

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
DEPARTAMENTO FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**NATHAN FERREIRA**

**PROPRIEDADES NÃO CLÁSSICAS DE ESTADOS GRAFO**

**PONTA GROSSA  
2023**

**NATHAN FERREIRA**

**PROPRIEDADES NÃO CLÁSSICAS DE ESTADOS GRAFO**

Dissertação apresentada para a obtenção do título de Mestre em Física na Universidade Estadual de Ponta Grossa. Programa de Pós-Graduação em Ciências.

Orientador(a): Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade

**PONTA GROSSA  
2023**

F383 Ferreira, Nathan  
Propriedades não clássicas de estados grafo / Nathan Ferreira. Ponta Grossa,  
2023.  
73 f.

Dissertação (Mestrado em Ciências - Área de Concentração: Física),  
Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Manoel Andrade.

1. Estados grafo. 2. Emaranhamento. 3. Não localidade. 4. Propriedades não  
clássicas. I. Andrade, Fabiano Manoel. II. Universidade Estadual de Ponta  
Grossa. Física. III.T.


CDD: 530.1

## TERMO DE APROVAÇÃO

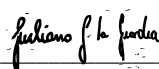
NATHAN FERREIRA

### PROPRIEDADES NÃO CLÁSSICAS DE ESTADOS GRAFO

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências, no Programa de Pós-Graduação em Ciências, Área de Concentração Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Orientador  \_\_\_\_\_  
Dr. Fabiano Manoel de Andrade – UEPG – Presidente

 \_\_\_\_\_  
Dra. Ana Cristina Sprotte Costa – UFPR – Titular

 \_\_\_\_\_  
Dr. Giuliano Gadioli La Guardia – UEPG – Titular

Ponta Grossa, 31 de outubro de 2023.

*Dedico esta dissertação e todos os esforços empregados na sua elaboração à minha esposa Gabrielly e aos filhos que juntos educaremos.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, primeiramente, a Deus e a Nossa Senhora por terem me sustentado nos momentos mais difíceis e, em especial, nas vezes em que a minha esperança já havia desfalecido. À Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela oportunidade e estrutura cedida para os estudos. À CAPES pela bolsa de estudos e ao meu orientador pela paciência e pelos inúmeros aprendizados extraídos desta experiência. Agradeço ainda, minha esposa Gaby, meu irmão Kevin, meus pais por todas as vezes em que pacientemente me sustentaram e me motivaram a seguir os meus sonhos. Por fim, sou eternamente grato aos meus amigos, especialmente, Prefeito Lucas Machado e Pe. José Lauro Gomes, por todo apoio que me devotaram e que, com certeza, foram fundamentais na superação dos desafios que esta importante fase da minha vida me trouxe.

## RESUMO

Esta dissertação tem por objetivo ser um trabalho de revisão e, por sua vez, apresentar os principais resultados encontrados na literatura relacionados a propriedades não-clássicas de Estados Grafo. Mais especificamente, são apresentados conceitos estratégicos na caracterização e quantificação de emaranhamento para esta classe de estados. Aqui, emaranhamento é definido conceitualmente a fim de entender o papel por ele desempenhado no contexto de estados grafo. Além disso, são apresentados ferramentas e possíveis tratamentos que resultam na identificação de propriedades não locais nesta classe de estados como, por exemplo, propostas de obtenção das desigualdades de Bell para estados grafo e argumentos do tipo GHZ para estados cluster, um caso particular de estados grafo e de interesse singular na computação quântica.

**Palavras-chave:** Emaranhamento. Estados Grafo. Não-Localidade. Propriedades não-clássicas.

## **ABSTRACT**

This dissertation aims to be a review work and, in turn, present the main results found in the literature related to non-classical properties of Graph States. More specifically, strategic concepts are presented in the characterization and quantification of entanglement for this class of states. Here, entanglement is conceptually situated in order to understand the role it plays in the context of graph states. In addition, tools and possible treatments are presented that result in the identification of non-local properties in this class of states, for example, proposals for obtaining Bell inequalities for graph states and arguments of the GHZ type for cluster states, a particular case of graph states, and of singular interest in quantum computing.

**Keywords:** Entanglement. Graph States. Non Locality. Non Classical Properties.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 –Esfera de Bloch . . . . .	16
Figura 1.2 –Grafo com dois vértices . . . . .	17
Figura 1.3 –Alguns exemplos de grafos. Imagem retirada de (WILSON,2010) . . .	18
Figura 3.1 –Grafo Estrela de Cinco Vértices . . . . .	47
Figura 3.2 –Grafo Completo de Seis Vértices . . . . .	47
Figura 3.3 –Grafo Ciclo de Cinco Vértices . . . . .	48
Figura 3.4 –Grafo da Figura 3.3 transformado a partir da aplicação de $\sigma_x^{(1)}$ . . . . .	48
Figura 3.5 –Diferentes Classes sob Isomorfismos e Operações Locais Unitárias. Imagem retirada de (HEIN et al., 2006). . . . .	51
Figura 4.1 –Representação esquemática do cenário de Bell com o auxílio de “caixas pretas”. . . . .	52
Figura 4.2 –Grafo conectado de três qubits . . . . .	56

