

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO – FÍSICA**

VINICIUS SALEM

ESTUDO DE EMARANHAMENTO QUÂNTICO EM ESTADOS HIPERGRAFO

PONTA GROSSA

2023

VINICIUS SALEM

ESTUDO DE EMARANHAMENTO QUÂNTICO EM ESTADOS HIPERGRAFO

Tese apresentada para obtenção do título de doutor em Física pelo Programa de Pós-Graduação em Ciências, área de Concentração em Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade

PONTA GROSSA

2023

S163 Salem, Vinícius
Estudo de emaranhamento quântico em estados hipergrafo / Vinícius Salem.
Ponta Grossa, 2023.
110 f.

Tese (Doutorado em Ciências - Área de Concentração: Física), Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade.

1. Informação quântica. 2. Emaranhamento quântico. 3. Estados hipergrafo.
4. Emaranhamento - morte súbita. 5. Informação quântica Gaussiana. I.
Andrade, Fabiano Manoel de. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Física.
III.T.

CDD: 530.1

TERMO DE APROVAÇÃO

VINÍCIUS SALEM


ESTUDO DE EMARANHAMENTO QUÂNTICO EM ESTADOS HIPERGRAFO

Tese aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Ciências, no Programa de Pós-Graduação em Ciências, Área de Concentração Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Orientador



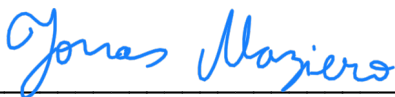
Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade-UEPG/PR



Prof. Dr. Antônio Marcos Batista- UEPG/PR



Prof. Dr. Antônio Sérgio Magalhães de Castro -UEPG/PR



Prof. Dr. Jonas Mazieiro – UFSM/RS



Prof. Dr. Renato Moreira Angelo – UFPR/PR

Ponta Grossa, 12 de setembro de 2023

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo beneplácito concedido a nós na capacidade de objetivamente buscarmos a Verdade na realidade.

Aos meus queridos pais, Milton Sampaio Salem e Vera Lucia Salem, pelo constante apoio prestado ao longo desses anos.

Ao estimado Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade, pela orientação, amizade e atenção sempre dispostas a mim ao longo de toda a pós-graduação.

Ao prezado colega e colaborador MSc. Alison Antunes da Silva, que em muito nos auxiliou na programação e geração dos resultados de randomização obtidos neste trabalho.

Ao Prof. Dr. Antônio Acín, do Institut de Ciències Fotòniques (ICFO), pelo acolhimento e supervisão a mim prestados durante a minha estadia em Barcelona, com o qual pude muito aprender, bem como aos colegas de doutorado e pós-doutorado do ICFO, com os quais estabeleci laços de amizade e de pesquisa acadêmica que certamente durarão longos anos.

Ao nobre amigo, Prof. Dr. Pedro J. Miranda, por todo o suporte e companheirismo oferecidos ao longo destes anos, pelas discussões filosóficas, acadêmicas e informais que constantemente temos.

Ao programa de pós-graduação em Ciências da Universidade Estadual de Ponta Grossa, aos colegas de pós-graduação e aos professores do Departamento de Física, pelos ensinamentos e lições prestadas ao longo desta jornada.

À CAPES, pelo financiamento e suporte providenciados para meus estudos no Brasil e exterior.

*Bondade, Beleza e Justiça são uma só coisa.
Sócrates a Críton, em “Diálogos Platônicos”.*

RESUMO

Na presente tese, apresentamos as propriedades de emaranhamento dos estados hipergrafo, uma classe de estados quânticos multipartidos genuinamente emaranhados que generaliza a classe de estados grafo e que está contida na classe maior de estados maximamente emaranháveis localmente. O principal foco deste trabalho consiste na proposta e análise das propriedades do que chamamos “estados hipergrafos randomizados”, como uma noção generalizada do procedimento de aleatorização feito em portas quânticas para os estados grafos usuais. Aqui, as probabilidades de aplicação das portas-controle generalizadas simulam as operações ruidosas sobre os qubits. Para a classe de estados multiqubit mistos, obtemos medidas de emaranhamento como a concorrência, negatividade e emaranhamento multipartido. Diferentes estados são analisados, incluindo o hipergrafo simétrico para até cinco qubits. A presença de emaranhamento multipartido é analisada em detalhes com ênfase na observação inédita de morte súbita de emaranhamento para os estados aleatorizados considerando hiperarestas de diferentes ordens, enfatizando o novo comportamento que emerge para estados emaranhados não-uniformes, gerando uma espécie de concorrência por emaranhamento enquanto recurso, facilitando o entendimento do comportamento de estados sob condições realísticas de ruído em laboratório. Ademais, apresentamos uma concisa introdução à informação quântica gaussiana, bem como sua aplicabilidade a estados grafo e estados hipergrafo gaussianos.

Palavras-chave: Informação Quântica, Emaranhamento Quântico, Estados Hipergrafo, Não-Localidade, Morte Súbita de Emaranhamento, Informação Quântica Gaussiana

ABSTRACT

In this thesis, we introduce and analyze the entanglement properties of randomized hypergraph states, as an extended notion of the randomization procedure in the quantum logic gates for the usual graph states, recently proposed in the literature. Here, the probabilities of applying an imperfect generalized controlled gate simulates the noisy operations over the qubits. For the mixed multiqubit state class, we obtain entanglement measures such as concurrency, negativity and multipartite entanglement. Different states are analyzed, including the symmetric hypergraph for up to five qubits. The presence of multipartite entanglement is analyzed in detail with emphasis on the unprecedented observation of sudden death of entanglement (SDE) and rebirth of entanglement for the randomized states considering hyperedges of different orders, emphasizing the new behavior that emerges for non-uniform entangled states, generating a kind of competition for entanglement as a resource, facilitating the understanding of the behavior of states under realistic noise conditions in the laboratory. Furthermore, we present a concise introduction to Gaussian quantum information and its applicability to Gaussian graph states and hypergraph states.

Keywords: Quantum Information, Quantum Entanglement, Hypergraph States, Non-Locality, Entanglement Sudden Death, Gaussian Quantum Information

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	<p>Ilustração de como duas partículas ou <i>quanta</i>, A e B, podem ser emaranhadas mediante a interação da rede de osciladores do estado de vácuo do campo eletromagnético, representados pelos vértices em azul. Embora A e B estejam separados de tal forma que não possam interagir localmente, ambos podem emaranhar-se mediante interação local com os vértices da rede.</p>	19
Figura 2	<p>Ilustração esquemática do processo de conversão paramétrica descendente espontânea (SDPC), à esquerda. As leis de conservação de energia e <i>momentum</i> garantem que o par de fótons refratado (“sinal” e “idler”), em vermelho, necessariamente possui energia e <i>momenta</i> combinados que são iguais ao <i>momentum</i> e a energia do fóton inicial “pump”, em azul. À direita, temos os diagramas de vetores de conservação do <i>momentum</i>, representado por K, e das energias logo abaixo, representado por E.</p>	24
Figura 3	<p>Representação geométrica dos conjuntos convexos de estados livres e emaranhados, onde os hiperplanos $W^{(1)}$ e $W^{(2)}$ são duas testemunhas de emaranhamento, que correspondem a hiperplanos, representados pelas linhas na figura. Dizemos que a testemunha $W^{(1)}$ é ótima e é a mais procurada, pois é capaz de detectar mais estados emaranhados do que outras testemunhas que estejam à direita dela como $W^{(2)}$, representada pela linha tracejada. Todos os estados à esquerda do hiperplano ou pertencentes a este, em especial os estados separáveis, fornecem um valor médio não-negativo para essa testemunha, ou seja, $Tr(W_s \rho_s) \geq 0$. Todos os estados à direita do hiperplano são os estados emaranhados detectados por aquela testemunha.</p>	32

Figura 4	<p>Principais portas quânticas representadas na forma de circuitos quânticos. A porta Hadamard, que mapeia o estado de base $0\rangle$ na superposição $(0\rangle + 1\rangle)/\sqrt{2}$ e o estado $1\rangle$ em $(0\rangle - 1\rangle)/\sqrt{2}$. A porta T, uma operação sobre um único qubit, e que está relacionada com a porta de fase por $S = T^2$. A porta CZ, utilizada para ao menos dois qubits, mas que pode ser generalizada para múltiplos qubits, a depender da conectividade do estado representado pelo grafo ou hipergrafo. A porta $CNOT$, outra operação entre dois qubits, onde o primeiro qubit é o qubit de controle, e o segundo é o alvo. A ação desta porta deixa o qubit de controle inalterado enquanto atua com uma porta de Pauli X sobre o qubit alvo, quando o qubit de controle está no estado de base $1\rangle$, ou simplesmente deixa o qubit de controle inalterado quando este se encontra no estado de base $0\rangle$. A porta $SWAP$, como o nome sugere, é uma operação entre dois qubits cujos os estados dos mesmos são invertidos. E, finalmente, a porta multi-controlada $N - CZ$ é uma generalização para N qubits da porta emaranhadora CZ.</p>	36
Figura 5	<p>Ilustração de um grafo simples (sem preferência de sentido nas arestas) com 9 vértices e 10 arestas.</p>	38
Figura 6	<p>Três exemplos de estados grafo representados por grafos: (a) O par de Bell, estado grafo não-trivial mais simples possível, com dois qubits emaranhados por uma porta controlada $CZ_{1,2}$. (b) O estado grafo triangular, equivalente local ao estado GHZ. (c) O estado grafo do tipo estrela com quatro qubits.</p>	39
Figura 7	<p>Operadores estabilizantes para os vértices do grafo triangular. A notação do produto tensorial conforme definida na equação (2.72) foi omitida na figura.</p>	41
Figura 8	<p>O estado GHZ é LU-equivalente aos estados grafo correspondentes tanto ao grafo completo, à esquerda, quanto grafo estrela, à direita. Na figura, em vermelho, H_2, \dots, H_7 representam as ações da porta Hadamard sobre os respectivos vértices de mesma numeração, ao passo que L_n é a transformação local que leva do grafo completo para o grafo estrela, comprovando a equivalência entre ambos.</p>	42
Figura 9	<p>Ilustração de duas ações de complementação local para um grafo de seis qubits, aplicadas respectivamente no primeiro e segundo vértice: (a) aplicada no vértice 1, gerando um subgrafo na vizinhança dos vértices $N(1) = \{5, 6\}$, e (b) aplicada sobre o vértice 2 gerando o subgrafo na vizinhança $N(2) = \{3, 4, 6\}$.</p>	43

Figura 10	<p>Ilustração de um estado grafo do tipo “cluster” ou rede, essencial na construção da computação quântica baseada em medidas. O processo começa com um estado grande emaranhado, a ser usado como recurso: a) O estado inicial é ajustado na rede. b) As medidas locais são feitas a fim de implementar um circuito quântico sobre o estado, permitindo o fluxo de informação, da esquerda para a direita. c) O estado final é obtido da maneira desejada conforme as portas foram aplicadas em b). A execução da computação quântica baseada em medidas geralmente é feita com dispositivos fotônicos em mesas ópticas, pela sua viabilidade, mas também pode ser realizada com qubits à base de matéria.</p>	44
Figura 11	<p>Ilustração de um hipergrafo com 10 vértices e 8 hiperarestas. Repare que este hipergrafo possui uma aresta de ordem zero (sem vértice algum), ordem um, com um vértice, ordem dois, três, quatro e cinco, sucessivamente. Ao contrário da limitação observada em grafos, hipergrafos podem possuir multi-hiperarestas que conectam N vértices.</p>	45
Figura 12	<p>Três exemplos de estados hipergrafo: (a) o hipergrafo não-trivial mais simples possível, de três vértices e uma hiperaresta $E = \{1, 2, 3\}$. (b) O hipergrafo completo e uniforme com quatro vértices e quatro hiperarestas de cardinalidade $k =$três, ou seja, $E = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}\}$. (c) O hipergrafo de cinco vértices com quatro hiperarestas de diferentes cardinalidades: $E = \{\{1\}, \{3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$</p>	47
Figura 13	<p>Ilustração da correspondência entre um hipergrafo H^5 não-uniforme de cinco vértices, à esquerda, e o estado quântico associado a ele, representado no circuito quântico de cinco níveis C^5 à direita.</p>	47
Figura 14	<p>Hipergrafo correspondente ao estado REW da equação (2.57)</p>	49
Figura 15	<p>As relações entre estado hipergrafo, estados grafos e estados estabilizadores. Estados grafos constituem uma subclasse dos estado hipergrafo e estados estabilizadores. Isso significa que a classe de estados estabilizadores é maior do que a classe de estados grafo, pois estados grafo não incluem estabilizadores não-locais, como os estados hipergrafo são capazes. Por outro lado, a classe de estados estabilizadores não necessariamente coincide com estados hipergrafo.</p>	52

Figura 16	Exemplo de equivalência local-unitária no estado hipergrafo de três vértices: (a) mediante aplicação de uma Pauli X sobre o vértice 3, cuja adjacência é $A(3)=\{1,2\}$, conectando os vértices 1 e 2 por uma aresta, (b) seguido pela aplicação de uma porta X sobre o vértice 2, cuja adjacência é $A(2)=\{\{1\},\{1,3\}\}$, de modo que uma aresta é gerada sobre o vértice 1 apenas e outra aresta ligando os vértices 1 e 3. (c) Uma aplicação de X sobre o vértice 1 e sucessivas aplicações da Pauli Z sobre os vértices 1, 2 e 3 gera o grafo triangular em (d) cercado por uma hiperaresta.	53
Figura 17	Exemplo de equivalência local de dois estados hipergrafo de cinco qubits: (a) Aplicam-se dois operadores locais de Clifford \sqrt{X} e \sqrt{Z} responsáveis pela complementação local sobre os vértices 1 e 5. (b) A hiperaresta $\{2,3,4\}$ é obtida como resultado da complementação local sobre o primeiro vértice. Tal exemplo mostra que para estados hipergrafo de 5 qubits operadores de Pauli locais não são suficientes para classificar as equivalências locais unitárias, devido à presença de hiperarestas que formam multiconjuntos. Fonte: o autor, adaptado a partir de (1)	55
Figura 18	Exemplos de estados multi-hipergrafos equivalentes a estado hipergrafo qudits. a) estado grafo qudit, b) estado hipergrafo com três hiperarestas, c) um multi-hipergrafo não-uniforme.	56
Figura 19	Estados cluster (rede) bi-dimensionais gerados a partir de estados grafo gaussianos. Os operadores nulificadores fornecem uma descrição desse estado e formam um espaço nulificador. No primeiro caso a), três nulificadores atuam sobre os vértices 1, 2 e 3, respectivamente, $\hat{p}_1 - \hat{q}_2$, $\hat{p}_2 - \hat{q}_1 - \hat{q}_3$ e $\hat{p}_3 - \hat{q}_2$. O caso b) ilustra a rede infinita, cujos nulificadores são $H_{ij} = \hat{p}_{ij} - \hat{q}_{i-1,j} - \hat{q}_{i+1,j} - \hat{q}_{i,j-1} - \hat{q}_{i,j+1}$ para cada coordenada (i, j) . Fonte: O autor, inspirada em (2).	63
Figura 20	Ilustração esquemática de um estado hipergrafo em variáveis contínuas, onde as hiperarestas 3-uniformes são mostradas como triângulos em cinza. a) Um estado hipergrafo 3-uniforme. b) O vértice 4 é medido na base q , originando um novo estado. c) Em seguida, o vértice central é medido na base p , gerando o estado (c). As linhas sólidas representam as portas CZ usuais Fonte: O autor, baseado em (3).	66
Figura 21	Ilustração de um cenário de medições de Bell com duas partes, Alice e Bob. A fonte produz um par de de partículas emaranhadas (e.g., fótons) e envia uma partícula a Alice e outra a Bob. Cada um efetua medições x e y , respectivamente, obtendo como resultados a ou b , com $a \in \{+1, -1\}$	67

Figura 22	<p>Processo de randomização do estado hipergrafo 3-uniforme de 4 qubits. As linhas tracejadas representam operações ruidosas, ao passo que linhas contínuas são aplicações bem-sucedidas da hiperaresta correspondente. No total, há 16 possíveis de combinações, desde o hipergrafo completo (F_{12}), com as 4 hiperarestas aplicadas com sucesso, até o estado livre, no caso em que as 4 hiperarestas falham (F_{16}). Os estados F_2 a F_{15} representam estados sub-hipergrafo intermediários, os quais englobam combinações de aplicações exitosas e ruidosas das hiperarestas.</p>	72
Figura 23	<p>Ilustração dos hipergrafos de interesse neste trabalho. Estes representam algumas classes de equivalência sob transformações locais unitárias de estados hipergrafo para até 4 qubits. O caso (H_{14}) é equivalente ao estado GHZ completo. Os casos (H_3), (H_9) e (H_{14}) atraem atenção especial, uma vez que tais estados possuem as matrizes reduzidas maximamente mistas, formando conjuntos maximamente emaranhados. Isto significa que eles não podem ser construídos mediante LOCC a partir de nenhum outro estado com o mesmo número de qubits. (4).</p>	74
Figura 24	<p>Negatividade de alguns estados hipergrafo randomizados para 4 qubits mostrados na Figura (23) que possuem matrizes reduzidas maximamente mistas: (a) $\rho_{H_3}^P$, partição $\{1\} \{2, 3, 4\}$; (b) $\rho_{H_3}^P$, partição $\{2\} \{1, 3, 4\}$; (c) $\rho_{H_9}^P$, partição $\{1\} \{2, 3, 4\}$; (d) $\rho_{H_9}^P$, partição $\{2\} \{1, 3, 4\}$; (e) $\rho_{H_9}^P$, partição $\{3\} \{1, 2, 4\}$; (f) $\rho_{H_{14}}^P$, partição $\{1\} \{2, 3, 4\}$; (g) $\rho_{H_{18}}^P$, partição $\{1\} \{2, 3, 4\}$; e (h) $\rho_{H_{18}}^P$, partição $\{3\} \{1, 2, 4\}$. O primeiro fato ao qual chamamos a atenção é como a quebra de monotonicidade de emaranhamento escala em abruptude conforme há maior “competição”, conforme escolhemos denominar o fenômeno, entre arestas e hiperarestas para emaranhar um dado qubit.</p>	75
Figura 25	<p>Concorrência de alguns estados hipergrafo randomizados para 4 qubits mostrados na Figura (23) que possuem matrizes reduzidas maximamente mistas: (a) $\rho_{H_3}^P$, partição $\{1\} \{2\}$; (b) $\rho_{H_3}^P$, partição $\{2\} \{3\}$; (c) $\rho_{H_9}^P$, partição $\{1\} \{2\}$; (d) $\rho_{H_9}^P$, partição $\{1\} \{3\}$; (e) $\rho_{H_9}^P$, partição $\{2\} \{4\}$; (f) $\rho_{H_{14}}^P$, partição $\{1\} \{2\}$; (g) $\rho_{H_{18}}^P$, partição $\{1\} \{2\}$; e (h) $\rho_{H_{18}}^P$, partição $\{1\} \{3\}$. Chamamos a atenção para o fato que a concorrência é a medida que apresenta as maiores discrepâncias de emaranhamento, se comparada às demais medidas estudadas, conforme vemos nos casos (d) e (e). Todavia, tal fato não necessariamente está ligado a uma diferença direta entre os estados, mas à medida em si.</p>	76

Figura 26	<p>Emaranhamento multipartido para probabilidade de 0 a 1 dos estados hipergrafo mostrados na Figura 23. Os números de (1) a (16) correspondem aos estados mostrados na Figura 23. A nítida quebra de monotonicidade de emaranhamento para todos os casos onde há estados não-uniformes, i.e., estados que compartilham hiperarestas de cardinalidades distintas, enquanto o oposto permanece válido: a monotonicidade é respeitada em todos os estados uniformes. Estados hipergrafo como H_9, com duas hiperarestas de ordem 3 e três arestas (e portanto, de ordem 2), são de especial interesse por possuírem matrizes reduzidas maximamente mistas, ou seja, não podem ser obtidos a partir de outros estados meramente por <i>LOCC</i>. Casos extremos, com evidente presença da morte súbita de emaranhamento, são observados no estado H_{16}, cuja a diferença de cardinalidade entre as hiperarestas é igual a 2. A quebra de monotonicidade torna-se mais evidente à medida em que a diferença das ordens das portas aplicadas é maior, “acirrando” a disputa por emaranhamento.</p>	79
Figura 27	<p>Emaranhamento multipartido para probabilidade de 0 a 1 dos estados hipergrafo mostrados na Figura 23. Os números de (17) a (27) correspondem diretamente aos estados mostrados na Figura 23. O último gráfico é o resultado para o estado grafo GHZ, a título de comparação apenas. É interessante notar como a morte de emaranhamento torna-se cada vez mais abrupta à medida em que os estados hipergrafo são menos uniformes. Os resultados obtidos nesses dados para emaranhamento não apenas respondem a questão levantada na literatura sobre a possibilidade da quebra de emaranhamento em estados grafos (cuja a resposta é negativa), como mostra que tal quebra está relacionada com a não-uniformidade do estado, resultado que poderia ser observado apenas com a generalização para estados hipergrafos, uma vez que estados grafo sempre serão 2-uniformes. Não obstante, todos os estados apresentam o renascimento de emaranhamento conforme a probabilidade das arestas tende a 1. Cabe também notar que estados simétricos, como H_{24}, não necessariamente apresentam simetria no emaranhamento, conforme pode ser observado na figura.</p>	82
Figura 28	<p>Emaranhamento multipartido para probabilidade de 0 a 1 dos estados hipergrafo 16, 18, 20 e 23 da Figura (23), onde destacamos a quebra de monotonicidade de emaranhamento na região de probabilidades das hiperarestas entre 0 a 0,5.</p>	83
Figura 29	<p>Hipergrafos “clover” Cl_n 3-uniformes para 5, 9 e 13 qubits, respectivamente, representando alguns dos estados hipergrafo propostos para cálculo do <i>overlap</i> e testemunha de emaranhamento.</p>	83

Figura 30	<p>Comparação da randomização dos <i>overlaps</i> $O(\rho_{Cl_n}^p)$ para a família de hipergrafos <i>clover</i> 3-uniformes totalmente conectados com 5, 9 e 13 vértices em relação ao seu caso particular, a família do grafo estrela com 3, 5 e 7 vértices. Note que o estado grafo ρ_{S_3} apresenta p_w em torno de $p = 0,6$, a partir do qual nenhuma testemunha detecta emaranhamento. Em contrapartida, o estado hipergrafo <i>clover</i> ρ_{Cl_5} apresentou maior robustez de emaranhamento, com p_w em torno de $p = 0,8$. Por tratar-se de hipergrafos uniformes, observamos em todos os casos a monotonicidade de emaranhamento ser obedecida.</p>	84
Figura 31	<p>Negatividade para o estado LME com quatro vértices e duas hiperarestas. Notamos que, de fato, a fase $\phi = \pi$ apresenta o emaranhamento máximo para o dado estado. O mesmo comportamento é observado para os demais estados hipergrafo.</p>	84
Figura 32	<p>Cenário típico de bilocalidade com <i>entanglement swapping</i> no qual as três partes, Alice, Bob e Charlie, compartilham duas fontes S_1 e S_2 que emitem pares independentes de partículas em estados quânticos ρ_1, ρ_2. Nesse tipo de sistema, Bob realiza uma medida local y sobre cada uma das duas partículas que ele recebe de cada uma das duas fontes, Alice e Charlie, obtendo um resultado de saída b. A depender do resultado de Bob, os sistemas de Alice e Charlie acabam em um dos possíveis estados emaranhados. Então, Alice e Charlie aplicam medidas x e z, respectivamente, em cada uma de suas partículas, obtendo resultados a e c. Esse experimento gera uma distribuição de probabilidade conjunta do tipo $P(a,b,c x,y,z)$.</p>	107

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	ESTUDOS PRELIMINARES	22
2.1	Informação Quântica em Variáveis Discretas	22
2.2	Emaranhamento Quântico	22
2.3	Emaranhamento Bipartido	23
2.4	Emaranhamento Multipartido	25
2.5	Hierarquia de Correlações Quânticas	26
2.6	Medidas de Emaranhamento	27
2.7	Medida Geométrica de Emaranhamento	28
2.8	Concorrência de Emaranhamento	28
2.9	Robustez de Emaranhamento	29
2.10	Classes de Equivalência sob Manipulação Local de Emaranhamento	30
2.11	Testemunhas de Emaranhamento	31
2.12	Emaranhamento Preso e Morte Súbita de Emaranhamento	33
2.13	Computação Quântica	35
2.14	Portas Quânticas Universais	35
2.15	Estados de Multiqubits	37
2.16	Estados Grafo	37
2.17	Formalismo do Grupo Estabilizador	40
2.18	Equivalência Local Unitária e Complementação Local	41
2.19	Computação Quântica Baseada em Medidas	43
2.20	Estados Hipergrafo	45
2.21	Correspondência entre estados <i>REW</i> e estados hipergrafo	47
2.22	Estados hipergrafo para o algoritmo de Grover e Deutsch-Jozsa	49
2.23	Formalismo do Grupo Estabilizador Generalizado ou Não-Local	50
2.24	Equivalência Local de Pauli para Estados Hipergrafo	52
2.25	Correlações locais do formalismo do grupo estabilizador não-local	52
2.26	Complementação local em estados hipergrafo	54
2.27	Estados hipergrafo com d níveis	55
2.28	Informação Quântica em Variáveis Contínuas	56
2.29	Operações Gaussianas	58
2.30	Operador Deslocamento	59
2.31	Operador de <i>Squeezing</i> ou Compressão	59
2.32	Rotação de Fase	60
2.33	Beam Splitter	60
2.34	Estados Grafo Gaussianos	61

2.35	Medida geométrica de emaranhamento em variáveis contínuas . . .	64
2.36	Estados Hipergrafo Gaussianos	65
2.37	Teorema de Bell e a desigualdade CHSH.	67
2.38	Revisão: Informação quântica: discreta e contínua.	69
3	EMARANHAMENTO QUÂNTICO EM ESTADOS RANDOMIZADOS	71
3.1	Estados Hipergrafo Randomizados	71
3.2	Emaranhamento Bipartido	73
3.3	Emaranhamento Multipartido Genuíno	76
3.4	Estados Hipergrafo Generalizados e Estados LME	80
4	CONCLUSÃO	85
	REFERÊNCIAS	87
	APÊNDICE A – OPERAÇÕES GAUSSIANAS SOBRE ESTADOS GAUSSIANOS	106

1 INTRODUÇÃO

O emaranhamento quântico é indiscutivelmente um dos fenômenos mais intrigantes da ciência, pela sua natureza profundamente não-intuitiva, como toda a teoria quântica. A nossa dificuldade em compreender ou mesmo aceitar o fato que dois ou mais entes quânticos emaranhados possam interagir de tal maneira que uma medida no primeiro ente identifique o resultado da medida no segundo, mesmo que arbitrariamente distantes, ainda é algo que nos desafia a maneira naturalmente clássica de interpretarmos o a realidade.

De fato, talvez desde a longa celeuma envolvendo a real natureza da luz não se via na história da física tamanho debate como o da descoberta de um “suspeito fenômeno de ação à distância”, para citar a famosa frase que descrevia ainda de forma incipiente o emaranhamento no pioneiro trabalho de Einstein, Podolsky e Rosen (EPR)¹ (5, 6).

Pouco depois da publicação de EPR, o termo “emaranhamento”² foi cunhado na literatura por Erwin Schrödinger, originalmente do alemão “*verschränkung*”, que está relacionado ao substantivo “*schranke*”, que significa “limite” ou “barreira”, como as barreiras utilizadas em cruzamentos nas linhas férreas (7). A ideia trazida por este substantivo pode ser relacionada com o nosso hábito de cruzar os braços “*die Arme verschränken*”, de modo que ambos estejam de tal maneira unidos que seja impossível mexer em um braço sem afetar o outro. Essa mesma ideia foi transposta por Schrödinger a duas partículas, derivando o termo “*quantenverschränkung*”³ (8).

Todavia, desde o princípio é evidente a preocupação dos pioneiros da teoria quântica, em especial Schrödinger, de que o fenômeno de emaranhamento pudesse violar o princípio da teoria especial da relatividade que proíbe velocidades superluminais⁴. Experimentos consistentes confirmam que o emaranhamento existe mesmo quando feito em uma configuração de modo que a luz não poderia chegar a tempo de um sistema quântico a outro emaranhado com ele (9). Contudo, ainda assim isso não viola a teoria especial da relatividade, desde que nenhuma informação externa é passada, mas a única “coisa” trocada é o sistema quântico interno (10, 11, 12, 13).

Embora Einstein não tenha vivido a tempo de presenciar o desenrolar desta epopeia, a definição formal do fenômeno de emaranhamento quântico foi amadurecida nas décadas subsequentes, principalmente no artigo seminal de John S. Bell em 1964 (14), o qual assumiu a localidade como hipótese *a priori*, conforme o artigo de EPR, e mostrou que é possível expressar correlações entre os estados do sistema composto com um dado limite superior para qualquer teoria completa da mecânica quântica, demonstrando a irrazoabilidade de um sistema local com variáveis ocultas, uma das formas defendidas por EPR⁵.

Nas palavras do próprio Bell,

¹ Albert Einstein (1879 - 1955), Boris Podolsky (1896 - 1966) e Nathan Rosen (1909 - 1995).

² Também denominado “entrelaçamento quântico” na literatura.

³ Característica marcante do alemão enquanto língua aglutinativa, i.e., uma língua cuja a maior parte das palavras é formada pela união de morfemas.

⁴ Ou seja, acima da velocidade da luz, de aproximadamente 300 mil quilômetros por segundo no vácuo.

⁵ Entretanto, é preciso notar que, embora usualmente se faça uma confusão entre a teoria quântica de variáveis ocultas e o realismo, esta é apenas uma dentre as várias vertentes realistas dentro da teoria, de modo que o realismo não é dependente da localidade. Maiores detalhes podem ser entendidos em (15, 16).

“É do próprio requisito para localidade que o resultado de uma medida em um sistema não seja afetado por operações realizadas em outro sistema distante com o qual interagiu no passado, que cria a principal dificuldade... essa [não-localidade] é característica, conforme provado aqui, de qualquer teoria que reproduza exatamente as previsões da mecânica quântica.”(14)

Entretanto, cabe ressaltar que os trabalhos responsáveis por descobrirem o fato que partículas ou *quanta* seguem equações de movimento não-locais tenham sido introduzidos primeiramente em (17) e (18)⁶, respectivamente, enquanto o artigo de Bell tenha o mérito em descobrir as correlações não-locais (22). Já a caracterização física de fato destas correlações não-locais com vista a uma aferição experimental foi proposta um pouco depois por Clauser, Horne, Shimony e Holt (23).

O fator mais impressionante do trabalho de Bell talvez seja o seu resultado geral que emerge de uma análise das probabilidades dos resultados oriundos das várias medidas conjuntas, sem uma dependência *a priori* de algum detalhe na teoria de variáveis ocultas ou da própria teoria da mecânica quântica em si (24). Destacamos, contudo, que o próprio termo “mecânica quântica” já é inapropriado pois é cunhado pelos fundadores da teoria quântica a partir da linguagem mecanicista newtoniana. Uma vez que a linguagem molda a nossa percepção da realidade, naturalmente somos inclinados a uma interpretação errônea da mecânica quântica como uma teoria de “partículas quânticas”, o que é completamente inconsistente com os princípios da física quântica, em especial da não-localidade. (25).

As primeiras transições dos experimentos mentais para os laboratórios se desenvolveram a partir da década seguinte, confirmando o outrora obscuro fenômeno de emaranhamento e reforçando o que viria a ser a base para os primeiros estudos em teoria da informação quântica (26, 27, 28). Esta teoria foi amadurecida na década de 1980 a partir do desenvolvimento da mecânica quântica, concomitantemente à ciência da computação, principalmente pela detecção e manipulação do emaranhamento quântico em laboratório, permitindo a geração de redes de estados emaranhados e da computação quântica baseada em medidas (29). Uma descrição mais historicamente detalhada sobre o emaranhamento e decoerência⁷ pode ser encontrada em (30).

Assim, não de balde o emaranhamento é consolidado como o principal recurso para o desenvolvimento de protocolos quânticos, a saber: códigos quânticos (31), criptografia quântica (32), correção quântica de erros (33), internet quântica (34) e metrologia quântica (35). A manipulação de emaranhamento em si é um alvo frequente de estudos no sentido de aumentar ou diminuir o emaranhamento de um dado estado quântico, de modo que é fundamental discernir e caracterizar da forma mais completa possível as diversas classes de estados multipartidos. Além disso, esforços têm sido feitos em modelar novas hierarquias que permitam protocolos mais eficazes em computação quântica (36).

⁶ Embora, de fato, ainda permaneça o intrincado debate sobre a natureza não-local da ação do campo magnético do efeito Aharonov-Bohm, ou sobre a realidade do potencial vetor. Mais detalhes sobre o fenômeno podem ser encontrados em (19, 20, 21).

⁷ A decoerência quântica é o fenômeno da perda de coerência quântica de um sistema, a partir do momento em que o mesmo passa a manifestar um comportamento puramente clássico e, conseqüentemente, deixa de apresentar qualquer fenômeno típico do regime quântico como emaranhamento e superposição.

Circuitos supercondutores ou de estado sólido são frequentemente utilizados como maneiras de se criar sistemas quânticos funcionais em informação quântica. Entretanto, perturbações como flutuações térmicas levam a falhas e ineficiência dos hardwares e protocolos quânticos, causando degradação ou perda completa de coerência quântica (37, 38, 39).

Pesquisas buscando a detecção de emaranhamento na natureza têm sido alvo de grande interesse na literatura, principalmente na biologia quântica, abrindo uma nova área de pesquisa até pouco tempo desconhecida (40, 41). Ainda assim, a causa eficiente ou o que “há por trás” do emaranhamento quântico ainda é um tema de extenso debate. O fato é que a teoria quântica de campos (TQC) tem um papel fundamental na discussão, dado que a principal linha de investigação sugere a interação das flutuações quânticas do estado de vácuo do campo eletromagnético com os *quanta* emaranhados. Esse fenômeno é conhecido na literatura como *entanglement harvesting*⁸ e tem sido estudado em diversos sistemas (42, 43, 44).

Dois átomos separados fisicamente a uma certa distância que interagem localmente via um campo eletromagnético também pode ser emaranhados, através do fenômeno de *entanglement harvesting*; Isto é, dois átomos ou *quanta* podem ser emaranhados ainda que estejam distantes de tal maneira que seja impossível qualquer intercâmbio de fótons virtuais entre eles. O fenômeno fica mais claro pela seguinte explicação (45):

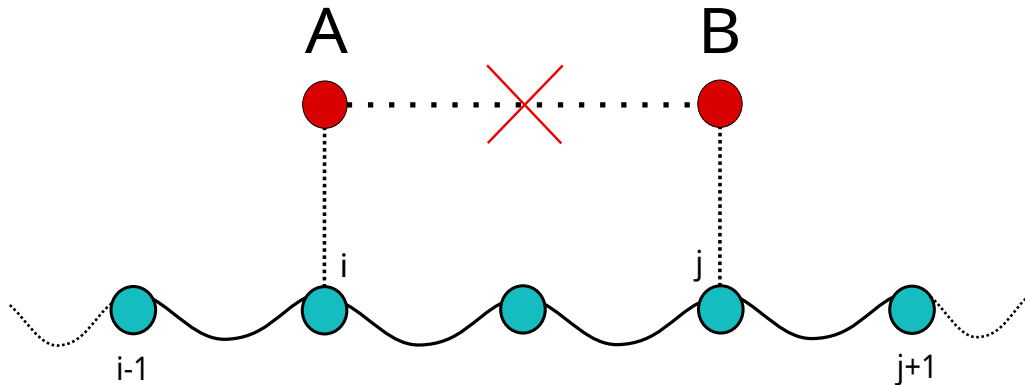
Suponha que busquemos que dois osciladores harmônicos quânticos sejam emaranhados entre si, mas não podem interagir diretamente, mas podem via uma rede de osciladores do estado fundamental do campo eletromagnético, representados pelos vértices em azul, conforme é ilustrado na figura (1). Entretanto, o estado fundamental da rede $|0\rangle$ não é simplesmente o produto tensorial dos estados fundamentais de cada oscilador $|0_n\rangle$, ou seja, $|0\rangle \neq \otimes |0_n\rangle$. Isso ocorre porque o estado fundamental contém emaranhamento entre osciladores distantes na rede. Assim sendo, A e B podem “acoplar-se” a estes osciladores e trocar o emaranhamento dos osciladores da rede para eles mesmos mediante *entanglement swapping* por interações locais (46).

Embora nesse mecanismo não exista intercâmbio de informação diretamente entre A e B , os dois átomos interagem localmente com a rede de “osciladores” do campo eletromagnético, “colhendo” (*harvesting*) o emaranhamento do estado fundamental do campo. A partir de uma abordagem da teoria quântica de campos, o campo eletromagnético pode ser concebido como o limite contínuo dessa rede de osciladores quânticos no estado fundamental. Embora tenha promissoras aplicações em protocolos quânticos, a detecção experimental do fenômeno é desafiadora porque exige um sistema de referência comum entre A e B . Conquanto diversos quantificadores de emaranhamento tenham sido propostos (47, 48) outra consideração importante é a preservação da coerência em sistemas quânticos (49), bem como evitar o fenômeno denominado “morte súbita de emaranhamento”⁹, no qual o emaranhamento de um dado sistema vai a zero em tempo finito, (50, 51). Ademais, frequentemente é observada não apenas a perda de emaranhamento,

⁸ Ou “colheita de emaranhamento” em tradução livre, termo que fica mais claro após a explicação do fenômeno como as partículas virtuais enquanto recursos que os *quanta* “colhem” do vácuo quântico para se entrelaçarem.

⁹ Abordada na literatura utilizando a nomenclatura inglesa de “sudden death” e “rebirth” de emaranhamento.

Figura 1 – Ilustração de como duas partículas ou *quanta*, A e B , podem ser emaranhadas mediante a interação da rede de osciladores do estado de vácuo do campo eletromagnético, representados pelos vértices em azul. Embora A e B estejam separados de tal forma que não possam interagir localmente, ambos podem emaranhar-se mediante interação local com os vértices da rede.



Fonte: O autor.

mas também o renascimento do mesmo (52), atraindo considerável atenção na literatura dada a sua natureza peculiar e ainda não explicada em definitivo.

Enquanto a coerência quântica diz respeito muito mais a uma propriedade de um único sistema quântico, i.e., a sua “quanticidade”¹⁰, o emaranhamento é um fenômeno manifestado em múltiplos subsistemas, conforme veremos na definição de emaranhamento. Logo, a morte súbita significa que o emaranhamento entre dois qubits decai rapidamente a zero, embora ainda possa preservar coerência quântica. A discussão sobre a real natureza da decoerência é longa e ainda há muito a se descobrir; o leitor interessado no tema pode se aprofundar em (54).

Um dos meios para se estudar emaranhamento quântico é através de estados grafo e estados hipergrafo, conforme o leitor pôde observar no título da presente tese. Dentre os estados grafo, os estados do tipo *cluster* são de especial utilidade em computação quântica baseada em medidas (55, 56), onde se utiliza o emaranhamento como um recurso para medições destrutivas e formação de portas lógicas (29, 57).

Recentemente, a classe de estados grafo foi generalizada para estados hipergrafo, por meio da generalização matemática feita na década de 1970 em Berge (58, 59). Como veremos adiante, todo grafo é um caso particular de hipergrafo, de modo que diversas propriedades dos estados grafo são propensas à generalização para estados hipergrafo, objetivo que compreende a presente tese realizar, ao menos para uma propriedade, a saber: a definição do estados hipergrafo randomizados, importante em qualquer tentativa de implementação real de estados emaranhados (31, 60, 61). Pelo seu caráter mais abrangente, estados hipergrafo têm despertado acentuado interesse na literatura recente, tanto no contexto puramente teórico quanto de implementação para utilizá-los como recursos em protocolos quânticos (62, 63, 64).

Outrossim, após minuciosa revisão de literatura, percebe-se que diversos protocolos quânticos descritos com sucesso baseados nesta classe de estados ainda estão abertos à generalização

¹⁰ Para uma estimulante discussão acerca da quanticidade na física, o leitor pode conferir (53).

mediante estados hipergrafo, tanto no contexto de informação quântica discreta, na qual se deu maior foco até o momento do estudo, quanto em variáveis contínuas, terreno em que os estados grafo e hipergrafo ainda tem muito potencial para exploração, seja no contexto de desigualdades de Bell ou de transcrição de estados gaussianos em estados hipergrafo (65, 3, 66, 67).

