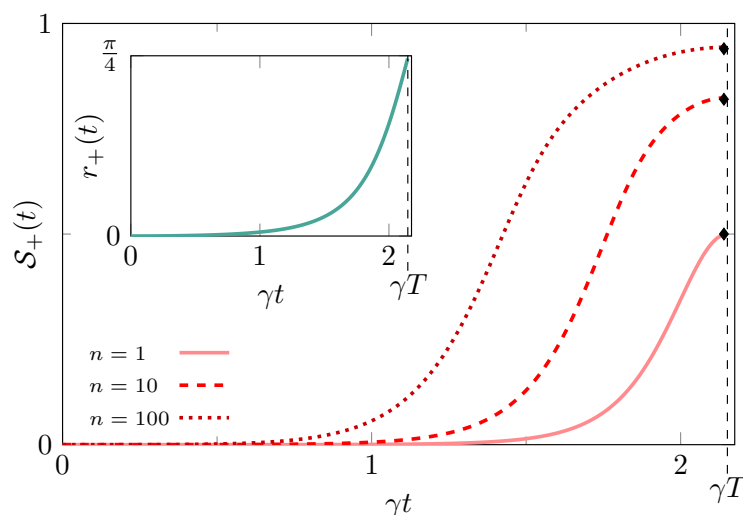


Além disso, no momento T dado pela Eq. (4.68), $r_+(T) \approx \pi/4$ nas aproximações anteriores. Este valor corresponde à medida máxima de emaranhamento para um dado n , expresso na Eq. (4.63). O comportamento da entropia linear (4.63) é representado na escala de tempo adimensional γt com $\gamma = 1/2 \text{ s}^{-1}$ na Fig. 17, juntamente com o parâmetro $r_+(t)$ no *inset*. Observamos que quanto mais r_+ se aproxima de $\pi/4$, mais a entropia linear vai para seu valor máximo dependente de n , conforme expresso na Eq. (4.64) e ilustrado na Fig. 14. Indicamos por losangos grandes na Fig. 14, os casos correspondentes valores analisados na Fig. 17.

4.4 DISCUSSÃO

Em resumo, obtivemos as soluções explícitas para o mapa de Dyson e o operador de evolução no tempo sem mencionar a realização de Álgebras de Lie. No que segue, notamos que não há interação aparente entre os modos no Hamiltoniano não-Hermitiano (4.35), quando olhamos do ponto de vista da mecânica quântica convencional e sua métrica trivial do espaço de Hilbert. No entanto, o procedimento de hermitização aplicado a (4.35) consiste em definir uma métrica dinâmica não trivial que leva a uma contrapartida Hermitiana (4.36), na qual a interação entre os dois modos se torna evidente, e as correlações quânticas como o emaranhamento pode existir neste caso. O ponto-chave nesta discussão é que os operadores hamiltonianos não-Hermitianos que descrevem um sistema de dois modos sem interação podem induzir correlações quânticas, como o emaranhamento entre os modos devido apenas

Figura 17 – Para $n = 1$ (linha sólida), $n = 10$ (linha tracejada) e $n = 100$ (linha pontilhada), representamos a entropia linear $S_+(t)$ em termos da escala de tempo adimensional γt com $\gamma = 1/2 \text{ s}^{-1}$ para os valores iniciais $\Phi_+(0) = 10^2$ e $\Lambda_+(0) = 10^{-2}$. O tempo adimensional para o qual o emaranhamento máximo ocorre é $\gamma T \approx 2.15$. Os losangos pretos nos valores máximos da entropia foram utilizados para indicar os correspondentes valores da entropia máxima em função do número de bósons n na Fig. 14 pelos mesmos símbolos.



à não-hermiticidade.

Embora os autores da Ref. (195) argumentem que descrições de dois subsistemas em interação são possíveis se e somente se o operador métrico do sistema composto pode ser obtido como um produto tensorial de operadores positivos em espaços componentes. Acreditamos que essa afirmação é muito restritiva e desnecessária, pois o mapa de Dyson, em geral, não é único e pode levar a uma ampla classe de métricas não triviais associadas ao espaço de Hilbert. Além disso, a interpretação de sistemas quânticos não-Hermitianos (com operadores métricos não triviais em seus espaços de Hilbert) é feita mapeando-se o problema para sistemas localmente Hermitianos com uma métrica trivial, que permite uma descrição clara da dinâmica.

Basicamente, apresentamos um Hamiltoniano não-Hermitiano dependente do tempo incorporando os geradores dos grupos de Lie $SU(1,1)$ e $SU(2)$ em uma descrição unificada. Aplicando o Ansatz do mapa de Dyson dependente do tempo e o operador métrico descrito pela mesma estrutura algébrica, verificamos que a contraparte Hermitiana também exhibe simetrias dinâmicas $SU(1,1)$ ou $SU(2)$. Assim, a contrapartida Hermitiana torna-se independente da realização da álgebra, como demonstrado na Ref. (181) para o modelo Swanson independente do tempo. Além disso,

a contraparte Hermitiana obtida (4.15) reduz-se àquela estudada nas Refs. (180, 179) definindo-se $\mathcal{U}_s = \mathcal{V}_s = 0$ em vez das suposições gerais lidas em (4.14). No entanto, essas restrições mais gerais nos permitem derivar um resultado não trivial, a partir do qual um sistema não-Hermitiano com um termo de interação não aparente apresenta emaranhamento, o que é verificado pelo mapeamento em sua contraparte Hermitiana. Em termos de realizações de álgebra de Lie de dois modos, mostramos que o Hamiltoniano não-Hermitiano desacoplado (4.35) tem uma contrapartida Hermitiana (4.36) na qual os modos estão acoplados, e isso leva a um emaranhamento não trivial apenas devido à frequência complexa dependente do tempo: que pode ser vista como um emaranhamento dependente da métrica. A métrica não trivial do espaço de Hilbert dinâmico nos permite correlacionar sistemas quânticos mesmo na ausência de termos de interação em Hamiltonianos não-Hermitianos. Isso acontece devido à generalidade da estrutura do mapa de Dyson (4.3a), que torna a métrica não local dependendo da escolha dos parâmetros. Investigamos, para ambas as álgebras de Lie, o caso em que a não-hermiticidade é dada por uma frequência $\omega(t) = \omega_R(t) + i\gamma^2 t$, considerando também a transformação $\Phi_- \rightarrow -\Phi_-$ para comparação com os resultados obtidos na Ref. (106). Nossas investigações mostraram que a medida de emaranhamento máximo por meio da entropia linear é alcançada em um intervalo de tempo finito T dado pelas Eqs. (4.59) e (4.68), dos quais podemos escrever $T \approx (1/\gamma)\sqrt{\ln \Phi_{\pm}(0)}$ assumindo $\Phi_{\pm}(0) \gg 1$, e desprezando os termos proporcionais a $\Lambda_{\pm}(0)/\Phi_{\pm}(0) \ll 1$.