## SUMÁRIO

<b>1 PRÉ-REQUISITOS</b>	<b>10</b>
1.1 INTRODUÇÃO	10
1.2 MECÂNICA QUÂNTICA	11
1.2.1 O Espaço de Estados	12
1.2.2 Equação de Schrödinger	12
1.2.3 Observáveis e Medidas	13
1.2.4 Sistemas Compostos	14
1.2.5 Decomposição de Schmidt.	14
1.3 OPERADOR DENSIDADE	14
1.3.1 Traço Parcial e Matriz Densidade Reduzida	15
1.4 O BIT QUÂNTICO OU <i>QUANTUM BIT</i> (QUBIT)	16
1.5 GRAFOS	17
<b>2 GENERALIDADES DA TEORIA DE EMARANHAMENTO</b>	<b>19</b>
2.1 CONTEXTUALIZAÇÃO FENOMENOLÓGICA DO EMARANHAMENTO	19
2.1.1 Paradoxo EPR	19
2.1.2 A Desigualdade de Bell	21
2.2 DEFINIÇÃO.	23
2.2.1 Emaranhamento e Inseparabilidade.	23
2.2.2 Emaranhamento em Classes Mais Abrangentes	25
2.3 EMARANHAMENTO	26
2.3.1 Paradigma LOCC.	26
2.4 QUANTIFICAÇÃO DO EMARANHAMENTO.	29
2.4.1 Medidas Entrópicas de Emaranhamento.	29
2.4.2 Emaranhamento Destilável e o Custo de Emaranhamento	30
2.4.3 Emaranhamento de Formação	31
2.4.4 Fidelidade	31
2.4.5 Concorrência	32
2.4.6 Negatividade.	33
<b>3 EMARANHAMENTO EM ESTADOS GRAFO</b>	<b>35</b>
3.1 ESTADOS GRAFO	35
3.1.1 Introdução aos Estados Grafo	35
3.1.2 Definição de Estados Grafo	37
3.2 MEDIDA DE SCHMIDT: QUANTIFICAÇÃO DO EMARANHAMENTO EM ESTADOS GRAFO	41
3.2.1 Panorama Geral do Quantificador.	41
3.2.2 Propriedades da Medida de Schmidt $P( \psi\rangle)$ em Estados Puros $ \psi\rangle$ .	42
3.2.3 Transformações em Grafos	44

3.3	CLASSES EQUIVALENTES DE ESTADOS GRAFO . . . . .	48
<b>4</b>	<b>NÃO-LOCALIDADE EM ESTADOS GRAFO . . . . .</b>	<b>51</b>
4.1	CONJUNTO DAS CORRELAÇÕES . . . . .	51
4.1.1	O Cenário . . . . .	51
4.1.2	Correlações Não-Sinalizadoras $\mathbb{NS}$ . . . . .	52
4.1.3	O Conjunto das Correlações Locais $\mathbb{L}$ . . . . .	53
4.1.4	O Conjunto das Correlações Quânticas $\mathbb{Q}$ . . . . .	54
4.1.5	Desigualdades de Bell: Análise Conceitual. . . . .	55
4.2	O MODELO DETERMINÍSTICO DE VARIÁVEIS OCULTAS E OS MODE- LOS ESTOCÁSTICOS FATORÁVEIS. . . . .	56
4.3	NÃO-LOCALIDADE EM ESTADOS GRAFO. . . . .	58
4.3.1	O Argumento GHZ para o Estado $ \phi_4\rangle$ . . . . .	58
4.3.2	Desigualdade do Tipo Bell para o Estado $ \phi_4\rangle$ . . . . .	60
4.3.3	Aplicação do Argumento para Estados Mais Gerais . . . . .	61
4.3.4	Desigualdades de Bell para Estados Grafo Genéricos . . . . .	64
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>67</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>69</b>

## 1 PRÉ-REQUISITOS

*“Hilbert space is a big place.”  
Carlton Caves*

Neste capítulo será introduzida a noção da importância e do contexto dos estudos de estados grafo. Serão apresentados ainda alguns conceitos cujo entendimento é fundamental para entender o restante da dissertação. O leitor com familiaridade com os conceitos de Mecânica Quântica pode partir diretamente para a última seção deste capítulo, da qual extrai-se o conceito de grafo, do qual emerge a definição de estado grafo, elemento central dessa dissertação.

### 1.1 INTRODUÇÃO

Este trabalho objetiva ser um trabalho de revisão acerca de estados grafo e, como tal, faz jus a uma elucidação em que conste qual a importância de tal matéria. Pois bem, o estudo de estados grafo insere-se, dentre outros possíveis cenários, no contexto de importantes novidades trazidas pela Mecânica Quântica (MQ) como, por exemplo, da teoria da não-localidade e do emaranhamento, sendo que este último é forma específica em que se manifesta a primeira. Essas propriedades são reservadas exclusivamente para cenários em que não é possível uma descrição clássica adequada. Neste sentido é que se enquadra o termo “estados” de estados grafo, ou seja, por se tratarem de estados quânticos e, desta forma, estarem associados às ideias da Mecânica Quântica. Por outro lado, o termo “grafo” de estados grafo explica qual é a especificidade desses estados, isto é, são estados quânticos ligados a um outro tipo de estrutura conceitual, a de Teoria de Grafos.