Isto posto, dada a ampla gama de aplicabilidade dessa classe de estados em protocolos quânticos, escolhemos como principal linha de investigação nesta tese a análise de morte súbita e renascimento de emaranhamento em estados multipartidos, conferindo o caráter de ineditismo necessário à mesma. Para tal abordagem, utilizamos estados hipergrafo (68, 69), ou seja, estados maximamente emaranhados criados mediante a ação de portas quânticas de N qubits.

Em suma, esta tese é dividida da seguinte forma:

No capítulo segundo, fornecemos ao leitor os elementos básicos da informação quântica em variáveis discretas, na qual utilizam-se qubits supercondutores descritos em espaços de Hilbert finitos, e posteriormente apresentamos os fundamentos da informação quântica gaussiana, na qual temos N modos gaussianos sujeitos a operações gaussianas ou não-gaussianas. Tal procedimento foi adotado com fins didáticos para familiarizar o leitor às duas abordagens, uma vez que é possível definirmos estados hipergrafo em ambas as representações; seja para qubits, em informação quântica discreta, ou qumodes¹¹, em informação quântica gaussiana.

No capítulo terceiro, apresentamos os resultados de emaranhamento concernentes ao processo de randomização dos estados hipergrafo para até quatro qubits, incluindo a negatividade bipartida, concorrência de emaranhamento e a negatividade multipartida generalizada (GMN)¹². Todas as medidas obtidas apresentaram em maior ou menor grau a morte súbita e renascimento de emaranhamento para dados estados hipergrafo não-uniformes. Buscamos entender a causa desse fenômeno nesses estados, bem como formas de evitar ou atrasar a ocorrência da mesma, objetivo de interesse na literatura, dadas as consequências na geração de estados quânticos em laboratório (70). Além disso, inserimos resultados relacionados às generalizações para estados hipergrafo com fase variante, denominados estados *LME*, bem como apresentamos o cálculo do valor médio da testemunha de emaranhamento para um estado hipergrafo generalizado do tipo trevo (ou *clover*), comparando com sua contraparte em estados grafo, o grafo estrela, revelando que o estado hipergrafo apresenta maior robustez ao emaranhamento.

Na conclusão, resumizamos os resultados mais importantes encontrados ao longo da pesquisa, com destaque para a quebra de monotonicidade de emaranhamento, incluindo casos extremos que levam à morte súbita e renascimento de emaranhamento, fenômeno interpretado como consequência da competitividade por emaranhamento das portas quânticas de diferentes ordens, algo que jamais poderia ser observado em estados k -uniformes, como é o caso dos estados grafo¹³.

Finalmente, no apêndice A, inserimos os resultados realizados paralelamente ao projeto desta tese durante estadia de doutorado-sanduíche entre os anos de 2019 e 2020 no Institut de Ciències

¹¹ Do inglês “quantum bit” e “quantum mode”.

¹² Do inglês “Genuine Multipartite Negativity”.

¹³ Como veremos, todo estado grafo é um caso particular de um hipergrafo 2-uniforme.

Fotòniques (ICFO) em Barcelona, na Espanha. Neste projeto, buscamos possíveis violações de desigualdades de Bell para estados sobre os quais atuam operações não-gaussianas em um cenário de bilocalidade gaussiana. De acordo com o que será demonstrado, o valor máximo encontrado na tentativa de violação da desigualdade, de 1.98, foi insuficiente para comprovar qualquer não-localidade nesse tipo de sistema. Não obstante, no apêndice B mencionamos *en passant* outra aplicação possível da teoria de hipergrafos, especificamente em hipergrafos quânticos, uma generalização teórica de grafos quânticos.

2 ESTUDOS PRELIMINARES

2.1 Informação Quântica em Variáveis Discretas

Nesta seção, trabalharemos os princípios básicos da Informação Quântica em variáveis discretas, utilizando espaços de Hilbert de dimensão finita na base computacional, pela qual os estados hipergrafo usualmente são definidos.

2.2 Emaranhamento Quântico

Frequentemente, a principal questão a ser respondida em emaranhamento quântico é distinguir quais estados são emaranhados e quais não são.

Na Informação Quântica usual para variáveis discretas, um estado quântico de dimensão d é um elemento de um espaço vetorial complexo e finito denominado espaço de Hilbert \mathcal{H} . Tal estado quântico é dito “puro” quando pode ser descrito como um único vetor $|\psi\rangle$ normalizado no espaço de Hilbert, cujo o vetor dual $\langle\psi|$ corresponde a $\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger$, fornecendo a informação completa do sistema. Todavia, há casos em que não temos a informação completa sobre o estado, conhecendo apenas que com alguma probabilidade p_i o sistema está em um estado puro $|\psi_i\rangle$. Nestes casos, dizemos que o sistema total está em um estado misto, i.e., uma mistura estatística dos estados puros, cuja descrição é dada pela matriz densidade ρ , uma matriz com autovalores não-negativos $\rho \geq 0$:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|, \quad (2.1)$$

onde p_i representam probabilidades de forma que $\sum_i p_i = 1$ e $Tr(\rho) = 1$. Sendo assim, qualquer matriz positiva semi-definida ρ com $Tr(\rho) = 1$ é uma matriz densidade capaz de descrever um estado misto.

Contrariamente ao estado puro, um estado misto não pode ser descrito como um único vetor no espaço de Hilbert, sendo necessária uma matriz densidade ρ para representá-lo. Não obstante, um estado misto atuante em um espaço de Hilbert \mathcal{H} sempre pode ser representado como o traço parcial de um estado puro¹ sobre um sistema bipartido maior $H_1 \otimes H_2$ para um espaço H_2 suficientemente grande.

Baseados na nomenclatura da informação clássica, onde os estados são bits com dimensão $d = 2$, denominamos os estados quânticos como estados qubits, para dimensão $d = 2$, ou qudits, para $d > 2$. E ao contrário da teoria clássica, na qual o espaço de estados do sistema total é dado pelo produto cartesiano dos n subsistemas que o compõe, na teoria quântica o espaço de Hilbert total é dado pelo produto tensorial dos subespaços que o compõe, de modo que, pelo princípio da superposição, podemos escrever (71):

$$|\psi\rangle = \sum_{\mathbf{i}_n} c_{\mathbf{i}_n} |\mathbf{i}_n\rangle, \quad (2.2)$$

¹ Tarefa denominada "purificação de estados" e largamente usada em Informação Quântica.

onde $c_{\mathbf{i}_n} = i_1, i_2, \dots, i_n$ são coeficientes que satisfazem a relação $\sum_{i=0}^{d-1} |c_{\mathbf{i}_n}|^2 = 1$ e $|\mathbf{i}_n\rangle = |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes \dots \otimes |i_n\rangle$ é a base a utilizada em informação quântica discreta, denominada base computacional.

Um dos meios mais eficazes para gerar emaranhamento é a Conversão Descendente Paramétrica Espontânea (SDPC)², um importante processo em óptica não-linear demonstrado em 1967 e largamente utilizado ainda hoje (72, 73). Este método consiste basicamente em converter fótons de alta energia (geralmente denominado laser de “pump” ou bombeio em um par de fótons de menor energia, sendo um dos fótons denominado “sinal” e o outro fóton é o “idler” ou ocioso, baseado no princípio da conservação de *momentum* linear (74).

Experimentalmente, um laser de alta frequência é emitido sobre um cristal não-linear³, conforme ilustrado na figura (2). Pelas leis de conservação de energia e *momentum*, o par de fótons refratado necessariamente possui energia e *momenta* combinados que são iguais ao *momentum* e energia do fóton inicial. O fato do cristal ser não-linear permite que os fótons se espalhem em regiões simétricas e variadas, por isso a necessidade de realizar o procedimento por diversas vezes. Quando dois fótons são emitidos simetricamente pelo cristal em uma região específica, significa que estão emaranhados pela polarização, ou seja, se um dos fótons estiver polarizado verticalmente, o seu par obrigatoriamente estará polarizado horizontalmente.

Recentemente, pesquisadores vêm tentando emaranhar todo tipo de “partícula”, ou, mais precisamente, *quanta*, incluindo sistemas macroscópicos, como membranas de dimensões milimétricas atuando como osciladores harmônicos (75, 76, 77). Além disso, surpreendentemente é possível produzir emaranhamento quântico até mesmo usando organismos vivos (78).

2.3 Emaranhamento Bipartido

A primeira forma de emaranhamento a ser estudada é o emaranhamento bipartido, i.e., entre duas partes do sistema. Assumindo que um estado puro separável $|\psi\rangle$ seja compartilhado entre dois laboratórios A e B, sabemos que os estados puros locais são, respectivamente: $|\psi_A\rangle \in \mathcal{H}_A$ e $|\psi_B\rangle \in \mathcal{H}_B$.

Definição 2.1: Um estado puro bipartido $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ é um produto de estados se o mesmo pode ser escrito como um produto tensorial de dois estados puros $|\psi_A\rangle \in \mathcal{H}_A$ e $|\psi_B\rangle \in \mathcal{H}_B$:

$$|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle. \quad (2.3)$$

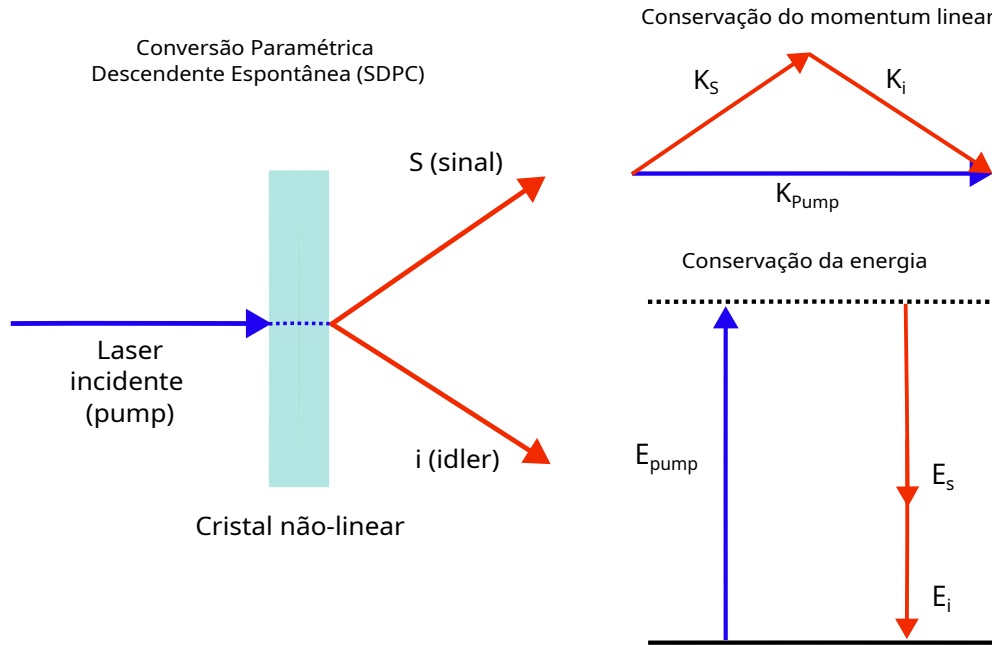
Caso contrário, o estado é dito não-separável, e portanto, emaranhado.

Dois sistemas estão em um estado puro e emaranhado se os mesmos estão correlacionados e se nenhum outro sistema está correlacionado com eles. Os estados puros emaranhados mais

² Do inglês, “Spontaneous Parametric Down-Conversion”

³ Ou seja, um cristal cujo o índice de refração varia com a intensidade do laser incidente e também com a orientação espacial dentro do cristal.

Figura 2 – Ilustração esquemática do processo de conversão paramétrica descendente espontânea (SDPC), à esquerda. As leis de conservação de energia e *momentum* garantem que o par de fótons refratado (“sinal” e “idler”), em vermelho, necessariamente possui energia e *momenta* combinados que são iguais ao *momentum* e a energia do fóton inicial “pump”, em azul. À direita, temos os diagramas de vetores de conservação do *momentum*, representado por K , e das energias logo abaixo, representado por E .



Fonte: O autor.

conhecidos são os estados de Bell de dois qubits maximamente emaranhados, dados por:

$$|\Phi\rangle^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B) \quad (2.4a)$$

$$|\Phi\rangle^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B - |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B) \quad (2.4b)$$

$$|\Psi\rangle^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B) \quad (2.4c)$$

$$|\Psi\rangle^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B - |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B), \quad (2.4d)$$

largamente utilizados em aplicações de emaranhamento bipartido (79). Um conceito similar é aplicável a estados mistos, conforme a definição a seguir.

Definição 2.2: Um estado misto ρ de um sistema composto por duas partes A e B é separável se pode ser escrito na forma:

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B, \quad (2.5)$$

onde p_i são as probabilidades associadas aos estados dos subsistemas ρ_i^A e ρ_i^B .

Caso contrário, o estado é dito emaranhado. Um estado pode ser misto no sentido em que não conhecemos exatamente a preparação do sistema, mas apenas o conhecemos por um *ensemble* estatístico das possíveis medidas. Nesse caso, é possível que outro observador conheça completamente a preparação do sistema, e descreva esse mesmo estado como sendo puro. Porém,

se for um estado misto emaranhado, como descrito acima, a própria presença de emaranhamento deverá impedir que qualquer observador tenha completo acesso aos subsistemas do estado, sendo impossível descrevê-lo como um estado puro. Pela própria definição de separabilidade, a combinação de dois ou mais estados separáveis ainda é um estado separável.

Na prática, encontramos estados mistos muito mais frequentemente do que estados puros. Isso se dá principalmente por dois fatores: Primeiramente, a interação natural do sistema quântico com o ambiente, possivelmente emaranhando o primeiro com os diversos graus de liberdade do ambiente, gerando um estado misto. Em segundo lugar, pela natureza imperfeita das medidas em nível quântico, usualmente gerando resultados probabilísticos sobre o sistema, além da imprecisão de medida em laboratório devido à presença de ruído, fator que facilmente pode levar o sistema à perda de coerência quântica (80).

A tarefa de encontrar critérios gerais de separabilidade para definir se uma matriz ρ é separável ou emaranhada é um problema amplo e de grande interesse em Teoria da Informação Quântica, denominado “problema da separabilidade”. (81, 82, 83, 84).

2.4 Emaranhamento Multipartido

Sistemas compostos envolvendo mais do que duas partes devem ser apresentados à parte, considerando suas diferentes propriedades, usualmente tornando mais complicada a quantificação de emaranhamento (85). Generalizando a definição para um produto de estados de N -partes, teremos a seguinte definição:

Definição 2.3: Um estado puro N -partido $|\psi\rangle$ é um produto de estados se o mesmo pode ser escrito como um produto tensorial de N estados puros locais:

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle, \quad (2.6)$$

do contrário, o estado é dito emaranhado. A generalização para estados mistos é dada a seguir.

Definição 2.4: Um estado misto N -partido ρ_N de um sistema composto por N partes A, B, ..., N, é dito separável caso possa escrito na forma:

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B \otimes \dots \otimes \rho_i^N \quad (2.7)$$

, em que p_i são as probabilidades associadas aos estados dos subsistemas $\rho_i^A, \dots, \rho_i^N$. Caso contrário, o estado é dito emaranhado.

Definição 2.5: Se um estado puro e multipartido $|\psi\rangle$ não puder ser escrito como um produto tensorial de nenhum dos seus subsistemas, o mesmo é dito bi-separável ou, caso não seja separável em nenhuma bipartição, dizemos que é um estado multipartido genuinamente emaranhado (GME)⁴.

Exemplos frequentes na literatura de estados GME são os estados GHZ e estados W , dados respectivamente por:

$$|GHZ\rangle = \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.8)$$

⁴ Do inglês, “genuine multipartite entanglement”.

$$|W\rangle = \frac{|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle}{\sqrt{3}}. \quad (2.9)$$

Estados GHZ ainda serão revisitados ao longo da presente tese, porém cabe destacar aqui a importância dos mesmos na violação máxima de desigualdades de Bell e como um importante recurso para comunicação quântica em sistemas multi-partidos, por exemplo, no âmbito da criptografia quântica mediante *secret sharing* (86, 87, 88). Estados W , por outro lado, apresentam maior robustez à perda de partículas, uma vez que o estado GHZ perde completamente o emaranhamento quando um dos qubits é retirado do sistema. Tal resiliência dos estados W pode ser desejada em um sistema muito susceptível ao ruído.

2.5 Hierarquia de Correlações Quânticas

Conquanto o conceito de correlação como dependência ou associação entre duas variáveis seja tema de pesquisa corrente na física clássica, em informação quântica é possível estruturar uma forma mais ampla de hierarquia de correlações (89, 90).

Dentre os tipos de correlações quânticas, é possível estabelecer uma hierarquia de emaranhamento, cujas correlações devem respeitar as fronteiras onde estados podem apresentar não-localidade, direcionamento (*steering*)⁵, emaranhamento e discórdia quântica (91, 92, 93, 94).

É conhecido o fato que, dado um estado puro, a adição de ruído sobre este pode revelar a hierarquia de diferentes tipos de correlações quânticas, como as citadas acima; embora tais efeitos possam diferir para estados mistos. Segundo Werner (95), um estado de Bell afetado por ruído branco⁶ pode estar emaranhado sem exibir não-localidade de Bell, ou seja, sem violar qualquer desigualdade de Bell. Concomitantemente, foi constatado que estados de Werner podem ser emaranhados sem apresentar *steering* após certa quantidade de ruído, ou apresentar *steering* sem apresentar não-localidade.

O conceito de direcionamento quântico, hoje classificado entre o emaranhamento e não-localidade, aparece implicitamente no trabalho pioneiro de Schrödinger (7). Têm-se buscado na literatura desenvolver medidas em direcionamento quântico para qubits supercondutores e estados gaussianos (96, 97).

Em geral, as correlações de estados quânticos satisfazem as condições de hierarquia de conjuntos, utilizando uma notação matemática⁷: coerência quântica \supseteq discórdia quântica \supseteq emaranhamento quântico \supseteq *steering* quântico \supseteq não-localidade de Bell, ou seja, estados sujeitos

⁵ Direcionamento quântico ou “*quantum steering*” refere-se a um tipo especial de correlação não-local, intermediária entre a não-localidade de Bell e o emaranhamento quântico. Onde há *steering*, é possível influenciar ou prever o estado de um *quantum*, em posse de Bob, por exemplo, baseado nas medidas realizadas sobre outro *quantum*, em posse de Alice. Daí a razão do termo, pois esse fenômeno permite direcionabilidade. Portanto, um estado puro que apresenta não-localidade deve também apresentar *steering*, da mesma forma em que um estado puro que apresenta *steering* deve apresentar emaranhamento quântico. Para estados mistos, a discussão é mais ampla e tais conjuntos não necessariamente apresentam convexidade.

⁶ Ou seja, um ruído aleatório de igual intensidade a frequências distintas, gerando uma densidade espectral de potências distintas.

⁷ Isto é, o símbolo \supseteq , significando que o conjunto à esquerda contém o conjunto à direita.

ao *steering* quântico formam um subconjunto dos estados emaranhados e um superconjunto dos estados que manifestam não-localidade de Bell.

Mesmo sistemas não-emaranhados exibem outro tipo de correlação quântica, conhecida como discórdia quântica (98). A discórdia é deveras útil em teoria de informação ao determinar o grau de “quanticidade” das correlações entre dois sistemas quânticos gaussianos (99, 100). Um conhecimento dessa natureza sobre sistemas permite quantificar a informação mútua, que não é acessível de forma local. A discórdia quântica desempenha um papel relevante principalmente em estudos em cadeias de spin e cavidades quânticas (101, 102).

2.6 Medidas de Emaranhamento

Uma medida de emaranhamento $E(\rho)$ sobre um estado misto ρ permite quantificar a quantidade de emaranhamento do mesmo, satisfazendo as seguintes propriedades (103, 104):

- a) Se, e somente se, o estado ρ é separável, $E(\rho) = 0$.
- b) A medida de emaranhamento é invariante sob transformações locais unitárias, isto é:

$$E(\rho) = E(U_1 \otimes \dots \otimes U_N \rho U_1^\dagger \otimes \dots \otimes U_N^\dagger). \quad (2.10)$$

- c) Tal medida não pode aumentar quando sob a ação de um mapa $\Lambda\{LOCC\}$ que descreve operações do tipo LOCC⁸ (105):

$$E[\Lambda\{LOCC\}] \leq E(\rho). \quad (2.11)$$

Dizemos que E é uma monótona de emaranhamento se ela obedece o critério acima. A maioria das medidas de emaranhamento conhecidas são convexas, fato que decorre por estas serem construídas via *convex roof extension*⁹ (106, 107). A negatividade logarítmica, por outro lado, é uma medida não-convexa (108). Por convexidade, queremos dizer que, dados dois vetores, v_1, v_2 pertencentes a um conjunto C e um parâmetro $\lambda \in [0, 1]$, satisfaçam a propriedade:

$$\text{Se } \{v_1, v_2\} \in C \rightarrow [\lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2] \in C. \quad (2.12)$$

Fisicamente, tais vetores podem representar estados quânticos pertencentes a um espaço vetorial, de modo que a mistura entre tais estados gere um estado que ainda pertença ao espaço original, garantindo a convexidade. Em termos geométricos, dois ou mais estados podem ser representados por pontos em uma linha que representa o espaço vetorial que os contém, e as operações sobre estes devem gerar novos estados que ainda estejam contidos nesta mesma linha. Alguns conjuntos convexas, contudo, contêm pontos extremos, e que portanto não podem ser

⁸ Do inglês, "Local Operations and Classical Communications", ou seja, "Operações Locais e Comunicações Clássicas", um método utilizado em Teoria da Informação Quântica onde uma operação é realizada em parte do sistema (local) e então comunicada por um meio clássico, como uma fibra óptica ou linha telefônica, para outra parte do sistema.

⁹ Ocasionalmente traduzido como "extensão de telhado convexo", preferimos manter o termo original. O termo, largamente usado em Teoria da Informação Quântica, significa uma operação matemática que estende uma função definida sobre alguns estados quânticos puros para uma classe maior de estados mistos, mediante somas convexas desses estados.

obtidos pela soma convexa de dois pontos. Esse é o caso, por exemplo, dos vértices de um quadrado ou triângulo (109, 110). Vejamos agora algumas das medidas de emaranhamento mais utilizadas.

2.7 Medida Geométrica de Emaranhamento

A medida geométrica de emaranhamento E_G determina a distância mínima entre um estado emaranhado e o conjunto convexo dos demais estados separáveis. Para estados puros, a medida geométrica de emaranhamento é dada por:

$$E_G(|\psi\rangle) = 1 - \max_{|\phi\rangle=|\phi_1\rangle|\phi_2\rangle\dots|\phi_n\rangle} |\langle\phi|\psi\rangle|^2, \quad (2.13)$$

onde max denota a o valor máximo em módulo quadrático do produto $\langle\phi|\psi\rangle$. Para aplicações da medida geométrica em estados quânticos bipartidos e multipartidos, o leitor pode conferir (111).

2.8 Concorrência de Emaranhamento

A concorrência de emaranhamento¹⁰ é uma medida usual de emaranhamento entre dois qubits A e B , definida para estados mistos de como:

$$C_{AB}(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (2.14)$$

com λ_i sendo as raízes dos autovalores em ordem decrescente de $\rho\rho^f$, em que ρ^f é a matriz densidade de *spin-flip*, dada por:

$$\rho_{AB}^f = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (2.15)$$

na qual σ_y é uma das matrizes de Pauli, dadas por:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

as quais satisfazem a relação $\sigma_y = i\sigma_x\sigma_z = -i\sigma_z\sigma_x$.

Para o caso de estados puros, é possível mostrar que $C_{AB} = 2\sqrt{\det \rho_A}$, onde ρ_A é a matriz densidade do qubit A , i.e., o traço de ρ_{AB} sobre o qubit B (112). Uma concorrência $C_{AB} = 0$ corresponde ao estado sem emaranhamento, enquanto $C_{AB} = 1$ corresponde ao estado maximamente emaranhado. Uma interessante proposta de medida da coerência quântica através da concorrência é encontrada em (113).

O emaranhamento de formação E_f está intimamente relacionado com a concorrência, uma vez que este é uma função monotonicamente crescente de C_{AB} . Tal relação é expressa como:

$$E_f = h \left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2} \right), \quad (2.17)$$

¹⁰ Do inglês “concurrency of entanglement”.

onde $h(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2(1-x)$ é a função da entropia de Shannon¹¹, por isso essa expressão também é conhecida como entropia de emaranhamento do sistema para um estado puro.

O emaranhamento de formação é uma medida de emaranhamento bipartido particularmente útil para quantificar quantos estados de Bell são necessários para preparar um certo estado usando LOCC (115). Para estados multipartidos de N qubits, a caracterização da concorrência torna-se mais complexa (116). É preciso destacar também que o emaranhamento de formação é uma medida de emaranhamento não-aditiva, satisfazendo a condição:

$$E_f(\rho_{AB}^1 \otimes \rho_{AB}^2) < E_f(\rho_{AB}^1) + E_f(\rho_{AB}^2) \quad (2.18)$$

ou seja, existem estados bipartidos como o par de estados ρ_{AB}^1 e ρ_{AB}^2 cujo o emaranhamento de formação para o estado conjunto $\rho_{AB}^1 \otimes \rho_{AB}^2$ é menor do que a soma do emaranhamento dos estados individuais. Cabe notar também que a concorrência de emaranhamento é invariante por operações unitárias locais (110).

2.9 Robustez de Emaranhamento

Outra medida bastante útil para estados multipartidos é a robustez de emaranhamento (117), i.e., o quão resistente o emaranhamento do estado quântico diante da interação com o ambiente, ruído ou mesmo perda de partículas, para estados com mais de dois qubits.

Definição 2.6 Dado um estado emaranhado ρ , considere um estado separável σ_{sep} . Então, $R(\rho|\sigma_{sep})$ é definido como um t mínimo tal que o estado

$$\frac{(\rho + t\sigma_{sep})}{(1+t)} \quad (2.19)$$

seja separável. Dado esse estado, a robustez de emaranhamento é definida como:

$$R(\rho) = \inf_{\sigma_{sep}} R(\rho|\sigma_{sep}), \quad (2.20)$$

que pode ser relacionado a uma probabilidade p com um valor mínimo de modo que o seguinte estado,

$$(1-p)\rho + p\sigma_{sep}, \quad (2.21)$$

seja separável. Já a robustez randômica de um estado ρ está relacionada com a quantidade de um dado ruído t que deve ser adicionado ao estado $t\rho + (1-t)\frac{1}{d}$ para que ele perca o emaranhamento, onde d refere-se a dimensão do sistema (118, 119).

A robustez de emaranhamento também pode ser considerada como um recurso quântico, por exemplo, no contexto de estados que conservam melhor o emaranhamento em face da perda de partículas (120).

¹¹ Claude Shannon, responsável por introduzir o conceito de entropia informacional, em artigo seminal de 1948 (114).

2.10 Classes de Equivalência sob Manipulação Local de Emaranhamento

O emaranhamento pode ser tratado como um recurso quântico a ser manipulado (121) em relação às operações necessárias para a construção de estados emaranhados. Em tais abordagens, operações que geram emaranhamento são denominadas operações recursos, ao passo que operações que não aumentam o emaranhamento do sistema são consideradas operações livres (122, 123, 124).

Dentre as operações livres, as três mais utilizadas são as do tipo locais unitárias (LU), operações locais e de comunicação clássica (LOCC) ou LOCC estocásticas (SLOCC) (125). É bem conhecido na literatura o fato que operações livres como LOCC não podem produzir aumentos de emaranhamento, condição denominada de **monotonicidade** (126). Pouco após esta condição ser postulada, foi sugerido que a condição de monotonicidade deveria ser o único postulado necessário para uma medida de emaranhamento, de modo que as outras condições seguissem naturalmente desse axioma primeiro (127). Para medidas bipartidas, a presença de monotonicidade sempre garante que o sistema bipartido é maximamente emaranhado. Naturalmente, uma vez que todo estado separável pode ser convertido em outro estado separável meramente por LOCC, segue-se que qualquer função de emaranhamento E será constante em estados separáveis, cuja constante é considerada o próprio valor zero, já que para um estado não-emaranhado o valor de E deve ser mínimo.

Tais operações estabelecem classificações de equivalência de emaranhamento que são úteis em diversas aplicações. No contexto de estados hipergrafo, por localidade significamos que uma operação local é feita em uma partição específica, onde cada vértice $v \in V$ faz referência a uma partição específica, e as operações são como subclasses de todos os mapas completamente positivos (CPM)¹² que são separáveis em relação a tal partição. Vejamos brevemente as definições básicas:

Equivalência local unitária (LU): Dizemos que dois estados N -partidos $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ são equivalentes sob operações locais unitárias se existe um conjunto de matrizes unitárias que satisfaz a relação para os operadores locais e unitários U_n :

$$\bigotimes_{i=1}^n U_i |\psi\rangle = |\phi\rangle, \quad (2.22)$$

Se a eq. (2.22) é satisfeita, então os estados $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ terão equivalência de emaranhamento e poderão ser utilizados para o mesmo protocolo, embora com possíveis perdas. Assim, dizemos que a equivalência LU representa a forma mais forte de equivalência local. No contexto de estados hipergrafo, os operadores locais unitários $U_n \in SU(2)$ são os geradores do grupo de Pauli $P = \{1, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ e desempenham papel preponderante na definição dos estados estabilizadores.

Equivalência por LOCC: Conforme explicado, em operações do tipo LOCC, uma operação local é executada em parte do sistema e as correlações são coordenadas por uma via clássica

¹² Do inglês “Completely Positive Maps”.

a outra parte do sistema. Contudo, a operação é dita determinística se e somente se pode ser realizada com probabilidade unitária; caso contrário, é dita ser estocástica (SLOCC) (128). No segundo caso, o intuito é transformar um estado $|\psi\rangle$ em outro estado $|\phi\rangle$ com probabilidade não-nula de uma operação falhar. Operações LOCC determinísticas também são denominadas protocolos ou superoperadores. A ação de uma SLOCC atuante sobre um espaço de Hilbert H_d pode ser descrita por uma matriz invertível pertencente ao grupo linear geral GL_d de dimensão d . Qualquer operação do tipo LOCC pode ser representada como uma operação separável atuante sobre um estado misto bipartido ρ_{AB} definida como (47):

$$\mathcal{L}(\rho_{AB}) = \frac{\sum_i A_i \otimes B_i \rho_{AB} A_i^\dagger \otimes B_i^\dagger}{Tr[\sum_i A_i \otimes B_i \rho_{AB} A_i^\dagger \otimes B_i^\dagger]}, \quad (2.23)$$

Tais operações definem classes de equivalência entre estados quânticos. O número de classes cresce exponencialmente de acordo com o número de qubits no sistema, de modo que, dados dois qubits, há apenas uma classe de equivalência de SLOCC entre eles. Para um sistema tripartido, porém, há duas classes de estados emaranhados que não podem ser convertidos um no outro via SLOCC, a saber, os estados já mencionados $|W\rangle$ e $|GHZ\rangle$. O conjunto dos LOCC é um subconjunto de SLOCC e, uma vez que $SLOCC \supseteq LU$, dois estados equivalentes sob LU terão equivalência sob SLOCC também.

2.11 Testemunhas de Emaranhamento

A abordagem mais geral possível em caracterizar o emaranhamento quântico é mediante a ação de testemunhas de emaranhamento, cujo o termo fora introduzido em (129). Desde então, as testemunhas estão entre os critérios mais utilizados para detectar o emaranhamento em sistemas quânticos, pois permitem a mensuração direta em laboratório, ao contrário da medida geométrica de emaranhamento, por exemplo, que exige a descrição completa da tomografia do estado quântico (130, 131, 132).

Uma vez que todo estado quântico pode ser detectado por ao menos uma testemunha, o conhecimento desses operadores também fornecem informações para a classificação dos estados quânticos, principalmente em se tratando de sistemas compósitos. Outrossim, testemunhas de emaranhamento estão profundamente relacionadas com a teoria de mapas positivos na álgebra de operadores (133, 134, 135). No que concerne à realização experimental de testemunhas de emaranhamento, o leitor pode consultar (104).

A definição formal da testemunha de emaranhamento, que também é um operador hermitiano, é apresentada a seguir.

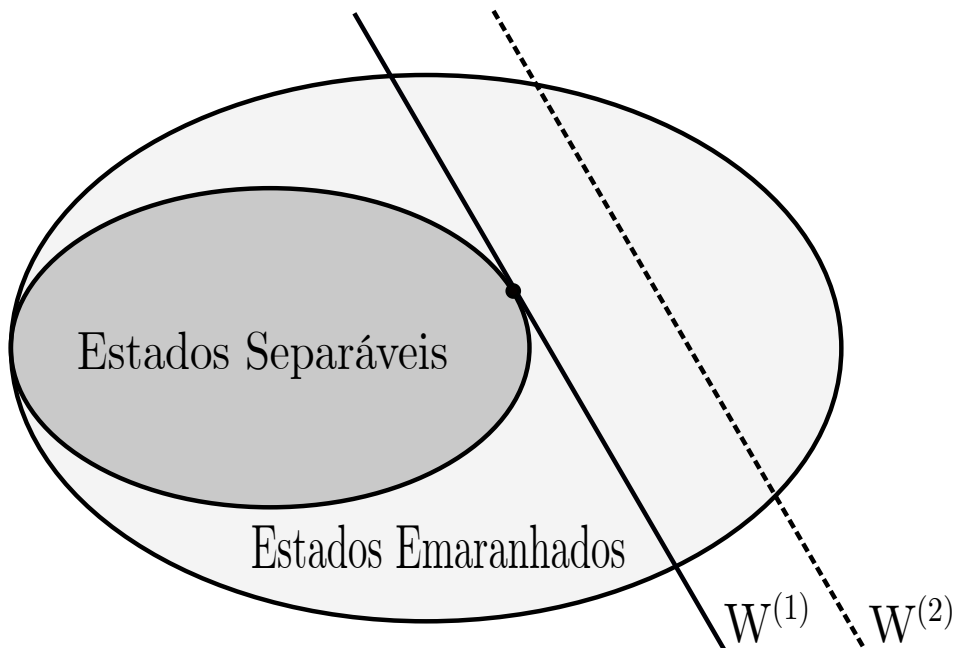
Definição 2.7: Uma testemunha de emaranhamento W é um observável que satisfaz as seguintes propriedades:

$$Tr[W\rho_s] \geq 0, \text{ para todos os estados separáveis } \rho_s, \quad (2.24)$$

$$Tr[W\rho_e] < 0, \text{ para ao menos um estado emaranhado } \rho_e, \quad (2.25)$$

onde ρ_S e ρ_e representam as matrizes densidades para estados separáveis e emaranhados, respectivamente. Embora as testemunhas sejam observáveis e portanto operadores sobre estados quânticos no espaço de Hilbert, é possível entendê-las a partir de uma representação geométrica, uma vez que o conjunto de todos os estados é uma estrutura convexa. Assim, como a origem da teoria das testemunhas de emaranhamento vem também da geometria, onde os conjuntos convexos pode ser representados por hiperplanos, usualmente representamos a testemunha como uma linha que corresponde a este hiperplano. Todo estado localizado à esquerda do hiperplano ou pertencentes a ele possuem um valor médio não-negativo para a testemunha, e portanto são separáveis, conforme definido na equação (2.25). Tal representação é dada pela Figura (3). Para um estudo aprofundado da geometria de estados quânticos, o leitor pode conferir (136).

Figura 3 – Representação geométrica dos conjuntos convexos de estados livres e emaranhados, onde os hiperplanos $W^{(1)}$ e $W^{(2)}$ são duas testemunhas de emaranhamento, que correspondem a hiperplanos, representados pelas linhas na figura. Dizemos que a testemunha $W^{(1)}$ é ótima e é a mais procurada, pois é capaz de detectar mais estados emaranhados do que outras testemunhas que estejam à direita dela como $W^{(2)}$, representada pela linha tracejada. Todos os estados à esquerda do hiperplano ou pertencentes a este, em especial os estados separáveis, fornecem um valor médio não-negativo para essa testemunha, ou seja, $Tr(W_s \rho_s) \geq 0$. Todos os estados à direita do hiperplano são os estados emaranhados detectados por aquela testemunha.



Fonte: O autor.

A título de exemplo, considere o estado de Werner, dado por:

$$\rho = pQ_S + (1 - p)Q_A, \quad (2.26)$$

onde $p \in [0, 1]$ e

$$\begin{aligned} Q_S &= \frac{2}{d(d+1)} P_S \\ Q_A &= \frac{2}{d(d-1)} P_A, \end{aligned} \quad (2.27)$$

e os parâmetros P_S e P_A são projetores sobre os espaços simétricos e anti-simétricos em H^2 , respectivamente, e escritos como:

$$\begin{aligned} P_S &= \frac{1}{2}[\mathbf{1}_d \otimes \mathbf{1}_d + W] \\ P_A &= \frac{1}{2}[\mathbf{1}_d \otimes \mathbf{1}_d - W]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

O estado de Werner é conhecido por ser separável somente para $p \geq 1/2$, que é a situação onde o estado satisfaz a condição de matriz transposta parcial positiva (PPT). Então, a testemunha W detecta todos os estados de Werner emaranhados se:

$$\text{Tr}(\rho W) = 2p - 1, \quad (2.29)$$

que satisfaz a condição da equação (2.25). Ademais, o estado de Werner viola a desigualdade do tipo CHSH para a faixa de valores entre $\frac{1}{\sqrt{2}} < p \leq 1$ (137, 138). Existe ainda uma classe mais geral de testemunhas, chamadas testemunhas de hiper-emaranhamento, capazes de detectar este tipo de correlação, cujo prefixo “hiper” faz referência ao emaranhamento em mais de um grau de liberdade (139).

2.12 Emaranhamento Preso e Morte Súbita de Emaranhamento

Uma das formas consideradas “fracas” de emaranhamento é denominada emaranhamento preso ou ligado¹³, na qual um estado misto emaranhado ρ não pode ser destilado mediante LOCC. Ou seja, não é possível transformar o estado misto ρ em N cópias de estados puros de Bell. Todo estado emaranhado de dois qubits é destilável. Contudo, sistemas com mais de dois qubits nem sempre são destiláveis, de modo que o ruído do ambiente pode afetar de tal forma o estado que ele impossível recuperá-lo por destilação de emaranhamento (140, 141, 142, 143).

Os protocolos que tentam transformar um estado misto em N cópias de estados puros são chamados protocolos de purificação (142, 144).

Conquanto estados bipartidos de sistemas de dimensão 2×2 ou 2×3 não apresentem emaranhamento preso e portanto são destiláveis, até o momento têm-se a certeza de que ao menos estados emaranhados bipartidos com transposição parcial não-negativa apresentam emaranhamento preso, e mais especificamente, um estado quântico de dimensão 2×4 foi confirmado como exemplo (142). Assim, o critério de transposição parcial positiva (PPT)¹⁴ proposto por Peres e Horodecki não é capaz de detectar estados com emaranhamento preso, exigindo outros métodos de detecção (145, 146, 147). Em importante artigo sobre desigualdades de Bell (148), fora conjecturado que estados bipartidos com emaranhamento preso não seriam capazes de violar tais desigualdades. Todavia tal conjectura foi provada falsa quinze anos depois (149).

Não obstante, o emaranhamento preso sustentou durante anos o questionamento se todo estado emaranhado poderia ser utilizado em um protocolo quântico. Felizmente, respostas

¹³ Do inglês “bound entanglement”.

¹⁴ Do inglês “positive partial transposition”, o importante critério de separabilidade para transposição parcial positiva: Se um estado $\rho \in S_A \otimes S_B$ é separável, então a transposição parcial $\rho_{TB} := (id_A \otimes T_B[\rho]) \geq 0$, onde T_B é a transposição sobre o segundo subsistema do sistema composto $S_A \otimes S_B$.

positivas têm sido dadas nesta direção incluindo para estados multipartidos, o que permitiu elaborar definições em termos afirmativos para o emaranhamento quântico, ao contrário da definição usualmente apresentada¹⁵. Outra definição possível, esta de caráter afirmativo, é a de que um estado é emaranhado se pode ser usado como recurso para uma tarefa não-clássica, i.e., um problema de ordem computacional ou informacional que não pode ser solucionado mediante recursos clássicos (desprovidos de coerência quântica) (71).

A negatividade logarítmica é muitas vezes utilizada como medida em estados com emaranhamento preso, uma vez que esta impõe um limite superior ao emaranhamento para esse tipo de estados (108) e pode ser definida como o logaritmo da norma de ρ^{Γ_A} :

$$\mathcal{E}_n(\rho) \equiv \log_2 \|\rho^{\Gamma_A}\|_1, \quad (2.30)$$

em que Γ_A representa a operação de transposição parcial, com o subíndice A fazendo referência ao subsistema A em relação ao qual é feita a transposição parcial. A notação $\|\cdot\|$ representa a norma de $\rho_1^{\Gamma_A}$, i.e., a função que associa a cada vetor de um espaço vetorial um número real não-negativo.