O assunto discutido neste capítulo está disponível na Ref. (196).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

Ao contrário da mecânica quântica convencional, pode-se dizer que a mecânica quântica não-Hermitiana é um tipo de teoria *bootstrap* no sentido de que o operador Hamiltoniano escolhe o espaço de Hilbert (e o produto interno associado). Assim, pode-se afirmar que a dualidade que surge entre uma representação não-Hermitiana e Hermitiana, é na verdade uma questão geométrica associada ao espaço de Hilbert.

A estrutura algébrica da mecânica quântica nos permite ir em direção a generalizações de muitas estruturas matemáticas interessantes e dos fenômenos físicos associados a elas. No que diz respeito à mecânica quântica não-Hermitiana, a linguagem algébrica parece desempenhar um papel fundamental na compreensão dos aspectos físicos da física não-Hermitiana, uma vez que a hermiticidade está intimamente relacionada com a geometria do espaço de Hilbert codificado em sua métrica. Por exemplo, na Ref. (197) mostramos que uma álgebra deformada aplicada ao estudo do oscilador de Dirac leva a um mapa natural do sistema relativístico na versão não-Hermitiana do conhecido modelo óptico de Jaynes-Cummings. As abordagens simétricas podem ser ferramentas úteis para se entender os efeitos não-Hermitianos que são naturalmente explicados por uma dualidade entre modelos não-Hermitianos em espaços planos e seus equivalentes, que poderiam ser Hermitianos, em espaços curvos (48, 49). Nesse sentido, os grupos de Lie $SU(1,1)$ e $SU(2)$ e suas álgebras correspondentes podem fornecer investigações futuras para espaços hiperbólicos e esféricos (198), e suas generalizações não estacionárias.

Embora a engenharia de Hamiltonianos não-Hermitianos efetivos pareça ser uma tarefa viável considerando medições contínuas e pós-seleção como discutido na Ref. (199), ou mesmo através de técnicas de eliminação adiabática (129, 130), acreditamos que os fenômenos não-Hermitianos intrigantes em sistemas quânticos fechados, como no caso do efeito Casimir pseudo-Hermitiano, são codificados nas métricas não triviais do espaço de Hilbert. A engenharia de espaços de Hilbert não-triviais permanece sendo um desafio. No entanto, recentes discussões sobre curvar o espaço de Hilbert são feitas nas Refs. (48, 49). Talvez, os avanços experimentais de espaços curvos em estruturas nanofotônicas (200, 201), nas quais espaços curvos podem ser projetados, possam lançar luz sobre futuras investigações neste assunto para construir o caminho para a realização de geometrias não triviais que englobam a

física não-Hermitiana.

Em conclusão, nosso trabalho pode contribuir para o progresso teórico de sistemas quânticos não-Hermitianos dependentes do tempo no contexto da óptica quântica, sistemas com dimensão temporal fracionária e sistemas compostos para trazer novas possibilidades de aplicações em áreas de informação quântica, física quântica de muitos corpos, ou ao menos para melhorar nossa compreensão da estrutura matemática da mecânica quântica.

Em relação às perspectivas futuras, podemos listar algumas delas:

- Analisar o efeito da não-hermiticidade no contexto do Modelo de Dicke para superradiância: possibilidade de aprimorar o pulso superradiante;
- Estender a análise da dinâmica unitária para o modelo de Lee-Yang com dois ou mais sítios no modelo de tempo fracionário;
- Considerar representações bosônicas de três modos e analisar critérios de emaranhamento genuíno no contexto não-Hermitiano;
- Verificar a possibilidade da conexão entre o formalismo da mecânica quântica pseudo-Hermitiana e extensões auto-adjuntas;
- Investigar o efeito da não-hermiticidade em cavidades optomecânicas;
- Obter as propriedades termodinâmicas do oscilador de Dirac κ -deformado (197);
- Estender as análises de sistemas não-Hermitianos para problemas envolvendo superestatística (202) e massa-dependente da posição (203).

REFERÊNCIAS

- 1 SCHULZ, P. A. Duas nuvens ainda fazem sombra na reputação de Lorde Kelvin. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Scielo, v. 29, p. 509 – 512, 2007.
- 2 KELVIN, L. Nineteenth century clouds over the dynamical theory of heat and light. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Taylor & Francis, v. 2, n. 7, p. 1–40, 1901.
- 3 SHANKLAND, R. S. Michelson-Morley Experiment. *American Journal of Physics*, v. 32, n. 1, p. 16–35, 1964.
- 4 SERWAY, R. A.; MOSES, C. J.; MOYER, C. A. *Modern Physics*. 3. ed. United States of America: Cengage Learning, 2004.
- 5 PRUGOVECKI, E. *Quantum Mechanics in Hilbert Space*. 2. ed. New York: Academic Press, 1982. v. 92.
- 6 COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOË, F. *Quantum Mechanics*. New York: John Wiley & Sons, 1977. v. 1.
- 7 MERZBACHER, E. *Quantum mechanics*. 3. ed. [S.l.]: Jones & Bartlett Publishers, 1961.
- 8 POWELL, J. L.; CRASEMANN, B. *Quantum Mechanics*. United States of America: Addison-Wesley Publishing Company, 1965.
- 9 LIBOFF, R. L. *Introductory Quantum Mechanics*. 4. ed. Delhi: Addison-Wesley, 2003.
- 10 GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Quantum Mechanics*. 2. ed. United State of America: Pearson Education Professional, 2005.
- 11 PIZA, A. F. R. T. *Mecânica Quântica*. 2. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2009.
- 12 SAKURAI, J.; NAPOLITANO, J. *Mecânica Quântica Moderna*. Tradução de: Sílvio Renato Dahmen. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013. Título original: Modern Quantum Mechanics.
- 13 LEMOS, N. A. *Convite à Física Matemática*. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.
- 14 BONNEAU, G.; FARAUT, J.; VALENT, G. Self-adjoint extensions of operators and the teaching of quantum mechanics. *American Journal of Physics*, v. 69, n. 3, p. 322–331, 2001.
- 15 EXNER, P. *Open Quantum Systems and Feynman Integrals*. Netherlands: Dordrecht, 1985.
- 16 CARMICHAEL, H. *An Open Systems Approach to Quantum Optics: lectures presented at the Université Libre de Bruxelles, October 28 to November 4, 1991*. [S.l.]: Springer Berlin, Heidelberg, 2009. v. 18.