Grafos matemáticos são estruturas usadas para descrever uma série de problemas em cenários para os quais é possível descrever seus elementos por meio de “pontos” ou “vértices”, enquanto as relações entre estes elementos são descritos por arestas que os conectam. Dessa forma, se associarmos pontos às cidades de uma determinada região e também associarmos arestas às possíveis rodovias/estradas que as conectam, poderíamos usar a estrutura de grafos para descrever malhas rodoviárias e resolver problemas de menor distância entre duas cidades. Apesar desse exemplo poder ser resolvido de outras maneiras, serve para exemplificar a utilidade desta estrutura que apresenta uma gama enorme de aplicações que vão de problemas de logística (JÚNIOR et al., 2019) até o estudo de redes sociais literárias (RIBEIRO et al., 2015) e Mecânica Quântica.

Assim sendo, é possível imaginar o estudo de estados grafo sob duas perspectivas, uma fundamental e outra, mais tecnológica. Sob a ênfase mais fundamental podemos

usá-los para estudar o emaranhamento, tipo de correlação reservada aos resultados da Mecânica Quântica, em cenários que, atualmente, carecem de completeza conceitual como, por exemplo, aquele que aparece em estados com mais de duas partes, isto é, em cenários multipartites. Neste contexto seriam os estados grafo um “laboratório de estados” mais restrito, por assim dizer, em que, dentre todos os possíveis estados, usaríamos os mesmos para definir quantificadores de emaranhamento multipartite bem como comparar as propriedades aí encontradas com aquelas que surgem em diferentes cenários. Este é apenas um exemplo de como estados grafo podem ser usados para estudar Mecânica Quântica em nível fundamental.

Por outro lado, em nível mais tecnológico e de uma perspectiva mais pragmática, estados grafo são associados a protocolos de processamento de informação quântica. Este tipo de informação está associada aos ganhos trazidos pelas novidades da Mecânica Quântica - superposição, emaranhamento, não-localidade, etc. - e resultam da possibilidade de se utilizar sistemas com tais propriedades para processar a informação, codificá-la, armazená-la e enviá-la. Neste sentido, podemos citar o uso de um tipo específico de estados grafo, os estados cluster, como recurso para um tipo de computação quântica, a Computação Quântica Baseada em Medições (BROWNE; BRIEGEL, 2006), bem como o seu uso em protocolos quânticos de correção de erros (HEIN et al., 2006), entre outras possíveis aplicações.

Tendo isso em mente, a estrutura da presente dissertação objetiva favorecer um contato geral com resultados importantes no estudo das propriedades não clássicas em estados grafo. Para tanto, no primeiro capítulo são revisitados os pré-requisitos para o claro entendimento de conceitos recorrentes ao longo do trabalho. No segundo capítulo é explorado conceitualmente a ideia de emaranhamento bem como sua contextualização na Mecânica Quântica. No Capítulo 3 os estados grafo são definidos e são apresentados alguns resultados de emaranhamento para esta classe de estados. Por fim, no Capítulo 4, uma outra importante “novidade” da Mecânica Quântica é explorada no contexto de estados grafo, isto é, a não-localidade.

## 1.2 MECÂNICA QUÂNTICA

O texto desta seção, apesar de não ter a pretensão de ser uma exposição completa e didática acerca da Mecânica Quântica, objetiva lembrar os principais conceitos que cercam o tema da dissertação. Algumas referências interessantes que apresentam a Mecânica Quântica de maneira sistemática, completa e didática são (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 1977), (SAKURAI, 1994) e (SHANKAR, 1980).

### 1.2.1 O Espaço de Estados

No contexto da Mecânica Quântica, é definido o espaço de estados, análogo quântico do espaço de fases da Mecânica Clássica. O espaço de estados é a ferramenta, do ponto de vista matemático, adequada para a descrição das possíveis configurações associadas a sistemas quânticos. O estado, por sua vez, comporta todas as informações físicas associadas à configuração particular em que o sistema se encontra. Na linguagem dos espaços vetoriais, os estados são representados por vetores em um espaço complexo, o espaço de Hilbert  $\mathbb{H}$ .

Além disso, é definido sobre o espaço de Hilbert um produto interno de tal forma que, se representarmos por  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$  dois vetores de  $\mathbb{H}$ , então o produto interno entre  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$  é um número complexo representado por  $\langle\phi|\psi\rangle$  de tal forma que seu complexo conjugado satisfaz  $\langle\phi|\psi\rangle^* = \langle\psi|\phi\rangle$  e para qualquer vetor de  $\mathbb{H}$ ,  $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$  é sempre satisfeita. Por outro lado, se  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ , então  $|\psi\rangle$  é dito ser normalizado e os vetores  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$  para os quais se verifica  $\langle\phi|\psi\rangle = 0$  são ditos ortogonais de maneira completamente análoga ao que acontece com os vetores definidos em  $\mathbb{R}^3$ .

### 1.2.2 Equação de Schrödinger

Outro ponto importante é a descrição dinâmica de um sistema quântico. Posto de outra forma, é possível descrever a evolução de um estado de um sistema quântico no tempo a partir da equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d|\Psi\rangle}{dt} = H|\Psi\rangle, \quad (1.1)$$

em que  $H$  é o Hamiltoniano associado ao sistema quântico cujo estado é dado por  $|\Psi\rangle$  e  $\hbar$  é a constante de Planck dividida por  $2\pi$ . A solução formal desta equação diferencial para Hamiltonianos independentes do tempo pode ser escrita como

$$|\Psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle, \quad (1.2)$$

em que

$$U(t, t_0) = \exp\left\{\left[\frac{-iH(t - t_0)}{\hbar}\right]\right\}. \quad (1.3)$$

$U$  é um operador unitário,  $U^\dagger U = I$ , cuja aplicação em  $|\Psi\rangle$  equivale à rotação deste vetor no espaço de Hilbert  $\mathbb{H}$ .