Assim, $\mathcal{E}_n(\rho)$ pode ser relacionado com a negatividade \mathcal{N} , uma medida usual de emaranhamento quântico dada em termos da soma absoluta dos autovalores negativos de ρ^{Γ_A} , conforme veremos adiante, na seguinte maneira:

$$\mathcal{E}_n(\rho) := \log_2(2\mathcal{N} + 1). \quad (2.31)$$

Outrossim, uma vez que trabalhamos com estados hipergrafo randomizados, o emaranhamento preso pode vir a ser útil para medidas randomizadas em sistemas multipartidos, conforme indica relevante publicação na literatura recente (150).

Outro fenômeno que atrai substancial atenção na literatura recente é a morte súbita de emaranhamento (ESD¹⁶), confirmado em (151) ao constatar que em diversos sistemas o emaranhamento decai a zero em tempo finito, ao contrário do esperado usualmente, quando a interação do sistema com o ambiente externo provoca a perda gradual da coerência no sistema (152, 153). Tal decoerência relaciona-se, por sua vez, com a transferência de informação do estado para o ambiente ou outros agentes externos, resultando no aumento da entropia do sistema e consequentemente não mais reduzindo-o às suas partes iniciais. Se esta transferência informacional não puder ser restaurada através de um reservatório com memória, por exemplo, resultará na perda definitiva da mesma, produzindo a morte súbita do emaranhamento (154).

Assim, conforme apontado em (155), a ocorrência de ESD está relacionada com a presença de ruídos não-correlacionados no sistema normalmente na forma de correlações insuficientes entre diferentes subsistemas ou quadraturas, no caso de estados gaussianos. Não obstante haja manifestação de ESD, em diversos sistemas é observado também o renascimento deste

¹⁵ Como vimos, a definição usual de emaranhamento é dada em termos negativos, ou seja, um estado é emaranhado se o mesmo não for separável.

¹⁶ Sigla em inglês encontrada na literatura com frequência como “Entanglement Sudden Death”.

emaranhamento, seja pela interferência da aplicação externa de um campo randomizado ou mediante controle do banho térmico do sistema (156, 157).

Desde a descoberta de ESD, um grande número de efeitos previstos teoricamente na literatura são melhores entendidos, todos compartilhando a propriedade de serem multipartidos (158, 159, 160). Maiores detalhes teóricos e experimentais acerca da manipulação de morte súbita em um ambiente óptico podem ser conferidos em (161, 162).

2.13 Computação Quântica

Dentre as diversas aplicações possíveis da Teoria de Informação Quântica, indubitavelmente a computação quântica se destaca. Portanto, cabe ressaltar aqui alguns conceitos básicos utilizados em circuitos quânticos que poderão ser úteis à leitura deste trabalho.

2.14 Portas Quânticas Universais

Ao contrário de um computador clássico, proposto na base binária usual e composto a partir de circuitos e portas clássicas, um computador quântico se utiliza de portas quânticas que condensam fenômenos quânticos. As operações unitárias agindo sobre os qubits são representadas por portas quânticas, que podem agir sobre qubits únicos ou em múltiplos qubits. As principais portas de qubits únicos são as portas Hadamard e porta-T, relacionada à porta de fase S , que podem ser descritas matricialmente como:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

que mapeia os estados da base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ em uma superposição desses estados, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$. A porta Hadamard pode ser entendida como uma rotação de 90° ao redor do eixo y na esfera de Bloch¹⁷, seguida por uma rotação em 180° ao redor do eixo x , de modo que $H = XY^{1/2}$. A porta-T é dada por:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

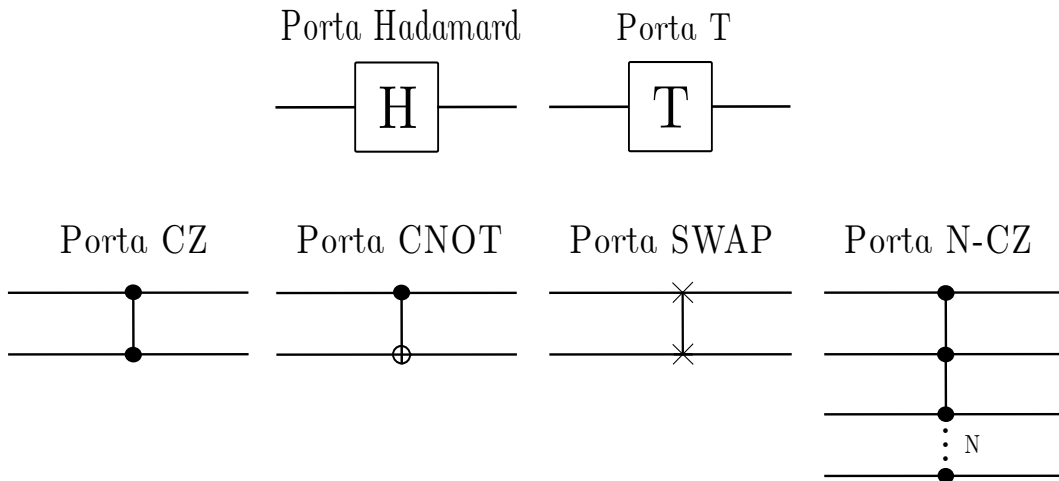
que é equivalente a uma rotação de $\pi/4$ ao redor do eixo z e pode ser relacionada à porta de fase $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ pois $S = T^2$. Dentre as portas que afetam dois qubits, destacam-se as portas controlada-Z (CZ), CNOT e SWAP, respectivamente:

$$CZ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, SWAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

¹⁷ Na computação quântica, a esfera de Bloch é a representação geométrica do espaço de estados puros de um sistema quântico de dois níveis (qubit). Seu nome é em homenagem a Felix Bloch (1905 - 1983), um dos descobridores da ressonância magnética nuclear

Como veremos, a porta CZ tem papel fundamental na construção dos estados grafo, ao serem responsáveis pelo emaranhamento entre dois qubits, representados pela aresta conectando dois vértices no grafo. Para estados hipergrafo, tal porta é generalizada a uma dimensão $2^N \times 2^N$, responsável por gerar uma hiperaresta conectando N vértices. A porta CNOT é uma operação que possui um qubit como controle e atua sobre um segundo qubit alvo com uma porta de Pauli X caso o qubit de controle esteja no estado $|1\rangle$, ou deixa o qubit alvo intocado caso o controle esteja no estado $|0\rangle$. A porta SWAP, como o nome em inglês sugere, simplesmente “troca” o estado de dois qubits. As operações citadas podem ser representadas usando circuitos quânticos, conforme é mostrado na Figura (4) a fim de facilitação didática.

Figura 4 – Principais portas quânticas representadas na forma de circuitos quânticos. A porta Hadamard, que mapeia o estado de base $|0\rangle$ na superposição $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ e o estado $|1\rangle$ em $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$. A porta T , uma operação sobre um único qubit, e que está relacionada com a porta de fase por $S = T^2$. A porta CZ, utilizada para ao menos dois qubits, mas que pode ser generalizada para múltiplos qubits, a depender da conectividade do estado representado pelo grafo ou hipergrafo. A porta CNOT, outra operação entre dois qubits, onde o primeiro qubit é o qubit de controle, e o segundo é o alvo. A ação desta porta deixa o qubit de controle inalterado enquanto atua com uma porta de Pauli X sobre o qubit alvo, quando o qubit de controle está no estado de base $|1\rangle$, ou simplesmente deixa o qubit de controle inalterado quando este se encontra no estado de base $|0\rangle$. A porta SWAP, como o nome sugere, é uma operação entre dois qubits cujos os estados dos mesmos são invertidos. E, finalmente, a porta multi-controlada $N - CZ$ é uma generalização para N qubits da porta emaranhadora CZ.



Fonte: O autor.

Os operadores do grupo de Pauli, se aplicados enquanto portas quânticas, atuam sobre qubits únicos na forma:

$$X |0\rangle = |1\rangle, \quad X |1\rangle = |0\rangle \quad (2.35a)$$

$$Y |0\rangle = i |1\rangle, \quad Y |1\rangle = -i |0\rangle \quad (2.35b)$$

$$Z |0\rangle = |0\rangle, \quad Z |1\rangle = -|1\rangle, \quad (2.35c)$$

onde X atua como uma rotação de π sobre o eixo x na esfera de Bloch, e de forma semelhante Y e Z atuando sobre os eixos y e z , respectivamente.

2.15 Estados de Multiqubits

Uma tarefa-chave em Informação Quântica consiste na quantificação de emaranhamento de estados com mais de dois qubits. Os estados hipergrafo caracterizam uma classe de estados cujas famílias formam estados multipartidos maximamente emaranhados (69, 163). Embora estados grafo tenham sido aplicados em detecção de emaranhamento (164), distribuição quântica de chaves (165), *steering*¹⁸ quântico (166), desigualdades de Bell (167, 5, 168) e computação quântica baseada em medidas (MBQC)¹⁹, ainda há a necessidade de generalização para estados hipergrafo na maioria desses protocolos.

Progressos recentes em estados hipergrafo têm sido feitos em violação de localidade via desigualdades de Bell e aplicações em algoritmos dos tipos Deutsch-Jozsa e Grover, uma vez que estes são escritos em termos de estados reais e igualmente ponderados (REW)²⁰, cujo o conjunto coincide com o conjunto dos estados hipergrafo (169, 170, 171). Além disso, interessantes propriedades de simetria são analisadas nos estados hipergrafo, como sugerido em (172, 173). Não obstante, alguns estados hipergrafo como os do tipo *Union Jack* apresentam propriedades não compartilhadas por estados grafo, como a capacidade de construir uma base universal para MBQC usando apenas medidas de Pauli (174). A aplicação dos estado hipergrafo em computação quântica está relacionada com a capacidade de verificarmos tais estados acessando medidas locais. Esperamos que um método eficaz de verificação dos mesmos seja providenciado em breve, como já fora feito em estados grafo (175). Recentemente, um método simples para verificação de estados hipergrafo que demanda apenas duas medidas de Pauli distintas para cada parte do sistema foi proposta na literatura (176).

Na representação de portas lógicas quânticas mediante hipergrafos, uma aresta $e = k$ é equivalente a uma transformação local unitária $C_k = Z_k$ sobre o k -ésimo qubit, enquanto uma aresta vazia $e = 0$ ou sobre um único vértice (loops) denota apenas um fator global na fase do estado quântico correspondente, de modo que tais transformações podem ser desconsideradas, no sentido em que as mesmas não contribuem efetivamente no grau de emaranhamento do estado global. Contudo, como de praxe, convém apresentarmos uma sucinta revisão de estados grafo antes de ingressarmos na generalização a estados hipergrafo.

2.16 Estados Grafo

Estados grafo formam uma classe de estados quânticos que são descritos mediante a teoria de grafos, que formaliza a estrutura matemática de um grafo, a qual apresentamos brevemente a

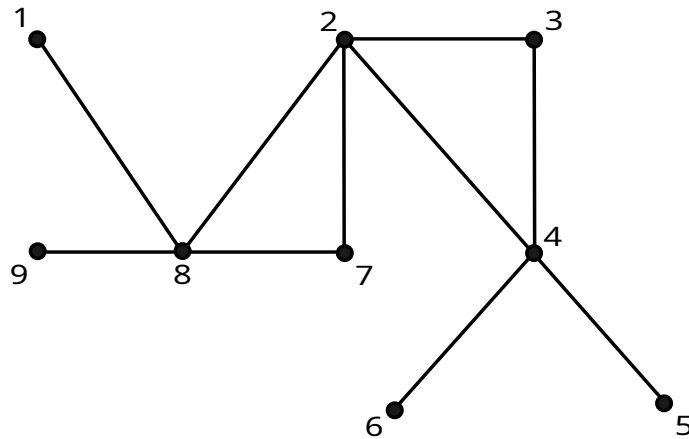
¹⁸ Uma tradução geralmente adotada para o termo é a de “direcionamento” quântico, a qual utilizaremos ao longo da tese.

¹⁹ Do original em inglês *Measurement Based Quantum Computation*.

²⁰ Do inglês, Real Equally Weighted states,

seguir. Um grafo é um conjunto $G = (V, E)$ onde $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ é o conjunto dos vértices v_n e $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ é o conjunto das arestas e_n consistindo em pares não-ordenados de dois vértices diferentes. Dois vértices v_i, v_j são considerados vizinhos se há uma aresta e_{ij} os conectando. Um grafo é dito vazio (G_n^\emptyset) se não possuir arestas, i.e. $E = \emptyset$. Um grafo F com $V_F \subseteq V_G$ e $E_F \subseteq E_G$ é dito ser um *subgrafo* de G . Um exemplo de um grafo simples é mostrado na figura (5).

Figura 5 – Ilustração de um grafo simples (sem preferência de sentido nas arestas) com 9 vértices e 10 arestas.



Fonte: O autor.

Por outro lado, um grafo de n vértices dito completo ou totalmente conectado possui todas as possibilidades de combinação de arestas dadas pelo binômio $\binom{n}{2}$. No caso em que os conjuntos de vértices coincidem, i.e. $V_F = V_G$, dizemos que F é um subgrafo gerador do grafo G . O grau de um vértice v_i é geralmente denotado como d_{v_i} e significa o número de vizinhos de v_i . Dados dois grafos F e G definidos sobre o mesmo conjunto de vértices V , a diferença entre os conjuntos, $F \Delta G$, é definida por $E_{F \Delta G} = E_F \cup E_G \setminus E_F \cap E_G$. A matriz de adjacência de um grafo simples com N vértices é uma matriz $N \times N$ com entradas 0 ou 1, quando houver ou não conectividade entre os vértices, respectivamente, o que caracteriza totalmente qualquer estado grafo (177).

Fisicamente, estados grafo podem ser associados a um padrão de interação, onde duas partículas formando um sistema de spin-1/2 interagem via uma interação de Ising do tipo $H_{ab} = \sigma_z^a \sigma_z^b$. Em informação quântica discreta, geralmente os vértices representam qubits preparados em um estado inicial $|+\rangle$ na base de Hadamard, isto é, $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Sempre que houver uma interação, haverá uma aresta conectando os vértices. Tais interações do tipo Ising são representadas por uma operação unitária do tipo

$$U_{ab}(\phi_{ab}) := e^{-i\phi_{ab}\sigma_z^a\sigma_z^b}, \quad (2.36)$$

em que ϕ_{ab} é a fase do operador. Para grafos simples, onde não há pesos nas arestas, temos

$\phi_{ab} = \pi$ de modo que a porta pode ser escrita como

$$U_{ab} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

que é a porta controlada CZ apresentada no contexto de computação quântica e pode ser escrita de forma equivalente como $CZ = \mathbf{1} - 2|11\rangle\langle 11|$, terminologia que utilizaremos ao longo desta tese – de forma que a ação desta porta pode deletar ou criar uma aresta no grafo G , dependendo se tal aresta já estava contida em G ou não. A aplicação da porta controlada CZ (2.16) no estado separável $|++\rangle^{ab}$ nos leva ao estado de Bell:

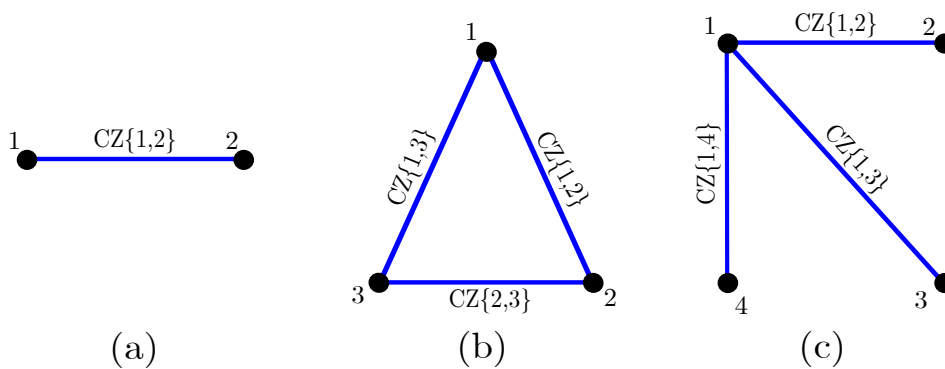
$$U_{ab}|++\rangle_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0+\rangle_{a,b} + |1-\rangle_{a,b}, \quad (2.38)$$

que é um estado maximamente emaranhado, de modo que os estados grafo pertencem à classe de estados maximamente emaranhados. Ou, equivalentemente escrito na base computacional $\{0, 1\}$ e utilizando a nomenclatura da porta controlada CZ:

$$CZ_{a,b}|++\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle), \quad (2.39)$$

em que os índices (a, b) foram omitidos para facilitação.

Figura 6 – Três exemplos de estados grafo representados por grafos: (a) O par de Bell, estado grafo não-trivial mais simples possível, com dois qubits emaranhados por uma porta controlada $CZ_{1,2}$. (b) O estado grafo triangular, equivalente local ao estado GHZ. (c) O estado grafo do tipo estrela com quatro qubits.



Fonte: O autor.

Formalmente, podemos definir o estado grafo como

$$|G\rangle = \prod_{\{a,b\} \in E} CZ_{e_{ab}}|+\rangle^{\otimes |N|}, \quad (2.40)$$

em que N é o número de vértices do grafo, representando os qubits no estado $|+\rangle$.

Exemplos de estado grafo são mostrados na Figura (6). O estado (a) da mesma Figura é descrito matematicamente pela equação (2.39). Os estados grafo (b) e (c) da Figura (6) são escritos, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} |G_{(b)}\rangle &= CZ_{12}CZ_{13}CZ_{23}|+\rangle^{\otimes 3} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{8}}|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |100\rangle - |011\rangle - |110\rangle - |101\rangle - |111\rangle \end{aligned} \quad (2.41)$$

e, para o estado de quatro qubits:

$$\begin{aligned} |G_{(c)}\rangle &= CZ_{12}CZ_{13}CZ_{14}|+\rangle^{\otimes 4} = \frac{1}{\sqrt{16}}\{|0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle + |0100\rangle + \\ &\quad + |1000\rangle - |1001\rangle - |1010\rangle - |1100\rangle + \\ &\quad + |0101\rangle + |0110\rangle + |0111\rangle + |0011\rangle + \\ &\quad + |1110\rangle + |1101\rangle + |1011\rangle - |1111\rangle\}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Repare que a ação da porta controlada CZ modifica o sinal à frente dos estados, tornando-o negativo para comutações ímpares ou permanecendo positivo para comutações pares; por comutações queremos dizer a troca entre 1 e 0 nos estados quânticos acima. Estados grafo têm sido largamente utilizados em aplicações para computação quântica baseada em medidas e computação (178, 179, 180).

Porém, há ainda outra forma de definirmos estados grafo, em termos dos operadores estabilizadores, i.e., operadores que, ao serem aplicados sobre estados grafo, resultam no mesmo estado com autovalor +1. Tais operadores também podem ser chamados de estabilizantes²¹ porque pertencem ao grupo estabilizador, conforme definido a seguir.

2.17 Formalismo do Grupo Estabilizador

O formalismo do grupo estabilizador permite uma descrição alternativa dos estados grafo em termos de operadores que formam um grupo comutativo e estabilizador, isto é, que tem os estados grafo por autoestados, e desempenham um papel fundamental em teoria quântica de erros, circuitos quânticos estabilizadores (181, 182, 183). Dado um estado grafo de N qubits $G = (V, E)$ com $V = 1, 2, \dots, N$, sobre cada vértice $i \in V$ definimos um operador g_i que consiste no produto tensorial do operador de Pauli X sobre o vértice i e do operador Z sobre os vértices circunvizinhos a i , referidos como $N(i)$:

$$g_i = X_i \bigotimes_{j \in N(i)} Z_j. \quad (2.43)$$

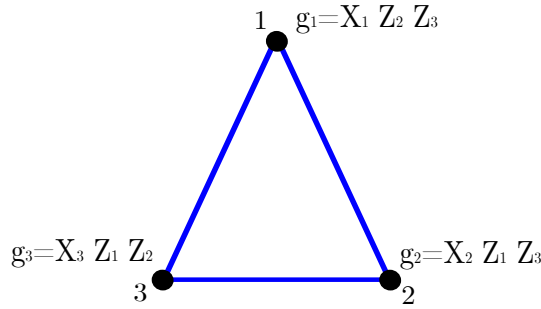
Conforme mencionado, o conjunto dos operadores estabilizantes g_i forma um grupo estabilizador que satisfaz a relação:

$$g_i |G\rangle = |G\rangle, \quad (2.44)$$

²¹ Na literatura inglesa geralmente chamados de “stabilizing” em contraste com o grupo “stabilizer” que os contém.

para todo $i \in V$. Para a facilitação didática, a ação dos operadores g_i sobre o grafo é ilustrada na Figura (7) como exemplo. A generalização para estados hipergrafo mostrará que cada elemento do grupo estabilizador passa a adquirir uma estrutura não-local que não pode ser observada em estados grafo.

Figura 7 – Operadores estabilizantes para os vértices do grafo triangular. A notação do produto tensorial conforme definida na equação (2.72) foi omitida na figura.



Fonte: O autor.

2.18 Equivalência Local Unitária e Complementação Local

Reaplicando as definições de equivalência local unitária apresentadas anteriormente, dizemos que dois estados grafo de n -qubits $|G_1\rangle$ e $|G_2\rangle$ são equivalentes por *SLOCC* se e somente se os mesmos forem LU-equivalentes. Logo, para dois qubits há somente uma classe de equivalência LU. O estado grafo de três qubits na figura (7), equivalente ao estado GHZ e definido por (2.8), é o único estado de três qubits maximamente emaranhado descritível por um estado grafo, ao contrário do estado W definido matematicamente em (2.9). Embora o estado GHZ apresente violação máxima de desigualdades de Bell, o estado W é mais robusto à perda de partículas, por exemplo, o que os tornam mais ou menos úteis a depender do contexto a serem aplicados.

Um exemplo usualmente citado é a equivalência local unitária entre o estado grafo GHZ associado ao grafo totalmente conectado (completo) e ao grafo estrela, conforme ilustrados na figura (8). Isso pode ser constatado mediante complementação local, aplicando portas unitárias do tipo Hadamard $H^{\vee a}$ a todos os vértices do grafo completo exceto o primeiro vértice, o que leva ao grafo estrela, e uma subsequente complementação local leva o grafo estrela ao grafo completo. Os operadores de complementação local X e Z podem ser escritos no grupo de Clifford, respectivamente, como:

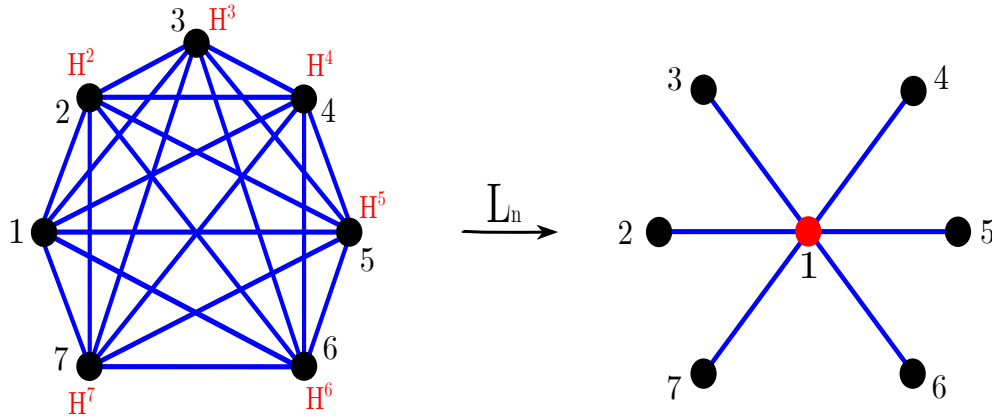
$$X^{1/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \pm i & \mp i \\ \mp i & \pm i \end{pmatrix} = |+\rangle\langle+| \pm i |-\rangle\langle-|, \quad (2.45)$$

e

$$Z^{1/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm i \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

onde $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \pm |1\rangle)$ é autoestado do operador de Pauli X . Conforme mencionado, os operadores do grupo de Clifford $C_n = \{V \in U_{2^n} | V P_n V^\dagger = P_n\}$ estabilizam (ou seja, geram

Figura 8 – O estado GHZ é LU-equivalente aos estados grafo correspondentes tanto ao grafo completo, à esquerda, quanto grafo estrela, à direita. Na figura, em vermelho, H_2, \dots, H_7 representam as ações da porta Hadamard sobre os respectivos vértices de mesma numeração, ao passo que L_n é a transformação local que leva do grafo completo para o grafo estrela, comprovando a equivalência entre ambos.



Fonte: O autor.

autoestados com autovalor $+1$.) os operadores do grupo de Pauli $\in SU(2)$, de modo que o grupo de Clifford é essencial nas operações de complementação local para obter estados grafo equivalentes. Tais operações levam o grafo completo ao grafo estrela sem utilizar operações recursos, de modo que ambos preservam a mesma quantidade de emaranhamento multipartido, uma vez que utilizamos somente operações livres para transformar um estado em outro. O conceito de classes de equivalência será revisitado ao abordamos estados hipergrafo.

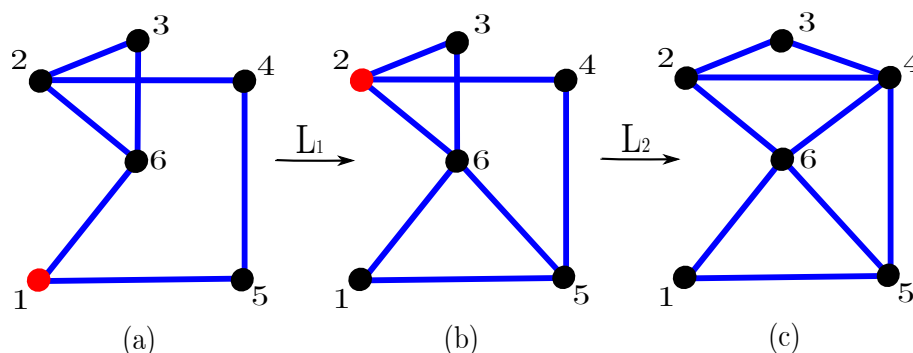
Definição 2.8: Um estado grafo $|G_1\rangle$ de N qubits pode ser convertido em outro estado grafo $|G_2\rangle$ mediante ações locais de operadores do grupo de Clifford se e somente se o grafo G_2 correspondente ao estado grafo $|G_2\rangle$ pode ser obtido do grafo de G_1 utilizando sucessivas operações locais do grupo de Clifford, as quais denominamos complementação local.

O processo de complementação local sobre um grafo G pode ser executado mediante a escolha de um vértice $v_i \in V$ e a complementação de um subgrafo H a partir de $N(v_i)$, a vizinhança em torno do vértice escolhido. A complementação local consiste justamente em excluir todas as arestas do subgrafo H e conectar os vértices inicialmente não-conectados. De forma que lembra a estrutura do formalismo estabilizador, a complementação local pode ser descrita matematicamente como:

$$\mathcal{L}(\mathcal{G})_{v_i} = X_{v_i}^{1/2} \bigotimes_{j \in N(v_i)} Z_{v_j}^{1/2}, \quad (2.47)$$

onde $X_{v_i}^{1/2}$ e $Z_{v_j}^{1/2}$ são os operadores de Clifford conforme definidos na seção 2.18. Um exemplo de complementação local é ilustrado na Figura (9), aplicada sobre os vértices 1 e 2, respectivamente.

Figura 9 – Ilustração de duas ações de complementação local para um grafo de seis qubits, aplicadas respectivamente no primeiro e segundo vértice: (a) aplicada no vértice 1, gerando um subgrafo na vizinhança dos vértices $N(1) = \{5, 6\}$, e (b) aplicada sobre o vértice 2 gerando o subgrafo na vizinhança $N(2) = \{3, 4, 6\}$.



Fonte: O autor.

2.19 Computação Quântica Baseada em Medidas

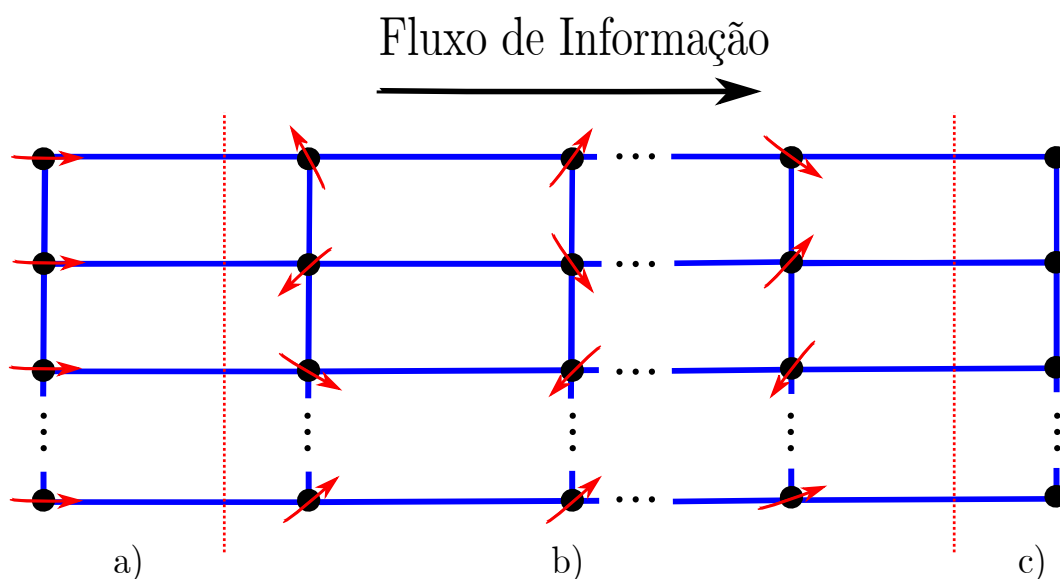
Nos últimos anos, a Computação Quântica Baseada em Medidas (MBQC)²² tem atraído muita atenção enquanto técnica para computação quântica, em contraponto ao modelo de computação quântica circuital, que também apresenta seus desafios (184, 185, 63).

A principal característica da MBQC consiste justamente no fato de que as portas emaranhadoras não estão disponíveis durante o processo de computação em si, pois todos os recursos de emaranhamento já são previamente utilizados na construção de uma rede (cluster) de estados grafo contruídos mediante portas CZ , conforme ilustra a figura (10). Tal estado é então utilizado como um recurso viável sobre o qual podem ser realizadas medidas locais de Pauli, desfazendo o emaranhamento do sistema e permitindo o fluxo de informação (186).

Até recentemente, estava em aberto a questão se apenas duas bases de Pauli seriam suficientes para realizar MBQC; de fato, mostrou-se que é possível através de estados hipergrafo construir uma base universal para MBQC requerendo apenas medidas de Pauli em X e Z , além de ter sido provado o fato de que tal estado pode ser verificado em tempo polinomial usando novamente as mesmas bases X e Z , apresentando larga vantagem em relação às redes usuais de estados grafo. Contudo, uma rede de estados hipergrafo é tecnicamente mais difícil de se gerar em laboratório, ao menos até o presente momento (187). Algumas aplicações da computação quântica baseada em medidas já têm sido efetuadas com sucesso, como no cálculo do algoritmo de Deutsch (188). Informações essenciais sobre a implementação de um computador quântico baseado em medidas gaussianas pode ser encontradas em (189). Uma recente implementação de um computador quântico baseado em medidas via um sistema óptico pode ser encontrado em (190), bem como a geração experimental com sucesso de um jogo quântico em um computador quântico pode ser estudada em (191, 192). Uma discussão interessante sobre a computação quântica do ponto de vista da complexidade computacional, embora um pouco desatualizada, pode ser encontrada em

²² Também denominada de “one-way quantum computer”, considerando que o sentido do fluxo de informação é único pela rede, já que os estados de recurso são destruídos após as medidas.

Figura 10 – Ilustração de um estado grafo do tipo “cluster” ou rede, essencial na construção da computação quântica baseada em medidas. O processo começa com um estado grande emaranhado, a ser usado como recurso: a) O estado inicial é ajustado na rede. b) As medidas locais são feitas a fim de implementar um circuito quântico sobre o estado, permitindo o fluxo de informação, da esquerda para a direita. c) O estado final é obtido da maneira desejada conforme as portas foram aplicadas em b). A execução da computação quântica baseada em medidas geralmente é feita com dispositivos fotônicos em mesas ópticas, pela sua viabilidade, mas também pode ser realizada com qubits à base de matéria.



Fonte: O autor.

(193).

As diversas complicações técnicas, como a exigência de baixas temperaturas para a superposição quântica em computadores quânticos supercondutores, são as principais barreiras para fazer da computação quântica algo prático (194, 195). Existem basicamente cinco condições necessárias para que a computação quântica avance em praticidade, a saber (196):

- 1) Um sistema fisicamente escalonável para aumentar o número de qubits no sistema (197, 198, 199).
- 2) Qubits que possam ser inicializados em valores de fase arbitrários (200).
- 3) Portas quânticas mais rápidas do que o tempo de decoerência do sistema (201, 202).
- 4) Um conjunto universal de portas quânticas (203, 204).
- 5) Qubits cuja a informação possa ser facilmente acessada (205).

Relacionando com o trabalho desta tese, damos destaque ao ponto 3, nas tentativas de construir portas quânticas com alta fidelidade (basicamente, taxa de sucesso de emaranhamento) que resistam à perda de coerência quântica em face da interação com o ambiente externo (202). O tempo de decoerência de um estado quântico pode ser da ordem de nanossegundos a poucos segundos em baixas temperaturas, da ordem de 20 milikelvins. Um recente estudo mostrou que até mesmo a incidência de raios cósmicos podem afetar sistemas quânticos e provocar decoerência em questão de milissegundos (206).

2.20 Estados Hipergrafo

Estados hipergrafo formam uma classe de estados multipartidos com propriedades combinatorias que generalizam a classe de estados grafo. Tal classe emergiu em 2013 (207) e vem generalizando diversos protocolos já obtidos outrora utilizando grafos. Contudo, ao contrário da teoria de grafos, a teoria matemática de hipergrafos ainda é pouco conhecida e está em amadurecimento, principalmente no que tange à teoria espectral destes conjuntos (208, 209, 210). Assim sendo, a fim de introduzir o leitor aos hipergrafos, a seguir apresentamos a definição matemática de um hipergrafo, antes de contextualizá-lo fisicamente como estado hipergrafo.

Definição 2.9 Seja $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ um conjunto finito. Um hipergrafo H sobre V é uma família $\mathcal{H} = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ de subconjuntos de V tais que (58)

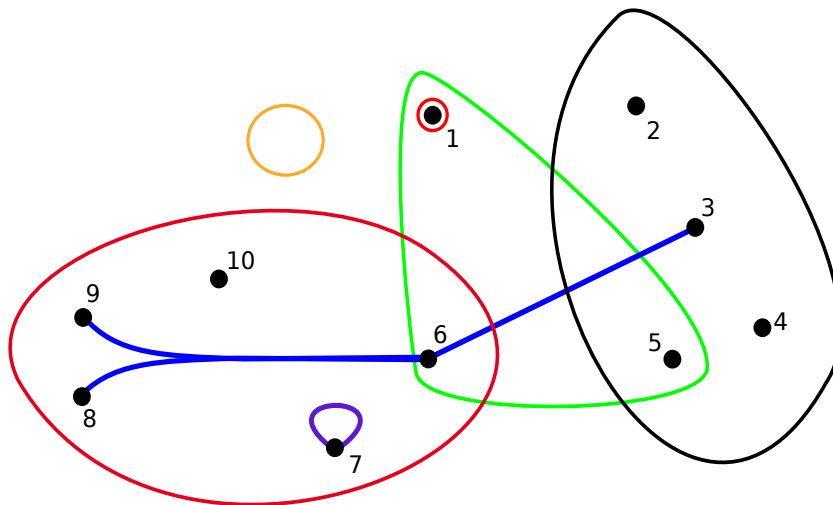
$$E_i \neq \emptyset, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.48)$$

e

$$\bigcup_{i=1}^m E_i = V. \quad (2.49)$$

A família de Sperner de hipergrafos simples (que não possuem *loops*) constituem hipergrafos cujos elementos do conjunto $\mathcal{H} = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ obedecem a relação $E_i \subset E_j, i = j$. Assim como nas definições usuais para grafos, os elementos v_1, v_2, \dots, v_n de V correspondem a vértices mas os conjuntos E_1, E_2, \dots, E_m constituem as hiperarestas do hipergrafo. Uma ilustração de um hipergrafo é dada na figura (11).

Figura 11 – Ilustração de um hipergrafo com 10 vértices e 8 hiperarestas. Repare que este hipergrafo possui uma aresta de ordem zero (sem vértice algum), ordem um, com um vértice, ordem dois, três, quatro e cinco, sucessivamente. Ao contrário da limitação observada em grafos, hipergrafos podem possuir multi-hiperarestas que conectam N vértices.



Fonte: O autor.

Um multigrafo que apresenta *loops* e múltiplas arestas é um hipergrafo onde cada aresta possui cardinalidade igual a dois. Não obstante, as possibilidades combinatorias para um hi-

pergrafo são consideravelmente maiores. Enquanto para um grafo com N vértices existem $2^{N(N-1)/2}$ possibilidades combinatórias, para um hipergrafo com o mesmo número de vértices existem 2^{2^N} possíveis combinações de hipergrafos. Tal fato significa que hipergrafos podem ser analisados complexamente, no sentido da complexidade de Kolmogorov (4). Dois vértices de um hipergrafo são considerados adjacentes se estão conectados por uma mesma hiperaresta. O grau de um vértice é definido como o número de vértices adjacentes ao mesmo, ou seja, quantas arestas estão ligadas ao vértice em questão. Um hipergrafo é dito regular se todos os seus vértices apresentarem o mesmo grau (211). Um hipergrafo é dito k -uniforme caso todas as suas hiperarestas atuam exatamente sobre k vértices, de modo que todas as hiperarestas têm cardinalidade $k = |e|$. Consequentemente, um hipergrafo será k -uniforme quando possuir todas as combinações possíveis de hiperarestas de certa cardinalidade k .

Um estado hipergrafo representado por um hipergrafo $H = (V, E)$ é definido conforme se segue:

A cada vértice $v \in V$ associamos o estado $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ da base de Hadamard de modo que o estado inicial é dado por $|+\rangle^{\otimes N}$, em que $N = |V|$, onde $|V|$ é a cardinalidade do conjunto dos vértices. Então, a cada hiperaresta $e \in E$ aplicamos a porta emaranhadora C_e sobre os qubits pertencentes àquela hiperaresta. Assim procedendo, obtemos:

$$|H\rangle = \prod_{e \in E} C_e |+\rangle^{\otimes |V|}, \quad (2.50)$$

onde C_e é a justamente a notação utilizada para a generalização da porta CZ utilizada nos estados grafo, e é dada por $C_e = \mathbf{1} - 2|11\dots 1\rangle\langle 11\dots 1|$.

Estados hipergrafo são casos especiais dos estados locais maximamente emaranháveis (LME)²³ (212), nos quais a porta C_e adquire a sua forma mais geral possível, a saber:

$$C_e(\phi) = \mathbf{1} - (1 - e^{i\phi})|11\dots 1\rangle\langle 11\dots 1|, \quad (2.51)$$

em que ϕ é um fator de fase que pode representar arestas ponderadas. De fato, note que o caso do estado hipergrafo ocorre para o valor de $\phi = \pi$ (213).

Como exemplo prévio, a Figura 12 apresenta alguns estados hipergrafo estudados nesta tese. O estado hipergrafo de três vértices (a) da figura (12) é descrito matematicamente como:

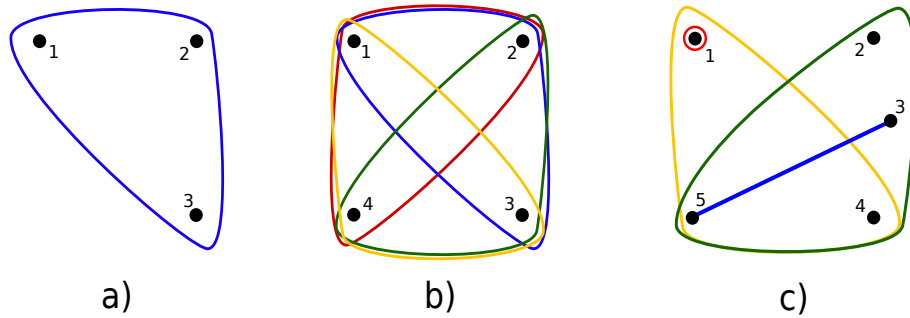
$$|H_3\rangle = C_{\{123\}} |+\rangle^{\otimes 3} = \frac{1}{\sqrt{8}} |000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |011\rangle + |101\rangle + |110\rangle - |111\rangle, \quad (2.52)$$

e de forma análoga para os demais estados. Assim como no caso de estados grafo, também é possível traçar um paralelo entre estados hipergrafo e um circuito quântico. A Figura 13 ilustra a implementação de um estado quântico construído a partir de um hipergrafo em um circuito quântico de cinco níveis (68).