- 17 ROTTER, I. A non-Hermitian Hamilton operator and the physics of open quantum systems. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 42, n. 15, p. 153001, 2009.
- 18 SERGI, A.; ZLOSHCHASTIEVE, K. G. Non-Hermitian Quantum Dynamics of a Two-level System and Models of Dissipative Environments. *International Journal of Modern Physics B*, v. 27, n. 27, p. 1350163, 2013.
- 19 STERNHEIM, M. M.; WALKER, J. F. Non-Hermitian Hamiltonians, Decaying States, and Perturbation Theory. *Physical Review C*, APS, v. 6, p. 114–121, 1972.
- 20 SUDARSHAN, E. C. G.; CHIU, C. B.; GORINI, V. Decaying states as complex energy eigenvectors in generalized quantum mechanics. *Physical Review D*, APS, v. 18, p. 2914–2929, 1978.
- 21 BAKER, H. C. Non-Hermitian Dynamics of Multiphoton Ionization. *Physical Review Letters*, APS, v. 50, p. 1579–1582, 1983.
- 22 BAKER, H. C. Non-Hermitian Quantum Theory of Multiphoton Ionization. *Physical Review A*, APS, v. 30, p. 773–793, 1984.
- 23 JOHN, W. et al. Statistical properties of resonances in quantum irregular scattering. *Physical Review Letters*, APS, v. 67, p. 1949 – 1952, 1991.
- 24 MOISEYEV, N. Quantum theory of resonances: calculating energies, widths and cross-sections by complex scaling. *Physics Reports*, v. 302, n. 5-6, p. 212 – 293, 1998.
- 25 BERGGREN, K.-F.; YAKIMENKO, I. I.; HAKANEN, J. Modeling of open quantum dots and wave billiards using imaginary potentials for the source and the sink. *New Journal of Physics*, v. 12, n. 7, p. 073005, 2010.
- 26 WIBKING, B.; VARGA, K. Quantum mechanics with complex injecting potentials. *Physics Letters A*, v. 376, n. 4, p. 365 – 369, 2012.
- 27 MICHISHITA, Y.; PETERS, R. Equivalence of Effective Non-Hermitian Hamiltonians in the Context of Open Quantum Systems and Strongly Correlated Electron Systems. *Physical Review Letters*, APS, v. 124, p. 196401, 2020.
- 28 CIUS, D. et al. Mixed states driven by non-Hermitian Hamiltonians of a nuclear spin ensemble. *Physical Review A*, APS, v. 105, p. 022212, 2022.
- 29 SCHOLTZ, F.; GEYER, H.; HAHNE, F. Quasi-Hermitian operators in quantum mechanics and the variational principle. *Annals of Physics*, v. 213, n. 1, p. 74–101, 1992.
- 30 BENDER, C. M.; BOETTCHER, S. Real Spectra in non-Hermitian Hamiltonians having \mathcal{PT} -symmetry. *Physical Review Letters*, APS, v. 80, n. 24, p. 5243, 1998.
- 31 DOREY, P.; DUNNING, C.; TATEO, R. Spectral equivalences, Bethe ansatz equations, and reality properties in \mathcal{PT} -symmetric quantum mechanics. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 34, n. 28, p. 5679–5704, 2001.

- 32 DUTRA, A. de S.; HOTT, M. B.; SANTOS, V. G. C. S. dos. Time-dependent non-Hermitian Hamiltonians with real energies. *Europhysics Letters*, IOP Publishing, v. 71, n. 2, p. 166–171, 2005.
- 33 MOISEYEV, N. *Non-Hermitian Quantum Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
- 34 LUO, X. et al. Pseudo-Parity-Time Symmetry in Optical Systems. *Physical Review Letters*, APS, v. 110, p. 243902, 2013.
- 35 BENDER, C. M.; MANNHEIM, P. D. \mathcal{PT} symmetry in relativistic quantum mechanics. *Physical Review D*, APS, v. 84, p. 105038, 2011.
- 36 BENDER, C. M.; MANNHEIM, P. D. Publisher's note: \mathcal{PT} symmetry in relativistic quantum mechanics [Phys. Rev. D 84, 105038 (2011)]. *Physical Review D*, APS, v. 84, p. 129902, 2011.
- 37 BENDER, C. M. Introduction to \mathcal{PT} -symmetric Quantum Theory. *Contemporary Physics*, v. 46, n. 4, p. 277–292, 2005.
- 38 MOSTAFAZADEH, A. Krein-space formulation of \mathcal{PT} -symmetry, \mathcal{CPT} -inner products, and pseudo-hermiticity. *Czechoslovak Journal of Physics*, v. 56, n. 9, p. 919–933, 2006.
- 39 BENDER, C. M.; BRODY, D. C.; JONES, H. F. Complex Extension of Quantum Mechanics. *Physical Review Letters*, APS, v. 89, n. 27, p. 270401, 2002.
- 40 BENDER, C. M.; BRODY, D. C.; JONES, H. F. Erratum: Complex Extension of Quantum Mechanics [Phys. Rev. Lett. 89, 270401 (2002)]. *Physical Review Letters*, APS, v. 92, p. 119902, 2004.
- 41 BENDER, C. M.; BOETTCHER, S.; MEISINGER, P. N. \mathcal{PT} -Symmetric Quantum Mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 40, n. 5, p. 2201–2229, 1999.
- 42 MOSTAFAZADEH, A. Pseudo-Hermiticity versus \mathcal{PT} -Symmetry: The Necessary Condition for the Reality of the Spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian. *Journal of Mathematical Physics*, v. 43, n. 1, p. 205–214, 2002.
- 43 MOSTAFAZADEH, A. Pseudo-Hermiticity versus \mathcal{PT} -Symmetry II. A complete characterization of non-Hermitian Hamiltonians with a real spectrum. *Journal of Mathematical Physics*, v. 43, n. 5, p. 2814–2816, 2002.
- 44 MOSTAFAZADEH, A. Pseudo-Hermiticity versus \mathcal{PT} -Symmetry III: Equivalence of pseudo-Hermiticity and the presence of antilinear symmetries. *Journal of Mathematical Physics*, v. 43, n. 8, p. 3944–3951, 2002.
- 45 MOSTAFAZADEH, A. Pseudo-Hermitian Representation of Quantum Mechanics. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, World Scientific, v. 7, n. 07, p. 1191–1306, 2010.
- 46 CROKE, S. \mathcal{PT} -symmetric Hamiltonians and their application in quantum information. *Physical Review A*, APS, v. 91, n. 5, p. 052113, 2015.