O Hamiltoniano  $H$  é o operador associado aos estados possíveis de energia do sistema sob análise. Em outras palavras,  $H$  é um observável. Outros exemplos de observáveis são o momento  $p$ , a posição  $x$  e o spin  $S$  de uma partícula.

### 1.2.3 Observáveis e Medidas

É conveniente observar que, nos termos da MQ, observáveis são representados por Operadores Hermitianos cujo conjunto de autovetores a eles associados formam uma base para o espaço de Hilbert associado ao sistema quântico sobre o qual atuam. Mais precisamente, se  $A$  é um observável e  $\{|a_i\rangle\}$  é o conjunto de autovetores a ele associados, então é possível escrever

$$A |a_i\rangle = a_i |a_i\rangle, \quad (1.4)$$

com  $a_i$  sendo o autovalor associado ao autovetor  $|a_i\rangle$ . Uma vez que o conjunto  $\{|a_i\rangle\}$  forma uma base completa para  $\mathbb{H}$ , podemos escrever um vetor arbitrário  $|\Psi\rangle$  desse sistema como

$$|\Psi\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle, \quad (1.5)$$

em que os  $c_i$ s são os coeficientes de expansão de  $|\Psi\rangle$  nesta base. Fisicamente,  $|a_i\rangle$  são os estados possíveis para uma medição de  $A$  em que a probabilidade associada a obtenção de  $|a_i\rangle$  é, nestes termos,  $|c_i|^2$ , ou ainda  $|\langle a_i|\Psi\rangle|^2$ . Isto acontece porque, para um Operador Hermitiano  $A$ , seus autovetores são ortonormais, isto é

$$\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}. \quad (1.6)$$

em que  $\delta_{ij}$  é o Delta de Kronecker, isto é

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De forma mais genérica, podemos descrever os resultados de medições em estados quânticos por meio de um conjunto de operadores  $\{M_i\}$ . Assim, o índice  $i$  rotula os possíveis resultados da medição, ou seja, se o resultado é  $i$  e  $|\Psi\rangle$ , o estado antes da medição, então teremos que o estado pós-medição será dado por

$$\frac{M_i |\Psi\rangle}{\left[ \langle \Psi | M_i^\dagger M_i | \Psi \rangle \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (1.7)$$

em que o termo  $\langle \Psi | M_i^\dagger M_i | \Psi \rangle$  é a probabilidade de obtenção do resultado  $i$  enquanto sua presença no denominador de (1.7) garante a normalização do estado pós-medição. Por fim, o conjunto de operadores de medição deve satisfazer ainda a relação de completeza

$$\sum_i M_i^\dagger M_i = I. \quad (1.8)$$

Esta exigência tem por objetivo garantir que a soma das probabilidades associadas aos resultados possíveis da medição seja igual a um.

#### 1.2.4 Sistemas Compostos

Finalmente, para sistemas quânticos constituídos por vários subsistemas é utilizada a estrutura de produto tensorial para descrever estados deste tipo de sistemas e obter as probabilidades compatíveis com a realização física de sistemas compostos. Isto significa que o espaço de estados total do sistema composto  $\mathbb{H}$  é o produto tensorial dos espaços de estados dos subsistemas, de tal forma que

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathbb{H}_n, \quad (1.9)$$

em que  $\mathbb{H}_i$  é o espaço de Hilbert associado ao  $i$ -ésimo subsistema do sistema composto de  $n$  partes e  $\otimes$  representa o produto tensorial. De forma particular, podemos escrever para o estado global  $|\Psi\rangle$  de um sistema de  $n$  partes em que preparamos o subsistema  $i$  no estado  $|\Psi_i\rangle$  como

$$|\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\Psi_n\rangle. \quad (1.10)$$

#### 1.2.5 Decomposição de Schmidt

Seja  $|\psi\rangle$  um estado puro de um sistema de duas partes  $A$  e  $B$  associados a espaços de Hilbert  $\mathbb{H}_A$  e  $\mathbb{H}_B$  de dimensões  $d_A$  e  $d_B$ , respectivamente. É possível mostrar (JAEGER, 2007) que existem estados ortonormais de  $\mathbb{H}_A$ ,  $\{|i_A\rangle\}$ , e outros de  $\mathbb{H}_B$ ,  $\{|i_B\rangle\}$ , de tal forma que é possível escrever o vetor  $|\psi\rangle$  como

$$|\psi\rangle = \sum_i^R \lambda_i |i_A\rangle |i_B\rangle, \quad (1.11)$$

em que os  $\lambda_i$  são números reais não-negativos que satisfazem  $\sum_i \lambda_i = 1$