A aplicação das portas quânticas controladas é de grande interesse experimental, e esforços têm sido feitos para aumentar ao máximo a taxa de sucesso dessas operações emaranhadoras

²³ Do inglês, “Locally Maximally Entangleable”.

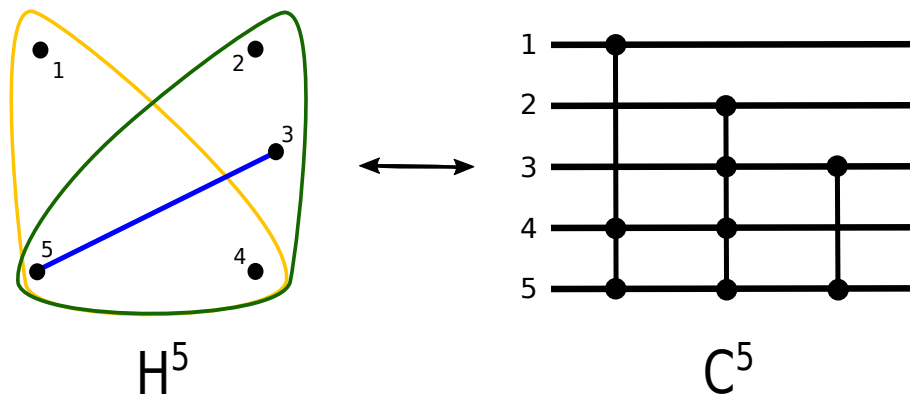
Figura 12 – Três exemplos de estados hipergrafo: (a) o hipergrafo não-trivial mais simples possível, de três vértices e uma hiperaresta $E = \{1, 2, 3\}$. (b) O hipergrafo completo e uniforme com quatro vértices e quatro hiperarestas de cardinalidade $k = \text{três}$, ou seja, $E = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}\}$. (c) O hipergrafo de cinco vértices com quatro hiperarestas de diferentes cardinalidades: $E = \{\{1\}, \{3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$



Fonte: O autor.

(214). A implementação experimental de estados hipergrafo foi obtida com sucesso recentemente e é de grande interesse dada a sua generalidade em relação aos estados grafo, principalmente para a computação quântica baseada em medidas (63, 215). Uma das vantagens mais claras é a de que estados grafo exigem um conjunto de portas maior para serem universais em computação quântica do que estados hipergrafo, com os quais é possível torná-los universais com apenas duas portas quânticas (187).

Figura 13 – Ilustração da correspondência entre um hipergrafo H^5 não-uniforme de cinco vértices, à esquerda, e o estado quântico associado a ele, representado no circuito quântico de cinco níveis C^5 à direita.



Fonte: O autor.

2.21 Correspondência entre estados *REW* e estados hipergrafo

Ademais, constatou-se recentemente que estados hipergrafo correspondem a estados *REW*²⁴, úteis nas tentativas de implementação de algoritmos do tipo Grover e Deutsch-Jozsa na computação quântica (171, 216, 217).

²⁴ Do inglês “Real Equally Weighted”, estados de superposição real e igualmente ponderados.

Os problemas de busca que podem ser simulados de forma eficiente pelo algoritmo de Grover devem apresentar as seguintes propriedades (218):

- 1) O sistema não possui uma estrutura buscável na coleção de respostas possíveis.
- 2) O número de respostas possíveis a serem verificadas corresponde ao número de *inputs* no algoritmo.
- 3) Exista uma função *booleana*²⁵ do tipo $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ que resolva cada *input* e determine se esta é uma resposta correta.

Os protocolos de ação que definem a utilização dos algoritmos destes podem ser preparados no estado inicial:

$$|\psi_0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle, \quad (2.53)$$

que corresponde a uma superposição de estados *REW* de todos os possíveis 2^n estados $|x\rangle$ na base computacional. Tal classe de estados pode ser demonstrada como equivalente aos estados hipergrafo (207). Aplicando uma transformação unitária U_f envolvendo um qubit adicional (alvo) e atua na forma:

$$U_f |x\rangle |y\rangle = |x\rangle |f(x) \oplus y\rangle, \quad (2.54)$$

o seguinte estado é gerado:

$$|\psi_f\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} |x\rangle, \quad (2.55)$$

em que $f(x)$ é uma função *booleana*. Desse modo, é possível definir os estados hipergrafo em termos de uma função booleana $f(x)$ na forma:

$$|H\rangle = \frac{1}{2^{N/2}} \sum_{\mathbf{x} \in \{0,1\}^N} (-1)^{f(\mathbf{x})} |\mathbf{x}\rangle, \quad (2.56)$$

formando uma correspondência biunívoca entre a classe de estados hipergrafo e dos estados *REW*. De fato, é intuitivo perceber que o hipergrafo com três vértices envolvidos por uma única hiperaresta pode ser expresso pela função $f(x) = x_1 x_2 x_3$, ao passo que estados grafo podem corresponder no máximo a funções com termos de duas variáveis, dado que são estados sempre com arestas de cardinalidade igual a dois.

Um exemplo com três qubits para um estado *REW* $|f\rangle$ é dado por:

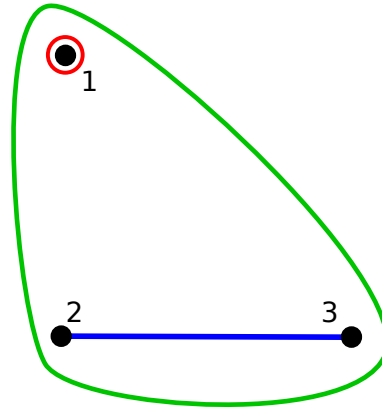
$$|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} (|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle - |011\rangle - |100\rangle - |101\rangle - |110\rangle - |111\rangle). \quad (2.57)$$

Assim, é possível obter o hipergrafo correspondente a um estado *REW* aplicando sobre o mesmo uma sequência de portas lógicas. No caso acima, a aplicação de transformações Z_1 , $C^2 Z_{23}$ e $C^3 Z_{123}$ leva ao estado inicial $|+\rangle^{\otimes 3}$. Portanto, estas transformações aplicadas no hipergrafo inicial com três qubits, primeiramente cria uma hiperaresta que contorna o vértice 1

²⁵ Ou seja, uma função que possui uma ou mais variáveis de entrada (*input*) e gera um resultado que depende somente dos valores dessas variáveis. Matematicamente, é a função do tipo $f : X \rightarrow B$, onde X é um conjunto arbitrário e B é um domínio booleano. Referente ao matemático britânico George Boole (1815-1864).

(pela aplicação de Z_1), e em seguida com as aplicações de $C^2 Z_{23}$ e $C^3 Z_{123}$ produz uma aresta comum conectando os vértices 1 e 2 e a hiperaresta conectando os três vértices, respectivamente, conforme ilustrado na Figura (14):

Figura 14 – Hipergrafo correspondente ao estado REW da equação (2.57)



Fonte: O autor.

2.22 Estados hipergrafo para o algoritmo de Grover e Deutsch-Jozsa

Para o algoritmo de Grover, a função f tem por *output* “1” para entradas x que correspondam a soluções para o problema de busca e *output* “0” para valores de x que não forem soluções para o problema. Denotamos por M o número de soluções, que em geral é muito menor do que o número total de entradas (2^n). Uma propriedade de interesse a ser buscada é o grau de emaranhamento dos estados como função do número de qubits n para um dado número fixo de M soluções possíveis. Aqui, quantificamos o grau de emaranhamento pela chamada “medida geométrica de emaranhamento”, desenvolvida por Shimony (219) e posteriormente aplicada a estados multipartidos em (220). Uma vez que o grau de emaranhamento de um dado estado quântico pode ser determinado pela “distância” ou ângulo entre este e o estado não-emaranhado mais próximo, dá-se a esta o nome de “medida geométrica”. Por exemplo, considere o estado puro N -partido $|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle = \sum_{p_1, p_2, \dots, p_n} \chi_{p_1, p_2, \dots, p_n} |e_{p_1} e_{p_2} \dots e_{p_n}\rangle, \quad (2.58)$$

a definição geométrica de grau de emaranhamento dar-se-á por:

$$d = \min_{|\phi\rangle} \| |\psi\rangle - |\phi\rangle \|, \quad (2.59)$$

que representa justamente a distância entre $|\psi\rangle$ e o estado separável mais próximo²⁶ $|\phi\rangle$ que esteja mais próximo de $|\psi\rangle$. Assim, para um estado puro N -partido $|\psi\rangle$, a medida de emaranhamento pode ser escrita como

$$E_q |\psi\rangle = 1 - \max_{|\phi\rangle \in S_q} |\langle \psi | \phi \rangle|^2, \quad (2.60)$$

²⁶ Como usamos a definição usual na literatura de que um estado quântico é considerado emaranhado se ele não for separável, é natural supor que quanto maior for o grau de emaranhamento deste estado, mais distante ele estará de um estado não-emaranhado, e portanto maior será o ângulo entre eles.

onde S_q representa o conjunto dos estados q -separáveis, os estados que são separáveis em relação a q -partições, estabelecendo a relação do estado emaranhado com um estado separável mais próximo através da amplitude de probabilidade entre ambos, justificando a quantificação de emaranhamento em termo de distância. Aqui, diferenciamos E_n , que quantifica qualquer quantidade de emaranhamento contida no sistema global, e E_2 , que quantifica o emaranhamento genuíno em um sistema multipartido.

Para o estado hipergrafo com três qubits $|H_3\rangle$, descrito na equação (2.52), podemos aplicar uma porta do tipo Hadamard, levando o estado $|H_3\rangle$ a:

$$|H_3\rangle = \frac{1}{2}(|000\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |111\rangle). \quad (2.61)$$

Após o traço parcial para as matrizes reduzidas de $|H_3\rangle \langle H_3|$, calculam-se autovalores iguais a $\lambda_1 = \frac{3}{4}$ e $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ e cuja medida geométrica de emaranhamento é $E_2 = \frac{1}{4}$. Contudo, todo estado grafo conectado têm uma medida geométrica de emaranhamento $E_2 \geq \frac{1}{2}$, o que comprova que essa classe de estados não abrange todos os estados REW, ao contrário da classe dos estado hipergrafo. estado hipergrafo com somente uma hiperaresta de cardinalidade máxima são superposições de todos os elementos da base computacional com somente um sinal negativo precedendo o ket $|11\dots 1\rangle$. Tal classe é exatamente a dos estados empregados no algoritmo quântico de Grover, para o caso de solução única.

2.23 Formalismo do Grupo Estabilizador Generalizado ou Não-Local

O formalismo do grupo estabilizador para estado hipergrafos generaliza os estabilizadores da família de estados grafo, de maneira tal que a ação dos operadores estabilizantes passa a ter um caráter não-local, uma vez que não é mais possível construir o formalismo estabilizador apenas como o produto tensorial de operadores locais (221, 222).

A “magia” ou não-estabilização de um estado hipergrafo²⁷ é outra propriedade interessante a ser analisada, pois caracteriza o grau de desvio de um dado estado quântico do conjunto de estados estabilizadores, o que é essencial para entender a complexidade de um estado e usá-lo como recurso para computação quântica e tolerância a erros (223, 224, 225).

Recentemente, a medida denominada SRE ²⁸ foi proposta como uma forma de quantificar a magia de um estado quântico, embora isso ainda seja tarefa árdua para estados de vários qubits. (226)

Seja um estado hipergrafo $H = (V, E)$ de N qubits com o conjunto de vértices $V = 1, 2, \dots, N$. Aqui, seguindo a definição proposta em (1), buscamos a generalização do conceito de vizinhança de um vértice usual para estados grafo, denominando adjacência de um vértice $i \in V$ como $A(i) = \{e - \{i\} : e \in E, \text{ onde } i \in e\}$. Assim, os elementos de $A(i)$ são conjuntos de vértices adjacentes a i conectados por uma hiperaresta. Então sobre cada vértice $i \in V$ definimos um operador h_i que consiste no produto tensorial do operador de Pauli X_i , aplicado sobre o

²⁷ Do inglês “Magic” of a quantum state.

²⁸ Abreviatura do inglês para “Stabilizer Renyi Entropy”.

vértice i , e da porta controlada generalizada CZ_{e_j} sobre os vértices adjacentes:

$$h_i = X_i \bigotimes_{e_j \in A(i)} C_{e_j}. \quad (2.62)$$

Os operadores h_i formam um grupo comutativo que estabiliza a família de estado hipergrafo $|H\rangle$, satisfazendo a seguinte relação:

$$h_i |H\rangle = |H\rangle, \quad \forall i \in V. \quad (2.63)$$

A seguir, como exemplo, apresentamos os estabilizantes h_1 , h_2 e h_3 do hipergrafo (c) da figura (12):

$$h_1 = X_1 \otimes C_{\{\emptyset\}} C_{45} \quad (2.64a)$$

$$h_2 = X_2 \otimes C_{\{345\}} \quad (2.64b)$$

$$h_3 = X_3 \otimes C_{\{5\}} C_{\{245\}}, \quad (2.64c)$$

em que $C_{\{\emptyset\}}$ denota a adjacência inexistente do vértice 1, equivalente a uma hiperaresta vazia, $\{\emptyset\} \in A(1)$, que significa simplesmente um sinal global -1 . Utilizando a definição dos operadores estabilizantes podemos definir o grupo estabilizador: dado um conjunto de 2^N operadores observáveis,

$$\mathcal{S} = \{S_x | S_x = \prod_{i \in V} (h_i)^{(x_i)} \quad \forall x \in Z\}, \quad (2.65)$$

que engloba todos os produtos entre operadores h_i . Então, denominamos \mathcal{S} o grupo abeliano com 2^N elementos que necessariamente satisfaz a condição:

$$S_x |H\rangle = |H\rangle, \quad (2.66)$$

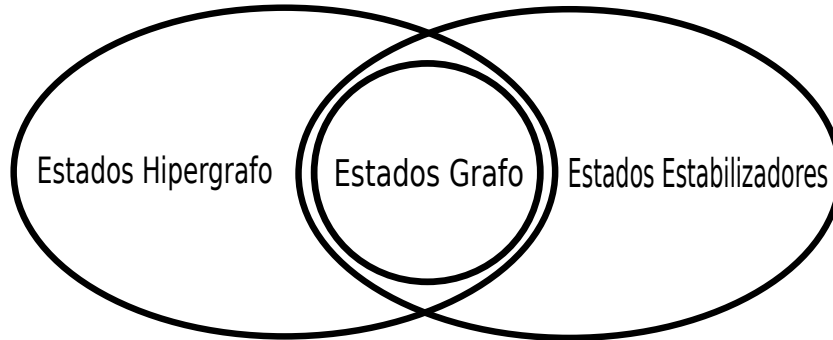
ou seja, estados hipergrafo não apenas são autoestados de cada estabilizante h_i , mas também das combinações possíveis desses operadores. Tendo isso em mãos, é possível expressar a base de estados hipergrafo na forma:

$$|H\rangle\langle H| = \frac{1}{2^N} \sum_{x \in Z_2^N} S_x = \frac{1}{2} \prod_{i=1}^N (h_i + \mathbf{1}). \quad (2.67)$$

Como veremos adiante, tais informações poderão ser úteis na descrição de desigualdades de Bell mediante o formalismo estabilizador de estados hipergrafo.

As relações entre estado hipergrafo, estados grafos e estados estabilizadores está representada na figura (15) é manifestada na seguinte ordem: A classe de estado hipergrafo inclui a classe de estados grafos, enquanto estes constituem uma subclasse dos estados estabilizadores, a saber, a classe de estabilizadores de ação puramente local. Todo estado hipergrafo gerado a partir de um hipergrafo cujo o grau seja maior do que 2 (equivalente a um grafo usual) deixa de ser um estado estabilizador (207).

Figura 15 – As relações entre estado hipergrafo, estados grafos e estados estabilizadores. Estados grafos constituem uma subclasse dos estado hipergrafo e estados estabilizadores. Isso significa que a classe de estados estabilizadores é maior do que a classe de estados grafo, pois estados grafo não incluem estabilizadores não-locais, como os estados hipergrafo são capazes. Por outro lado, a classe de estados estabilizadores não necessariamente coincide com estados hipergrafo.



Fonte: O autor.

2.24 Equivalência Local de Pauli para Estados Hipergrafo

Assim como procedemos para estados grafo, para sua generalização em hipergrafo também é proveitoso explanar a equivalência local. Para um estado hipergrafo de três vértices e uma hiperaresta há apenas uma classe de equivalência local unitária (4). Partindo da eq. (2.62), escrevemos a regra de equivalência como:

$$X_i \bigotimes_{e_j \in A(i)} C_{e_j} |H\rangle = |H\rangle, \quad (2.68)$$

isto é,

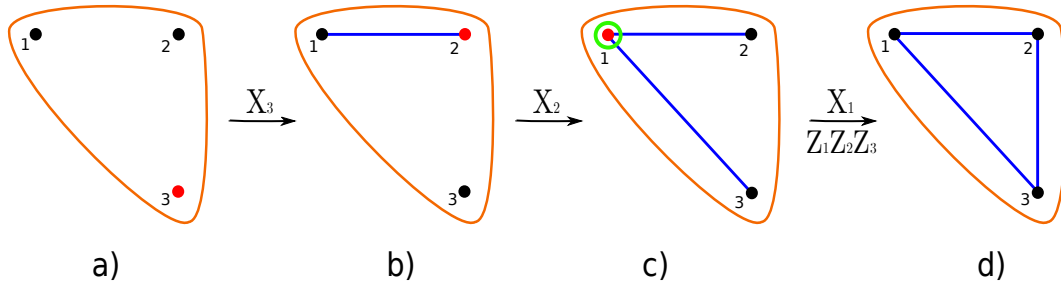
$$X_i |H\rangle = \bigotimes_{e_j \in A(i)} C_{e_j} |H\rangle, \quad (2.69)$$

de maneira tal que o operador de Pauli X_i atuando sobre o i -ésimo qubit adiciona todas as arestas no entorno da adjacência de i . A porta de Pauli Z é trivial uma vez que apenas aplica uma porta local C_i sobre o qubit alvo. Para o caso de três qubits, há duas classes de estado hipergrafo não-equivalentes por LU : o estado grafo triangular da Figura (6), representando o estado GHZ de três vértices, e o estado hipergrafo da Figura (12 a). Para quatro qubits, todavia, há um total de vinte e nove classes de estados hipergrafo não-equivalentes por LU , sendo duas destas classes estados grafo (4). Um exemplo prático da aplicação das regras de equivalência local unitária é mostrado na figura (16).

2.25 Correlações locais do formalismo do grupo estabilizador não-local

De acordo com o brilhante procedimento criado em (170), é possível construir argumentos de não-localidade baseados nos estabilizantes do estados hipergrafo, os quais, apesar de serem não-locais, indicam correlações perfeitas para algumas medidas locais. Por exemplo, para o

Figura 16 – Exemplo de equivalência local-unitária no estado hipergrafo de três vértices: (a) mediante aplicação de uma Pauli X sobre o vértice 3, cuja adjacência é $A(3)=\{1,2\}$, conectando os vértices 1 e 2 por uma aresta, (b) seguido pela aplicação de uma porta X sobre o vértice 2, cuja adjacência é $A(2)=\{\{1\},\{1,3\}\}$, de modo que uma aresta é gerada sobre o vértice 1 apenas e outra aresta ligando os vértices 1 e 3. (c) Uma aplicação de X sobre o vértice 1 e sucessivas aplicações da Pauli Z sobre os vértices 1, 2 e 3 gera o grafo triangular em (d) cercado por uma hiperaresta.



Fonte: O autor.

estado hipergrafo $|H_3\rangle$, os operadores do formalismo estabilizador são:

$$h_1 = X_1 \otimes C_{23} \quad (2.70a)$$

$$h_2 = X_2 \otimes C_{13} \quad (2.70b)$$

$$h_3 = X_3 \otimes C_{12}, \quad (2.70c)$$

ou, mais explicitamente, h_1 é escrito como:

$$h_1 = X_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

Uma vez que estados hipergrafo são permutavelmente simétricos, basta calcular as correlações de apenas um dos geradores do grupo estabilizador. Note que os elementos da diagonal do operador C_{23} podem ser considerados as projeções de quatro subespaços que correspondem a quatro resultados de medidas se efetuarmos medidas de Pauli Z sobre os qubits 2 e 3, a saber: $|00\rangle\langle 00|$, $|01\rangle\langle 01|$, $|10\rangle\langle 10|$, $-|11\rangle\langle 11|$, respectivamente.

Logo, se a ação do primeiro operador sobre o estado na base de Pauli X gerar o resultado $+$,

$$h_1 |H_3\rangle = + |H_3\rangle, \quad (2.72)$$

então as segundas e terceiras operações subsequentes não podem obter ambos resultados de saída 1 e 1 , uma vez que isso resultaria numa projeção com sinal negativo, violando a equação (2.72). Em termos de probabilidades, podemos condensar o raciocínio acima da seguinte forma:

$$P(+ - - |XZZ) = 0, \quad (2.73)$$

e de forma análoga para quando a primeira partição medir em X e obtiver o resultado $-$, as únicas possibilidades admissíveis para as partições medindo na base em Z são as projeções

$-|11\rangle\langle 11|$. Logo, para o estado $|H_3\rangle$ a probabilidade $P(- - -|XZZ) = 1$, e portanto é um resultado possível. Além de (2.73), outras três probabilidades violam a equação (2.72) e portanto não podem ocorrer:

$$P(- + +|XZZ) + P(- - +|XZZ) + P(- + -|XZZ) = 0, \quad (2.74)$$

completando assim as probabilidades proibidas para o primeiro operador, h_1 .

E, uma vez que o estado $|H_3\rangle$ é simétrico, podemos obter diretamente as demais relações de probabilidades proibidas para h_2 e h_3 , conforme demonstradas em (1):

$$P(- + +|XZZ) + P(- - +|ZZX) = 0 \quad (2.75)$$

$$P(+ - +|ZXZ) + P(- - +|ZXZ) + P(+ - -|ZXZ) = 0 \quad (2.76)$$

$$P(+ + -|ZZX) + P(- + -|ZZX) + P(+ - -|ZZX) = 0, \quad (2.77)$$

totalizando doze correlações perfeitas para o estado hipergrafo de três qubits. Semelhante procedimento pode ser diretamente generalizado para um estado hipergrafo de N -qubits com uma N -hiperaresta de cardinalidade única.

2.26 Complementação local em estados hipergrafo

Baseado no trabalho encontrado em (227), mostramos a generalização da complementação local para hipergrafos. Definamos primeiramente o conjunto dos pares de adjacência em relação a um dado vértice a como:

$$A_2(a) = \{\{e_1, e_2\} | e_1 \neq e_2, \quad e_1, e_2 \in A(a)\}, \quad (2.78)$$

diferenciando-o dos demais pares de adjacência. A complementação local em relação ao vértice a complementa as arestas no multiconjunto $P = \{e_1 \cup e_2 | \{e_1, e_2\} \in A_2(a)\}$. Aqui, cabe ressaltar que por complementação queremos dizer que as hiperarestas são deletadas do hipergrafo, caso já estejam presentes, ou adicionadas ao mesmo, caso ausentes estivessem.

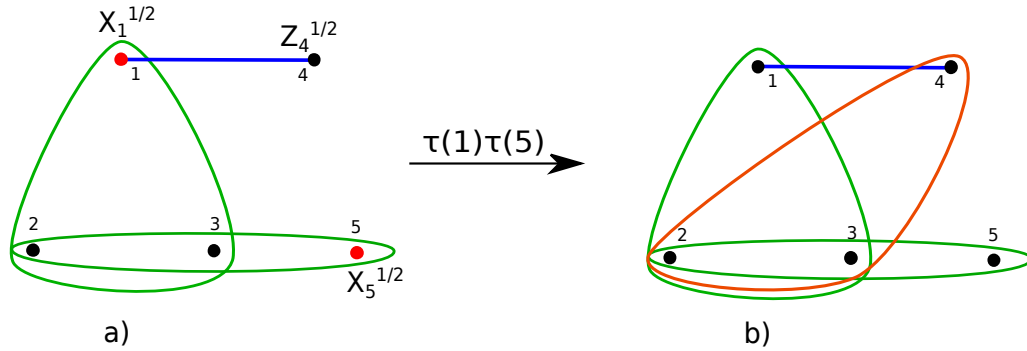
Então, a complementação local é implementada sobre algum vértice $a \in V$ de um hipergrafo $H = (V, E)$ mediante a raiz quadrada dos operadores estabilizantes h_a :

$$\tau(a) = \sqrt{X_a} \bigotimes_{e \in A(a)} \sqrt{C_e}, \quad (2.79)$$

onde $\sqrt{C_e} = \mathbf{1} - (1 - (\pm i)) |11\dots 1\rangle\langle 11\dots 1|$ é o operador diagonal que atua sobre vértices pertencentes aquela aresta de $|e|$.

Portanto, para qualquer estado hipergrafo associado a um hipergrafo $H = (V, E)$, a transformação $\tau(a)$ sobre o vértice $a \in V$ opera uma complementação local entre os pares de hiperarestas no mesmo hipergrafo.

Figura 17 – Exemplo de equivalência local de dois estados hipergrafo de cinco qubits: (a) Aplicam-se dois operadores locais de Clifford \sqrt{X} e \sqrt{Z} responsáveis pela complementação local sobre os vértices 1 e 5. (b) A hiperaresta $\{2,3,4\}$ é obtida como resultado da complementação local sobre o primeiro vértice. Tal exemplo mostra que para estados hipergrafo de 5 qubits operadores de Pauli locais não são suficientes para classificar as equivalências locais unitárias, devido à presença de hiperarestas que formam multiconjuntos. Fonte: o autor, adaptado a partir de (1)



2.27 Estados hipergrafo com d níveis

Uma possível generalização dos estados hipergrafo é mediante os qudits²⁹, cujos vértices representam estados quânticos com d níveis. Tais estados podem ser definidos em termos de multi-hipergrafos³⁰, uma vez que estes possuem uma correspondência biunívoca com estados hipergrafo qudits (228, 229).

O grupo de Pauli d -dimensional que estabiliza um estado hipergrafo para qudits na base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |d-1\rangle\}$ pode ser definido pelos operadores X e Z nas formas (230)

$$X = \sum_{q=0}^{d-1} |q \oplus 1\rangle \langle q| \quad (2.80)$$

e

$$Z = \sum_{q=0}^{d-1} \omega^q |q\rangle \langle q| \quad (2.81)$$

que satisfazem as propriedades $X^d = Z^d = \mathbf{1}$, onde $\omega \equiv e^{i2\pi/d}$. Assim, podemos definir a porta CZ_j generalizada d níveis como:

$$CZ_I = \sum_{q_{i_1}=0}^{d-1} \dots \sum_{q_{i_r}=0}^{d-1} \omega^{q_{i_1} \dots q_{i_r}} |q_{i_1} \dots q_{i_r}\rangle \langle q_{i_1} \dots q_{i_r}| \quad (2.82)$$

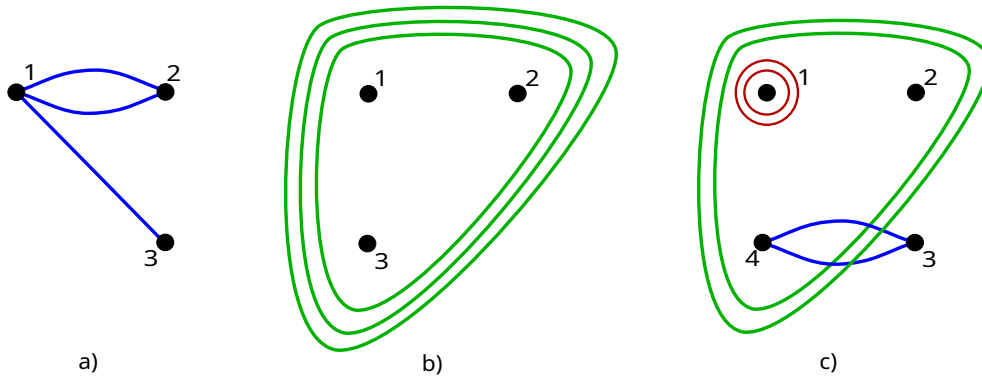
o que mostra que estados hipergrafo qudit são equivalentes a estados multi-hipergrafo, pois um qudit seria equivalente a uma aplicação sucessiva de portas emaranhadoras. Alguns exemplos de estados hipergrafo qudit são mostrados na figura (18).

Estudos em estados grafo qudits incluindo aplicações podem ser encontrados em (231, 232).

²⁹ Do inglês "quantum dit", generalizando o "quantum bit" para quaisquer d níveis possíveis.

³⁰ Um multi-hipergrafo é uma generalização de um multi-grafo que permite múltiplas hiperarestas sobre os mesmos vértices, conectando um número arbitrário de vértices. Ele amplia o conceito de multi-grafos e hipergrafos ordinários, relacionando um mesmo número de vértices N vezes possíveis.

Figura 18 – Exemplos de estados multi-hipergrafos equivalentes a estado hipergrafo qudits. a) estado grafo qudit, b) estado hipergrafo com três hiperarestas, c) um multi-hipergrafo não-uniforme.



2.28 Informação Quântica em Variáveis Contínuas

Nesta seção, definimos os conceitos basilares de informação quântica em variáveis contínuas, com dois intuitos principais: familiarizar o leitor com as duas abordagens usuais na Teoria da Informação Quântica e prepará-lo para um entendimento adequado do apêndice A, onde apresentamos um breve resultado envolvendo bilocalidade gaussiana.

Contrariamente ao sistema em variáveis discretas, um sistema quântico é descrito em variáveis contínuas através de um espaço de Hilbert de dimensão infinita sobre o qual definimos N observáveis bosônicos com espectro de autovalores contínuos (66). Se comparados aos estados em variáveis discretas, estados gaussianos são fáceis de se manipular experimentalmente (233, 234).

Tal representação gerará N modos bosônicos associados ao produto tensorial $H^{\otimes N} = \bigotimes_{k=1}^N H_k$ que correspondem a N pares de operadores bosônicos N modos de radiação do campo eletromagnético. Semelhante procedimento pode ser simplificado se considerarmos os modos como N osciladores harmônicos.

Tais operadores podem ser arranjados como vetores na forma $\hat{b} := (\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger, \dots, \hat{a}_N, \hat{a}_N^\dagger)$, os quais devem satisfazer as relações de comutação canônica:

$$[\hat{b}_i, \hat{b}_j] = \Omega_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 2N) \quad (2.83)$$

onde \hat{b}_i, \hat{b}_j são os operadores bosônicos e Ω_{ij} representa os elementos da seguinte matriz $2N \times 2N$:

$$\Omega := \bigoplus_{k=1}^N \omega = \begin{pmatrix} \omega & & \\ & \dots & \\ & & \omega \end{pmatrix}, \quad \omega := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

conhecida como forma simplética³¹. O espaço de Hilbert descrito nessa forma é separável e de dimensão infinita gerado pela base de Fock $\{|n\rangle\}_{n=0}^\infty$, composta pelos autoestados do operador

³¹ Do grego *συμπλεκτικός*, “complexo”, termo cunhado por Hermann Weyl como uma substituição para um nome prévio utilizado a fim de evitar confusão entre termos do grupo linear complexo com o grupo linear Abelian (235).

número $\hat{n} := \hat{a}^\dagger \hat{a}$, tais que $\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle$ e satisfazem as seguintes relações de comutação bosônica:

$$\hat{a} |0\rangle = 0, \quad \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad \forall \quad n \geq 1, \quad (2.85)$$

em que \hat{a} é o operador de aniquilação de fótons, e o operador de criação \hat{a}^\dagger agindo sobre o estado de número é dado por:

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad n \geq 0. \quad (2.86)$$

Um sistema bosônico também pode ser descrito por operadores de quadratura do campo eletromagnético $\{\hat{q}_k, \hat{p}_k\}_{k=1}^N$ que podem ser descritos por um vetor de operadores do tipo:

$$\hat{\mathbf{x}} := (\hat{q}_1, \hat{p}_1, \dots, \hat{q}_N, \hat{p}_N), \quad (2.87)$$

cujas decomposições em termos dos operadores de criação e aniquilação são:

$$\hat{q}_k := \hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger, \quad \hat{p}_k := i(\hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k). \quad (2.88)$$

Os operadores de quadratura do campo eletromagnético permitem escrevê-lo na forma:

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^m (\hat{x}_j + i\hat{p}_j) u_j(\mathbf{r}, t), \quad (2.89)$$

em que \mathbf{r} faz referência ao espaço e t ao tempo. Dessa forma, tais operadores satisfazem as relações de comutação canônica (com $\hbar = 1$):

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 2i\omega_{ij}, \quad (2.90)$$

que pode ser derivado das relações de comutação bosônica (2.83). Cabe ressaltar que ambos os operadores de quadratura do campo eletromagnético, posição (\hat{q}) e *momentum* (\hat{p}) são observáveis com espectro contínuo de autovalores e que satisfazem a relação:

$$\hat{q} |q\rangle = q |q\rangle, \quad \hat{p} |p\rangle = p |p\rangle \quad (2.91)$$

cujas bases de autovetores estão relacionadas por uma transformada de Fourier do tipo:

$$|q\rangle = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int e^{-iqp/2} |p\rangle dp, \quad |p\rangle = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int e^{iqp/2} |q\rangle dq, \quad (2.92)$$

de modo que para um espaço de Hilbert de N -modos podemos escrever a equação de autovalores como:

$$\hat{\mathbf{x}}^T |\mathbf{x}\rangle = \mathbf{x}^T |\mathbf{x}\rangle, \quad (2.93)$$

tal que $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^{2N}$ e $|\mathbf{x}\rangle := (|x_1\rangle, \dots, |x_{2N}\rangle)^T$, cuja família de autovalores da quadratura forma um sistema de variáveis contínuas capaz de descrever todo um sistema bosônico que deve ser transcrito para uma representação em um espaço de fase, como veremos.

³² De forma mais precisa, $|q\rangle$ e $|p\rangle$ são autoestados “impróprios”, uma vez que não são normalizáveis e seus domínios ultrapassam o espaço de hilbert em questão. Para uma discussão sobre os fundamentos desta questão, o leitor pode conferir em (236)

Assim, qualquer operador densidade ρ de n -modos pode ser definido sobre um espaço de fase de dimensão $2n$. Primeiramente, a função característica de tal operador pode ser escrita como:

$$\chi(\xi) = \text{Tr}[\hat{\rho}\mathcal{D}(\xi)], \quad (2.94)$$

onde $\mathcal{D}(\xi) = \exp\{i\hat{\mathbf{x}}^T\Omega\xi\}$ é um operador de Weyl que define a operação dada sobre o estado, para $\xi \in \mathcal{R}^{2N}$. A transposição para uma função de Wigner³³ pode ser obtida mediante uma transformada de Fourier, levando a:

$$W(x) = \int_{\mathcal{R}^{2N}} \frac{1}{(2\pi)^{2N}} \exp\{-i\hat{\mathbf{x}}^T\Omega\xi\} \chi(\xi) d^{2N}\xi, \quad (2.95)$$

onde as variáveis contínuas $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^{2N}$ são os autovalores dos operadores de quadratura $\hat{\mathbf{x}}$. Tais variáveis geram um espaço simplético real que é denominado espaço de fase. As propriedades mais destacadas da função de Wigner são, respectivamente, o primeiro momento do estado quântico:

$$\bar{\mathbf{x}} := \langle \hat{\mathbf{x}} \rangle = \text{Tr}(\hat{\mathbf{x}}\hat{\rho}), \quad (2.96)$$

que é simplesmente o valor médio da variável, e o segundo momento, a saber, a matriz de covariância \mathbf{V} , cujos elementos são dados pelo valor médio do anti-comutador de $\Delta\hat{x}_i$:

$$V_{ij} := \frac{1}{2} \langle \{\Delta\hat{x}_i, \Delta\hat{x}_j\} \rangle, \quad (2.97)$$

onde $\Delta\hat{x}_i := \hat{x}_i - \langle \hat{x}_i \rangle$. Estados gaussianos são estados bosônicos que podem ser descritos de forma completa pela caracterização dos dois primeiros *momenta*, principalmente a matriz de covariância, ou seja, $\hat{\rho} = \hat{\rho}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{V})$. Um estado gaussiano é definido como o estado cuja função característica é gaussiana (237):

$$W(x) = \frac{1}{(2\pi)^N \sqrt{\det V}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\right\}. \quad (2.98)$$

Um estado puro é gaussiano se e somente se a sua função de Wigner é não-negativa (238, 239). Assim sendo, a decomposição de um estado gaussiano em um estado térmico é definida pelo estado que maximiza a entropia de Von Neumann:

$$S := -\text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}), \quad (2.99)$$

para uma energia fixa $\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}) = \bar{n}$, para $\bar{n} \geq 0$ sendo a média do número de fótons no modo bosônico. A seguir, veremos brevemente as operações gaussianas unitárias e como podemos implementá-las sobre estados gaussianos.

2.29 Operações Gaussianas

Operações quânticas são denominadas gaussianas na medida em que transformam estados gaussianos em outros estados gaussianos, produzindo um conjunto convexo. Ou seja, uma

³³ Ou, rigorosamente falando, uma distribuição de quasi-probabilidade.

operação quântica é um mapa linear $\varepsilon : \hat{\rho} \rightarrow \varepsilon(\hat{\rho})$ que deve satisfazer a condição $0 \leq \text{Tr}[\varepsilon(\hat{\rho})] \leq 1$. Tal operação quântica é denominada canal quântico quando esta preserva a unitariedade do traço, i.e., $\text{Tr}[\varepsilon(\hat{\rho})] = 1$.

Os canais quânticos mais simples são aqueles que apresentam reversibilidade, sendo representados por transformações unitárias $U^{-1} = U^\dagger$, transformando um estado de acordo com a regra $\hat{\rho} \rightarrow U\hat{\rho}U^\dagger$, ou simplesmente $|\phi\rangle \rightarrow U|\phi\rangle$, para estados puros (240).

2.30 Operador Deslocamento

A primeira operação unitária gaussiana geralmente utilizada é o deslocamento, definida como:

$$D(\alpha) := \exp\{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\}, \quad (2.100)$$

em que $\alpha = (q + ip)/2$ é uma amplitude complexa. Na representação de Heisenberg, o operador de aniquilação é modificado por uma transformação unitária de Bogoliubov do tipo $\hat{a} \rightarrow \hat{a} + \alpha$, e os operadores de quadratura $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}})^\text{T}$ pela translação $\hat{\mathbf{x}} \rightarrow \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{d}_\alpha$, onde o vetor deslocamento é dado por $\mathbf{d}_\alpha \in \mathbb{R}^{2N}$.

A operação de deslocamento sobre estados de vácuo geram estados coerentes do tipo $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$, que possuem a mesma matriz de covariância do estado de vácuo, ($\mathbf{V} = \mathbf{I}$). Estados coerentes são autoestados do operador de aniquilação $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ e podem ser expandidos na base dos estados de número como:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (2.101)$$

que não satisfazem a condição de ortogonalidade, de maneira que, dados dois estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$,

$$|\langle\beta|\alpha\rangle|^2 = \exp\{-|\beta - \alpha|^2\}. \quad (2.102)$$

2.31 Operador de *Squeezing* ou Compressão

O operador de *squeezing* ou compressão é capaz de comprimir um modo do campo eletromagnético e é definido como:

$$S(r) := \exp\left\{\frac{r}{2}(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})\right\}, \quad (2.103)$$

onde $r \in \mathcal{R}$ é um parâmetro de *squeezing*. Na representação de Heisenberg, o operador de aniquilação é modificado por uma transformação unitária de Bogoliubov do tipo $\hat{a} \rightarrow (\cosh r)\hat{a} - (\sinh r)\hat{a}^\dagger$, e os operadores de quadratura $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}})^\text{T}$ pelo mapa simplético gerado pela matriz $\mathbf{S}(r)$ tal que $\hat{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{S}(r)\hat{\mathbf{x}}$:

$$\mathbf{S}(r) := \begin{pmatrix} e^{-r} & 0 \\ 0 & e^r \end{pmatrix}. \quad (2.104)$$

A aplicação do operador de *squeezing* sobre o estado de vácuo $|0\rangle$ leva a um estado de vácuo comprimido (241):

$$|0, r\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{2^n n!} \tanh r^n |2n\rangle, \quad (2.105)$$

cuja matriz de covariância é dada por $\mathbf{V} = \mathbf{S}(r)\mathbf{S}(r)^T = \mathbf{S}(2r)$ (242).