- 47 BEN-ARYEH, Y.; MANN, A.; YAAKOV, I. Rabi oscillations in a two-level atomic system with a pseudo-Hermitian Hamiltonian. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 37, n. 50, p. 12059, 2004.
- 48 JU, C.-Y. et al. Einstein's quantum elevator: Hermitization of non-Hermitian Hamiltonians via a generalized vielbein formalism. *Physical Review Research*, APS, v. 4, p. 023070, 2022.
- 49 LV, C. et al. Curving the space by non-hermiticity. *Nature Communications*, Nature Publishing Group, v. 13, n. 1, p. 1–6, 2022.
- 50 ZNOJIL, M. Time-dependent version of crypto-Hermitian quantum theory. *Physical Review D*, APS, v. 78, n. 8, p. 085003, 2008.
- 51 GONG, J.; WANG, Q. Time-dependent-symmetric quantum mechanics. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 46, n. 48, p. 485302, 2013.
- 52 FRING, A.; MOUSSA, M. H. Y. Unitary quantum evolution for time-dependent quasi-Hermitian systems with nonobservable Hamiltonians. *Physical Review A*, APS, v. 93, n. 4, p. 042114, 2016.
- 53 LUIZ, F. S.; PONTE, M. A. de; MOUSSA, M. H. Y. Unitarity of the time-evolution and observability of non-Hermitian Hamiltonians for time-dependent Dyson maps. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 95, n. 6, p. 065211, 2020.
- 54 FRING, A.; FRITH, T. Mending the broken PT-regime via an explicit time-dependent dyson map. *Physics Letter A*, Elsevier, v. 381, n. 29, p. 2318–2323, 2017.
- 55 MAAMACHE, M. et al. Pseudo-invariants theory and real phases for systems with non-Hermitian time-dependent Hamiltonians. *European Physical Journal Plus*, Springer, v. 132, n. 9, p. 1–8, 2017.
- 56 FRING, A.; FRITH, T. Eternal life of entropy in non-Hermitian quantum systems. *Physical Review A*, APS, v. 100, n. 1, p. 010102, 2019.
- 57 KHANTOUL, B.; BOUNAMES, A.; MAAMACHE, M. On the invariant method for the time-dependent non-Hermitian Hamiltonians. *European Physical Journal Plus*, Springer, v. 132, n. 6, p. 1–7, 2017.
- 58 MANA, N.; ZAIDI, O.; MAAMACHE, M. Time-dependent pseudo-bosonic coherent states. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing LLC, v. 61, n. 10, p. 102103, 2020.
- 59 KOUSSA, W.; ATTIA, M.; MAAMACHE, M. Pseudo-fermionic coherent states with time-dependent metric. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing LLC, v. 61, n. 4, p. 042101, 2020.
- 60 CASIMIR, H. B. G. On the Attraction Between Two Perfectly Conducting Plates. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, v. 51, p. 793, 1948.
- 61 BORDAG, M.; MOHIDEEN, U.; MOSTEPANENKO, V. New Developments in the Casimir Effect. *Physics Reports*, v. 353, n. 1, p. 1 – 205, 2001.

- 62 SPARNAAY, M. Measurements of Attractive Forces between Flat Plates. *Physica*, v. 24, n. 6, p. 751 – 764, 1958.
- 63 LAMOREAUX, S. K. Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6 μm range. *Physical Review Letters*, v. 78, p. 5–8, 1997.
- 64 MOHIDEEN, U.; ROY, A. Precision Measurement of the Casimir Force from 0.1 to 0.9 μm . *Physical Review Letters*, v. 81, p. 4549–4552, 1998.
- 65 CASIMIR, H. Introductory remarks on quantum electrodynamics. *Physica*, v. 19, n. 1, p. 846–849, 1953.
- 66 BOYER, T. H. Quantum Electromagnetic Zero-Point Energy of a Conducting Spherical Shell and the Casimir Model for a Charged Particle. *Physical Review*, APS, v. 174, p. 1764–1776, 1968.
- 67 SCHWINGER, J. Casimir energy for dielectrics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 89, n. 9, p. 4091–4093, 1992.
- 68 CHODOS, A.; THORN, C. Electromagnetic self-energy of confined massless quarks. *Physics Letters B*, v. 53, n. 4, p. 359–361, 1974.
- 69 CHODOS, A. et al. New extended model of hadrons. *Physical Review D*, APS, v. 9, p. 3471–3495, 1974.
- 70 CHODOS, A. et al. Baryon structure in the bag theory. *Physical Review D*, APS, v. 10, p. 2599–2604, 1974.
- 71 JOHNSON, K. et al. The MIT bag model. *Acta Physica Polonica B*, v. 6, n. 12, p. 8, 1975.
- 72 MILTON, K. A. Fermionic Casimir stress on a spherical bag. *Annals of Physics*, v. 150, n. 2, p. 432–438, 1983.
- 73 OXMAN, L. E.; SVAITER, N. F.; AMARAL, R. L. P. G. Attractive Casimir effect in an infrared modified gluon bag model. *Physical Review D*, APS, v. 72, p. 125007, 2005.
- 74 EMIG, T. et al. Casimir Forces between Arbitrary Compact Objects. *Physical Review Letters*, APS, v. 99, p. 170403, 2007.
- 75 MOORE, G. T. Quantum Theory of the Electromagnetic Field in a Variable-Length One-Dimensional Cavity. *Journal of Mathematical Physics*, v. 11, n. 9, p. 2679–2691, 1970.
- 76 DODONOV, V. V.; KLIMOV, A. B.; NIKONOV, D. E. Quantum Phenomena in Nonstationary Media. *Physica Review A*, v. 47, p. 4422–4429, 1993.
- 77 SARKAR, S. Photon statistics and moving mirrors. *Quantum Optics: Journal of the European Optical Society Part B*, IOP Publishing, v. 4, n. 6, p. 345–353, 1992.
- 78 Marc-Thierry Jaekel; Serge Reynaud. Quantum fluctuations of position of a mirror in vacuum. *Journal de Physique I France*, v. 3, n. 1, p. 1–20, 1993.
- 79 DODONOV, V.; KLIMOV, A.; MAN'KO, V. Generation of squeezed states in a resonator with a moving wall. *Physics Letters A*, v. 149, n. 4, p. 225–228, 1990.