### 1.3 OPERADOR DENSIDADE

Existe outra forma de descrever estados quânticos que se mostra adequada para os casos em que há incerteza envolvida na preparação dos estados quânticos. Em outras palavras, se o estado  $|\Psi_k\rangle$  escolhido do conjunto  $\{|\Psi_k\rangle\}$  é preparado com probabilidade  $p_k$ , então associamos a este sistema, cujo estado é classificado como misto,



o operador  $\rho$  que é definido como

$$\rho = \sum_k p_k |\Psi_k\rangle \langle \Psi_k|. \quad (1.12)$$

Esse operador é definido desta forma porque, a partir disso, é possível reescrever o valor médio de determinado observável  $A$  como

$$\langle A \rangle = \text{tr}(\rho A), \quad (1.13)$$

ou ainda, é possível escrever  $p_i$  associado ao resultado de medição  $i$  representada pelo conjunto de operadores  $\{M_i\}$  como

$$p_i = \text{tr} \left( M_i^\dagger M_i \rho \right). \quad (1.14)$$

### 1.3.1 Traço Parcial e Matriz Densidade Reduzida

Seja, por exemplo,  $\mathbb{H} = \mathbb{H}_A \otimes \mathbb{H}_B \otimes \mathbb{H}_C$  com  $\mathbb{H}_A$ ,  $\mathbb{H}_B$  e  $\mathbb{H}_C$  sendo os espaços de Hilbert  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente. Considerando ainda que os conjuntos de vetores  $\{|a_i\rangle\}$ ,  $\{|b_i\rangle\}$  e  $\{|c_i\rangle\}$  formam bases para os espaços de Hilbert  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Podemos escrever a matriz densidade do sistema global, de maneira genérica, como

$$\rho_{ABC} = \sum_{ijklmn} p_{ijklmn} |a_i\rangle \langle a_j| \otimes |b_k\rangle \langle b_l| \otimes |c_m\rangle \langle c_n|. \quad (1.15)$$

Para este cenário, podemos definir o traço parcial com relação à parte  $C$  associada ao espaço de Hilbert  $\mathbb{H}_C$ , que define a matriz densidade reduzida com relação as partes  $AB$ ,  $\rho_{AB}$  (ou  $\rho^{AB}$ ) a partir de

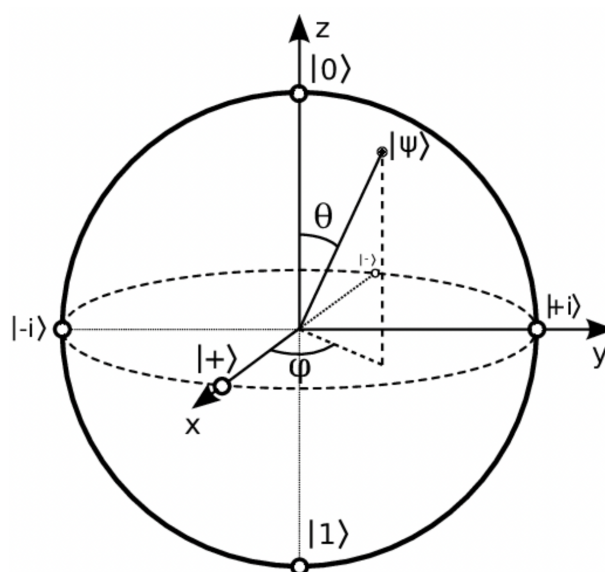
$$\text{tr}_C[\rho_{ABC}] = \rho_{AB} = \sum_{ijklmn} p_{ijklmn} |a_i\rangle \langle a_j| \otimes |b_k\rangle \langle b_l| \otimes \delta_{mn}. \quad (1.16)$$

É importante considerar que ao realizarmos a operação do traço parcial com relação a alguma parte do sistema sobre a matriz densidade, podemos acabar descartando informações importantes como, por exemplo, a existência de correlações desta parte com o restante do sistema. Por outro lado, como a maioria dos resultados no estudo de emaranhamento foram obtidos para o caso de sistemas bipartites, a ideia de estudar as correlações entre os pares num sistema de várias partes impõe-se como interessante alternativa.

## 1.4 O BIT QUÂNTICO OU *QUANTUM BIT* (QUBIT)

Antes de conceituar o qubit é interessante estudar o seu análogo clássico, o bit. O conceito de bit é oriundo da teoria de informação e pode ser usado para indicar tanto a unidade de informação como o sistema físico que a comporta. Dessa forma, o bit é representado por um de dois estados ortogonais,  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , de forma que esses estados podem ser relacionados a sistemas que apresentem duas configurações possíveis como, por exemplo, a passagem ou não de corrente elétrica em um circuito.

Figura 1.1: Esfera de Bloch



Neste contexto, surge então o conceito de qubit, o bit quântico. A novidade que esse conceito carrega é de que o sistema físico poder estar num estado  $|\psi\rangle$ , que é a superposição dos dois estados ortogonais da base computacional. Isto é,

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (1.17)$$

com  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . É interessante observar que na ocasião de uma medição na base computacional, mecanismo de leitura da informação processada, o sistema inevitavelmente colapsará em um dos estados da base.

Uma representação geométrica que está ligada a muitos insights associados à Teoria da Informação Quântica é a esfera de Bloch, tal como está representada na Figura 1.1. Esta representação surge da observação de que podemos escrever o estado  $|\Psi\rangle$  na Eq. (1.17) como (NIELSEN; CHUANG, 2000)

$$|\Psi\rangle = \left[ \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right], \quad (1.18)$$

com  $\theta, \phi \in \mathbb{R}$ . Assim sendo, é possível associar univocamente os vetores do espaço

de Hilbert com as coordenadas na esfera de Bloch a partir de  $\varphi$  e  $\theta$ .