2.32 Rotação de Fase

Em um sistema de variáveis contínuas, a fase é geralmente definida em termos de um oscilador local representando um feixe clássico modulado. Uma rotação de fase pode ser feita aumentando-se o caminho do feixe óptico comparado ao oscilador. O operador de rotação de fase pode ser gerado por um Hamiltoniano do tipo $\hat{H} = 2\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}$ e é definido como $\mathbf{R}(\theta) = \exp(-i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a})$ (243).

Na representação de Heisenberg, o operador de aniquilação é modificado por uma transformação unitária de Bogoliubov do tipo $\hat{a} \rightarrow e^{i\theta}\hat{a}$ para o operador de aniquilação. As quadraturas do campo são transformadas via um mapa simplético $\hat{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{R}(\theta)\hat{\mathbf{x}}$, tal que a rotação com ângulo θ é escrita como:

$$\mathbf{R}(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (2.106)$$

O caso especial em que $\theta = \pi/2$ corresponde à porta de Fourier, dada por:

$$F = R(\pi/2) = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}\right), \quad (2.107)$$

e que transforma as quadraturas do campo eletromagnético pela relação:

$$F^\dagger\hat{x}F = -\hat{p}, \quad F^\dagger\hat{p}F = \hat{x}. \quad (2.108)$$

2.33 Beam Splitter

A transformação do tipo *beam splitter* ou divisor de feixes é uma das mais importantes transformações unitárias gaussianas quando se trabalham com no mínimo dois modos e é a implementação mais simples de um interferômetro (244). Tal transformação é definida para 2 modos matematicamente como:

$$B(\theta) = \exp\left\{\theta(\hat{a}^\dagger\hat{b} - \hat{a}\hat{b}^\dagger)\right\}, \quad (2.109)$$

onde \hat{a} e \hat{b} são os operadores de aniquilação para cada um dos dois modos, enquanto θ determina a transmissibilidade do beam splitter tal que $\tau = \cos^2\theta \in [0, 1]$. Se $\tau = \frac{1}{2}$, o beam splitter é dito balanceado, uma vez que nesse caso não há distinção entre o primeiro e o segundo modo bosônico. Posteriormente, veremos a classe de estados grafo enquanto estados gaussianos e possíveis implementações de unitárias gaussianas sobre esta classe.

2.34 Estados Grafo Gaussianos

Embora estados grafo tenham sido inicialmente propostos no cenário da informação quântica discreta (56), sua transposição para variáveis contínuas permite que os descrevamos em espaços infinitos que trazem diversos recursos.

Dentre as vantagens em se operar estados grafo gaussianos, destacam-se a resiliência à decoerência e a capacidade em gerar deterministicamente redes maiores de estados emaranhados, proporcionando o cenário ideal para a manipulação de emaranhamento e implementação em MBQC pela geração de estados *cluster* gaussianos (245, 246, 247, 248). Embora a transposição de estados grafo para variáveis contínuas seja um tópico bastante recente, importantes aplicações em metrologia quântica e redes complexas já foram realizadas com sucesso, abrindo margem para novos trabalhos (249, 250, 249). Uma proposta interessante para quantificar a coerência em estados gaussianos é feita em (251), cuja possibilidade de se aplicar aos estados grafo gaussianos parece perfeitamente factível.

O modo quântico (qumode) é o análogo da computação quântica em variáveis contínuas para o bit quântico (qubit) das variáveis discretas. Como já fora mencionado, em variáveis contínuas geralmente definimos espaços de Hilbert de dimensão infinita gerados por estados ortogonais $|s\rangle_q$, para cada $s \in \mathcal{R}$ que satisfaçam a condição de ortogonalidade $\langle r|_q |s\rangle_q = \delta(r - s)$ e que estão relacionadas por uma transformada de Fourier como a mostrada na equação (2.92) (2). Qumodes são úteis em protocolos quânticos como meios para codificar qubits para correção quântica de erros via códigos GKP³⁴ (252), produzir estados coerentes para computação quântica (253), ou mesmo na aplicação direta de computação quântica gaussiana.

Para um único qumode, todas as operações gaussianas definidas anteriormente são universais se juntas com qualquer interação não-gaussiana, como uma porta de fase cúbica (254, 255). O formalismo estabilizador pode ser utilizado para descrever estados grafo em variáveis contínuas. Nesse panorama, dizemos que um estado $|0\rangle_p$ é estabilizado por um operador $X(s)$, onde X faz ainda referência ao operador posição. Logo, para todo parâmetro s o estado fundamental na base dos *momenta* é um autoestado de X , portanto com autovalor $+1$. Ademais, se K estabiliza o estado $|\phi\rangle$, UKU^\dagger também estabiliza $U|\phi\rangle$.

Na transposição para estados gaussianos, no lugar do estado da base de Hadamard $|+\rangle$ utilizamos o estado $|0\rangle_p$, medidas na base de Pauli em \hat{X} são substituídas por \hat{p} , enquanto \hat{Z} é substituído por \hat{q} e a porta emaranhadora C_Z torna-se $e^{iq_i q_j}$. Utilizando a expansão do tipo Baker–Campbell–Hausdorff, temos que:

$$e^{i\hat{q}_1 \hat{q}_2} \hat{p}_1 e^{-i\hat{q}_1 \hat{q}_2} = \hat{p}_1 - \hat{q}_2, \quad (2.110)$$

o que nos permite escrever os estabilizadores para um estado grafo em variáveis contínuas como:

$$\hat{K}_i(s) = \hat{X}_i \prod_{j \in N(i)} \hat{Z}_j(s), \quad (2.111)$$

³⁴ "Gottesman-Kitaev-Preskill", código proposto em 2001 por Daniel Gottesman, Alexei Kitaev e John Preskill como um meio de codificar um qubit em um oscilador.

para $i = 1, \dots, n$ e para todo $s \in \mathcal{R}$. Semelhantemente aos estabilizadores para estados em variáveis discretas, os índices subscritos indicam sobre quais *qumodes* os operadores atuam.

Por sua vez, o grupo estabilizador é definido por uma álgebra de Lie³⁵. Não obstante, o grupo de estabilizadores é definido uma álgebra de Lie que forma o espaço de operadores nulificadores H , e assim denominados pois satisfazem a condição:

$$\hat{H} |\phi\rangle = 0, \quad (2.112)$$

que é oposta dos estabilizadores. Todo operador H que satisfaz a condição acima é hermitiano e portanto observável. Um nulificador H_i atuante sobre o i -ésimo vértice, baseado nas equações (2.110) e (2.111), é definido formalmente como:

$$\hat{H}_i = \hat{p}_i - \sum_{j \in N(i)} \hat{q}_j, \quad (2.113)$$

para $i = 1, \dots, n$. Qualquer superposição linear $\hat{H} = \sum_i c_i \hat{H}_i$ satisfaz $H |\phi\rangle = 0$. Cabe ressaltar ainda que os nulificadores satisfazem a relação de comutação $[\hat{H}_i, \hat{H}_j] = 0$ para quaisquer (i, j) . Uma ilustração de um estado *cluster* gerado a partir de estados gaussianos é mostrada na figura (19), na qual cada vértice representa um *qumode*.

A função de Wigner $\mathcal{W}(q, p)$ de um estado grafo $|\phi\rangle$ com n *qumodes* pode ser escrita na forma seguinte (2):

$$\mathcal{W}(q, p) = \prod_{i=1}^n \varepsilon(q_i) \delta(H_i), \quad (2.114)$$

em que \hat{H}_i são os nulificadores, $\delta(x)$ é a distribuição de Dirac e $\varepsilon(x)$ é a distribuição uniforme infinita (2). No cenário situação ideal, estados grafo são altamente singulares, justificando o uso de δ e ε , que idealmente seriam limites da função gaussiana normalizada cuja a variância vai a zero no infinito. A função de Wigner para o estado grafo (a) da figura (19), por exemplo, seria $\varepsilon(q_1)\varepsilon(q_2)\varepsilon(q_3)\delta(p_1 - q_2)\delta(p_2 - q_1 - q_3)\delta(p_3 - q_2)$.

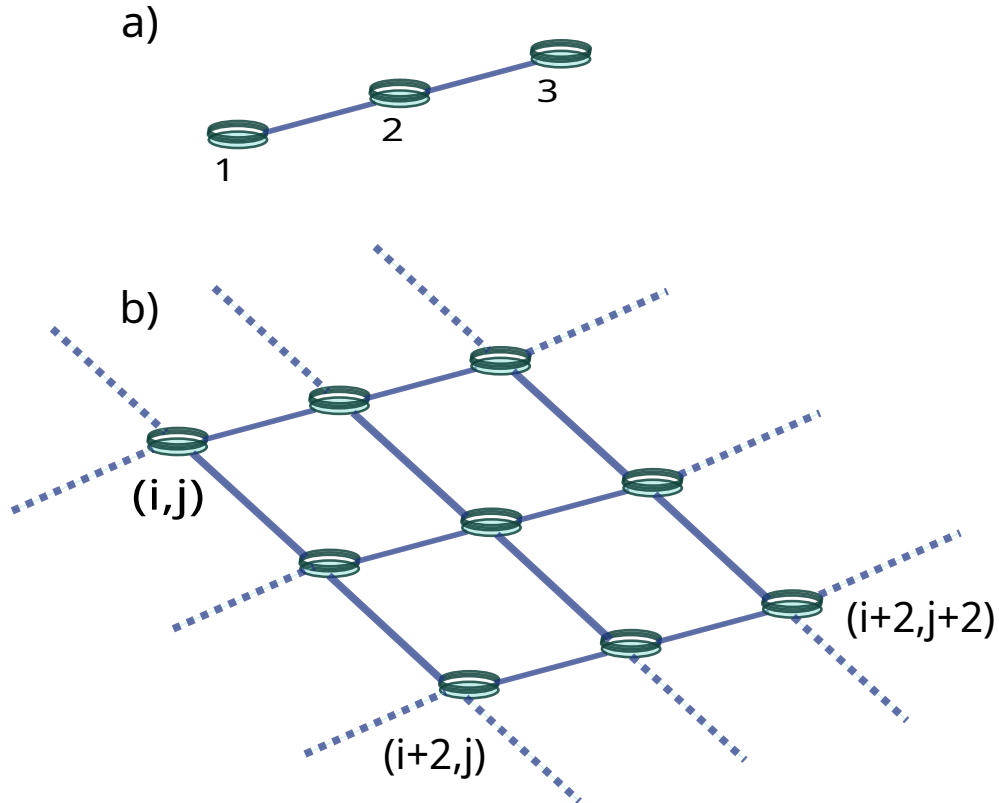
Não obstante, uma vez que estados grafo são estados gaussianos, estes podem ser descritos completamente mediante as suas matrizes de covariância. Assim, para construir um estado grafo de m -modos, partimos do conjunto independente de modos comprimidos cuja matriz de covariância conjunta³⁶ é dada por $V_0 = \text{diag}(s_1, \dots, s_m, s_1^{-1}, \dots, s_m^{-1})$ (247). Tal conjunto de modos a princípio não-correlacionados é associado a um estado grafo utilizando-se de portas CZ , que no contexto gaussiano passa a ser um operador do tipo $\exp\{i\hat{x}_j\hat{x}_k\}$. Em termos da matriz de covariância, podemos escrever:

$$V_0 \rightarrow V = G^T V_0 G \quad | \quad G = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathcal{A} \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (2.115)$$

³⁵ Uma álgebra de Lie é uma estrutura algébrica que atua sobre um corpo e, juntamente com uma operação binária comutadora, satisfaz os axiomas de bilinearidade, anti-comutatividade, alternatividade e da Identidade de Jacobi.

³⁶ Do inglês “join covariance matrix”, também traduzida por “matriz de covariância cruzada”, é a matriz cujo elemento na posição i, j é a covariância entre o i -ésimo elemento de um vetor qualquer \mathbf{X} e o j -ésimo elemento de um vetor qualquer \mathbf{Y} .

Figura 19 – Estados cluster (rede) bi-dimensionais gerados a partir de estados grafo gaussianos. Os operadores nulificadores fornecem uma descrição desse estado e formam um espaço nulificador. No primeiro caso a), três nulificadores atuam sobre os vértices 1, 2 e 3, respectivamente, $\hat{p}_1 - \hat{q}_2$, $\hat{p}_2 - \hat{q}_1 - \hat{q}_3$ e $\hat{p}_3 - \hat{q}_2$. O caso b) ilustra a rede infinita, cujos nulificadores são $H_{ij} = \hat{p}_{ij} - \hat{q}_{i-1,j} - \hat{q}_{i+1,j} - \hat{q}_{i,j-1} - \hat{q}_{i,j+1}$ para cada coordenada (i, j) . Fonte: O autor, inspirada em (2).



Fonte: O autor.

em que V é a matriz de covariância $2m$ -dimensional do estado grafo, descrito por um grafo de matriz de adjacência \mathcal{A} . Logo, nessa transposição para variáveis contínuas, a matriz de covariância V passa a descrever um conjunto de modos quânticos gaussianos emaranhados, que correspondem aos *qubits*. Nessa abordagem, o estado grafo passa a ser escrito como:

$$|\phi\rangle = \prod_{1 \leq i < j < N} \exp\{iV_{ij}q_i \otimes q_j\} |0\rangle_p^{\otimes N}, \quad (2.116)$$

onde V_{ij} é justamente a matriz de covariância que descreve o estado gaussiano. Para estados grafo gaussianos, como os estados *cluster*, sabemos que o vetor das coordenadas generalizadas (\hat{q}, \hat{p}) , aqui definido por $\hat{X} := \{\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_N; \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_N\}$, satisfaz a condição da média $\langle \hat{X} \rangle = 0$.

Todavia, uma vez que os estados grafo induzem estatísticas gaussianas nas medidas das quadraturas do campo eletromagnético, tais estatísticas podem ser simuladas de forma eficiente usando computação clássica, de modo que operações gaussianas sobre estados gaussianos não gera uma base universal para computação quântica (256, 257). Por este motivo, na terminologia da teoria de recursos diz-se que estados e operações gaussianas são estados e operações livres, respectivamente, enquanto os estados e operações não-gaussianas são considerados estados e

operações de recurso (258, 259).

Assim sendo, é possível introduzir operações não-gaussianas sobre os vértices ou modos de um estado grafo, a fim de induzir estatísticas não-gaussianas sobre os mesmos e estudar suas propriedades (260). Dentre estas operações, destacam-se a porta de fase cúbica e a adição ou subtração de fótons em modos gaussianos inicialmente comprimidos. A primeira é de difícil construção experimental, o que torna a segunda opção muitas vezes viável (261, 262, 263). Teoricamente, a adição ou subtração de fótons no sistema é feita mediante a ação dos operadores de criação e aniquilação. Tais operações podem ser implementadas usando a óptica não-linear (263, 264, 265).

No caso de estados grafo do tipo *cluster*, ao invés de operar portas C_Z sobre os multimodos dos estados de vácuo comprimidos $|0\rangle_p$ da rede inicial, também é possível implementá-los mediante transformações óticas lineares sobre estes mesmos estados (266, 267). Este procedimento é menos custoso do que a aplicação de portas C_Z sobre a rede, conforme implementações experimentais do sistema revelaram (268, 269, 270).

2.35 Medida geométrica de emaranhamento em variáveis contínuas

Conforme demonstrado recentemente na literatura (271), é possível definir a medida geométrica de emaranhamento para estados grafo em variáveis contínuas. Dado um sistema quântico de dois subsistemas, $\Psi = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)$ e cada subsistema no espaço configuracional com vetores $x_1 = (x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n)$ e $x_2 = (x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^m)$, considerando ambos normalizados, definimos a medida geométrica E como a distância mínima entre o estado emaranhado $|\psi\rangle$ e o conjunto de estados separáveis $|\psi\rangle_S$:

$$E = \min_{|\psi_s\rangle} (1 - |\langle\psi|\psi_s\rangle|^2) = 1 - \max_{|\psi_s\rangle} |\langle\psi|\psi_s\rangle|^2, \quad (2.117)$$

onde $1 - |\langle\psi|\psi_s\rangle|^2$ é denominada distância de Fubini-Study e o produto interno é dado por:

$$\langle\psi|\psi_s\rangle = \int \Psi^*(x_1, x_2)\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)dx_1dx_2. \quad (2.118)$$

É preciso encontrar o valor máximo do funcional³⁷ $F[\psi_1, \psi_2]$, com respeito a $\psi_1(x_1)$ e $\psi_2(x_2)$ levando em conta as condições de normalização, produzindo o par de equações,

$$\langle\psi|\psi_s\rangle \int \Psi(x_1, x_2)\psi_1^*(x_1)dx_1 = \lambda_2\psi_2(x_2) \quad (2.119a)$$

e

$$\langle\psi|\psi_s\rangle \int \Psi(x_1, x_2)\psi_2^*(x_2)dx_2 = \lambda_1\psi_1(x_1), \quad (2.119b)$$

e multiplicando a primeira equação por ψ_1^* , integrando em x_1 e realizando procedimento análogo para a segunda equação, teremos:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = |\langle\psi|\psi_s\rangle|^2 \quad (2.120)$$

³⁷ Um funcional é basicamente a função de uma função, ou mais especificamente, qualquer função cujo domínio é um espaço vetorial e a sua imagem é o corpo de escalares.

Então, isolando o termo $\psi_2(x_2)$ de (2.119b) e substituindo em (2.119a), obteremos:

$$\int \Psi(x_1 x_2) \Psi^*(x'_1, x_2) \psi_1(x'_1) dx_1 dx_2 = \lambda \psi_1(x_1), \quad (2.121)$$

que por sua vez pode ser reescrito como:

$$\int K(x_1, x'_1) \psi_1(x'_1) dx'_1 = \lambda \psi_1(x_1) \quad (2.122)$$

onde $K(x_1, x'_1)$ é justamente o propagador

$$K(x_1, x'_1) = \int \Psi(x_1, x_2) \Psi^*(x'_1, x_2) dx_2 \quad (2.123)$$

que corresponde à matriz densidade do primeiro subsistema. Desse modo, a equação (2.122) pode ser tratada como uma equação de autovalores, ou seja, $\lambda_{max} = |\langle \psi | \psi_s \rangle|_{max}^2$ e a medida geométrica de emaranhamento fica:

$$E = 1 - \lambda_{max}. \quad (2.124)$$

Dessa maneira, o cálculo da medida geométrica de emaranhamento reduz-se a encontrarmos o autovalor λ na equação (2.122).

2.36 Estados Hipergrafo Gaussianos

De forma semelhante a adotada para estados grafo, estados hipergrafo gaussianos podem ser escritos na forma de seus estabilizadores (3, 272)

$$g_i^{(2)}(s) = X_i(s) \bigotimes_{j \in \mathcal{N}(i)} Z_j(s) \quad (2.125)$$

que podem ser identificados como os operadores de posição $\hat{X} = e^{is\hat{p}}$ e momenta conjugados $\hat{Z} = e^{-is\hat{q}}$. A generalização para hipergrafos é escrita como:

$$g_i^{(k)}(s) = X_i(s) \bigotimes_{e_{k-1} \in \mathcal{N}(i)} CZ_{e_{k-1}} \quad (2.126)$$

de modo que se X é um estabilizador para um dado estado $|\psi\rangle$, UXU^\dagger é um estabilizador para $U|\psi\rangle$. À semelhança de (2), definimos os nulificadores³⁸ como elementos do espaço de operadores H tais que $H|G\rangle = 0$, no caso de um estado grafo simples:

$$H_i^{(2)} = p_i - \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} q_j \quad (2.127)$$

ou, para o caso de um estado hipergrafo

$$H_i^{(k)} = p_i - \sum_{e_{k-1} \in \mathcal{N}(i)} q_{i_1} \dots q_{i_{k-1}} \quad (2.128)$$

³⁸ Do original inglês "nullifier".

para estados hipergrafo. Como exemplo, considere um hipergrafo linear de quatro vértices com uma hiperaresta de cardinalidade 3 sobre os vértices 1, 2 e 3 e uma aresta usual entre os vértices 3 e 4. Esse estado hipergrafo em variáveis contínuas é dado por $e^{iq_1q_2q_3} e^{iq_3q_4} |0\rangle_p^{\otimes 4}$. Um dos estabilizadores desse hipergrafo seria $g_3(s) = e^{isp_3} e^{iq_1q_2} e^{iq_4}$, onde s é o parâmetro de *squeezing* do estado, e o nulificador correspondente seria $H_3 = p_3 - q_1q_2 - q_4$.

Como esperado, os nulificadores satisfazem as relações de comutação $[H_i^{(\leq n)}, H_j] = 0$, de maneira que qualquer H no espaço nulificador ($H|g_{\leq n}\rangle = 0$) pode ser descrito como uma combinação linear dos nulificadores $H = \sum_j c_j H_j^{\leq n}$. Sendo hermitiano, todo nulificador é um observável. Uma ilustração de um estado hipergrafo em variáveis contínuas é mostrada na figura (20). Deve-se notar que medidas gaussianas em hipergrafos têm o efeito de reduzir em um fator a ordem das hiperarestas conectadas ao vértice medido.

Uma possibilidade de implementação de um sistema dinâmico com estados em variáveis contínuas envolvendo decoerência é a conexão de estados hipergrafos com um reservatório térmico, sendo necessário, neste caso, um estado hipergrafo térmico. Tendo em mãos a álgebra do formalismo estabilizador visto anteriormente, definimos o operador hamiltoniano \mathbf{H} ,

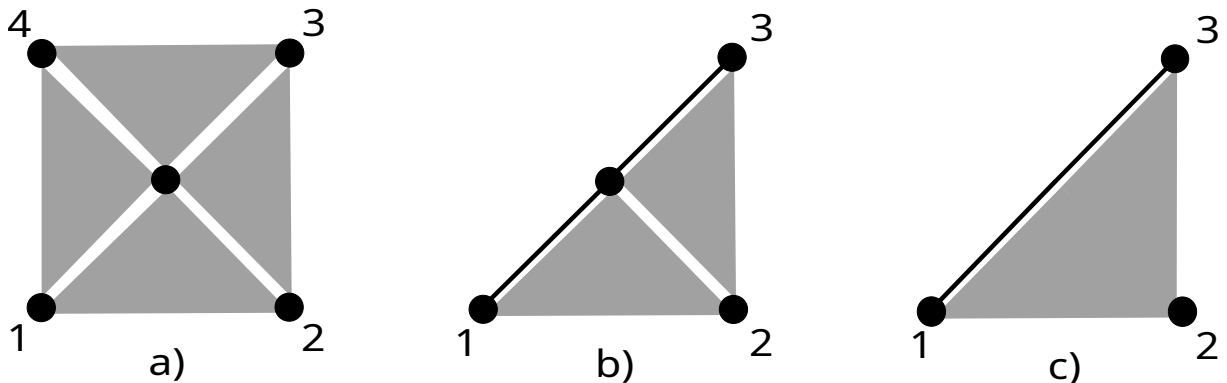
$$\mathbf{H} = - \sum_{i=1}^n g_i, \quad (2.129)$$

cujo o estado térmico é dado por

$$\rho_T \equiv \frac{e^{-\beta \mathbf{H}}}{Z}, \quad (2.130)$$

onde $Z \equiv \text{Tr}[e^{-\beta \mathbf{H}}]$ é a função de partição que descreve o estado térmico a dada temperatura T . Quando $T = 0$, temos simplesmente o estado puro $|H\rangle\langle H|$, onde H é o estado hipergrafo.

Figura 20 – Ilustração esquemática de um estado hipergrafo em variáveis contínuas, onde as hiperarestas 3-uniformes são mostradas como triângulos em cinza. a) Um estado hipergrafo 3-uniforme. b) O vértice 4 é medido na base q , originando um novo estado. c) Em seguida, o vértice central é medido na base p , gerando o estado (c). As linhas sólidas representam as portas CZ usuais. Fonte: O autor, baseado em (3).



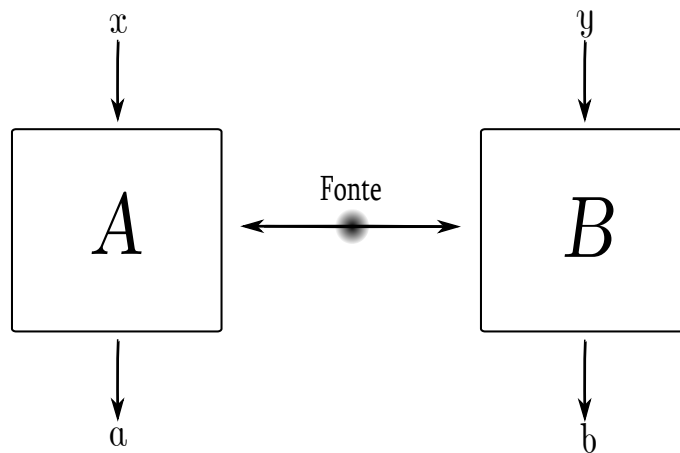
Fonte: O autor.

2.37 Teorema de Bell e a desigualdade CHSH

Uma das principais querelas envolvendo o emaranhamento quântico está diretamente relacionada às desigualdades do tipo Bell, com inúmeras aplicações para estados de dois ou mais qubits (273). Tal debate sobre a causa formal da não-localidade aprofundou as discussões em Teoria de Informação Quântica. A partir desta, novas formulações foram propostas na literatura, entre as quais a do tipo CHSH³⁹. Inicialmente, o raciocínio de Bell consistiu em aceitar a conclusão estabelecida por EPR⁴⁰ como uma premissa – a de que a descrição quântica da realidade física é incompleta – a fim de formalizar um modelo determinístico em termos de “variáveis locais e ocultas” ou “local hidden variable” (LHV)⁴¹.

Considere um experimento de correlação realizado em dois laboratórios representando dois subsistemas, Alice (A) e Bob (B), onde as variáveis (A_1, A_2) e (B_1, B_2) são medidas dicotômicas com valores ± 1 realizadas por Alice e Bob em seus respectivos laboratórios sobre um estado, conforme ilustrado na figura 21.

Figura 21 – Ilustração de um cenário de medições de Bell com duas partes, Alice e Bob. A fonte produz um par de de partículas emaranhadas (e.g., fótons) e envia uma partícula a Alice e outra a Bob. Cada um efetua medições x e y , respectivamente, obtendo como resultados a ou b , com $a \in \{+1, -1\}$.



Fonte: O autor.

O valor esperado $E(A_i, B_j)$ das correlações de possíveis medidas de Alice e Bob podem ser calculadas, então:

$$E(A_i, B_j) = p(++ | A_i B_j) - p(+ - | A_i B_j) - p(- + | A_i B_j) + p(-- | A_i B_j), \quad (2.131)$$

onde $p(++ | A_i B_j)$ representa a probabilidade conjunta entre Alice e Bob. Em um modelo do tipo LHV guiado por variáveis ocultas λ com valor bem definido, as probabilidades medidas por Alice

³⁹ Em homenagem a John Clauser, Michael Horne, Abner Shimony e Richard Holt (23).

⁴⁰ Paradoxo de Einstein, Podolski e Rosen, levantado pelos físicos no artigo seminal de 1935 questionando a completude da Mecânica Quântica (274).

⁴¹ O termo “oculto” não é precisamente adequado, uma vez que do ponto de vista epistemológico toda variável quântica é inacessível macroscopicamente (275).

não podem depender das escolhas feitas por Bob, ou vice-versa. Desse modo, as probabilidades conjuntas devem ser fatoráveis e poderão ser escritas em termos de funções-resposta Ω que atribuem valores objetivos às variáveis ocultas λ :

$$p(ab|A_i B_j) = \int \Omega^A(a|A_i, \lambda) \Omega^B(b|B_j, \lambda) p(\lambda) d\lambda, \quad (2.132)$$

em que cada variável oculta λ ocorre com probabilidade $p(\lambda)$ $a, b \in \{\pm 1\}$ fazem referência aos possíveis valores de medição. Em se tratando de um modelo LHV, assumimos valores 0 ou 1 às funções-resposta Ω para cada valor de λ . A partir desse fato, podemos escrever a desigualdade:

$$p(- - |A_1 B_1) + p(+ - |A_1 B_2) + p(- + |A_2 B_1) - p(- - |A_2 B_2) \geq 0, \quad (2.133)$$

E conforme demonstrado por CHSH, um modelo determinístico de partes A e B na forma de (2.133) pode ser escrito na forma final:

$$|E(A_1, B_1) + E(A_1, B_2) + E(A_2, B_1) - E(A_2, B_2)| \leq 2, \quad (2.134)$$

onde $E(A_i, B_j)$ é simplesmente o valor esperado da correlação para uma medida $A_i B_j$. Tais variáveis podem ser convertidas em operadores de modo a escrevermos um operador de Bell do tipo:

$$B_{CHSH} = \mathbf{A}_1 \otimes (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) + \mathbf{A}_2 \otimes (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2), \quad (2.135)$$

em que $\mathbf{A}(B)_1 = \mathbf{a}(\mathbf{b})_1 \cdot \sigma_i$ e $\mathbf{A}(B)_2 = \mathbf{a}(\mathbf{b})_2 \cdot \sigma_i$, com σ_i sendo o vetor das matrizes de Pauli $\sigma_{x,y,z}$ e $\mathbf{a}(\mathbf{b}) = \mathbf{a}_{x,y,z}(\mathbf{b}_{x,y,z})$ são os versores que referenciam as medidas de Alice (A) ou Bob (B). Para um modelo LHV, a desigualdade do tipo CHSH requer que a seguinte condição seja satisfeita:

$$|Tr(B_{CHSH}\rho)| \leq 2, \quad (2.136)$$

que deve ser satisfeita por qualquer estado ρ que obedeça um modelo LHV.

Mediante o formalismo quântico em que Alice e Bob atuam como operadores, o valor médio para $\langle B_{CHSH} \rangle_{MQ}$ será:

$$|\langle B_{CHSH} \rangle_{QM}| = |Tr(B_{CHSH}\rho)| \leq 2\sqrt{2}, \quad (2.137)$$

em que $2\sqrt{2}$ é conhecido como limite de Tsirelson, ou seja: dado que um estado quântico viole a desigualdade (2.136), não podendo ser descrito por uma teoria local de variáveis ocultas, o número de Tsirelson é o limite máximo em que um estado quântico poderia violar de maneira ótima a desigualdade do tipo Bell (desde que excluídas teorias que permitam comunicação mais rápida do que a luz). Tal violação será mais extrema quanto mais próxima ou igual a este limite, e os estados com extrema violação são mais desejáveis pois apresentam maior robustez de emaranhamento (170).

O modelo LHV (2.136) é claramente violado para certos estados, com violação máxima para estados de Bell do tipo $\rho = |\psi^-\rangle\langle\psi^-|$. Uma proposta de desigualdades de Bell a partir de estados grafo e robusta a self-testing⁴² pode ser encontrada em (276).

⁴² Em tradução livre "auto-teste", i.e., um método para inferir a física subjacente de um experimento quântico em um cenário de "caixa preta", no qual o observador não acessa o sistema diretamente.

2.38 Revisão: Informação quântica: discreta e contínua

Por fim, com um singelo intuito didático, apresentamos aqui uma breve revisão comparativa das principais diferenças entre variáveis contínuas e discretas, conforme descrito na tabela (1). Em alguns contextos como criptografia quântica, a Teoria da Informação concentra a maior parte das publicações em informação discreta, mediante qubits. Em outros aspectos como a fotônica, é necessária a utilização de informação quântica gaussiana (277, 278).

Os qumodes ou modos quânticos contínuos, por lidarem com variáveis contínuas como as amplitudes e fases da luz, tornam algumas abordagens particularmente úteis em aplicações como a computação quântica baseada em fótons (279, 280). Os qumodes também são amplamente usados em experimentos em comunicação quântica e detecção de sinais quânticos de alta precisão (281, 282). Enquanto os qubits têm sido foco de muitos avanços na computação e criptografia quântica, os qumodes desempenham um papel crucial em sistemas de processamento de informação quântica que lidam com quantidades contínuas de dados. Ambos os conceitos são partes essenciais do panorama da informação quântica.

Interessantemente, estado hipergrafo podem ser utilizados como recursos em ambos os panoramas, tanto como representações de qubits na base computacional quanto qumodes em informação quântica gaussiana, tornando-os representações versáteis em diversas aplicações e protocolos quânticos.

Conforme vimos, os operadores $\hat{\sigma}_i$ do grupo de Pauli são utilizados em variáveis discretas, enquanto para informação quântica contínua (frequentemente chamada de informação quântica gaussiana, ao serem usados principalmente estados e operações gaussianas) usam-se os operadores posição e *momentum* \hat{x}, \hat{p} . Enquanto em variáveis discretas usualmente estudam-se estados da base de Pauli, na sua contraparte gaussiana os principais estados manipulados são estados coerentes (283) e estados comprimidos (284). Estados coerentes desempenham um papel crucial na descrição da luz clássica em sistemas ópticos, essenciais para aplicações avançadas como processamento quântico de informação e comunicação quântica.

As portas quânticas do tipo Toffoli (T), Hadamard, CNOT e CZ estão entre as mais utilizadas em informação quântica discreta, ao passo que as operações de rotação (R), deslocamento (D), mudança de fase (S) e subtração de fótons mediante beam splitters (BS) estão entre as mais estudadas para informação gaussiana.

Uma das principais diferenças está relacionada com as medidas realizadas sobre cada tipo de sistema. Na informação quântica em variáveis discretas, as medidas na base de Pauli são frequentemente realizadas, por exemplo, em computação quântica baseada em medidas, conforme estudado anteriormente. Na informação quântica gaussiana, geralmente utilizam-se dois tipos de detecção, homódina e heteródina. A primeira consiste em extrair informação recebida na forma de modulação de fase ou frequência de um sinal oscilante mediante uma comparação entre o sinal com uma oscilação padrão que seria idêntico ao sinal se este não carregasse nenhuma informação consigo. A segunda maneira de detecção de informação, heteródina, implica no uso de duas frequências diferentes no processo de detecção (revelando o motivo do uso do termo

grego “heteros”, i.e., “diferente”, antônimo de “homos”, i.e., “mesmo”).

Tabela 1 – Revisão comparando as diferenças principais entre teoria de informação quântica em variáveis contínuas e discretas.

	Variáveis Contínuas	Variáveis Discretas
Elemento	Qumodes	Qubits
Operadores	$\{\hat{x}, \hat{p}\}; \{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\}$	$\{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\}$
Estados	Coerentes $ \alpha\rangle$; comprimidos $ z\rangle$; número $ n\rangle$	Autoestados do grupo de Pauli
Portas	$R_i(\phi), D_i(\alpha), S_i(z), BS_{i,j}$	Porta T, Hadamard, CNOT, CZ_N
Medidas	Homódina \hat{x}_ϕ ; heteródina $Q(\alpha)$	Medidas na base de Pauli.

Uma proposta bastante original em mesclar ambas as abordagens, trazendo uma informação quântica “híbrida” em discreta-contínua pode ser encontrada em (285, 281).

3 EMARANHAMENTO QUÂNTICO EM ESTADOS RANDOMIZADOS

3.1 Estados Hipergrafo Randomizados

Na presente seção, generalizamos o método anteriormente citado de estados grafo randomizados, inspirados na teoria matemática de grafos de Erdos-Rènyi (286), para estados hipergrafo randomizados (287). Utilizando um procedimento semelhante, enfatizamos que o hipergrafo possibilita um número maior de combinações possíveis, pois este pode conter vários sub-hipergrafos, incluindo sub-grafos¹. Nesta composição, ao invés de aplicar a porta controlada usual, definimos um operador de randomização R_p que introduz portas probabilísticas $\Phi_p^{\{1,2,\dots,N-qubit\}}$ ao estado livre $|+\rangle^{\otimes N}$, onde a porta emaranhadora C_e é aplicada com probabilidade p de sucesso ou $1 - p$ de falha. Por exemplo, para o hipergrafo mais simples, $|H_3\rangle$, com três qubits e uma hiperaresta, teremos:

$$\begin{aligned} R_p(|H_3\rangle) &= \Phi_p^{[1,2,3]}(|+++ \rangle |+++ \rangle) \\ &= p |H_3\rangle \langle H_3| + (1 - p) |+++ \rangle \langle +++|. \end{aligned} \quad (3.1)$$

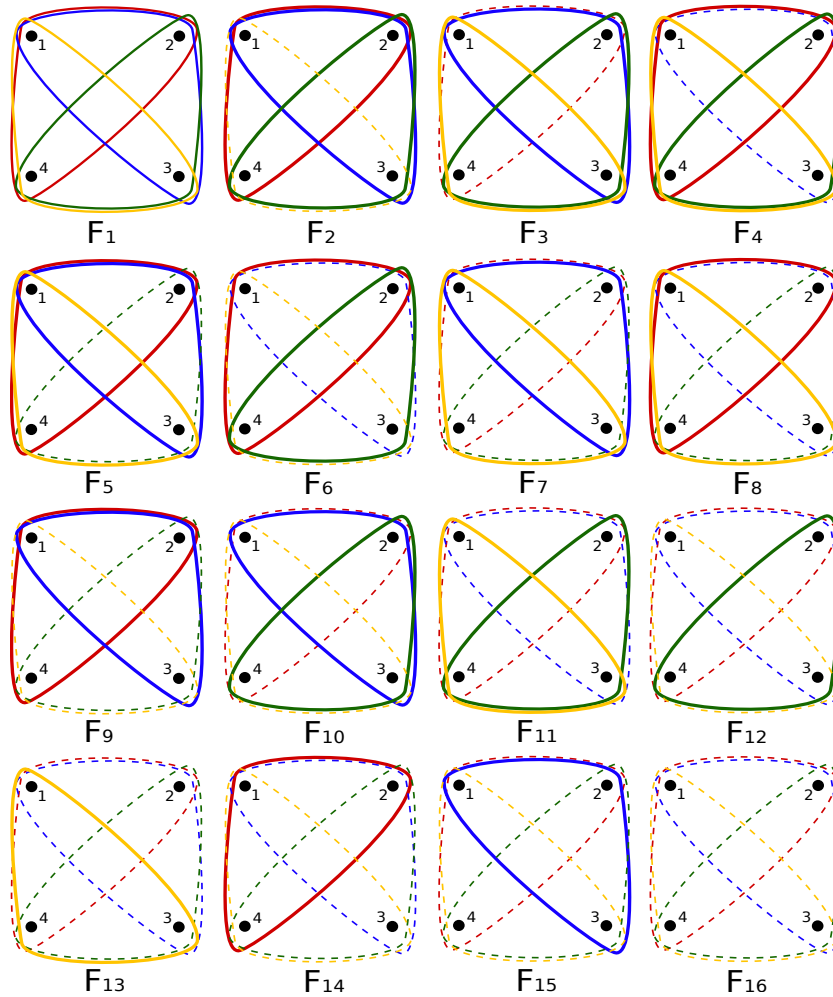
É natural perceber que tal operador simula o comportamento ruidoso do sistema, e como todas as portas Φ_p comutam, a ordem de aplicação dessas portas não precisa ser especificada. No entanto, devido à aplicação desse operador, temos estados mistos randomizados, ao contrário dos estados puros que os estados hipergrafo costumam representar. Nesta tese, esses estados mistos randomizados serão descritos como ρ_H^p , denotando o fator de probabilidade que caracteriza o mesmo. Um processo de randomização para um estado hipergrafo 3-uniforme de quatro qubits é mostrado a seguir, e sua ilustração é dada na Figura (22):

$$\begin{aligned} R_P(|H_{14}\rangle) &= \Phi_{p_3}^{\{1,2,3\}} \circ \Phi_{p_3}^{\{2,3,4\}} \\ &\quad \circ \Phi_{p_3}^{\{3,4,1\}} \circ \Phi_{p_3}^{\{4,1,2\}} (|++++ \rangle |++++ \rangle) \\ &= p_3^4 |F_1\rangle \langle F_1| + p_3^3 (1 - p_3) \sum_{k=2}^5 |F_k\rangle \langle F_k| \\ &\quad + p_3^2 (1 - p_3)^2 \sum_{k=6}^{11} |F_k\rangle \langle F_k| \\ &\quad + p_3 (1 - p_3)^3 \sum_{k=12}^{15} |F_k\rangle \langle F_k| \\ &\quad + (1 - p_3)^4 |F_{16}\rangle \langle F_{16}|, \end{aligned} \quad (3.2)$$

Isso deixa claro que um estado hipergrafo randomizado ρ_H^p que está associado a um hipergrafo é gerado pela aplicação do operador de randomização R_p no estado $|H\rangle$. Cabe agora apresentarmos uma definição mais precisa de um estado de hipergrafo randomizado.