- 80 SCHALLER, G. et al. Dynamical Casimir Effect in a leaky cavity at finite temperature. *Physical Review A*, v. 66, p. 023812, 2002.
- 81 PLUNIEN, G.; SCHÜTZHOLD, R.; SOFF, G. Dynamical Casimir Effect at Finite Temperature. *Physical Review Letters*, APS, v. 84, p. 1882–1885, 2000.
- 82 LAW, C. K. Effective Hamiltonian for the radiation in a cavity with a moving mirror and a time-varying dielectric medium. *Physical Review A*, APS, v. 49, p. 433–437, 1994.
- 83 LAW, C. K. Interaction between a moving mirror and radiation pressure: A Hamiltonian formulation. *Physical Review A*, v. 51, p. 2537–2541, 1995.
- 84 SCHALLER, G. et al. Dynamical Casimir Effect in a designed leaky cavity. *Physics Letters A*, v. 297, n. 1, p. 81–86, 2002.
- 85 BALL, P. Feel the force. *Nature Materials*, Nature Publishing Group, v. 6, n. 6, p. 402–402, 2007.
- 86 BÁRCENAS, J.; REYES, L.; ESQUIVEL-SIRVENT, R. Scaling of micro- and nanodevices actuated by Casimir forces. *Applied Physics Letters*, v. 87, n. 26, p. 263106, 2005.
- 87 BUKS, E.; ROUKES, M. L. Stiction, adhesion energy, and the Casimir effect in micromechanical systems. *Physical Review B*, APS, v. 63, p. 033402, 2001.
- 88 CHAN, H. B. et al. Quantum Mechanical Actuation of Microelectromechanical Systems by the Casimir Force. *Science*, v. 291, n. 5510, p. 1941–1944, 2001.
- 89 ESQUIVEL-SIRVENT, R. Reduction of the Casimir force using aerogels. *Journal of Applied Physics*, v. 102, n. 3, p. 034307, 2007.
- 90 DAVIES, P. Does quantum mechanics play a non-trivial role in life? *Biosystems*, v. 78, n. 1, p. 69–79, 2004.
- 91 CASIMIR, H. B. G.; POLDER, D. The Influence of Retardation on the London-van der Waals Forces. *Physical Review*, APS, v. 73, p. 360–372, 1948.
- 92 ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Física Matemática: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física*. Tradução de Arlete Simille Marques. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. Título original: *Mathematical Methods for Physicists*. Sixth Edition.
- 93 CASTRO, A. S. M. de; DODONOV, V. V. Continuous monitoring of the dynamical Casimir effect with a damped detector. *Physical Review A*, APS, v. 89, n. 6, p. 063816, 2014.
- 94 CELERI, L. C. et al. Number of particle creation and decoherence in the nonideal dynamical Casimir effect at finite temperature. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 324, n. 10, p. 2057–2073, 2009.
- 95 MOTAZEDIFARD, A.; NADERI, M. H.; ROKNIZADEH, R. Analogue model for controllable Casimir radiation in a nonlinear cavity with amplitude-modulated pumping: generation and quantum statistical properties. *Journal of the Optical Society of America B*, OSA, v. 32, n. 8, p. 1555–1563, 2015.

- 96 DODONOV, V. V. The dynamical Casimir effect and resonance frequency shifts in cavities with thin photo-excited semiconductor layers. *Physica Scripta*, IOP Publishing, T135, p. 014014, 2009.
- 97 MOTAZEDIFARD, A.; NADERI, M. H.; ROKNIZADEH, R. Dynamical Casimir effect of phonon excitation in the dispersive regime of cavity optomechanics. *Journal of the Optical Society of America B*, OSA, v. 34, n. 3, p. 642–652, 2017.
- 98 MOTAZEDIFARD, A. et al. Controllable generation of photons and phonons in a coupled Bose–Einstein condensate-optomechanical cavity via the parametric dynamical Casimir effect. *Annals of Physics*, v. 396, p. 202–219, 2018.
- 99 DODONOV, V. V.; KLIMOV, A. B.; NIKONOV, D. E. Quantum phenomena in resonators with moving walls. *Journal of Mathematical Physics*, v. 34, n. 7, p. 2742–2756, 1993.
- 100 DODONOV, V. Photon creation and excitation of a detector in a cavity with a resonantly vibrating wall. *Physics Letters A*, v. 207, n. 3, p. 126–132, 1995.
- 101 DODONOV, V. Fifty years of the dynamical Casimir effect. *Physics*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 2, n. 1, p. 67–104, 2020.
- 102 SWANSON, M. S. Transition elements for a non-Hermitian quadratic Hamiltonian. *Journal of Mathematical Physics*, v. 45, n. 2, p. 585–601, 2004.
- 103 FRING, A.; MOUSSA, M. H. Y. Non-Hermitian Swanson model with a time-dependent metric. *Physical Review A*, APS, v. 94, n. 4, p. 042128, 2016.
- 104 PONTE, M. A. de et al. All-creation and all-annihilation time-dependent \mathcal{PT} -symmetric bosonic Hamiltonians: An infinite squeezing degree at a finite time. *Physical Review A*, v. 100, p. 012128, 2019.
- 105 DOURADO, R. A. et al. Erratum: All-creation and all-annihilation time-dependent \mathcal{PT} -symmetric bosonic hamiltonians: An infinite squeezing degree at a finite time [Phys. Rev. A 100, 012128 (2019)]. *Physical Review A*, APS, v. 102, p. 049903, 2020.
- 106 DOURADO, R.; de Ponte, M.; MOUSSA, M. A time-dependent pseudo-Hermitian Hamiltonian for a cavity mode with pure imaginary frequency. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 581, p. 126195, 2021.
- 107 MUSUMBU, D. P.; GEYER, H. B.; HEISS, W. D. Choice of a metric for the non-Hermitian oscillator. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 40, n. 2, p. F75, 2006.
- 108 BAN, M. Decomposition formulas for $su(1, 1)$ and $su(2)$ Lie algebras and their applications in quantum optics. *Journal of the Optical Society of America B*, OSA, v. 10, n. 8, p. 1347–1359, 1993.
- 109 JR, H. R. L.; RIESENFELD, W. B. An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 10, n. 8, p. 1458–1473, 1969.
- 110 BASEIA, B.; MIZRAHI, S. S.; MOUSSA, M. H. Y. Generation of squeezing for a charged oscillator and for a charged particle in a time-dependent electromagnetic field. *Physical Review A*, APS, v. 46, n. 9, p. 5885, 1992.