O leitor com pouca familiaridade com Informação Quântica (IQ) pode se questionar a respeito da vantagem de se utilizar sistemas quânticos (qubits) para o processamento de informação, já que isto acaba por inserir certas complicações que não estão presentes no análogo clássico. A razão está no fato de que existe um ganho no processamento de informação que torna os sistemas quânticos de processamento de informação muito superiores aos clássicos.

## 1.5 GRAFOS

A Teoria de Grafos é uma ferramenta matemática poderosa que tem grande utilidade na resolução de problemas que envolvem algum conjunto de objetos e a relação entre eles (DIESTEL, 2005). Matematicamente, o grafo  $G$  é constituído por dois conjuntos, o conjunto de vértices  $V$  e o conjunto de arestas  $E$ , escrito como  $G = (V, E)$ .

Enquanto os vértices representam algum conjunto de objetos que podem ser arbitrariamente rotulados, geralmente representados graficamente através de círculos, as arestas representam as conexões entre os vértices. Desta forma, é suficiente no caso de grafos não direcionados, grafos cujas arestas não têm direções a elas associadas, descrever o par de vértices que definem dada aresta. Por exemplo, na Figura 1.2, os vértices 1 e 2 são conectados pela aresta  $a_{12}$  que fica bem definida como  $a_{12} = (1, 2)$ . Alguns exemplos de grafos são apresentados na Figura 1.3.

Figura 1.2: Grafo com dois vértices

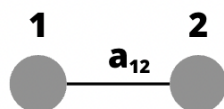
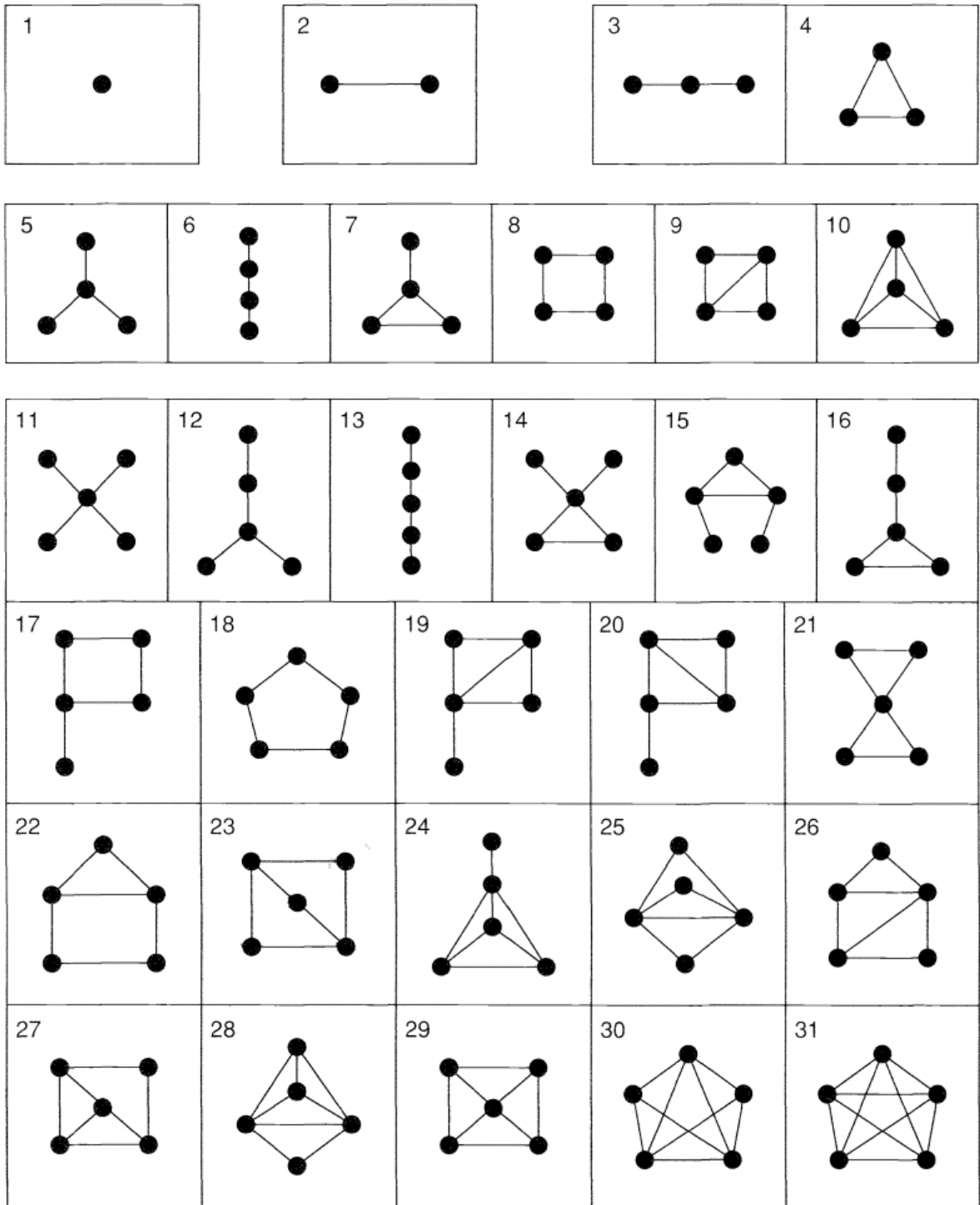


Figura 1.3: Alguns exemplos de grafos. Imagem retirada de (WILSON, 2010)



## 2 GENERALIDADES DA TEORIA DE EMARANHAMENTO

*“The most incomprehensible thing about the world is that it is comprehensible.”*  
Albert Einstein

Neste capítulo serão apresentados alguns dos principais conceitos ligados a caracterização e quantificação de emaranhamento quântico. A importância do conteúdo aqui apresentado não está apenas em si mesmo, mas também nos insights que é capaz de fornecer e que desempenham um papel importante em outros cenários.