¹ Em teoria de hipergrafos, um sub-hipergrafo de um hipergrafo H é outro hipergrafo formado a partir de um subconjunto de vértices e arestas de H .

Figura 22 – Processo de randomização do estado hipergrafo 3-uniforme de 4 qubits. As linhas tracejadas representam operações ruidosas, ao passo que linhas contínuas são aplicações bem-sucedidas da hiperaresta correspondente. No total, há 16 possíveis de combinações, desde o hipergrafo completo (F_{12}), com as 4 hiperarestas aplicadas com sucesso, até o estado livre, no caso em que as 4 hiperarestas falham (F_{16}). Os estados F_2 a F_{15} representam estados sub-hipergrafo intermediários, os quais englobam combinações de aplicações exitosas e ruidosas das hiperarestas.



Fonte: O autor.

Definição: Dado qualquer estado hipergrafo $|H\rangle$, seu operador de randomização é definido como:

$$R_p(|H\rangle) := \sum_{h \rightarrow H} p^{|E_h|} (1-p)^{|E_H \setminus E_h|} |h\rangle\langle h|, \quad (3.3)$$

onde $h \rightarrow H$ são os sub-hipergrafos geradores de H (de maneira que todos devem ser computados até chegarmos em H) e E_h e E_H são os conjuntos de hiperarestas (de ordem 2 ou mais) de h e H , respectivamente. Usando este procedimento, podemos mapear um estado hipergrafo $|H\rangle$ inicialmente puro em uma mistura de todos os seus estados de sub-hipergrafo, onde a probabilidade p atua como um parâmetro importante para calcular o emaranhamento de um determinado estado e conecta os dois casos extremos, para $p = 0$, o hipergrafo vazio, e $p = 1$ para

o estado puro. É importante notar a diferença entre este procedimento e o utilizado nos modelos Erdos-Rényi (ER) para grafos randomizados. Para este modelo, dado um número de vértices, todas as arestas possíveis entre esses vértices precisam ser consideradas. Os hipergrafos estudados neste trabalho são apresentados na Figura (23). Os resultados de alguns hipergrafos foram submetidos para publicação que o leitor pode conferir em (288), cujo o foco foi principalmente a quebra da monotonicidade e morte súbita de emaranhamento em estados hipergrafo não-uniformes.

No entanto, no estado hipergrafo randomizado, o caráter de aleatoriedade está relacionado apenas às hiperarestas do hipergrafo dado anteriormente. Nesse sentido, o estado hipergrafo randomizado é mais geral do que a proposta de hipergrafos randomizados puros, já que este último sempre considera um hipergrafo totalmente conectado. No que concerne à teoria de hipergrafos, a randomização de hipergrafo baseados no modelo de Erdos-Rényi e como eles estão relacionados à teoria da percolação² em redes podem ser encontrados em (289, 290, 291). Outra interessante abordagem para estados hipergrafo randomizados baseados em *tensor networks*³ pode ser encontrado em (293).

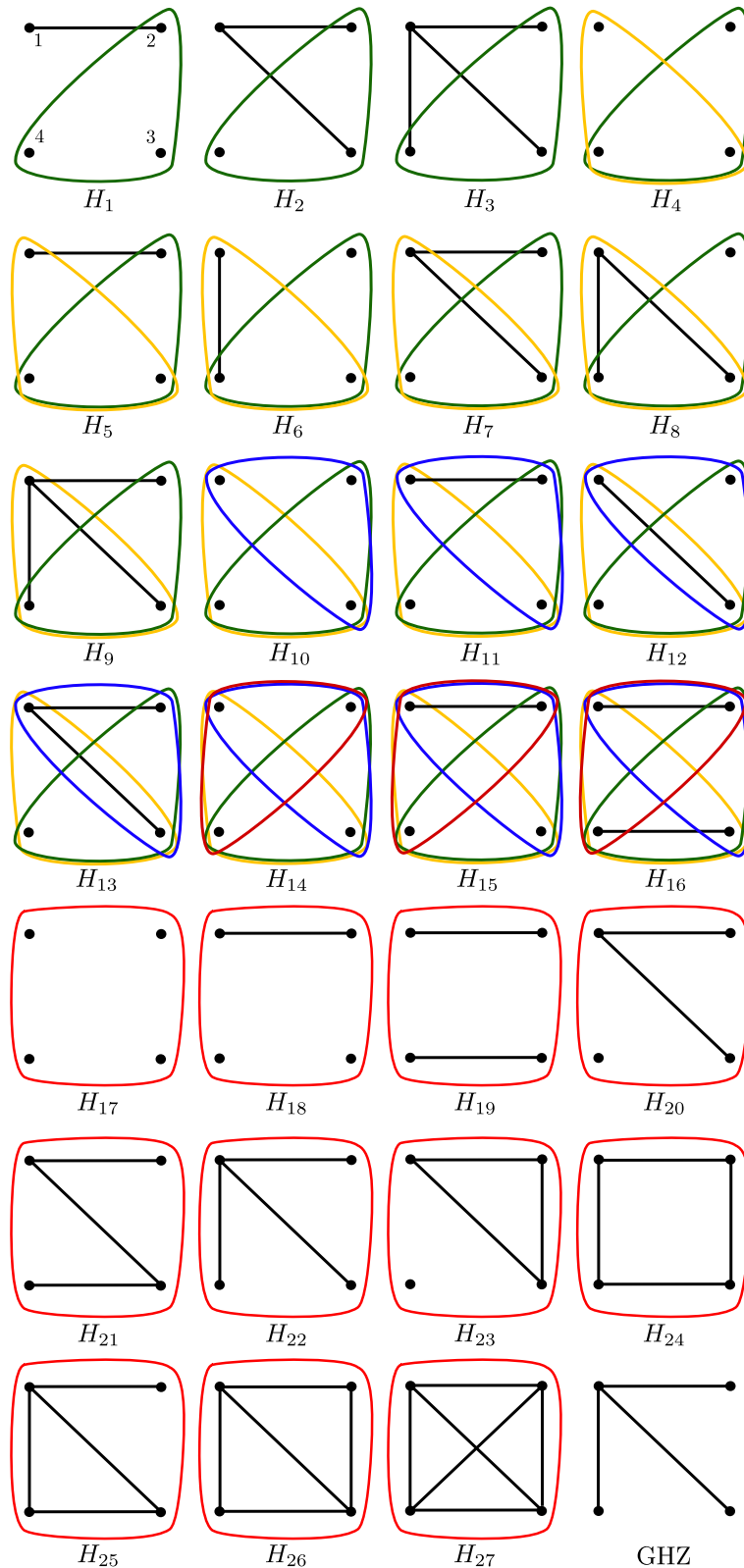
3.2 Emaranhamento Bipartido

Nesta seção, apresentamos os resultados para o emaranhamento bipartido dos estados hipergrafo randomizados da Figura (23) mediante o cálculo da negatividade, onde plotamos as probabilidades de sucesso das portas serem aplicadas, para hiperarestas e arestas. Destacamos primeiramente os resultados numéricos da negatividade dos estados randomizados H_3 , H_9 e H_{14} , uma vez que as matrizes reduzidas destes são maximamente mistas (4, 103). Analisemos primeiramente a Figura (24), onde os casos (a) e (f) mostram a negatividade em termos da partição 1 para os estados H_3 e H_{14} , respectivamente. Uma vez que há apenas uma aresta no qubit 1 para esses estados, não há competição entre as portas e não se observa quebra de monotonicidade de emaranhamento. Na mesma figura, podemos observar o comportamento não-monotônico da negatividade nos casos em que há estados hipergrafos não-uniformes, ou seja, com hiperarestas de ordens distintas. Semelhante fenômeno será observado nos demais resultados, mostrando uma espécie de competição por emaranhamento entre as portas quânticas de diferentes cardinalidades, o que pode levar à morte súbita, na qual o emaranhamento do sistema vai a zero em tempo finito, como observado nos casos (c) e (h) da Figura (24), para citar um exemplo. Nos demais casos, contudo, a quebra de monotonia não foi suficiente para levar à morte súbita, como observamos no caso (b) da mesma figura, que trata um qubit ligado a uma aresta e hiperaresta. Tal comportamento nos leva a deduzir que o evanescimento de emaranhamento será tanto mais forte quanto a variação na ordem das portas aplicadas. Assim sendo, se um estado fortemente emaranhado é desejado, aplicar uma porta quântica controlada simples, i.e., de cardinalidade

² A teoria de percolação é responsável por descrever o comportamento de uma rede quando vértices ou hiperarestas são removidos.

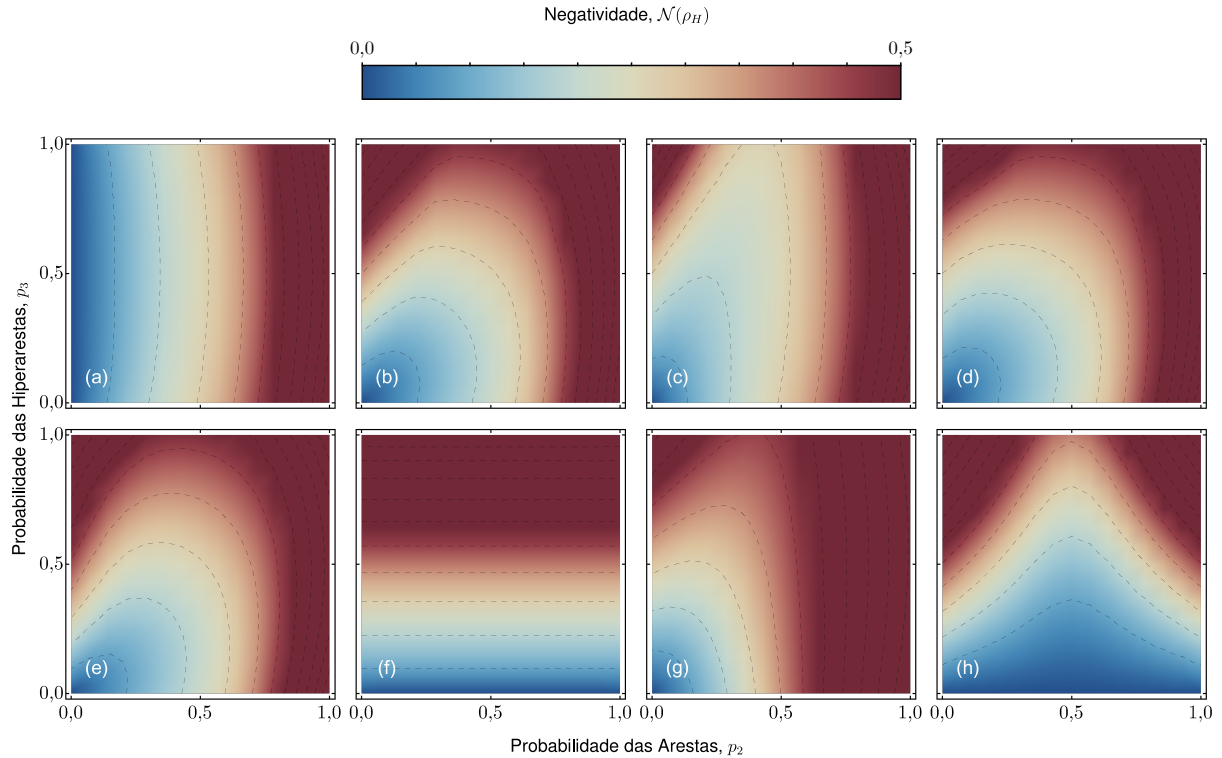
³ “Redes de tensores”, em tradução livre. Uma classe de funções de onda variacionais baseadas em tensores e usadas em estudos de muitos corpos (292).

Figura 23 – Ilustração dos hipergrafos de interesse neste trabalho. Estes representam algumas classes de equivalência sob transformações locais unitárias de estados hipergrafo para até 4 qubits. O caso (H_{14}) é equivalente ao estado GHZ completo. Os casos (H_3), (H_9) e (H_{14}) atraem atenção especial, uma vez que tais estados possuem as matrizes reduzidas maximamente mistas, formando conjuntos maximamente emaranhados. Isto significa que eles não podem ser construídos mediante LOCC a partir de nenhum outro estado com o mesmo número de qubits. (4).



Fonte: O autor.

Figura 24 – Negatividade de alguns estados hipergrafo randomizados para 4 qubits mostrados na Figura (23) que possuem matrizes reduzidas maximamente mistas: (a) $\rho_{H_3}^P$, partição $\{1\}|\{2, 3, 4\}$; (b) $\rho_{H_3}^P$, partição $\{2\}|\{1, 3, 4\}$; (c) $\rho_{H_9}^P$, partição $\{1\}|\{2, 3, 4\}$; (d) $\rho_{H_9}^P$, partição $\{2\}|\{1, 3, 4\}$; (e) $\rho_{H_9}^P$, partição $\{3\}|\{1, 2, 4\}$; (f) $\rho_{H_{14}}^P$, partição $\{1\}|\{2, 3, 4\}$; (g) $\rho_{H_{18}}^P$, partição $\{1\}|\{2, 3, 4\}$; e (h) $\rho_{H_{18}}^P$, partição $\{3\}|\{1, 2, 4\}$. O primeiro fato ao qual chamamos a atenção é como a quebra de monotonicidade de emaranhamento escala em abruptude conforme há maior “competição”, conforme escolhemos denominar o fenômeno, entre arestas e hiperarestas para emaranhar um dado qubit.



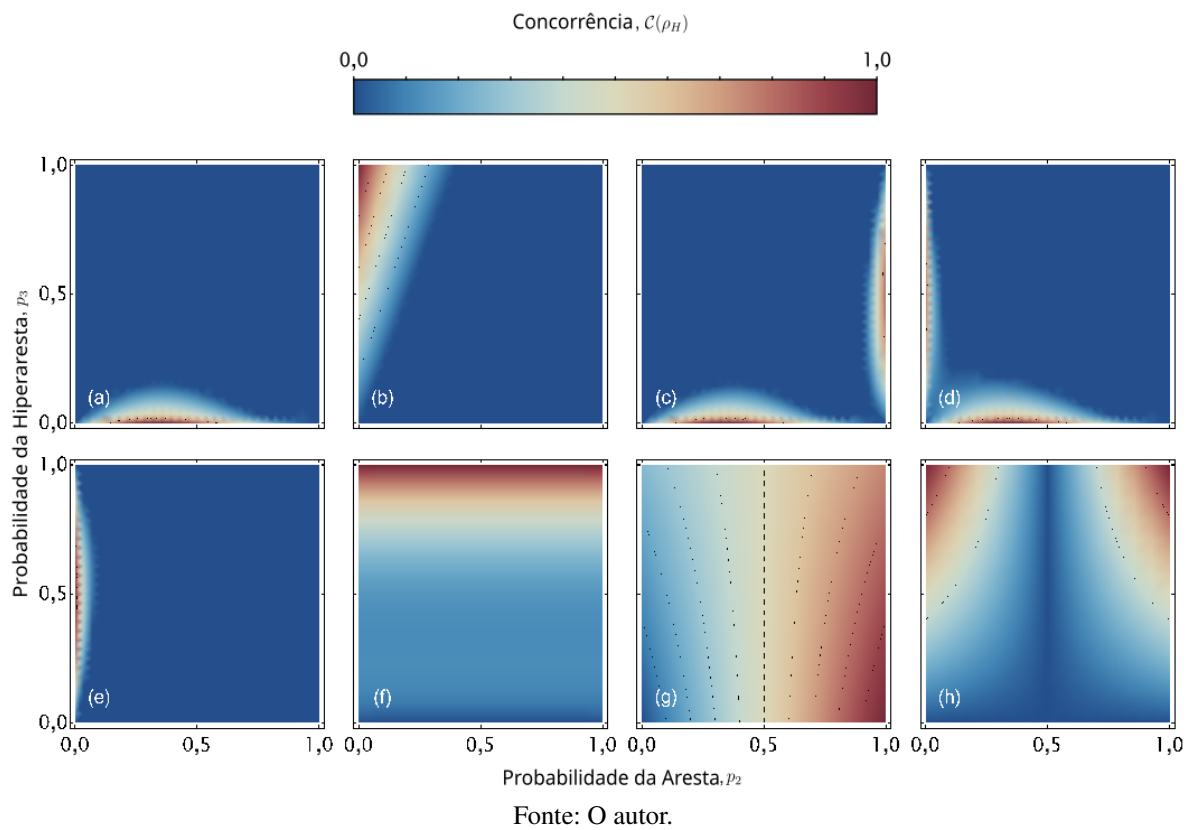
Fonte: O autor.

igual a 2, e outra porta de maior cardinalidade geralmente não é o cenário ideal pois os resultados indicam que o sistema resultará na morte súbita do emaranhamento. Entretanto, mesmo nos estados em que observamos este fenômeno, sempre ocorre o renascimento do emaranhamento em seguida. Uma vez que a morte súbita é um fenômeno geralmente indesejado em laboratório, conhecer a combinação ideal de portas será útil em determinar quais estados tendem a uma perda de coerência mais rápida do que outros estados. De fato, os elementos não-diagonais da matriz de densidade fornecem informação sobre a interferência e descrevem a coerência quântica do sistema. Na perda de coerência quântica, tais elementos desaparecem da diagonal das matrizes densidades dos estados.

Semelhantemente, analisemos os resultados para a concorrência de emaranhamento (294), conforme a Figura (25), percebemos que a quebra da monotonia se dá nos estados representados por hipergrafos não-uniformes, de forma que a monotonicidade de emaranhamento é quebrada mais abruptamente quanto maior for a diferença da ordem das hiperarestas, mostrando a presença de MSE com largas regiões onde a concorrência é nula. Enfatizamos que a concorrência é a

medida de emaranhamento que mostra o comportamento mais anômalo para os resultados de emaranhamento.

Figura 25 – Concorrência de alguns estados hipergrafo randomizados para 4 qubits mostrados na Figura (23) que possuem matrizes reduzidas maximamente mistas: (a) $\rho_{H_3}^P$, partição $\{1\}|\{2\}$; (b) $\rho_{H_3}^P$, partição $\{2\}|\{3\}$; (c) $\rho_{H_9}^P$, partição $\{1\}|\{2\}$; (d) $\rho_{H_9}^P$, partição $\{1\}|\{3\}$; (e) $\rho_{H_9}^P$, partição $\{2\}|\{4\}$; (f) $\rho_{H_{14}}^P$, partição $\{1\}|\{2\}$; (g) $\rho_{H_{18}}^P$, partição $\{1\}|\{2\}$; e (h) $\rho_{H_{18}}^P$, partição $\{1\}|\{3\}$. Chamamos a atenção para o fato que a concorrência é a medida que apresenta as maiores discrepâncias de emaranhamento, se comparada às demais medidas estudadas, conforme vemos nos casos (d) e (e). Todavia, tal fato não necessariamente está ligado a uma diferença direta entre os estados, mas à medida em si.



3.3 Emaranhamento Multipartido Genuíno

Nesta seção, analisaremos os resultados para o emaranhamento multipartido dos estados hipergrafo randomizados. Conforme já fora mencionado nesta tese, estados hipergrafo apresentam emaranhamento multipartido genuíno (GME)⁴, ou seja, estados que não podem ser expandidos na forma das partições:

$$\rho = c_1\rho_{1|23} + c_2\rho_{2|13} + c_3\rho_{3|12}, \quad (3.4)$$

⁴ Do inglês “Genuine Multipartite Entanglement”

onde $\rho_{i|jk}$ é o estado bi-separável concernente à bipartição $(i|jk)$ e $\sum_{l=1}^3 c_l = 1$, with $c_l \geq 0$. Isto torna claro o fato de que o GME é uma condição mais geral do que o emaranhamento bipartido (295).

Um estado $\rho = \sum_{ijkl} \rho_{ij,kl} |i\rangle \langle j| \otimes |k\rangle \langle l|$ possui transposição parcial positiva (PPT)⁵ com respeito a uma partição $A|BC$, se a transposição parcial do mesmo, dada por:

$$\rho^{TA} = \sum_{ijkl} \rho_{ji,kl} |i\rangle \langle j| \otimes |k\rangle \langle l| \quad (3.5)$$

não possui autovalores negativos. Denotamos um estado desse tipo por $\rho_{1|23}^{ppt}$, e similarmente às demais partições. Um estado pertencente ao conjunto dos estados PPT é denominado uma mistura PPT cujo o conjunto pode ser escrito como:

$$\rho^{pmix} = c_1 \rho_{1|23}^{ppt} + c_2 \rho_{2|13}^{ppt} + c_3 \rho_{3|12}^{ppt}, \quad (3.6)$$

onde c_k forma uma distribuição de probabilidade.

É importante notar que uma vez que todo estado separável é necessariamente PPT, todo estado bi-separável é uma mistura PPT (296). Logo, se um estado não é uma mistura PPT, não é bi-separável, e portanto é um estado com GME (131, 297). A fim de proceder com o cálculo do emaranhamento via PPT *mixer* conforme efetuado em (297), tomamos a testemunha de emaranhamento W como um operador que pode ser separado em dois operadores positivos $P_M + Q_M^M$ com $Tr(W) = 1$, P_M e $Q_M^M \geq 0$ e M sendo a transposição parcial relacionada com a bipartição M . Usando programação semi-definida obtemos a minimização do valor esperado $Tr(W\rho)$ sobre todas as testemunhas totalmente decomponíveis, isto é:

$$E_{pptomixer}(\rho) = |\min(0, \min_{W \text{ decomp.}} Tr(W\rho))|, \quad (3.7)$$

que é capaz de detectar a presença de GME e emaranhamento ligado se houver. Uma vez que o conjunto das misturas do tipo PPT pode ser totalmente caracterizado mediante programação linear semi-definida (SDP)⁶, podemos usar a mistura PPT como uma medida GME a fim de obter os resultados numéricos para os estados hipergrafo randomizados para até quatro qubits. Tais resultados são mostrados na Figura (29) para os estados 1 a 16 e na Figura (28) para os estados 16 a 24 da Figura (23). Os gráficos foram gerados mediante uso do Wolfram Mathematica pelo método introduzido em (297) e com auxílio do programa PPTMIXER, disponível em (298), utilizando os resolvedores YALMIP (299) e MOSEK (300).

Os resultados obtidos mostram que o emaranhamento multipartido também é uma função não-monotônica das probabilidades $p_{|e|}$, concordando com o comportamento do emaranhamento bipartido dos estados hipergrafo randomizados. Cabe ressaltar que na referência (287) apenas o comportamento monotônico do emaranhamento fora observado devido ao fato que estados grafo são sempre 2-uniformes. O questionamento sobre se tal monotonicidade seria sempre observada fora levantado na mesma referência, e até então era uma questão aberta. Com os resultados

⁵ Do inglês "Positive Partial Transpose"

⁶ Do inglês "semidefinite program".

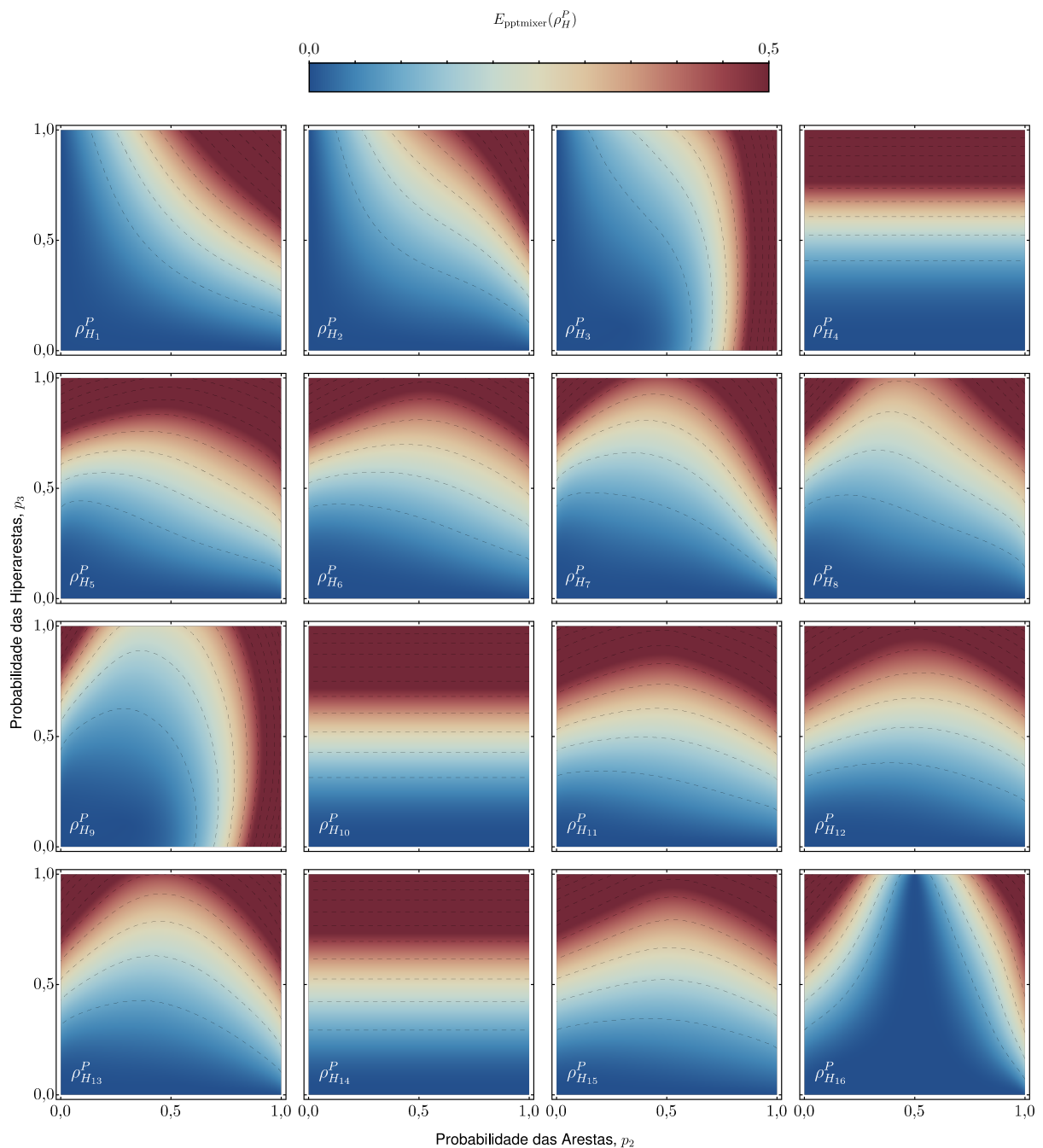
mostrados aqui torna-se claro que a monotonicidade do emaranhamento é perdida a partir do momento em que portas de ordens distintas são aplicadas sobre o estado.

Para a primeira família de estados com uma hiperaresta, H_1 , H_2 e H_3 , notamos a preponderância da hiperaresta para o emaranhamento, e somente a partir do terceiro estado as arestas passam a desempenhar maior influência na competição por emaranhamento, com emaranhamento máximo já a partir da probabilidade da aresta $p_2 = 0.8$.

Para o estado H_4 notamos a monotonicidade de emaranhamento sendo respeitada, justamente para um caso onde não há competição por esse recurso, tratando-se de um hipergrafo 3-uniforme. Para os estados H_5 a H_8 , note que a quebra de monotonicidade é mais intensa conforme maior o número de portas simples (arestas) aplicadas, até o ponto onde há morte súbita de emaranhamento, com o renascimento deste em seguida para probabilidades maiores. Embora a morte súbita não apareça até o estado H_9 , destacamos a um interessante comportamento observado para os estados intermediários. Tais estados perdem o emaranhamento multipartido mas preservam o emaranhamento bipartido, i.e., estados hipergrafo randomizados deixam de ser estados GME. Isso pode contribuir na aplicação experimental de portas de multiqubits sabendo previamente quais estados preservarão bipartições emaranhadas, ainda que percam emaranhamento multipartido devido à presença de ruído.

No estado 3-uniforme H_{10} novamente observamos o emaranhamento crescendo regularmente conforme se aumenta a probabilidade da hiperaresta, onde há coerência em um momento ligeiramente anterior do que em relação ao estado H_4 , justamente pela presença de uma porta emaranhadora adicional no estado H_{10} . Para os estados H_{11} a H_{13} obtemos um padrão semelhante aos estados não-uniformes anteriores, com uma quebra da monotonicidade cada vez mais acentuada na medida em que a competição é mais "acirrada". O estado H_{14} configura novamente um hipergrafo 3-uniforme porém com quatro hiperarestas, o equivalente mais próximo do estado GHZ. Tal estado totalmente conectado é extremamente sensível à adição de portas emaranhadoras que compitam com as já existentes, a ponto de apresentar morte súbita a partir de duas arestas adicionadas ao estado, cujo o emaranhamento vai a zero rapidamente e para probabilidade da aresta $P_2 = 0.5$, renascendo seguidamente. Não obstante, um detalhe a se mencionar é a assimetria do emaranhamento observada nos gráficos em questão, uma vez que para a probabilidade da aresta igual a 1 o emaranhamento surge mais cedo no estado para uma mesma probabilidade de hiperaresta. Observamos comportamento semelhante para os estados hipergrafo H_{17} a H_{24} , porém severamente mais acentuado. A partir do estado H_{18} , quando a competição por emaranhamento passa a existir, a morte súbita é inevitável. Nestes casos, a diferença entre as portas quânticas aplicadas é de duas ordens, pois há no mínimo uma aresta e uma hiperaresta de ordem 4. Isso leva à conclusão que a morte súbita sempre ocorrerá para estados com $d_{e|h} > 2$, onde d é a diferença entre a ordem da aresta e da hiperaresta aplicada. O estado H_{27} é o caso extremo de 4 qubits totalmente conectados por arestas e uma hiperaresta envolvendo-o globalmente, o que representaria uma fase global, porém marca sua presença no emaranhamento ainda que muito discretamente, para probabilidade da hiperaresta próxima a 1. Tal estado assemelha-se ao estado grafo GHZ, cujo o emaranhamento é mostrado por último e,

Figura 26 – Emaranhamento multipartido para probabilidade de 0 a 1 dos estados hipergrafo mostrados na Figura 23. Os números de (1) a (16) correspondem aos estados mostrados na Figura 23. A nítida quebra de monotonicidade de emaranhamento para todos os casos onde há estados não-uniformes, i.e., estados que compartilham hiperarestas de cardinalidades distintas, enquanto o oposto permanece válido: a monotonicidade é respeitada em todos os estados uniformes. Estados hipergrafo como H_9 , com duas hiperarestas de ordem 3 e três arestas (e portanto, de ordem 2), são de especial interesse por possuírem matrizes reduzidas maximamente mistas, ou seja, não podem ser obtidos a partir de outros estados meramente por *LOCC*. Casos extremos, com evidente presença da morte súbita de emaranhamento, são observados no estado H_{16} , cuja a diferença de cardinalidade entre as hiperarestas é igual a 2. A quebra de monotonicidade torna-se mais evidente à medida em que a diferença das ordens das portas aplicadas é maior, “acirrando” a disputa por emaranhamento.



Fonte: O autor.

como esperado, mantêm a monotonicidade, tratando-se de um estado grafo, ou estado hipergrafo 2-uniforme.

Na Figura (28) ressaltamos a sutil quebra de monotonicidade do emaranhamento dos estados 16, 18, 20 e 23 para as regiões da probabilidade das hiperarestas entre 0 e 0.5. Nesses casos, ressaltamos o fato de que estados que sofrem a morte súbita de forma mais abrupta também apresentam o renascimento de emaranhamento de forma mais eficaz, como observado no estado 16.

3.4 Estados Hipergrafo Generalizados e Estados LME

Conforme descrito anteriormente, um operador da forma da testemunha de emaranhamento usual da literatura não é suficiente para validar o emaranhamento de estados mistos e randomizados, pois é necessário levar em consideração o projetor das combinações possíveis de sub-hipergrafos em relação àquele estado puro original.

Uma forma analítica da testemunha de emaranhamento é geralmente buscada uma vez que é a ferramenta mais conveniente para detectar emaranhamento pois não demandam conhecimento tomográfico total do estado em questão. Conforme fora mencionado anteriormente, uma testemunha para emaranhamento multipartido genuíno é um observável W com autovalores não-negativos sobre todos os estados bi-separáveis, mas com um autovalor negativo para ao menos um estado emaranhado. Um procedimento usual para a construção da testemunha de emaranhamento em estados puros $|H\rangle$ é baseado no projetor

$$W := \alpha_{|H\rangle} \mathbb{1} - |H\rangle\langle H|, \quad (3.8)$$

onde $\alpha_{|H\rangle}$ é a sobreposição máxima quadrática entre qualquer estado puro bi-separável e o estado hipergrafo puro e GME $|H\rangle$.

Assim sendo, para incluir o cálculo da testemunha nesse procedimento de randomização, é preciso computar a randomização da sobreposição $O(\rho_H^p)$ que calcula a projeção de todos os sub-hipergrafos, dada por $\text{Tr}[|H\rangle\langle H| \rho_H^p]$. Assim, a forma geral da sobreposição para qualquer hipergrafo será dada por:

$$\begin{aligned} O(\rho_H^p) &= \text{Tr}(|H\rangle\langle H| \rho_H^p) \\ &= \sum_{F \text{ spans } H} p^{|E_F|} (1-p)^{|E_H/E_F|} \text{Tr}[|H\rangle\langle H| |F\rangle\langle F|], \end{aligned} \quad (3.9)$$

ou seja, é preciso calcular o produto interno do estado hipergrafo e seus sub-estados possíveis oriundos da randomização. Tal procedimento não é de simples execução e geralmente exige poder computacional devido ao grande número de combinações possíveis.

Como um exemplo prático desse método, propomos um hipergrafo do tipo “*clover*”⁷ de n vértices Cl_n , como é ilustrado na Figura (29), que é um caso especial do “hiperflower” proposto

⁷ Ou hipergrafo “trevo” em tradução livre.

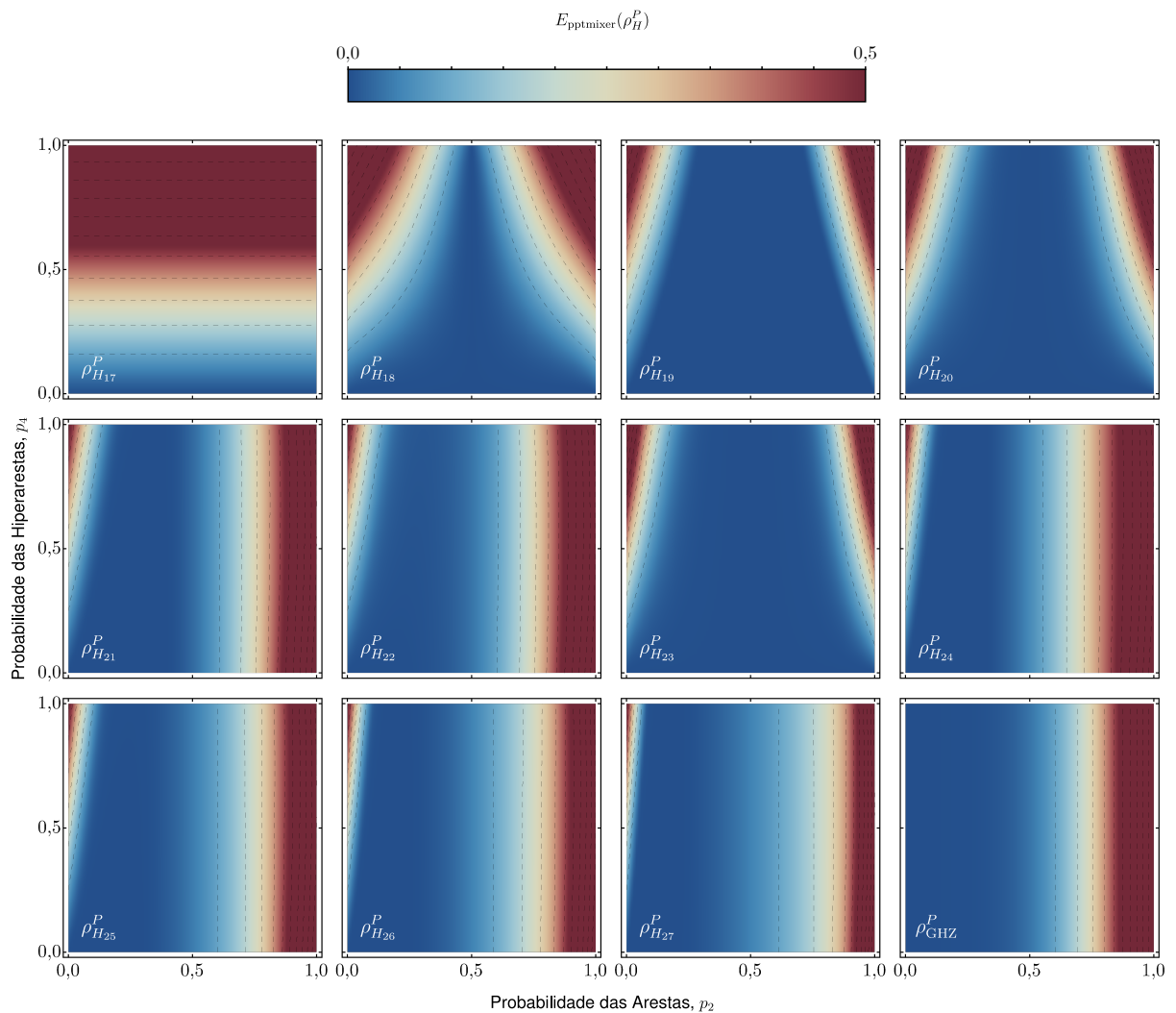
em (301). Nesse caso, a fim de envolvermos os sub-hipergrafos no cálculo, computados a sobreposição $O(\rho_{HC_{l_n}}^p)$:

$$O(\rho_{C_{l_n}}^p) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{|E_{\tilde{F}}|=0}^{|E_{C_{l_n}}|} \binom{|E_{C_{l_n}}|}{|E_{\tilde{F}}|} (2^{|E_{C_{l_n}}|} + 2^{|E_{\tilde{F}}|})^2 \times p^{|E_{\tilde{F}}|} (1-p)^{|E_{C_{l_n}} \setminus E_{\tilde{F}}|} \quad (3.10)$$

onde \tilde{F} representam todos os sub-hipergrafos possíveis do hipergrafo *clover* de n vértices C_{l_n} . Na Figura (30), plotamos $O(\rho_{C_{l_n}}^p)$ como função do parâmetro de randomização para hipergrafos do tipo *clover* de até 13 qubits em comparação com o resultado de estados grafo do tipo estrela S_n para 3, 5 e 7 qubits, que seria um equivalente do hipergrafo *clover* para estados grafo. Dessa forma, é possível estabelecer uma relação entre o cálculo do valor esperado da testemunha de emaranhamento, $Tr(W\rho_H^p)$ com a probabilidade. A probabilidade p_W é aquela onde o valor esperado torna-se negativo e, conseqüentemente, o estado torna-se separável, i.e., não emaranhado. Uma vez que a família dos hipergrafos *clover* é uniforme, não houve quebra de monotonicidade de emaranhamento ou morte súbita. Destacamos a semelhança dos resultados entre o hipergrafo e seu equivalente, o grafo estrela, contudo os estados hipergrafo são consideravelmente mais robustos do que seus equivalentes grafos.