- 111 MIZRAHI, S.; MOUSSA, M.; BASEIA, B. The quadratic time-dependent Hamiltonian: evolution operator, squeezing regions in phase space and trajectories. *International Journal of Modern Physics B*, v. 08, n. 11n12, p. 1563–1576, 1994.
- 112 WALLS, D. F.; MILBURN, G. J. *Quantum Optics*. [S.l.]: Springer-Verlag, Heidelberg, 1994.
- 113 SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. S. *Quantum Optics*. [S.l.]: Cambridge, 1997.
- 114 CASTRO, A. S. M. de; CACHEFFO, A.; DODONOV, V. V. Influence of the field-detector coupling strength on the dynamical Casimir effect. *Physical Review A*, APS, v. 87, p. 033809, 2013.
- 115 DODONOV, V. V.; KLIMOV, A. B. Generation and detection of photons in a cavity with a resonantly oscillating boundary. *Physical Review A*, APS, v. 53, p. 2664–2682, 1996.
- 116 PARKINS, A. S. et al. Synthesis of arbitrary quantum states via adiabatic transfer of Zeeman coherence. *Physical Review Letters*, APS, v. 71, n. 19, p. 3095, 1993.
- 117 VOGEL, K.; AKULIN, V. M.; SCHLEICH, W. P. Quantum state engineering of the radiation field. *Physical Review Letters*, APS, v. 71, n. 12, p. 1816, 1993.
- 118 GARRAWAY, B. M. et al. Generation and detection of nonclassical field states by conditional measurements following two-photon resonant interactions. *Physical Review A*, APS, v. 49, n. 1, p. 535, 1994.
- 119 LAW, C. K.; EBERLY, J. H. Arbitrary control of a quantum electromagnetic field. *Physical Review Letters*, APS, v. 76, n. 7, p. 1055, 1996.
- 120 SERRA, R. M. et al. Engineering cavity-field states by projection synthesis. *Physical Review A*, APS, v. 62, n. 4, p. 043810, 2000.
- 121 VILLAS-BÔAS, C. J. et al. Preparation and control of a cavity-field state through an atom–driven-field interaction: Towards long-lived mesoscopic states. *Physical Review A*, APS, v. 68, n. 5, p. 053808, 2003.
- 122 VILLAS-BÔAS, C. J.; MOUSSA, M. H. Y. One-step generation of high-quality squeezed and EPR states in cavity QED. *European Physical Journal D*, Springer, v. 32, n. 1, p. 147–151, 2005.
- 123 VILLAS-BÔAS, C. J. et al. Squeezing arbitrary cavity-field states through their interaction with a single driven atom. *Physical Review A*, APS, v. 68, n. 6, p. 061801, 2003.
- 124 SERRA, R. M. et al. Frequency up-and down-conversions in two-mode cavity quantum electrodynamics. *Physical Review A*, APS, v. 71, n. 4, p. 045802, 2005.
- 125 PRADO, F. O. et al. Bilinear and quadratic hamiltonians in two-mode cavity quantum electrodynamics. *Physical Review A*, APS, v. 73, n. 4, p. 043803, 2006.
- 126 NETO, G. D. M.; PONTE, M. A. de; MOUSSA, M. H. Y. Nonlocal dissipative tunneling for high-fidelity quantum-state transfer between distant parties. *Physical Review A*, APS, v. 85, n. 5, p. 052303, 2012.

- 127 PRADO, F. O. et al. Engineering selective linear and nonlinear Jaynes-Cummings interactions and applications. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, IOP Publishing, v. 46, n. 20, p. 205501, 2013.
- 128 ROSSETTI, R. F. et al. Trapped-ion Lissajous trajectories by engineering Rashba-and Dresselhaus-type spin-orbit interactions in a Paul trap. *Europhysics Letters*, IOP Publishing, v. 115, n. 5, p. 53001, 2016.
- 129 GAMEL, O.; JAMES, D. F. V. Time-averaged quantum dynamics and the validity of the effective Hamiltonian model. *Physical Review A*, APS, v. 82, n. 5, p. 052106, 2010.
- 130 JAMES, D. F. V.; JERKE, J. Effective Hamiltonian theory and its applications in quantum information. *Canadian Journal of Physics*, NRC Research Press Ottawa, Canada, v. 85, n. 6, p. 625–632, 2007.
- 131 WÓDKIEWICZ, K. Operational Approach to Phase-Space Measurements in Quantum Mechanics. *Physical Review Letters*, APS, v. 52, p. 1064–1067, 1984.
- 132 LEONHARDT, U.; PAUL, H. Simultaneous Measurements of Canonically Conjugate Variables in Quantum Optics. *Journal of Modern Optics*, Taylor & Francis, v. 40, n. 9, p. 1745–1751, 1993.
- 133 CIUS, D. et al. Enhancement of photon creation through the pseudo-Hermitian Dynamical Casimir Effect. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 593, p. 126945, 2022.
- 134 HUANG, C.; DONG, L. Beam propagation management in a fractional Schrödinger equation. *Scientific Reports*, Nature Publishing Group, v. 7, n. 1, p. 1–8, 2017.
- 135 LONGHI, S. Fractional Schrödinger equation in optics. *Optics Letters*, OSA, v. 40, n. 6, p. 1117–1120, 2015.
- 136 ZHANG, Y. et al. PT symmetry in a fractional Schrödinger equation. *Laser Photonics Review*, Wiley Online Library, v. 10, n. 3, p. 526–531, 2016.
- 137 HEYDARI, M.; ATANGANA, A. A cardinal approach for nonlinear variable-order time fractional Schrödinger equation defined by Atangana–Baleanu–Caputo derivative. *Chaos, Solitons and Fractals*, Elsevier, v. 128, p. 339–348, 2019.
- 138 PODLUBNY, I. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. [S.l.]: Elsevier, 1998.
- 139 METZLER, R.; KLAFTER, J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Physics Reports*, Elsevier, v. 339, n. 1, p. 1–77, 2000.
- 140 LASKIN, N. Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals. *Physical Letters A*, v. 268, n. 4, p. 298–305, 2000.
- 141 LASKIN, N. Fractional quantum mechanics. *Physical Review E*, APS, v. 62, p. 3135–3145, 2000.
- 142 WEI, Y. Comment on “Fractional quantum mechanics” and “Fractional Schrödinger equation”. *Physical Review E*, APS, v. 93, p. 066103, 2016.