### 2.1 CONTEXTUALIZAÇÃO FENOMENOLÓGICA DO EMARANHAMENTO

#### 2.1.1 Paradoxo EPR

Em 1935, no contexto dos debates acerca dos fundamentos da Mecânica Quântica e da validade da interpretação de Copenhague, Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen, no artigo intitulado *“Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?”* (EINSTEIN; PODOLSKY; ROSEN, 1935), questionaram um ponto fundamental da teoria. Isto é, se a função de onda  $\Psi$  associada a um determinado estado contém, de fato, toda a informação necessária para caracterizar o sistema quântico de que trata.

No argumento do artigo, os autores definiram o conceito de "elemento de realidade". Em outras palavras, se uma determinada quantidade física pode ser prevista com certeza sem que o sistema seja perturbado, então existe um elemento de realidade associado a esta quantidade. Por outro lado, prevê a teoria quântica que, sendo  $A$  um observável e  $|a\rangle$  um de seus autoestados, teremos que

$$A|a\rangle = a|a\rangle, \quad (2.1)$$

em que  $a$  é o autovalor de  $A$  correspondente ao autoestado  $|a\rangle$ . Em outras palavras, dado que um sistema quântico encontra-se no estado  $|a\rangle$ , a realização de uma medição do observável  $A$  necessariamente retornará como resultado o valor  $a$  para esta medição. Além disso, seguindo-se linhas análogas para um observável  $B$  e um autoestado  $|b\rangle$ , teríamos

$$B|b\rangle = b|b\rangle. \quad (2.2)$$

Contudo, se  $[A, B] \neq 0$ , isto é, os observáveis são incompatíveis, uma medição do observável  $B$  seguida de uma medição de  $A$  implicará que o estado passará de um determinado autovetor  $|b\rangle$  de  $B$ , para um autovetor  $|a\rangle$  de  $A$ , excluindo toda a informação resultante da primeira medição. Desse fato, segue que a função de onda ou não

fornece uma descrição completa da realidade, já que não é possível prever ambas as quantidades, ou as duas quantidades físicas não podem, nos termos de EPR, apresentar realidade física simultaneamente. Para entender a questão, podemos colocar o problema na forma proposta por Bohm (BOHM; AHARONOV, 1957; BOHM, 1951), isto é, em termos de um sistema de dois spins controlados por dois observadores distantes, Alice e Bob, e com spin resultante do estado global nulo. O que temos então é um sistema no estado singleto, dado por

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle). \quad (2.3)$$

No estado acima, podemos notar que Alice e Bob têm anticorrelação perfeita para os resultados de medições de spins na mesma direção. Dessa forma, se Alice e Bob medem seus spins individuais na direção  $z$  o que se tem é, a menos de um fator constante, uma medição na base formada pelos autovetores do operador  $\sigma_z$ . Se Alice medir seu spin e obtiver o resultado  $-1$ , o que equivale encontrar o estado  $|1\rangle$  para o seu spin individual, implica imediatamente que uma medição de Bob em seu spin na mesma direção lhe daria o resultado  $+1$ , equivalente a encontrar o seu sistema no estado  $|0\rangle$ , e vice-versa. Em outras palavras, uma medição em uma das partes necessariamente revelará o resultado da outra.

Por outro lado, para saber o que aconteceria se Alice e Bob medissem seus spins na direção  $x$  é necessário escrever o vetor  $|\psi^-\rangle$  na base do operador  $\sigma_x$ , isto é,  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ . Reescrevendo o vetor na referida base, encontramos

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle). \quad (2.4)$$

Podemos observar aqui o mesmo tipo de correlação encontrado para o caso da medição de  $\sigma_z$ . No entanto, esses dois observáveis não podem ter valores definidos em um momento anterior à medição devido à não comutatividade de  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  e a incerteza sobre os resultados de medidas decorrente deste último fato. A única hipótese que nos resta é que no processo de medição em uma das partes há algum tipo de influência entre as partes ou que os spins não têm valores definidos até a realização das medições.

Em outras palavras, se considerarmos que duas medições diferentes no sistema de Bob,  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$ , resultariam em dois resultados diferentes para o sistema de Alice, chegamos ao cerne do paradoxo EPR, pois como os operadores não comutam, não pode haver valores definidos para ambas as medições, segundo a Mecânica Quântica. Dessa forma, na melhor das hipóteses, segundo o raciocínio seguido no EPR, a teoria quântica deve ser considerada como uma teoria incompleta acerca da realidade física, para evitar contradições do ponto de vista lógico, pois a adoção da hipótese de que a teoria é completa leva a negação de que esta obedece ao princípio da incerteza.

Por fim, é interessante enfatizar que há duas hipóteses implícitas no argumento. A primeira é de que a escolha da medição em uma das partes não afeta os resultados de medições em outra, chamada de localidade. A segunda é de que os observáveis têm valores definidos nos estados antes mesmo da realização de qualquer medição, chamada de realismo. O conjunto das duas hipóteses é chamado de realismo-local, condição esta que é violada pela MQ. Estas duas hipóteses foram escritas quantitativamente por Bell em seu trabalho intitulado “*On the Einstein-Podolsky-Rosen parado*”, publicado em 1964 (BELL, 1964), o que viabilizou o teste experimental das mesmas.