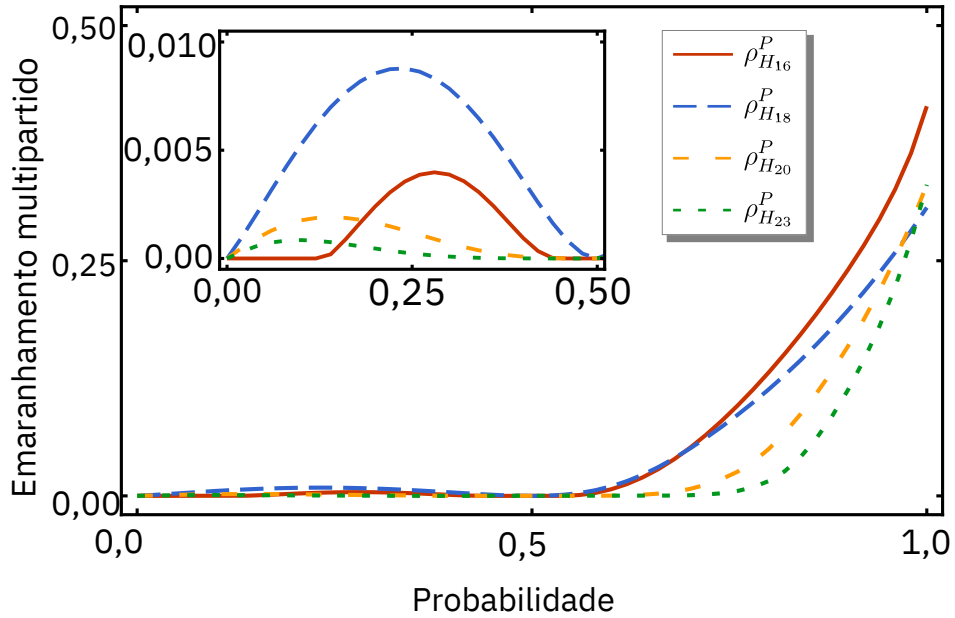
Na figura (31), a título de exemplo, plotamos a negatividade para um estado LME, o estado mais geral, conforme definido anteriormente. Observamos claramente o emaranhamento máximo para a fase $\phi = \pi$, que corresponde à fase do feixe incidente, conforme esperado, dado que hipergrafos quânticos, que possuem a fase igual a π , já apresentam o maior emaranhamento. O mesmo é observado para os demais hipergrafos analisados. O fato do estado LME apresentar o maior emaranhamento para a fase do laser incidente $\phi = \pi$, que é a ação da porta controlada C_Z , tem relação com a própria estrutura da porta emaranhadora e é a fase buscada na geração dos estados na otimização destes (302, 303). O mesmo comportamento é observado para os demais estados hipergrafo, como é de fato realizado em laboratório. Note que todo estado hipergrafo de N qubits é um estado LME, mas sempre há um estado LME que não é equivalente por operações locais-unitárias a qualquer estado hipergrafo (303).

Figura 27 – Emaranhamento multipartido para probabilidade de 0 a 1 dos estados hipergrafo mostrados na Figura 23. Os números de (17) a (27) correspondem diretamente aos estados mostrados na Figura 23. O último gráfico é o resultado para o estado grafo GHZ, a título de comparação apenas. É interessante notar como a morte de emaranhamento torna-se cada vez mais abrupta à medida em que os estados hipergrafo são menos uniformes. Os resultados obtidos nesses dados para emaranhamento não apenas respondem a questão levantada na literatura sobre a possibilidade da quebra de emaranhamento em estados grafos (cuja a resposta é negativa), como mostra que tal quebra está relacionada com a não-uniformidade do estado, resultado que poderia ser observado apenas com a generalização para estados hipergrafos, uma vez que estados grafo sempre serão 2-uniformes. Não obstante, todos os estados apresentam o renascimento de emaranhamento conforme a probabilidade das arestas tende a 1. Cabe também notar que estados simétricos, como H_24 , não necessariamente apresentam simetria no emaranhamento, conforme pode ser observado na figura.



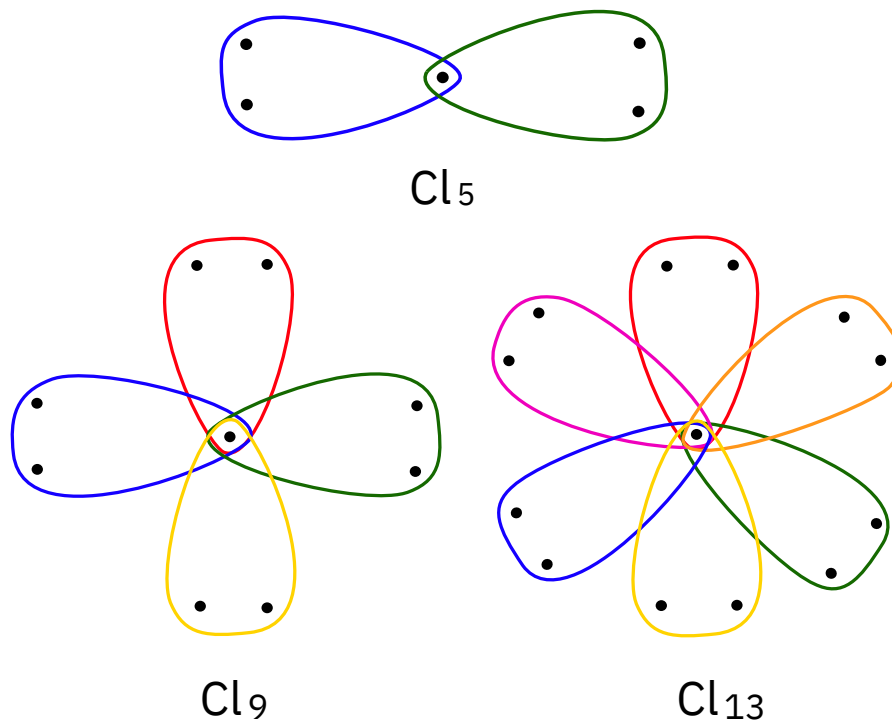
Fonte: O autor.

Figura 28 – Emaranhamento multipartido para probabilidade de 0 a 1 dos estados hipergrafo 16, 18, 20 e 23 da Figura (23), onde destacamos a quebra de monotonicidade de emaranhamento na região de probabilidades das hiperarestas entre 0 a 0,5.



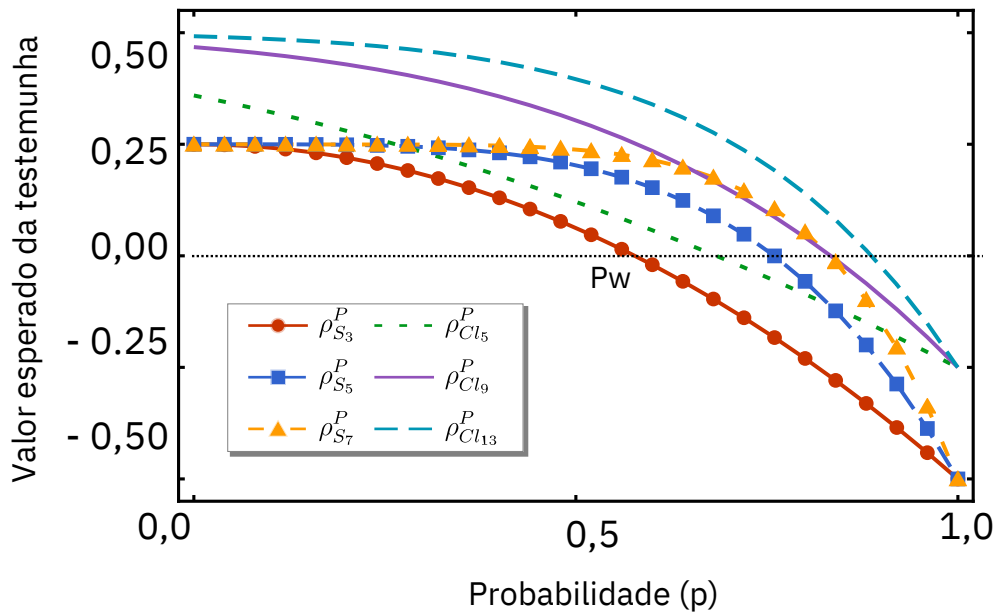
Fonte: O autor.

Figura 29 – Hipergrafos “clover” Cl_n 3-uniformes para 5, 9 e 13 qubits, respectivamente, representando alguns dos estados hipergrafo propostos para cálculo do *overlap* e testemunha de emaranhamento.



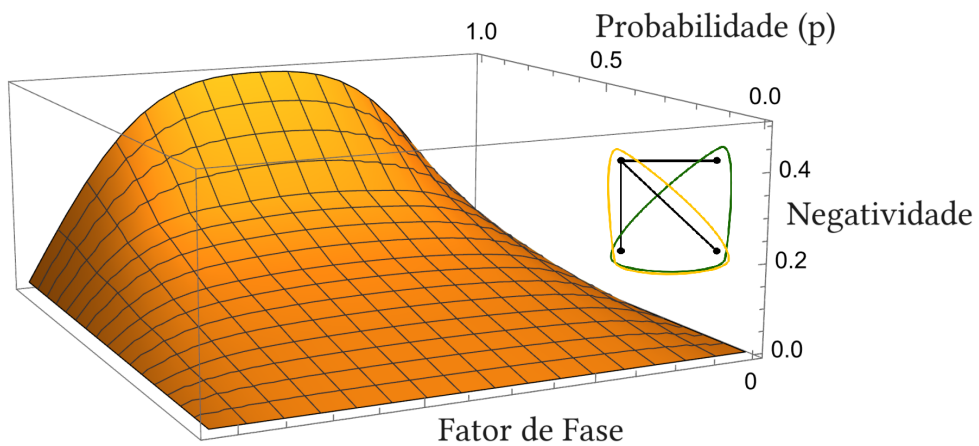
Fonte: O autor.

Figura 30 – Comparação da randomização dos *overlaps* $O(\rho_{Cl_n}^p)$ para a família de hipergrafos *clover* 3-uniformes totalmente conectados com 5, 9 e 13 vértices em relação ao seu caso particular, a família do grafo estrela com 3, 5 e 7 vértices. Note que o estado grafo ρ_{S_3} apresenta p_w em torno de $p = 0,6$, a partir do qual nenhuma testemunha detecta emaranhamento. Em contrapartida, o estado hipergrafo *clover* ρ_{Cl_5} apresentou maior robustez de emaranhamento, com p_w em torno de $p = 0,8$. Por tratar-se de hipergrafos uniformes, observamos em todos os casos a monotonicidade de emaranhamento ser obedecida.



Fonte: O autor.

Figura 31 – Negatividade para o estado LME com quatro vértices e duas hiperarestas. Notamos que, de fato, a fase $\phi = \pi$ apresenta o emaranhamento máximo para o dado estado. O mesmo comportamento é observado para os demais estados hipergrafo.



Fonte: O autor.

4 CONCLUSÃO

Nesta tese, analisamos a classe de estados hipergrafo mediante distintas abordagens, indicando a ampla gama de aplicabilidade desta classe em protocolos quânticos. Apesar da dificuldade em se resolver alguns quantificadores de emaranhamento para estados mistos, obtivemos importantes resultados de medidas como a negatividade, concorrência e emaranhamento multipartido em relação ao limite tolerado de ruído para cada estado.

Ademais, concentramos os resultados de emaranhamento para estados hipergrafo randomizados, comparando os dados obtidos com o desenvolvimento da teoria na literatura até então, a fim de apresentar com segurança ao leitor o estado atual da questão, principalmente no que concerne a quebra de monotonicidade de emaranhamento, comportamento consideravelmente anômalo para estados de vários qubits. Correlato a isto, observamos em diversos estados a morte súbita e renascimento de emaranhamento.

No capítulo 2, uma consistente revisão de literatura é feita sobre teoria de emaranhamento, a fim de introduzir o leitor no entendimento correto dos resultados apresentados na tese, bem como servir como material didático aos que futuramente utilizarem esta tese para estudar os estados hipergrafo.

No capítulo 3, a noção de estados grafo randomizados foi generalizada para estados hipergrafo, possibilitando um meio de simular portas quânticas ruidosas e facilitar a implementação destas em uma situação real no laboratório. Tal processo de randomização resulta em estados mistos randomizados, e conseqüentemente os conceitos de equivalência local unitária deixam de ter validade. Isto pode ser benéfico no sentido de auxiliar o entendimento dos melhores estados a serem implementados a fim de otimizar a geração de estados maximamente emaranhados e evitar a morte súbita de emaranhamento.

Além dos resultados de decoerência obtidos terem respondido a uma questão que estava em aberto na literatura, comprovando a não-monotonicidade de emaranhamento em estados randomizados, também mostramos que em diversos casos não há apenas a quebra de monotonicidade mas também a morte súbita e renascimento do emaranhamento em tais estados. A origem deste fenômeno reside na competição entre portas de diferentes ordens, ou seja, estados hipergrafo não-uniformes invariavelmente apresentarão quebra de monotonicidade de emaranhamento. Também demonstramos que alguns estados podem ter o nível de emaranhamento aumentado usando combinações apropriadas de arestas mesmo que para probabilidades menores de aplicação de tais portas.

Outrossim, calculamos o valor esperado das testemunhas de emaranhamento para a família do hipergrafo *clover*, com o seu *overlap* de randomização de hipergrafos 3-uniformes totalmente conectados para até 13 qubits. Comparamos o resultado obtido com a família de estados grafo do tipo estrela, mostrando que os estados hipergrafo possuem maior robustez de emaranhamento do que seu caso particular em grafos. Também generalizamos o cálculo da negatividade para estados LME, revelando que de fato o emaranhamento máximo é atingido para a fase do estado $\phi = \pi$, um resultado esperado mas ainda não constatado na literatura.

Finalmente, no apêndice A, inserido ao final desta tese, apresentamos alguns resultados obtidos no que concerne à tentativa de violação da desigualdade CHSH mediante estados gaussianos. Constatamos que estados gaussianos com operações gaussianas não podem violar tal desigualdade. Semelhantemente, estados gaussianos com operações e medidas não-gaussianas como a adição e subtração de fótons foram incapazes de apresentar violação da CHSH, chegando ao resultado próximo mas insuficiente para violação de 1.98. No apêndice B, apresentamos de forma brevíssima outra possibilidade interessante de aplicação de hipergrafos em informação quântica, dessa vez como hipergrafos quânticos, que ainda pedem uma definição formal na literatura.

Em trabalhos futuros, pretendemos generalizar o mesmo procedimento para a classe de estados LME, obtendo assim a randomização da classe mais geral de estados do tipo maximamente emaranhados. A mesma generalização será pretendida no estudo de estados *qudits*, que despertam considerável interesse na literatura, dadas as aplicações em computação quântica, o que nos permitirá entender o emaranhamento de estados ruidosos de famílias mais gerais. A construção de desigualdades de Bell mediante estados hipergrafo randomizados também é um tema de interesse para investigação futura.

REFERÊNCIAS

- 1 GACHECHILADZE, M. Quantum hypergraph states and the theory of multiparticle entanglement. 2019.
- 2 GU, M. et al. Quantum computing with continuous-variable clusters. *Physical Review A*, APS, v. 79, n. 6, p. 062318, 2009.
- 3 MOORE, D. W. Quantum hypergraph states in continuous variables. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 100, p. 062301, Dec 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.100.062301>>.
- 4 GÜHNE, O. et al. Entanglement and nonclassical properties of hypergraph states. *J. Phys. A*, IOP Publishing, v. 47, n. 33, p. 335303, aug 2014.
- 5 EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, APS, v. 47, n. 10, p. 777, 1935.
- 6 WALLS, D. Evidence for the quantum nature of light. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 280, n. 5722, p. 451–454, 1979.
- 7 SCHRÖDINGER, E. Discussion of probability relations between separated systems. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. [S.l.], 1935. v. 31, n. 4, p. 555–563.
- 8 GISIN, N.; GISIN, N. Quantenverschränkung. *Der unbegreifliche Zufall: Nichtlokalität, Teleportation und weitere Seltsamkeiten der Quantenphysik*, Springer, p. 83–99, 2014.
- 9 SALART, D. et al. Testing the speed of ‘spooky action at a distance’. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 454, n. 7206, p. 861–864, 2008.
- 10 VAZIRI, A.; WEIHS, G.; ZEILINGER, A. Experimental two-photon, three-dimensional entanglement for quantum communication. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 89, p. 240401, Nov 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.89.240401>>.
- 11 BALLENTINE, L. E.; JARRETT, J. P. Bell’s theorem: Does quantum mechanics contradict relativity? *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 55, n. 8, p. 696–701, 1987.
- 12 BANCAL, J.-D. Quantum non-locality based on finite-speed causal influences leads to superluminal signalling. In: *On the Device-Independent Approach to Quantum Physics: Advances in Quantum Nonlocality and Multipartite Entanglement Detection*. [S.l.]: Springer, 2013. p. 97–105.
- 13 TIMPSON, C. G.; BROWN, H. Entanglement and relativity. 2002.
- 14 BELL, J. S. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics*, APS, v. 1, n. 3, p. 195, 1964.
- 15 BUNGE, M. *Foundations of physics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 10.
- 16 VILLEGAS, R. R.; REY, B. A. R. Bell’s inequalities. 2014.
- 17 BOHM, D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. i. *Physical review*, APS, v. 85, n. 2, p. 166, 1952.

- 18 AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Physical Review*, APS, v. 115, n. 3, p. 485, 1959.
- 19 BUNGE, M. Does the aharonov–bohm effect occur? *Foundations of Science*, Springer, v. 20, n. 2, p. 129–133, 2015.
- 20 AHARONOV, Y.; COHEN, E.; ROHRLICH, D. Nonlocality of the aharonov-bohm effect. *Physical Review A*, APS, v. 93, n. 4, p. 042110, 2016.
- 21 SALEM, V. et al. Estudo de espalhamento em sistemas aharonov-bohm em espaço cônico. UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA, 2017.
- 22 POPESCU, S. Non-locality beyond quantum mechanics. *Philosophy of quantum information and entanglement*, Cambridge University Press, p. 3–15, 2010.
- 23 CLAUSER, J. F. et al. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 23, p. 880–884, Oct 1969. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.23.880>>.
- 24 BOKULICH, A.; JAEGER, G. *Philosophy of quantum information and entanglement*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.
- 25 HOBSON, A. A realist analysis of six controversial quantum issues. *Mario Bunge: A Centenary Festschrift*, Springer, p. 329–348, 2019.
- 26 ACCARDI, L.; REGOLI, M. Non-locality and quantum theory: new experimental evidence. *Quantum Communication, Computing, and Measurement 3*, Springer, p. 313–323, 2002.
- 27 FREEDMAN, S. J.; CLAUSER, J. F. Experimental test of local hidden-variable theories. *Physical Review Letters*, APS, v. 28, n. 14, p. 938, 1972.
- 28 LARSSON, J.-Å. Loopholes in bell inequality tests of local realism. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 47, n. 42, p. 424003, 2014.
- 29 RAUSSENDORF, R.; BRIEGEL, H. J. A one-way quantum computer. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 86, n. 22, p. 5188–5191, 2001.
- 30 CAMILLERI, K. A history of entanglement: Decoherence and the interpretation problem. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, Elsevier, v. 40, n. 4, p. 290–302, 2009.
- 31 CLARK, S.; ALVES, C. M.; JAKSCH, D. Efficient generation of graph states for quantum computation. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 7, n. 1, p. 124, 2005.
- 32 GISIN, N. et al. Quantum cryptography. *Reviews of modern physics*, APS, v. 74, n. 1, p. 145, 2002.
- 33 LIDAR, D. A.; BRUN, T. A. *Quantum error correction*. [S.l.]: Cambridge university press, 2013.
- 34 BRITO, S. et al. Statistical properties of the quantum internet. *Physical Review Letters*, APS, v. 124, n. 21, p. 210501, 2020.
- 35 GIOVANNETTI, V.; LLOYD, S.; MACCONE, L. Quantum metrology. *Physical review letters*, APS, v. 96, n. 1, p. 010401, 2006.

- 36 BAPAT, A. et al. Unitary entanglement construction in hierarchical networks. *Physical Review A*, APS, v. 98, n. 6, p. 062328, 2018.
- 37 RAHMAN, A. U.; JI, Z. X.; ZHANG, H. G. Demonstration of entanglement and coherence in ghz-like state when exposed to classical environments with power-law noise. *The European Physical Journal Plus*, Springer, v. 137, n. 4, p. 1–19, 2022.
- 38 HEINRICH, A. J. et al. Quantum-coherent nanoscience. *Nature nanotechnology*, Nature Publishing Group UK London, v. 16, n. 12, p. 1318–1329, 2021.
- 39 CAO, J. et al. Quantum biology revisited. *Science Advances*, American Association for the Advancement of Science, v. 6, n. 14, p. eaaz4888, 2020.
- 40 SAROVAR, M. et al. Quantum entanglement in photosynthetic light-harvesting complexes. *Nature Physics*, Nature Publishing Group UK London, v. 6, n. 6, p. 462–467, 2010.
- 41 ARNDT, M.; JUFFMANN, T.; VEDRAL, V. Quantum physics meets biology. *HFSP journal*, Taylor & Francis, v. 3, n. 6, p. 386–400, 2009.
- 42 CONG, W.; TJOA, E.; MANN, R. B. Entanglement harvesting with moving mirrors. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2019, n. 6, p. 1–20, 2019.
- 43 HENDERSON, L. J. et al. Harvesting entanglement from the black hole vacuum. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 35, n. 21, p. 21LT02, 2018.
- 44 POZAS-KERSTJENS, A.; MARTÍN-MARTÍNEZ, E. Entanglement harvesting from the electromagnetic vacuum with hydrogenlike atoms. *Physical Review D*, APS, v. 94, n. 6, p. 064074, 2016.
- 45 MARTÍN-MARTÍNEZ, E.; SANDERS, B. C. Precise space–time positioning for entanglement harvesting. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 18, n. 4, p. 043031, 2016.
- 46 ZANGI, S. M. et al. Entanglement swapping and swapped entanglement. *Entropy*, MDPI, v. 25, n. 3, p. 415, 2023.
- 47 VEDRAL, V. et al. Quantifying entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 78, p. 2275–2279, Mar 1997. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.2275>>.
- 48 VEDRAL, V. Quantifying entanglement in macroscopic systems. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 453, n. 7198, p. 1004–1007, 2008.
- 49 TOKPANOV, Y. S. et al. Quantum coherence preservation in extremely dispersive plasmonic media. *Phys. Rev. Applied*, American Physical Society, v. 12, p. 044037, Oct 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevApplied.12.044037>>.
- 50 ANN, K.; JAEGER, G. Entanglement sudden death in qubit–qutrit systems. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 372, n. 5, p. 579–583, 2008.
- 51 MAZZOLA, L. et al. Sudden death and sudden birth of entanglement in common structured reservoirs. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 79, p. 042302, Apr 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.79.042302>>.
- 52 CUI, H.; LI, K.; YI, X. A study on the sudden death of entanglement. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 365, n. 1-2, p. 44–48, 2007.

- 53 LÉVY-LEBLOND, J.-M. The meanings of planck's constant. In: EDITRICE COMPOSITORI; 1999. *CONFERENCE PROCEEDINGS-ITALIAN PHYSICAL SOCIETY*. [S.l.], 2002. v. 79, p. 211–226.
- 54 BACCIAGALUPPI, G. The role of decoherence in quantum mechanics. 2003.
- 55 DONG, P. et al. Generation of cluster states. *Physical Review A*, APS, v. 73, n. 3, p. 033818, 2006.
- 56 HEIN, M.; EISERT, J.; BRIEGEL, H. J. Multiparty entanglement in graph states. *Phys. Rev. A*, American Physical Society (APS), v. 69, n. 6, p. 062311, jun 2004.
- 57 WALTHER, P. et al. Experimental one-way quantum computing. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 434, n. 7030, p. 169–176, 2005.
- 58 BERGE, C. *The theory of graphs*. Courier Corporation, 2001. ISBN 0486419754. Disponível em: <https://www.ebook.de/de/product/3359853/claude_berge_mathematics_theory_of_graphs.html>.
- 59 BERGE, C. *Graphs and hypergraphs*. North-Holland Pub. Co., 1973.
- 60 THOMAS, P. et al. Efficient generation of entangled multiphoton graph states from a single atom. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 608, n. 7924, p. 677–681, 2022.
- 61 BODIYA, T.; DUAN, L.-M. Scalable generation of graph-state entanglement through realistic linear optics. *Physical review letters*, APS, v. 97, n. 14, p. 143601, 2006.
- 62 ROSSI, M. et al. Quantum hypergraph states. *New J. Phys.*, IOP Publishing, v. 15, n. 11, p. 113022, nov 2013.
- 63 HUANG, J. et al. Generating hypergraph states on a silicon-photon chip. In: OPTICA PUBLISHING GROUP. *CLEO: Fundamental Science*. [S.l.], 2023. p. FM2L–5.
- 64 BANERJEE, S.; MUKHERJEE, A.; PANIGRAHI, P. K. Quantum blockchain using weighted hypergraph states. *Physical Review Research*, APS, v. 2, n. 1, p. 013322, 2020.
- 65 ZHANG, J. et al. Graphical description of local gaussian operations for continuous-variable weighted graph states. *Physical Review A*, APS, v. 78, n. 5, p. 052307, 2008.
- 66 WEEDBROOK, C. et al. Gaussian quantum information. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 84, n. 2, p. 621, 2012.
- 67 ADESSO, G.; RAGY, S.; LEE, A. R. Continuous variable quantum information: Gaussian states and beyond. *Open Systems & Information Dynamics*, World Scientific, v. 21, n. 01n02, p. 1440001, 2014.
- 68 ROSSI, M. et al. Quantum hypergraph states. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 15, n. 11, p. 113022, 2013.
- 69 GHIO, M. et al. Multipartite entanglement detection for hypergraph states. *J. Phys. A*, IOP Publishing, v. 51, n. 4, p. 045302, dec 2017.
- 70 RAU, A.; ALI, M.; ALBER, G. Hastening, delaying, or averting sudden death of quantum entanglement. *Europhysics Letters*, IOP Publishing, v. 82, n. 4, p. 40002, 2008.

- 71 HORODECKI, R. et al. Quantum entanglement. *Rev. Modern Phys.*, American Physical Society (APS), v. 81, n. 2, p. 865–942, jun 2009.
- 72 CHANG, C. S. et al. Observation of three-photon spontaneous parametric down-conversion in a superconducting parametric cavity. *Physical Review X*, APS, v. 10, n. 1, p. 011011, 2020.
- 73 ZHANG, C. et al. Spontaneous parametric down-conversion sources for multiphoton experiments. *Advanced Quantum Technologies*, Wiley Online Library, v. 4, n. 5, p. 2000132, 2021.
- 74 COUTEAU, C. Spontaneous parametric down-conversion. *Contemporary Physics*, Taylor & Francis, v. 59, n. 3, p. 291–304, 2018.
- 75 KOTLER, S. et al. Direct observation of deterministic macroscopic entanglement. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 372, n. 6542, p. 622–625, 2021.
- 76 THOMAS, R. A. et al. Entanglement between distant macroscopic mechanical and spin systems. *Nature Physics*, Nature Publishing Group UK London, v. 17, n. 2, p. 228–233, 2021.
- 77 PIRANDOLA, S. et al. Macroscopic entanglement by entanglement swapping. *Physical Review Letters*, APS, v. 97, n. 15, p. 150403, 2006.
- 78 MARLETTO, C. et al. Entanglement between living bacteria and quantized light witnessed by rabi splitting. *Journal of Physics Communications*, IOP Publishing, v. 2, n. 10, p. 101001, 2018.
- 79 WEINFURTER, H. Experimental bell-state analysis. *Europhysics Letters*, IOP Publishing, v. 25, n. 8, p. 559, 1994.
- 80 WALLMAN, J. et al. Estimating the coherence of noise. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 17, n. 11, p. 113020, 2015.
- 81 GÜHNE, O.; SEEVINCK, M. Separability criteria for genuine multiparticle entanglement. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 12, n. 5, p. 053002, 2010.
- 82 BRUKNER, Č.; ŽUKOWSKI, M.; ZEILINGER, A. The essence of entanglement. *Quantum Arrangements: Contributions in Honor of Michael Horne*, Springer, p. 117–138, 2021.
- 83 GHIRARDI, G.; MARINATTO, L. General criterion for the entanglement of two indistinguishable particles. *Physical Review A*, APS, v. 70, n. 1, p. 012109, 2004.
- 84 BREUER, H.-P. Separability criteria and bounds for entanglement measures. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 39, n. 38, p. 11847, 2006.
- 85 CUNHA, M. M.; FONSECA, A.; SILVA, E. O. Tripartite entanglement: Foundations and applications. *Universe*, MDPI, v. 5, n. 10, p. 209, 2019.
- 86 HILLERY, M.; BUŽEK, V.; BERTHIAUME, A. Quantum secret sharing. *Phys. Rev. A*, American Physical Society (APS), v. 59, n. 3, p. 1829–1834, mar 1999.
- 87 HUBER, M. et al. Detection of high-dimensional genuine multipartite entanglement of mixed states. *Physical review letters*, APS, v. 104, n. 21, p. 210501, 2010.
- 88 TÓTH, G.; GÜHNE, O. Detecting genuine multipartite entanglement with two local measurements. *Physical review letters*, APS, v. 94, n. 6, p. 060501, 2005.

- 89 KU, H.-Y. et al. Hierarchy in temporal quantum correlations. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 98, p. 022104, Aug 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.98.022104>>.
- 90 HENDERSON, L.; VEDRAL, V. Classical, quantum and total correlations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 34, n. 35, p. 6899–6905, aug 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0305-4470/34/35/315>>.
- 91 BRUNNER, N. et al. Publisher's note: Bell nonlocality [rev. mod. phys. 86, 419 (2014)]. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 86, n. 2, p. 839, 2014.
- 92 UOLA, R. et al. Quantum steering. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 92, p. 015001, Mar 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.92.015001>>.
- 93 QURESHI, H. S.; ULLAH, S.; GHAFOR, F. Hierarchy of quantum correlations using a linear beam splitter. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 8, n. 1, p. 1–10, 2018.
- 94 KÖHNKE, S. et al. Quantum correlations beyond entanglement and discord. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 126, p. 170404, Apr 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.170404>>.
- 95 WERNER, R. F. Quantum states with einstein-podolsky-rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Physical Review A*, APS, v. 40, n. 8, p. 4277, 1989.
- 96 WISEMAN, H. M.; JONES, S. J.; DOHERTY, A. C. Steering, entanglement, nonlocality, and the einstein-podolsky-rosen paradox. *Physical review letters*, APS, v. 98, n. 14, p. 140402, 2007.
- 97 CAVALCANTI, E. G. et al. Experimental criteria for steering and the einstein-podolsky-rosen paradox. *Physical Review A*, APS, v. 80, n. 3, p. 032112, 2009.
- 98 MODI, K. et al. The classical-quantum boundary for correlations: Discord and related measures. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 84, n. 4, p. 1655, 2012.
- 99 GIORDA, P.; PARIS, M. G. Gaussian quantum discord. *Physical review letters*, APS, v. 105, n. 2, p. 020503, 2010.
- 100 ADESSO, G.; DATTA, A. Quantum versus classical correlations in gaussian states. *Physical review letters*, APS, v. 105, n. 3, p. 030501, 2010.
- 101 CHEN, Y.-X.; LI, S.-W.; YIN, Z. Quantum correlations in a clusterlike system. *Physical Review A*, APS, v. 82, n. 5, p. 052320, 2010.
- 102 HE, Q.-L. et al. Sudden transition between classical and quantum decoherence in dissipative cavity qed and stationary quantum discord. *Physical Review A*, APS, v. 84, n. 2, p. 022312, 2011.
- 103 VIDAL, G.; WERNER, R. F. Computable measure of entanglement. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 65, p. 032314, Feb 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.65.032314>>.
- 104 GÜHNE, O.; TÓTH, G. Entanglement detection. *Physics Reports*, v. 474, n. 1, p. 1–75, 2009. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157309000623>>.

- 105 WATROUS, J. Bipartite subspaces having no bases distinguishable by local operations and classical communication. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 95, p. 080505, Aug 2005. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.95.080505>>.
- 106 UHLMANN, A. Roofs and convexity. *Entropy*, MDPI, v. 12, n. 7, p. 1799–1832, 2010.
- 107 YAN, M. Extension of convex function. *Journal of Convex Analysis*, v. 21, 07 2012.
- 108 PLENIO, M. B. Logarithmic negativity: A full entanglement monotone that is not convex. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 95, n. 9, p. 090503, aug 2005.
- 109 TÓTH, G.; MORODER, T.; GÜHNE, O. Evaluating convex roof entanglement measures. *Physical review letters*, APS, v. 114, n. 16, p. 160501, 2015.
- 110 AMARAL, B. L. *Emaranhamento em sistemas de dois qubits*. 2010.
- 111 WEI, T.-C.; GOLDBART, P. M. Geometric measure of entanglement and applications to bipartite and multipartite quantum states. *Physical Review A*, APS, v. 68, n. 4, p. 042307, 2003.
- 112 COFFMAN, V.; KUNDU, J.; WOOTTERS, W. K. Distributed entanglement. *Physical Review A*, APS, v. 61, n. 5, p. 052306, 2000.
- 113 QI, X.; GAO, T.; YAN, F. Measuring coherence with entanglement concurrence. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 50, n. 28, p. 285301, 2017.
- 114 SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. *ACM SIGMOBILE mobile computing and communications review*, ACM New York, NY, USA, v. 5, n. 1, p. 3–55, 2001.
- 115 KIM, J. S. Entanglement of formation and monogamy of multi-party quantum entanglement. *Scientific Reports*, Nature Publishing Group UK London, v. 11, n. 1, p. 2364, 2021.
- 116 RAFSANJANI, S. H. et al. Genuinely multipartite concurrence of n-qubit x matrices. *Physical Review A*, APS, v. 86, n. 6, p. 062303, 2012.
- 117 VIDAL, G.; TARRACH, R. Robustness of entanglement. *Physical Review A*, APS, v. 59, n. 1, p. 141, 1999.
- 118 STEINER, M. Generalized robustness of entanglement. *Physical Review A*, APS, v. 67, n. 5, p. 054305, 2003.
- 119 SIMON, C.; KEMPE, J. Robustness of multiparty entanglement. *Physical Review A*, APS, v. 65, n. 5, p. 052327, 2002.
- 120 CHAVES, R.; DAVIDOVICH, L. Robustness of entanglement as a resource. *Physical Review A*, APS, v. 82, n. 5, p. 052308, 2010.
- 121 CHITAMBAR, E.; GOUR, G. Quantum resource theories. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 91, p. 025001, Apr 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.91.025001>>.
- 122 CHITAMBAR, E.; GOUR, G. Quantum resource theories. *Reviews of modern physics*, APS, v. 91, n. 2, p. 025001, 2019.
- 123 CHITAMBAR, E.; HSIEH, M.-H. Relating the resource theories of entanglement and quantum coherence. *Physical review letters*, APS, v. 117, n. 2, p. 020402, 2016.

- 124 SHAHANDEH, F.; SHAHANDEH, F. The resource theory of entanglement. *Quantum Correlations: A Modern Augmentation*, Springer, p. 61–109, 2019.
- 125 CHITAMBAR, E. et al. Everything you always wanted to know about locc (but were afraid to ask). *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 328, p. 303–326, 2014.
- 126 BENNETT, C. H. et al. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Physical Review A*, APS, v. 54, n. 5, p. 3824, 1996.
- 127 VIDAL, G. Entanglement monotones. *Journal of Modern Optics*, Taylor & Francis, v. 47, n. 2-3, p. 355–376, 2000.
- 128 LAMATA, L. et al. Inductive entanglement classification of four qubits under stochastic local operations and classical communication. *Physical Review A*, APS, v. 75, n. 2, p. 022318, 2007.
- 129 TERHAL, B. M. Bell inequalities and the separability criterion. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 271, n. 5-6, p. 319–326, 2000.
- 130 GÜHNE, O. *Detecting quantum entanglement Entanglement witnesses and uncertainty relations*. Tese (Doutorado) — Universität Hannover., 2004. Disponível em: <http://inis.iaea.org/search/search.aspx?orig_q=RN:36041967>.
- 131 JUNGNETSCH, B.; MORODER, T.; GÜHNE, O. Entanglement witnesses for graph states: General theory and examples. *Phys. Rev. A*, American Physical Society (APS), v. 84, n. 3, p. 032310, sep 2011.
- 132 BRANDAO, F. G. S. L. Quantifying entanglement with witness operators. *Phys. Rev. A*, APS, v. 72, n. 2, p. 022310, aug 2005.
- 133 CHRUSCIŃSKI, D.; SARBICKI, G. Entanglement witnesses: construction, analysis and classification. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 47, n. 48, p. 483001, 2014.
- 134 SIMON, S.; RAJAGOPALAN, S.; SIMON, R. The structure of states and maps in quantum theory. *Pramana*, Springer, v. 73, p. 471–483, 2009.
- 135 ŻYCZKOWSKI, K.; BENGTTSSON, I. On duality between quantum maps and quantum states. *Open systems & information dynamics*, Springer, v. 11, n. 1, p. 3–42, 2004.
- 136 BENGTTSSON, I.; ŻYCZKOWSKI, K. *Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement*. [S.l.]: Cambridge university press, 2017.
- 137 HORODECKI, R.; HORODECKI, P.; HORODECKI, M. Violating bell inequality by mixed spin-1/2 states: necessary and sufficient condition. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 200, n. 5, p. 340–344, 1995.
- 138 WERNER, R. F.; WOLF, M. M. Bell's inequalities for states with positive partial transpose. *Physical Review A*, APS, v. 61, n. 6, p. 062102, 2000.
- 139 VALLONE, G. et al. Hyperentanglement witness. *Physical Review A*, APS, v. 78, n. 6, p. 062305, 2008.
- 140 HORODECKI, R. Quantum information. *Acta Physica Polonica A*, v. 139, n. 3, p. 197, 2021.

- 141 TERHAL, B. M.; WOLF, M. M.; DOHERTY, A. C. Quantum entanglement: A modern perspective. *Physics Today*, AIP Publishing, v. 56, n. 4, p. 46–52, 2003.
- 142 HORODECKI, M.; HORODECKI, P.; HORODECKI, R. Mixed-state entanglement and distillation: Is there a “bound” entanglement in nature? *Physical Review Letters*, APS, v. 80, n. 24, p. 5239, 1998.
- 143 HORODECKI, M.; HORODECKI, P.; HORODECKI, R. Inseparable two spin-1/2 density matrices can be distilled to a singlet form. *Physical Review Letters*, APS, v. 78, n. 4, p. 574, 1997.
- 144 FIURÁŠEK, J. Optimal probabilistic cloning and purification of quantum states. *Physical Review A*, APS, v. 70, n. 3, p. 032308, 2004.
- 145 BRUSS, D.; PERES, A. Construction of quantum states with bound entanglement. *Physical Review A*, APS, v. 61, n. 3, p. 030301, 2000.
- 146 BREUER, H.-P. Optimal entanglement criterion for mixed quantum states. *Physical Review Letters*, APS, v. 97, n. 8, p. 080501, 2006.
- 147 BENNETT, C. H. et al. Unextendible product bases and bound entanglement. *Physical Review Letters*, APS, v. 82, n. 26, p. 5385, 1999.
- 148 PERES, A. All the bell inequalities. *Foundations of Physics*, Springer, v. 29, n. 4, p. 589–614, 1999.
- 149 VÉRTESI, T.; BRUNNER, N. Disproving the peres conjecture by showing bell nonlocality from bound entanglement. *Nature communications*, Nature Publishing Group, v. 5, n. 1, p. 1–5, 2014.
- 150 IMAI, S. et al. Bound entanglement from randomized measurements. *Physical Review Letters*, APS, v. 126, n. 15, p. 150501, 2021.
- 151 ALMEIDA, M. P. et al. Environment-induced sudden death of entanglement. *science*, American Association for the Advancement of Science, v. 316, n. 5824, p. 579–582, 2007.
- 152 YU, T.; EBERLY, J. Finite-time disentanglement via spontaneous emission. *Physical Review Letters*, APS, v. 93, n. 14, p. 140404, 2004.
- 153 HERTERICH, E. Sudden death of entanglement for non-locality and concurrence: A review of entanglement sudden death behaviour of non-locality and concurrence in commonly used entangled state classes under influence of decay and dephasing noise dynamics. 2019.
- 154 MARTINELLI, M. *Emaranhamento em variáveis contínuas, Morte Súbita, e Além*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2011.
- 155 BARBOSA, F. et al. Disentanglement in bipartite continuous-variable systems. *Physical Review A*, APS, v. 84, n. 5, p. 052330, 2011.
- 156 METWALLY, N.; ELEUCH, H.; OBADA, A. Sudden death and rebirth of entanglement for different dimensional systems driven by a classical random external field. *Laser Physics Letters*, IOP Publishing, v. 13, n. 10, p. 105206, 2016.
- 157 WANG, F. et al. Observation of entanglement sudden death and rebirth by controlling a solid-state spin bath. *Physical Review B*, APS, v. 98, n. 6, p. 064306, 2018.