- 143 LASKIN, N. Reply to “Comment on ‘Fractional quantum mechanics’ and ‘Fractional Schrödinger equation’ ”. *Physical Review E*, APS, v. 93, p. 066104, 2016.
- 144 NABER, M. Time fractional Schrödinger equation. *Journal of Mathematical Physics*, v. 45, n. 8, p. 3339–3352, 2004.
- 145 IOMIN, A. Fractional-time quantum dynamics. *Physical Review E*, APS, v. 80, n. 2, p. 022103, 2009.
- 146 NASROLAHOUPUR, H. Electron Spin Precession for the Time Fractional Pauli Equation. *Prespacetime Journal*, Citeseer, v. 2, n. 13, p. 2053–2059, 2011.
- 147 LENZI, E. K. et al. Time dependent solutions for a fractional Schrödinger equation with delta potentials. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 54, n. 8, p. 082107, 2013.
- 148 LASKIN, N. Time fractional quantum mechanics. *Chaos, Solitons and Fractals*, Elsevier, v. 102, p. 16–28, 2017.
- 149 ZHANG, X. et al. Quantization method and Schrödinger equation of fractional time and their weak effects on Hamiltonian: Phase transitions of energy and wave functions. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 93, p. 105531, 2021.
- 150 GEHLEN, G. von. Critical and off-critical conformal analysis of the Ising quantum chain in an imaginary field. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 24, n. 22, p. 5371–5399, 1991.
- 151 RÜTER, C. E. et al. Observation of parity–time symmetry in optics. *Nat. Phys.*, NPG, v. 6, n. 3, p. 192–195, 2010.
- 152 KAHN, M.; MARCUS, G. Proposal for strong field physics simulation by means of optical waveguide. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, IOP Publishing, v. 50, n. 9, p. 095004, 2017.
- 153 CIUS, D. et al. *Unitary evolution for a two-level quantum system in fractional-time scenario*. arXiv, 2022. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2208.13858>>.
- 154 EISERT, J.; CRAMER, M.; PLENIO, M. B. Colloquium: Area laws for the entanglement entropy. *Review of Modern Physics*, APS, v. 82, p. 277–306, 2010.
- 155 EKERT, A. K. et al. Practical quantum cryptography based on two-photon interferometry. *Physical Review Letters*, APS, v. 69, p. 1293–1295, 1992.
- 156 BENNETT, C. H. et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Physical Review Letters*, APS, v. 70, p. 1895–1899, 1993.
- 157 RAUSSENDORF, R.; BRIEGEL, H. J. A One-Way Quantum Computer. *Physical Review Letters*, APS, v. 86, p. 5188–5191, 2001.
- 158 HEIDMANN, A. et al. Observation of Quantum Noise Reduction on Twin Laser Beams. *Physical Review Letters*, APS, v. 59, p. 2555–2557, 1987.
- 159 ZHANG, D. et al. Enhanced intensity-difference squeezing via energy-level modulations in hot atomic media. *Physical Review A*, APS, v. 96, p. 043847, 2017.

- 160 PARIS, M. G. A. Entanglement and visibility at the output of a Mach-Zehnder interferometer. *Physical Review A*, APS, v. 59, p. 1615–1621, 1999.
- 161 KIM, M. S. et al. Entanglement by a beam splitter: Nonclassicality as a prerequisite for entanglement. *Physical Review A*, APS, v. 65, p. 032323, 2002.
- 162 SINGH, H.; ARVIND; DORAI, K. Evolution of tripartite entangled states in a decohering environment and their experimental protection using dynamical decoupling. *Physical Review A*, APS, v. 97, p. 022302, 2018.
- 163 EGGER, D. et al. Entanglement Generation in Superconducting Qubits Using Holonomic Operations. *Physical Review Applied*, APS, v. 11, p. 014017, 2019.
- 164 DIXON, K. Y. et al. Optomechanical entanglement at room temperature: A simulation study with realistic conditions. *Physical Review A*, APS, v. 102, p. 063518, 2020.
- 165 RAUSCHENBEUTEL, A. et al. Controlled entanglement of two field modes in a cavity quantum electrodynamics experiment. *Physical Review A*, APS, v. 64, p. 050301, 2001.
- 166 YANG, C.-P.; CHU, S.-I.; HAN, S. Quantum Information Transfer and Entanglement with SQUID Qubits in Cavity QED: A Dark-State Scheme with Tolerance for Nonuniform Device Parameter. *Physical Review Letters*, APS, v. 92, p. 117902, 2004.
- 167 HORODECKI, R. et al. Quantum entanglement. *Review of Modern Physics*, APS, v. 81, p. 865–942, 2009.
- 168 GÜHNE, O.; TÓTH, G. Entanglement detection. *Physics Reports*, v. 474, n. 1, p. 1–75, 2009.
- 169 HILLERY, M.; ZUBAIRY, M. S. Entanglement Conditions for Two-Mode States. *Physical Review Letters*, APS, v. 96, p. 050503, 2006.
- 170 HILLERY, M.; ZUBAIRY, M. S. Entanglement conditions for two-mode states: Applications. *Physical Review A*, APS, v. 74, p. 032333, 2006.
- 171 NHA, H. Entanglement condition via $su(2)$ and $su(1,1)$ algebra using Schrödinger-Robertson uncertainty relation. *Physical Review A*, APS, v. 76, p. 014305, 2007.
- 172 NHA, H.; ZUBAIRY, M. S. Uncertainty Inequalities as Entanglement Criteria for Negative Partial-Transpose States. *Physical Review Letters*, APS, v. 101, p. 130402, 2008.
- 173 HILLERY, M.; DUNG, H. T.; ZHENG, H. Conditions for entanglement in multipartite systems. *Physical Review A*, APS, v. 81, p. 062322, 2010.
- 174 TEH, R. Y.; REID, M. D. Criteria for genuine n -partite continuous-variable entanglement and Einstein-Podolsky-Rosen steering. *Physical Review A*, APS, v. 90, p. 062337, 2014.

- 175 AGUSTÍ, A. et al. Tripartite genuine non-gaussian entanglement in three-mode spontaneous parametric down-conversion. *Physics Review Letters*, APS, v. 125, p. 020502, 2020.
- 176 DUC, V. L.; NOWOTARSKI, M.; KALAGA, J. K. The Bipartite and Tripartite Entanglement in PT-Symmetric System. *Symmetry*, v. 13, n. 2, 2021.
- 177 DUC, V. L. et al. Quantum Steering in Two- and Three-Mode PT-Symmetric Systems. *Symmetry*, v. 13, n. 11, 2021.
- 178 FRITH, T. Exotic entanglement for non-Hermitian Jaynes-Cummings Hamiltonians. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 53, n. 48, p. 485303, 2020.
- 179 KOUSSA, W. et al. The pseudo Hermitian invariant operator and time-dependent non-Hermitian Hamiltonian exhibiting a $su(1, 1)$ and $su(2)$ dynamical symmetry. *Journal of Mathematical Physics*, v. 59, n. 7, p. 072103, 2018.
- 180 MAAMACHE, M. Nonunitary transformation of quantum time-dependent nonhermitian systems. *Acta Polytechnica, České vysoké učení technické v Praze*, v. 57, p. 424–429, 2017.
- 181 QUESNE, C. A non-Hermitian oscillator Hamiltonian and $su(1, 1)$: a way towards generalizations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 40, n. 30, p. F745–F751, 2007.
- 182 GERRY, C. C. Correlated two-mode $SU(1, 1)$ coherent states: nonclassical properties. *Journal of the Optical Society of America B*, OSA, v. 8, n. 3, p. 685–690, 1991.
- 183 KARIMI, A.; TAVASSOLY, M. K. Quantum engineering and nonclassical properties of $SU(1, 1)$ and $SU(2)$ entangled nonlinear coherent states. *Journal of the Optical Society of America B*, OPG, v. 31, n. 10, p. 2345–2353, 2014.
- 184 HACH, E. E. et al. $SU(1, 1)$ parity and strong violations of a Bell inequality by entangled Barut-Girardello coherent states. *Journal of the Optical Society of America B*, OPG, v. 35, n. 10, p. 2433–2442, 2018.
- 185 ABDALLA, M. S.; KHALIL, E.; OBADA, A.-F. Statistical properties of a two-photon cavity mode in the presence of degenerate parametric amplifier. *Annals of Physics*, v. 322, n. 11, p. 2554–2568, 2007.
- 186 MOHAMED, A.; HESSIAN, H. A.; ELEUCH, H. Robust correlations in a dissipative two-qubit system interacting with two coupled fields in a non-degenerate parametric amplifier. *Quantum Information Processing*, Springer, v. 18, n. 10, p. 1–13, 2019.
- 187 CAMPOS, R. A.; SALEH, B. E. A.; TEICH, M. C. Quantum-mechanical lossless beam splitter: $SU(2)$ symmetry and photon statistics. *Physical Review A*, APS, v. 40, p. 1371–1384, 1989.
- 188 WODKIEWICZ, K.; EBERLY, J. H. Coherent states, squeezed fluctuations, and the $SU(2)$ and $SU(1, 1)$ groups in quantum-optics applications. *Journal of the Optical Society of America B*, OPG, v. 2, n. 3, p. 458–466, 1985.

- 189 LO, C. F.; LIU, K. L. Multimode bosonic realization of the $su(1, 1)$ Lie algebra. *Physical Review A*, APS, v. 48, p. 3362–3364, 1993.
- 190 LO, C. F.; SOLLIE, R. Generalized multimode squeezed states. *Physical Review A*, APS, v. 47, p. 733–735, 1993.
- 191 LO, C. F.; KIANG, D. Generalized coherent state for multimode bosonic realization of the $su(2)$ Lie algebra. *Physical Review A*, APS, v. 50, p. 2781–2784, 1994.
- 192 LO, C. F. Normal ordering of the $SU(2)$ and $SU(1, 1)$ squeeze operators. *Physical Review A*, APS, v. 51, p. 1706–1708, 1995.
- 193 THANGAVELU, S. *Harmonic analysis on the Heisenberg group*. [S.l.]: Springer Science and Business Media, 1998. v. 159.
- 194 BUŽEK, V.; QUANG, T. Generalized coherent state for bosonic realization of $SU(2)$ Lie algebra. *Journal of the Optical Society of America B*, OPG, v. 6, n. 12, p. 2447–2449, 1989.
- 195 SCOLARICI, G.; SOLOMBRINO, L. Alternative descriptions and bipartite compound quantum systems. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 42, n. 5, p. 055303, 2009.
- 196 CIUS, D. et al. *Entanglement between uncoupled modes with time-dependent complex frequency*. arXiv, 2022. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2206.14149>>.
- 197 UHDRE, G. M.; CIUS, D.; ANDRADE, F. M. Effects of quantum deformation on the Jaynes-Cummings and anti-Jaynes-Cummings models. *Physical Review A*, APS, v. 105, p. 013703, 2022.
- 198 KISHIMOTO, I. Fuzzy sphere and hyperbolic space from deformation quantization. *Journal of High Energy Physics*, Springer Science and Business Media, v. 2001, n. 03, p. 025–025, 2001.
- 199 GOPALAKRISHNAN, S.; GULLANS, M. J. Entanglement and Purification Transitions in Non-Hermitian Quantum Mechanics. *Physical Review Letters*, APS, v. 126, p. 170503, 2021.
- 200 BEKENSTEIN, R. et al. Control of light by curved space in nanophotonic structures. *Nature Photonics*, Nature Publishing Group, v. 11, n. 10, p. 664–670, 2017.
- 201 KOLLÁR, A. J.; FITZPATRICK, M.; HOUCK, A. A. Hyperbolic lattices in circuit quantum electrodynamics. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 571, n. 7763, p. 45–50, 2019.
- 202 SANTOS, M. A. F.; MENON, L.; CIUS, D. Superstatistical approach of the anomalous exponent for scaled brownian motion. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 164, p. 112740, 2022.
- 203 SANTOS, M. A. F. et al. Probability density correlation for PDM-hamiltonians and superstatistical PDM-partition functions. *European Physical Journal Plus*, v. 136, n. 1, p. 96, 2021.