- 158 TOLKUNOV, D.; PRIVMAN, V.; ARAVIND, P. K. Decoherence of a measure of entanglement. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 71, p. 060308, Jun 2005. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.71.060308>>.
- 159 ROSZAK, K.; MACHNIKOWSKI, P. Complete disentanglement by partial pure dephasing. *Physical Review A*, APS, v. 73, n. 2, p. 022313, 2006.
- 160 YÖNAÇ, M.; YU, T.; EBERLY, J. Sudden death of entanglement of two jaynes–cummings atoms. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, IOP Publishing, v. 39, n. 15, p. S621, 2006.
- 161 CHAKRABORTY, S.; SARMA, A. K. Delayed sudden death of entanglement at exceptional points. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 100, p. 063846, Dec 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.100.063846>>.
- 162 SINGH, A. et al. Manipulation of entanglement sudden death in an all-optical setup. *JOSA B*, Optical Society of America, v. 34, n. 3, p. 681–690, 2017.
- 163 ENRÍQUEZ, M.; WINTROWICZ, I.; ŻYCZKOWSKI, K. Maximally entangled multipartite states: A brief survey. *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing, v. 698, p. 012003, mar 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1742-6596/698/1/012003>>.
- 164 TÓTH, G.; GÜHNE, O. Entanglement detection in the stabilizer formalism. *Phys. Rev. A*, American Physical Society (APS), v. 72, n. 2, p. 022340, aug 2005.
- 165 MARKHAM, D.; SANDERS, B. C. Graph states for quantum secret sharing. *Phys. Rev. A*, American Physical Society (APS), v. 78, n. 4, p. 042309, oct 2008.
- 166 WANG, M. et al. Einstein-podolsky-rosen steering in gaussian weighted graph states. *Phys. Rev. A*, American Physical Society (APS), v. 100, n. 2, p. 022328, aug 2019.
- 167 GÜHNE, O. et al. Bell inequalities for graph states. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 95, n. 12, p. 120405, sep 2005.
- 168 BUSCEMI, F. All entangled quantum states are nonlocal. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 108, n. 20, p. 200401, may 2012.
- 169 WAGNER, T.; KAMPERMANN, H.; BRUSS, D. Analysis of quantum error correction with symmetric hypergraph states. *J. Phys. A*, IOP Publishing, v. 51, n. 12, p. 125302, feb 2018.
- 170 GACHECHILADZE, M.; BUDRONI, C.; GÜHNE, O. Extreme violation of local realism in quantum hypergraph states. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 116, n. 7, p. 070401, feb 2016.
- 171 ROSSI, M.; BRUSS, D.; MACCHIAVELLO, C. Hypergraph states in grover's quantum search algorithm. *Phys. Scripta*, IOP Publishing, T160, n. T160, p. 014036, apr 2014.
- 172 DUTTA, S.; SARKAR, R.; PANIGRAHI, P. K. Permutation symmetric hypergraph states and multipartite quantum entanglement. *Internat. J. Theoret. Phys.*, Springer, v. 58, n. 11, p. 1–18, sep 2019.
- 173 LYONS, D. W. et al. Local pauli stabilizers of symmetric hypergraph states. *J. Phys. A*, IOP Publishing, v. 50, n. 24, p. 245303, may 2017.

- 174 TAKEUCHI, Y.; MORIMAE, T.; HAYASHI, M. Quantum computational universality of hypergraph states with pauli-x and z basis measurements. *Scientific Reports*, Springer Science and Business Media LLC, v. 9, n. 1, p. 1–14, sep 2019.
- 175 LIM, Y. L. et al. Repeat-until-success quantum computing using stationary and flying qubits. *Phys. Rev. A*, APS, v. 73, n. 1, p. 012304, jan 2006.
- 176 ZHU, H.; HAYASHI, M. Efficient verification of hypergraph states. *Phys. Rev. Applied*, American Physical Society (APS), v. 12, n. 5, p. 054047, nov 2019.
- 177 HEIN, M. et al. Entanglement in graph states and its applications. In: *Quantum Computers, Algorithms and Chaos*. City: IOS Press, 2006. v. 162, p. 115–218. ISBN 9781614990185. ISSN 0074-784X.
- 178 HUANG, J. et al. Chip-based photonic graph states. *AAPPS Bulletin*, Springer, v. 33, n. 1, p. 14, 2023.
- 179 RUSSO, A.; BARNES, E.; ECONOMOU, S. E. Photonic graph state generation from quantum dots and color centers for quantum communications. *Physical Review B*, APS, v. 98, n. 8, p. 085303, 2018.
- 180 BENJAMIN, S. C. et al. Brokered graph-state quantum computation. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 8, n. 8, p. 141, 2006.
- 181 GOTTESMAN, D. *Stabilizer codes and quantum error correction*. [S.l.]: California Institute of Technology, 1997.
- 182 VEITCH, V. et al. The resource theory of stabilizer quantum computation. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 16, n. 1, p. 013009, 2014.
- 183 TERHAL, B. M. Quantum error correction for quantum memories. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 87, n. 2, p. 307, 2015.
- 184 GACHECHILADZE, M.; GÜHNE, O.; MIYAKE, A. Changing the circuit-depth complexity of measurement-based quantum computation with hypergraph states. *Physical Review A*, APS, v. 99, n. 5, p. 052304, 2019.
- 185 FUJII, G. Measurement-based quantum computation using two-component becs. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 98, n. 6, p. 065109, 2023.
- 186 NEST, M. Van den et al. Universal resources for measurement-based quantum computation. *Physical review letters*, APS, v. 97, n. 15, p. 150504, 2006.
- 187 TAKEUCHI, Y.; MORIMAE, T.; HAYASHI, M. Quantum computational universality of hypergraph states with pauli-x and z basis measurements. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 9, n. 1, p. 1–14, 2019.
- 188 TAME, M. S. et al. Experimental realization of deutsch’s algorithm in a one-way quantum computer. *Physical Review Letters*, APS, v. 98, n. 14, p. 140501, 2007.
- 189 SU, X. et al. Gate sequence for continuous variable one-way quantum computation. *Nature communications*, Nature Publishing Group UK London, v. 4, n. 1, p. 2828, 2013.

- 190 BARZ, S. Quantum computing with photons: introduction to the circuit model, the one-way quantum computer, and the fundamental principles of photonic experiments. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, IOP Publishing, v. 48, n. 8, p. 083001, 2015.
- 191 PREVEDEL, R. et al. Experimental realization of a quantum game on a one-way quantum computer. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 9, n. 6, p. 205, 2007.
- 192 DU, J. et al. Experimental realization of quantum games on a quantum computer. *Physical Review Letters*, APS, v. 88, n. 13, p. 137902, 2002.
- 193 FORTNOW, L. One complexity theorist's view of quantum computing. *Theoretical Computer Science*, Elsevier, v. 292, n. 3, p. 597–610, 2003.
- 194 PAUKA, S. et al. A cryogenic cmos chip for generating control signals for multiple qubits. *Nature Electronics*, Nature Publishing Group UK London, v. 4, n. 1, p. 64–70, 2021.
- 195 DYAKONOV, M. The case against quantum computing: The proposed strategy relies on manipulating with high precision an unimaginably huge number of variables. *IEEE Spectrum*, 2018.
- 196 DIVINCENZO, D. P. The physical implementation of quantum computation. *Fortschritte der Physik: Progress of Physics*, Wiley Online Library, v. 48, n. 9-11, p. 771–783, 2000.
- 197 GONZALEZ-ZALBA, M. et al. Scaling silicon-based quantum computing using cmos technology. *Nature Electronics*, Nature Publishing Group UK London, v. 4, n. 12, p. 872–884, 2021.
- 198 REILLY, D. Challenges in scaling-up the control interface of a quantum computer. In: IEEE. *2019 IEEE International Electron Devices Meeting (IEDM)*. [S.l.], 2019. p. 31–7.
- 199 WENDIN, G. Scalable solid-state qubits: challenging decoherence and read-out. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 361, n. 1808, p. 1323–1338, 2003.
- 200 KAK, S. The initialization problem in quantum computing. *Foundations of Physics*, Springer, v. 29, p. 267–279, 1999.
- 201 SOUZA, A. M.; ALVAREZ, G. A.; SUTER, D. Experimental protection of quantum gates against decoherence and control errors. *Physical Review A*, APS, v. 86, n. 5, p. 050301, 2012.
- 202 ZHANG, J.; SUTER, D. Experimental protection of two-qubit quantum gates against environmental noise by dynamical decoupling. *Physical review letters*, APS, v. 115, n. 11, p. 110502, 2015.
- 203 CHOW, J. M. et al. Universal quantum gate set approaching fault-tolerant thresholds with superconducting qubits. *Physical review letters*, APS, v. 109, n. 6, p. 060501, 2012.
- 204 VLASOV, A. Y. Clifford algebras and universal sets of quantum gates. *Physical Review A*, APS, v. 63, n. 5, p. 054302, 2001.
- 205 PLA, J. J. et al. High-fidelity readout and control of a nuclear spin qubit in silicon. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 496, n. 7445, p. 334–338, 2013.
- 206 VEPSÄLÄINEN, A. P. et al. Impact of ionizing radiation on superconducting qubit coherence. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 584, n. 7822, p. 551–556, 2020.

- 207 QU, R. et al. Encoding hypergraphs into quantum states. *Phys. Rev. A*, APS, v. 87, n. 2, p. 022311, feb 2013.
- 208 BANERJEE, A. On the spectrum of hypergraphs. *Linear Algebra and its Applications*, Elsevier, v. 614, p. 82–110, 2021.
- 209 WANG, L.; EGOROVA, E.; MOKRYAKOV, A. Development of hypergraph theory. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, Springer, v. 57, p. 109–114, 2018.
- 210 COOPER, J.; DUTLE, A. Spectra of uniform hypergraphs. *Linear Algebra and its applications*, Elsevier, v. 436, n. 9, p. 3268–3292, 2012.
- 211 BRETTO, A. *Hypergraph theory*. [S.l.]: Springer, 2013.
- 212 BRYAN, J. et al. Locally maximally entangled states of multipart quantum systems. *Quantum*, Verein zur Förderung des Open Access Publizierens in den Quantenwissenschaften, v. 3, p. 115, 2019.
- 213 MAKMAL, A. et al. Entanglement of π -lme states and the sat problem. *arXiv preprint arXiv:1405.7429*, 2014.
- 214 SUNG, Y. et al. Realization of high-fidelity cz and z z-free iswap gates with a tunable coupler. *Physical Review X*, APS, v. 11, n. 2, p. 021058, 2021.
- 215 GU, X.; CHEN, L.; KRENN, M. Quantum experiments and hypergraphs: Multiphoton sources for quantum interference, quantum computation, and quantum entanglement. *Phys. Rev. A*, American Physical Society (APS), v. 101, n. 3, p. 033816, 2020.
- 216 DEUTSCH, D.; JOZSA, R. Rapid solution of problems by quantum computation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 439, n. 1907, p. 553–558, 1992.
- 217 GROVER, L. K. A fast quantum mechanical algorithm for database search. *arXiv preprint quant-ph/9605043*, 1996.
- 218 WILLIAMS, C. P. *Explorations in quantum computing*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010.
- 219 SHIMONY, A. A. shimony, ann. ny acad. sci. 755, 675 (1995). *Ann. NY Acad. Sci.*, v. 755, p. 675, 1995.
- 220 WEI, T.-C.; GOLDBART, P. M. Geometric measure of entanglement and applications to bipartite and multipartite quantum states. *Physical Review A*, APS, v. 68, n. 4, p. 042307, 2003.
- 221 FATTAL, D. et al. Entanglement in the stabilizer formalism. *arXiv preprint quant-ph/0406168*, 2004.
- 222 SCHNITZER, H. J. Hypergraph states in $su(n)$, n odd prime, chern-simons theory. *arXiv preprint arXiv:2102.02281*, 2021.
- 223 CAMPBELL, E. T.; TERHAL, B. M.; VUILLOT, C. Roads towards fault-tolerant universal quantum computation. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 549, n. 7671, p. 172–179, 2017.

- 224 CHEN, J.; YAN, Y.; ZHOU, Y. Magic of quantum hypergraph states. *arXiv preprint arXiv:2308.01886*, 2023.
- 225 CAMPBELL, E. T.; BROWNE, D. E. Bound states for magic state distillation in fault-tolerant quantum computation. *Physical review letters*, APS, v. 104, n. 3, p. 030503, 2010.
- 226 LEONE, L.; OLIVIERO, S. F.; HAMMA, A. Stabilizer rényi entropy. *Physical Review Letters*, APS, v. 128, n. 5, p. 050402, 2022.
- 227 GACHECHILADZE, M.; TSIMAKURIDZE, N.; GÜHNE, O. Graphical description of unitary transformations on hypergraph states. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 50, n. 19, p. 19LT01, 2017.
- 228 STEINHOFF, F. E. et al. Qudit hypergraph states. *Physical Review A*, APS, v. 95, n. 5, p. 052340, 2017.
- 229 XIONG, F.-L. et al. Qudit hypergraph states and their properties. *Physical Review A*, APS, v. 97, n. 1, p. 012323, 2018.
- 230 MALPETTI, D.; BELLISARIO, A.; MACCHIAVELLO, C. Multipartite entanglement in qudit hypergraph states. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 55, n. 41, p. 415301, 2022.
- 231 KEET, A. et al. Quantum secret sharing with qudit graph states. *Physical Review A*, APS, v. 82, n. 6, p. 062315, 2010.
- 232 LOOI, S. Y. et al. Quantum-error-correcting codes using qudit graph states. *Physical Review A*, APS, v. 78, n. 4, p. 042303, 2008.
- 233 BRAUNSTEIN, S. L.; LOOCK, P. van. Quantum information with continuous variables. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 77, p. 513–577, Jun 2005. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.77.513>>.
- 234 LAURAT, J. et al. Entanglement of two-mode gaussian states: characterization and experimental production and manipulation. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, IOP Publishing, v. 7, n. 12, p. S577, 2005.
- 235 WEYL, H. The classical groups. In: *The Classical Groups*. [S.l.]: Princeton university press, 2016.
- 236 HEATHCOTE, A. Unbounded operators and the incompleteness of quantum mechanics. *Philosophy of Science*, Philosophy of Science Association, v. 57, n. 3, p. 523–534, 1990.
- 237 WANG, X.-B. et al. Quantum information with gaussian states. *Physics reports*, Elsevier, v. 448, n. 1-4, p. 1–111, 2007.
- 238 MANDILARA, A.; KARPOV, E.; CERF, N. J. Extending hudson’s theorem to mixed quantum states. *Physical Review A*, APS, v. 79, n. 6, p. 062302, 2009.
- 239 HUDSON, R. L. When is the wigner quasi-probability density non-negative? *Reports on Mathematical Physics*, Elsevier, v. 6, n. 2, p. 249–252, 1974.
- 240 EISERT, J.; WOLF, M. Continuous-variable quantum information science. *Quantum Information with Continuous Variables, Part II: Optical continuous variables*. Imperial College Press, London, 2005.

- 241 YUEN, H. P. Two-photon coherent states of the radiation field. *Physical Review A*, APS, v. 13, n. 6, p. 2226, 1976.
- 242 HONG-YI, F.; JUN-HUA, C. Symplectic group representation of the two-mode squeezing operator in the coherent state basis. *Communications in Theoretical Physics*, IOP Publishing, v. 40, n. 5, p. 589, 2003.
- 243 BARNETT, S. M.; VACCARO, J. A. The quantum phase operator: A review. Taylor & Francis, 2007.
- 244 PARIS, M. G. Displacement operator by beam splitter. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 217, n. 2-3, p. 78–80, 1996.
- 245 CHEN, M.; MENICUCCI, N. C.; PFISTER, O. Experimental realization of multipartite entanglement of 60 modes of a quantum optical frequency comb. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 112, p. 120505, Mar 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.120505>>.
- 246 MENICUCCI, N. C.; FLAMMIA, S. T.; LOOCK, P. van. Graphical calculus for gaussian pure states. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 83, p. 042335, Apr 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.83.042335>>.
- 247 WALSCHAERS, M. et al. Tailoring non-gaussian continuous-variable graph states. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 121, p. 220501, Nov 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.220501>>.
- 248 EISERT, J.; PLENIO, M. B. Conditions for the local manipulation of gaussian states. *Physical review letters*, APS, v. 89, n. 9, p. 097901, 2002.
- 249 WANG, Y.; FANG, K. Continuous-variable graph states for quantum metrology. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 102, p. 052601, Nov 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.102.052601>>.
- 250 SANSVINI, F.; PARIGI, V. Continuous variables graph states shaped as complex networks: optimization and manipulation. *Entropy*, MDPI, v. 22, n. 1, p. 26, 2019.
- 251 XU, J. Quantifying coherence of gaussian states. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 93, p. 032111, Mar 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.93.032111>>.
- 252 GOTTESMAN, D.; KITAEV, A.; PRESKILL, J. Encoding a qubit in an oscillator. *Physical Review A*, APS, v. 64, n. 1, p. 012310, 2001.
- 253 RALPH, T. C. et al. Quantum computation with optical coherent states. *Physical Review A*, APS, v. 68, n. 4, p. 042319, 2003.
- 254 LLOYD, S.; BRAUNSTEIN, S. L. Quantum computation over continuous variables. *Physical Review Letters*, APS, v. 82, n. 8, p. 1784, 1999.
- 255 MIYATA, K. et al. Implementation of a quantum cubic gate by an adaptive non-gaussian measurement. *Physical Review A*, APS, v. 93, n. 2, p. 022301, 2016.
- 256 BARTLETT, S. D. et al. Efficient classical simulation of continuous variable quantum information processes. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 88, p. 097904, Feb 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.88.097904>>.

- 257 MARI, A.; EISERT, J. Positive wigner functions render classical simulation of quantum computation efficient. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 109, p. 230503, Dec 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.230503>>.
- 258 LAMI, L. et al. Gaussian quantum resource theories. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 98, p. 022335, Aug 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.98.022335>>.
- 259 TAKAGI, R.; ZHUANG, Q. Convex resource theory of non-gaussianity. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 97, p. 062337, Jun 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.97.062337>>.
- 260 WALSCHAERS, M. et al. Emergent complex quantum networks in continuous-variables non-gaussian states. *Quantum Science and Technology*, IOP Publishing, v. 8, n. 3, p. 035009, 2023.
- 261 MAREK, P.; FILIP, R.; FURUSAWA, A. Deterministic implementation of weak quantum cubic nonlinearity. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 84, p. 053802, Nov 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.84.053802>>.
- 262 OURJOUNTSEV, A. et al. Increasing entanglement between gaussian states by coherent photon subtraction. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 98, p. 030502, Jan 2007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.030502>>.
- 263 RA, Y.-S. et al. Tomography of a mode-tunable coherent single-photon subtractor. *Phys. Rev. X*, American Physical Society, v. 7, p. 031012, Jul 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.7.031012>>.
- 264 AVERCHENKO, V. A.; THIEL, V.; TREPS, N. Nonlinear photon subtraction from a multimode quantum field. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 89, p. 063808, Jun 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.89.063808>>.
- 265 ZAVATTA, A.; PARIGI, V.; BELLINI, M. Experimental nonclassicality of single-photon-added thermal light states. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 75, p. 052106, May 2007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.75.052106>>.
- 266 BRAUNSTEIN, S. L. Squeezing as an irreducible resource. *Physical Review A*, APS, v. 71, n. 5, p. 055801, 2005.
- 267 LOOCK, P. van; WEEDBROOK, C.; GU, M. Building gaussian cluster states by linear optics. *Physical Review A*, APS, v. 76, n. 3, p. 032321, 2007.
- 268 ASAVANANT, W. et al. Generation of time-domain-multiplexed two-dimensional cluster state. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 366, n. 6463, p. 373–376, 2019.
- 269 CAI, Y. et al. Multimode entanglement in reconfigurable graph states using optical frequency combs. *Nature communications*, Nature Publishing Group UK London, v. 8, n. 1, p. 15645, 2017.
- 270 CHEN, M.; MENICUCCI, N. C.; PFISTER, O. Experimental realization of multipartite entanglement of 60 modes of a quantum optical frequency comb. *Physical review letters*, APS, v. 112, n. 12, p. 120505, 2014.

- 271 GNATENKO, K. P. et al. Continuous variable graph states: entanglement and graph properties. *arXiv preprint arXiv:2112.06059*, 2021.
- 272 ZHANG, J. et al. Anyon statistics with continuous variables. *Physical Review A*, APS, v. 78, n. 5, p. 052121, 2008.
- 273 SALAVRAKOS, A. et al. Bell inequalities tailored to maximally entangled states. *Physical review letters*, APS, v. 119, n. 4, p. 040402, 2017.
- 274 EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 47, p. 777–780, May 1935. Disponible em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.47.777>>.
- 275 BUNGE, M. *La ciencia: su método y su filosofía*. [S.l.]: Laetoli, 2018. v. 1.
- 276 BACCARI, F. et al. Scalable bell inequalities for qubit graph states and robust self-testing. *Physical review letters*, APS, v. 124, n. 2, p. 020402, 2020.
- 277 TASCA, D. et al. Continuous-variable quantum computation with spatial degrees of freedom of photons. *Physical Review A*, APS, v. 83, n. 5, p. 052325, 2011.
- 278 KNILL, E.; LAFLAMME, R.; MILBURN, G. J. A scheme for efficient quantum computation with linear optics. *nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 409, n. 6816, p. 46–52, 2001.
- 279 GIMENO-SEGOVIA, M. et al. From three-photon greenberger-horne-zeilinger states to ballistic universal quantum computation. *Physical review letters*, APS, v. 115, n. 2, p. 020502, 2015.
- 280 LIU, N. et al. Power of one qumode for quantum computation. *Physical Review A*, APS, v. 93, n. 5, p. 052304, 2016.
- 281 LOOCK, P. V. Optical hybrid approaches to quantum information. *Laser & Photonics Reviews*, Wiley Online Library, v. 5, n. 2, p. 167–200, 2011.
- 282 SU, X. et al. Experimental preparation of eight-partite cluster state for photonic qumodes. *Optics letters*, Optica Publishing Group, v. 37, n. 24, p. 5178–5180, 2012.
- 283 ZHANG, W.-M.; GILMORE, R. et al. Coherent states: Theory and some applications. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 62, n. 4, p. 867, 1990.
- 284 WALLS, D. F. Squeezed states of light. *nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 306, n. 5939, p. 141–146, 1983.
- 285 ANDERSEN, U. L. et al. Hybrid discrete-and continuous-variable quantum information. *Nature Physics*, Nature Publishing Group UK London, v. 11, n. 9, p. 713–719, 2015.
- 286 ERDOS, P.; RÉNYI, A. On random graphs i. *Publicationes Mathematicae*, v. 6, p. 290–297, 1959.
- 287 WU, J.-Y. et al. Randomized graph states and their entanglement properties. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 89, n. 5, p. 052335, 2014.
- 288 SALEM, V.; SILVA, A. A.; ANDRADE, F. M. Multipartite entanglement sudden death and birth in randomized hypergraph states. *arXiv preprint arXiv:2310.20418*, 2023.

- 289 DUDEK, A. et al. Embedding the erdős–rényi hypergraph into the random regular hypergraph and hamiltonicity. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Elsevier, v. 122, p. 719–740, 2017.
- 290 BARTHELEMY, M. Class of models for random hypergraphs. *Physical Review E*, APS, v. 106, n. 6, p. 064310, 2022.
- 291 SUN, H.; BIANCONI, G. Higher-order percolation processes on multiplex hypergraphs. *Physical Review E*, APS, v. 104, n. 3, p. 034306, 2021.
- 292 ORÚS, R. Tensor networks for complex quantum systems. *Nature Reviews Physics*, Nature Publishing Group UK London, v. 1, n. 9, p. 538–550, 2019.
- 293 ZHOU, Y.; HAMMA, A. Entanglement of random hypergraph states. *Physical Review A*, APS, v. 106, n. 1, p. 012410, 2022.
- 294 HILL, S.; WOOTTERS, W. K. Entanglement of a pair of quantum bits. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 78, n. 26, p. 5022–5025, 1997.
- 295 ACIN, A. et al. Classification of mixed three-qubit states. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 87, n. 4, p. 040401, jul 2001.
- 296 PERES, A. Separability criterion for density matrices. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 77, n. 8, p. 1413–1415, aug 1996.
- 297 JUNGNETSCH, B.; MORODER, T.; GÜHNE, O. Taming multiparticle entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 106, n. 19, p. 190502, may 2011.
- 298 BASTIAN. *PPTMixer: A tool to detect genuine multipartite entanglement*. 2021. Disponível em: <<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/30968-pptmixer-a-tool-to-detect-genuine-multipartite-entanglement>>.
- 299 LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in matlab. In: *In Proceedings of the CACSD Conference*. Taipei, Taiwan: [s.n.], 2004.
- 300 MOSEK ApS. *The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual. Version 9.3*. [S.l.], 2021. Disponível em: <<http://docs.mosek.com/9.3/toolbox/index.html>>.
- 301 ANDREOTTI, E.; MULAS, R. Spectra of signless normalized laplace operators for hypergraphs. *arXiv:2005.14484*, 2020.
- 302 LU, C.-Y. et al. Experimental entanglement of six photons in graph states. *Nature physics*, Nature Publishing Group UK London, v. 3, n. 2, p. 91–95, 2007.
- 303 QU, R. et al. Relationship among locally maximally entangleable states, w states, and hypergraph states under local unitary transformations. *Physical Review A*, APS, v. 87, n. 5, p. 052331, 2013.
- 304 CAVALCANTI, D. et al. Quantum networks reveal quantum nonlocality. *Nature communications*, Nature Publishing Group UK London, v. 2, n. 1, p. 184, 2011.
- 305 BRANCIARD, C.; GISIN, N.; PIRONIO, S. Characterizing the nonlocal correlations created via entanglement swapping. *Physical review letters*, APS, v. 104, n. 17, p. 170401, 2010.

306 CAVALCANTI, D.; RABELO, R.; SCARANI, V. Nonlocality tests enhanced by a third observer. *Physical review letters*, APS, v. 108, n. 4, p. 040402, 2012.

307 BRANCIARD, C. et al. Bilocal versus nonbilocal correlations in entanglement-swapping experiments. *Physical Review A*, APS, v. 85, n. 3, p. 032119, 2012.

APÊNDICE A – Operações gaussianas sobre estados gaussianos

Neste apêndice, apresentamos parte do trabalho realizado durante o doutorado-sanduiche no Institut de Ciències Fotòniques (ICFO) em Barcelona, Espanha. Uma vez que não tratamos diretamente de estados hipergrafo nesse projeto, foi razoável alocá-lo à parte.

A bilocalidade gaussiana é um conceito importante na área de informação quântica e criptografia quântica. Esta refere-se à capacidade de dois sistemas quânticos distantes se comportarem de maneira correlacionada, sem que haja comunicação entre eles após sua preparação. Na bilocalidade gaussiana, os sistemas quânticos são descritos por distribuições de Wigner, que são funções de probabilidade para a posição e momento dos sistemas. Essas distribuições de Wigner são geralmente gaussianas, o que significa que são descritas por uma função gaussiana. Dominar as correlações entre os sistemas quânticos pode ser útil para criar chaves de criptografia quântica que são seguras contra espionagem e violação. Além disso, a bilocalidade gaussiana é um exemplo de uma classe mais ampla de correlações quânticas de emaranhamento, cruciais para a computação quântica e outras aplicações. Com o tempo, novas aplicações podem ser descobertas e a bilocalidade gaussiana pode se tornar ainda mais importante no desenvolvimento de tecnologias quânticas avançadas (304, 305, 306, 307).

Desigualdades do tipo CHSH estão entre as mais utilizadas atualmente para estudo da não-localidade. Aqui, estudamos a possibilidade de violação de uma desigualdade do tipo CHSH mediante detecção homódina com estados gaussianos. Veremos a seguir que a resposta é negativa, de modo que de forma semelhante ao fato de que operações gaussianas sobre estados gaussianos não formam uma base completa para computação quântica, medidas gaussianas homódinas sobre estados gaussianos não são capazes de apresentar violação da desigualdade CHSH. Todavia, aqui apresentaremos somente uma parte dos resultados parciais obtidos até o momento.

Se temos uma distribuição entre três partes, a saber, Alice, Bob e Charlie, como ilustrado na figura (32), um sistema que admita variáveis ocultas locais deve permitir que escrevamos o sistema da seguinte maneira (307):

$$P(a, b, c|x, y, z) = \int g_1(\lambda_1)g_2(\lambda_2)p_A(a|\lambda_1, x)p_B(b|\lambda_1, \lambda_2, y)p_C(c|\lambda_2, z)d\lambda_1d\lambda_2, \quad (\text{A.1})$$

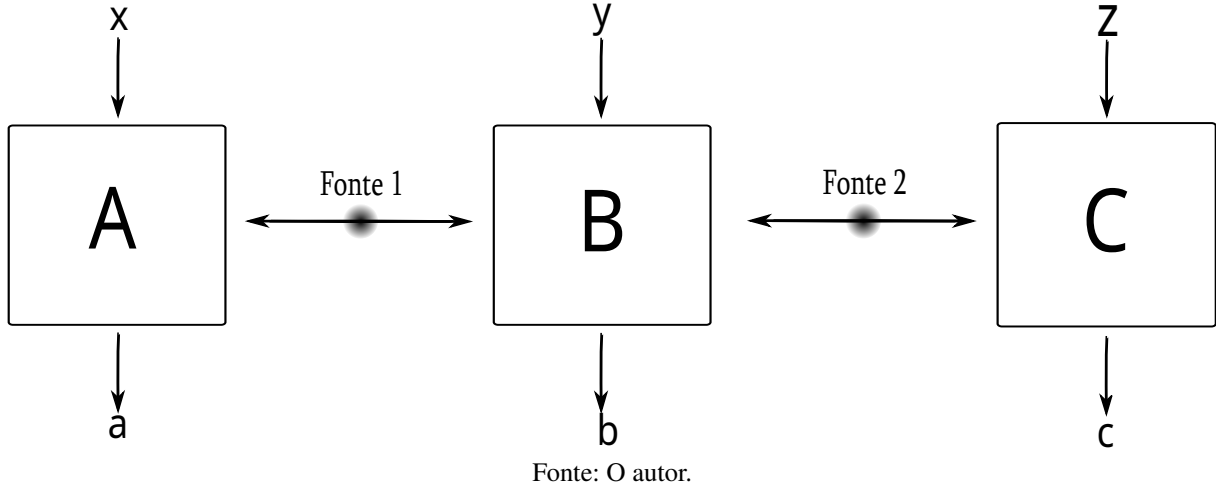
onde x, y, z denotam as medidas de *input* escolhidas por Alice, Bob e Charlie, enquanto a, b, c representam os *outputs* possíveis. $g_{1,2}(\lambda)$ são as distribuições de probabilidades sobre os conjuntos de estados possíveis λ , que são determinados pelas variáveis ocultas locais. Também é assumido que as escolhas de medida x, y, z são independentes de λ .

Logo, o primeiro questionamento a ser levantado é se a atuação de operações e medidas gaussianas¹ sobre uma distribuição compartilhando um estado gaussiano entre as partes A e B e outra compartilhando entre B e C é bilocal ou não.

Primeiramente, escrevemos as funções de Wigner para o estado compartilhado entre Alice e Bob, $W_1(r_A, r_B^{(1)})$ e $W_2(r_B^{(2)}, r_C)$, onde r_A representam os vetores $N_A^{(1)}$ representando as

¹ Aqui, por medidas gaussianas entenda-se medidas homódinas.

Figura 32 – Cenário típico de bilocalidade com *entanglement swapping* no qual as três partes, Alice, Bob e Charlie, compartilham duas fontes S_1 e S_2 que emitem pares independentes de partículas em estados quânticos ρ_1, ρ_2 . Nesse tipo de sistema, Bob realiza uma medida local y sobre cada uma das duas partículas que ele recebe de cada uma das duas fontes, Alice e Charlie, obtendo um resultado de saída b . A depender do resultado de Bob, os sistemas de Alice e Charlie acabam em um dos possíveis estados emaranhados. Então, Alice e Charlie aplicam medidas x e z , respectivamente, em cada uma de suas partículas, obtendo resultados a e c . Esse experimento gera uma distribuição de probabilidade conjunta do tipo $P(a,b,c|x,y,z)$.



operações gaussianas

$$r_a \rightarrow r'_A = S_A(r_A) + d_A \quad (\text{A.2})$$

$$r_B^{(1)}, r_B^{(2)} \rightarrow r_B'^{(1)}, r_B'^{(2)} = S_B(r_B^{(1)})(r_B^{(2)}) + d_B \quad (\text{A.3})$$

$$r_C \rightarrow r'_C = S_C(r_C) + d_C, \quad (\text{A.4})$$

que são matrizes simpléticas S_X de dimensão $2(N_B^{(1)} + N_B^{(2)})$ e $2N_C$ respectivamente. A função de Wigner do novo estado pode então ser expressa por

$$\tilde{W}(r_A, r_B^{(1)}, r_B^{(2)}, r_C) = W_1(r'_A, r_B'^{(1)})W_2(r_B'^{(2)}, r'_C) \quad (\text{A.5})$$

Observando que qualquer medida de rotação de quadratura escolhida (q_θ, p_θ) pode ser reabsorvida na definição das transformações simpléticas, podemos assumir que as medidas consistem em q ou p para cada modo, ou seja, aqueles para os quais os marginais de Wigner dão a distribuição correta. Isso significa que a saída de tal medição é

$$p(a, b, c|x, y, z) = \int dr \tilde{W}(r) \delta(r_A(x) - a) \delta(r_B(y) - b) \delta(r_C(z) - c), \quad (\text{A.6})$$

onde $r \equiv (x, y, z; p)$ representa todas as variáveis em \tilde{W} , os vetores (a, x) são N_A dimensionais, os vetores (b, y) são $N_B^{(1)} + N_B^{(2)}$ dimensional e similarmente para (c, z) . Os vetores de escolha de medição (x, y, z) são binários, ou seja, $x \in \{0, 1\}^{N_A}$ e $r_{A_i} = q_{A_i}$ se $x_i = 0$, vice-versa $r_{A_i} = p_{A_i}$ se $x_i = 1$. Da mesma forma para a medição de Bob e Charlie. Logo, a forma final da

distribuição de probabilidades será:

$$p(a, b, c|x, y, z) = \int W_1(r'_A, r'_B{}^{(1)})W_2(r'_B{}^{(2)}, r'_C)\delta(r_A(x)-a)\delta(r_B(y)-b)\delta(r_C(z)-c)dr' \quad (\text{A.7})$$

mostrando que, ao identificarmos $\lambda_1 \equiv (q'_A, q'_B{}^{(1)}, p'_A, p'_B{}^{(1)})$ e $\lambda_2 \equiv (q'_B{}^{(2)}, q'_C, p'_B{}^{(2)}, p'_C)$, adaptamos à forma da equação de bilocalidade (A.1) (305).

A detecção homódina é uma técnica usada para medir a posição e o momento de um sistema quântico com alta precisão. No contexto da bilocalidade gaussiana, a detecção homódina é usada para medir a correlação entre dois sistemas quânticos distantes que são caracterizados por distribuições de Wigner gaussianas.

Neste tipo de detecção, um dado sinal é misturado com um sinal local forte antes de ser detectado. O sinal resultante é então medido e a posição e o momento do sistema quântico podem ser determinados com base na fase e amplitude do sinal detectado. Para estudar a bilocalidade gaussiana usando a detecção homódina, dois sistemas quânticos distantes são preparados em um estado emaranhado, que é caracterizado por uma distribuição de Wigner gaussiana conjunta. Medidas homódinas são então realizadas em cada sistema para determinar a posição e o *momentum* destes, cujas correlações nos sistemas podem ser determinadas com base na distribuição de probabilidade conjunta obtida a partir das medidas.

A bilocalidade gaussiana pode ser estudada usando a detecção homódina em uma variedade de sistemas físicos, incluindo átomos, íons e fótons, contribuindo significativamente para a compreensão do emaranhamento e das correlações quânticas no desenvolvimento de tecnologias para comunicação e computação. No presente caso, consideramos um sistema de bilocalidade com três partes, Alice, Bob e Charlie, no qual Alice e Bob compartilham um estado emaranhado de dois modos, e o mesmo ocorre para Bob e Charlie. Bob utiliza um divisor de luz ou beam splitter² gerando os estados na forma:

$$|\psi\rangle_{AB_1} = \sqrt{1-\gamma^2} \sum_i \gamma^i |i\rangle_A |i\rangle_{B_1} \quad , \quad |\psi\rangle_{B_2C} = \sqrt{1-\gamma^2} \sum_i \gamma^i |i\rangle_{B_2} |i\rangle_C \quad (\text{A.8})$$

onde $\gamma \equiv \tanh r$ e cuja a matriz de covariância é bem conhecida:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} Ch(r) & 0 & Sh(r) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Ch(r) & 0 & -Sh(r) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Sh(r) & 0 & Ch(r) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Sh(r) & 0 & Ch(r) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Ch(r) & 0 & Sh(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Ch(r) & 0 & -Sh(r) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Sh(r) & 0 & Ch(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Sh(r) & 0 & Ch(r) \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

tal que $Ch(r) \equiv \cosh 2r$, $Sh(r) \equiv \sinh(2r)$ e $\vec{R} = (q_A, p_A, q_{B_1}, q_{B_1}, q_{B_2}, q_{B_2}, q_C, p_C)$.

² Termo padrão utilizado na literatura para um divisor de luz, aparato óptico utilizado na maioria dos interferômetros.

O divisor de luz de Bob possui uma transmissibilidade t e mistura os dois sinais de entrada B_1 e B_2 , sendo portanto uma operação gaussiana cujo o efeito é descrito como

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{t} & 0 & \sqrt{1-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{t} & 0 & \sqrt{1-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{1-t} & 0 & \sqrt{t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{1-t} & 0 & \sqrt{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

de maneira tal que este estado é transformado em um novo estado gaussiano, $\mathbf{V}' = \mathcal{G}\mathbf{V}\mathcal{G}^T$ e cuja a distribuição de Wigner é dada por:

$$W(\vec{R}) = \frac{1}{\pi^4} e^{-\vec{R}^T \mathbf{V}'^{-1} \vec{R}} \quad (\text{A.11})$$

com $\det\{\mathbf{V}'\} = 1$ e

$$\vec{R} = (q_{B_1}, p_{B_1}, q_{B_2}, p_{B_2}, q_C, p_C, q_A, p_A) = \vec{R}_B \oplus \vec{R}_{AC},$$

onde B faz referência às variáveis de Bob e AC fazem referência a Alice e Charlie. No panorama de Heisenberg, podemos utilizar uma transformação de Bogoliubov do tipo $\hat{a} \rightarrow (\cosh r \hat{a}) - (\sinh r) \hat{a}^\dagger$. Assim, a matriz simplética S pode ser escrita na forma

$$S = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-t} Sh(r) & 0 & -\sqrt{t} Sh(r) & 0 \\ 0 & \sqrt{1-t} Sh(r) & 0 & \sqrt{t} Sh(r) \\ -\sqrt{t} Sh(r) & 0 & \sqrt{1-t} Sh(r) & 0 \\ 0 & \sqrt{t} Sh(r) & 0 & -\sqrt{1-t} Sh(r) \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Considerando que Bob atua com dois fotodetectores, um para cada modo, temos as funções de Wigner para Alice e Charlie nas formas:

$$W_{|0\rangle\langle 0|}(r) = \frac{1}{\pi} e^{-q^2 - p^2}, \quad (\text{A.13})$$

$$W_{|1\rangle\langle 1|}(r) = \frac{1}{\pi} (2(q^2 + p^2) - 1) e^{-q^2 - p^2} \quad (\text{A.14})$$

e

$$W_{(1)}(r) = \frac{1}{2\pi} \quad (\text{A.15})$$

fazendo referência a detecção ou não-detecção de fótons. As funções de Wigner do sistema serão dadas por, a menos de um fator de $(2\pi)^n$,

$$W_{AC|00} = \int W(\vec{R}) W_{|0\rangle\langle 0|}(r_{B_1}) W_{|0\rangle\langle 0|}(r_{B_2}) dr_{B_1} dr_{B_2} \quad (\text{A.16})$$

$$W_{AC|10} = \int W(\vec{R})(W_1(r_{B_1}) - W_{|0\rangle\langle 0|}(r_{B_1}))W_{|0\rangle\langle 0|}(r_{B_2}) dr_{B_1} dr_{B_2} \quad (\text{A.17})$$

$$W_{AC|01} = \int W(\vec{R})W_{|0\rangle\langle 0|}(r_{B_1})(W_1(r_{B_2}) - W_{|0\rangle\langle 0|}(r_{B_2})) dr_{B_1} dr_{B_2} \quad (\text{A.18})$$

$$W_{AC|11} = \int W(\vec{R})(W_1(r_{B_1}) - W_{|0\rangle\langle 0|}(r_{B_1}))(W_1(r_{B_2}) - W_{|0\rangle\langle 0|}(r_{B_2})) dr_{B_1} dr_{B_2} \quad (\text{A.19})$$

As integrais acima podem ser calculadas usando-se o fato que $\vec{R}_B \oplus \vec{R}_{AC}$, e após uma manipulação algébrica, obtenção dos fatores de normalização e computação numérica, obtemos uma violação máxima de 1.98 para a desigualdade CHSH, um valor próximo porém insuficiente para a violação de classicalidade, mostrando que operações não-gaussianas sobre estados gaussianos ainda não foram suficientes para tal.