### 2.1.2 A Desigualdade de Bell

O artigo EPR e os argumentos nele expostos motivaram a proposição de uma série de teorias pautadas na ideia de que a Mecânica Quântica seria uma teoria incompleta acerca da realidade física. Em tais teorias foram introduzidos parâmetros, comuns aos dois subsistemas consideradas no EPR, que não seriam tratados pela Mecânica Quântica e, por isso, foram chamados de variáveis ocultas.

Apesar de, por um tempo, a discussão de propriedades não locais vinculadas a cenários da MQ carecer de uma estrutura teórica que proporcionasse condições de reproduzi-la experimentalmente, em 1964 John S. Bell demonstrou que as condições de realismo e de localidade podem ser traduzidas em termos de desigualdades impostas aos resultados de medições realizadas no sistema de interesse. Algumas previsões da MQ violam as desigualdades propostas por Bell.

Para apresentar um exemplo do que vem a ser uma desigualdade de Bell, da forma como foi inicialmente proposta por Clauser, Horne, Shimony e Holt (CLAUSER et al., 1969), faz-se necessária a introdução de um cenário que comporta um sistema de partículas de spin meio, um de posse de Alice e outro de posse de Bob. Tanto Alice quanto Bob realizam medições nas direções dos vetores unitários  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , respectivamente. Na linguagem da Mecânica Quântica, a menos de uma constante, as medições podem ser representadas pelos operadores  $\vec{a} \cdot \hat{\sigma}$  e  $\vec{b} \cdot \hat{\sigma}$  cujos resultados são restritos aos valores +1 e -1, com  $\hat{\sigma} = \sigma_x \hat{i} + \sigma_y \hat{j} + \sigma_z \hat{k}$  e  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  sendo os vetores unitários nas direções de  $x$ ,  $y$  e  $z$  e  $\sigma_i$  sendo os Operadores de Pauli.

Apoiando-se nas hipóteses de realismo e localidade podemos construir uma estrutura teórica com a introdução de variáveis ocultas para obter previsões de desigualdades que devem ser satisfeitas pelos resultados de medições realizadas no sistema de duas partes. Neste sentido, as propriedades da fonte (momento da interação entre as partículas) são descritas por um conjunto de variáveis  $\lambda$  que são representadas por uma densidade de probabilidade  $\rho(\lambda)$  na obtenção de certos resultados para as medições.

Se denotarmos por  $A, B \in \{-1, +1\}$ , os resultados das medições de Alice e Bob,

respectivamente, concluímos que, assumida a hipótese de localidade, a escolha da direção de  $\vec{a}$  não pode interferir no resultado de  $B$ , da mesma forma que a escolha da direção  $\vec{b}$  não pode interferir no resultado de  $A$ . Assim, a média  $E(\vec{a}, \vec{b})$  da multiplicação dos resultados de  $A$  por aqueles obtidos para  $B$  associada às diferentes escolhas da direção de medição pode ser escrita como

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda). \quad (2.5)$$

Se  $\vec{a}'$  e  $\vec{b}'$  são diferentes opções da direção de medição, podemos escrever

$$\begin{aligned} E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}') &= \int d\lambda \rho(\lambda) [A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}', \lambda)] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) [1 \pm A(\vec{a}', \lambda) B(\vec{b}', \lambda)] \\ &\quad - \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}', \lambda) [1 \pm A(\vec{a}', \lambda) B(\vec{b}, \lambda)]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Da desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned} |E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}')| &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) |A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda)| |1 \pm A(\vec{a}', \lambda) B(\vec{b}', \lambda)| \\ &\quad + \int d\lambda \rho(\lambda) |A(\vec{a}', \lambda) B(\vec{b}', \lambda)| |1 \pm A(\vec{a}', \lambda) B(\vec{b}, \lambda)|, \end{aligned} \quad (2.7)$$

por outro lado, como  $|A| = |B| = 1$ , temos

$$\begin{aligned} |E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}')| &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) \{ |1 \pm A(\vec{a}', \lambda) B(\vec{b}', \lambda)| \\ &\quad + |1 \pm A(\vec{a}', \lambda) B(\vec{b}, \lambda)| \}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Como todas as expressões entre módulos são positivas (ou nulas) e a função módulo de quantidades positivas é igual a própria quantidade, podemos escrever a equação acima da seguinte forma

$$|E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}')| \leq 2 \pm \int d\lambda \rho(\lambda) [A(\vec{a}', \lambda) B(\vec{b}', \lambda) + A(\vec{a}', \lambda) B(\vec{b}, \lambda)], \quad (2.9)$$

aplicando-se a definição de  $E(\vec{a}, \vec{b})$ , obtemos

$$|E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}')| \leq 2 \pm [E(\vec{a}', \vec{b}') + E(\vec{a}', \vec{b})]. \quad (2.10)$$

Por fim, se aplicarmos mais uma vez a desigualdade triangular, em sua forma mais forte, podemos escrever

$$S = |E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}')| + |E(\vec{a}', \vec{b}') + E(\vec{a}', \vec{b})| \leq 2. \quad (2.11)$$



Importante observar que as hipóteses de realismo e localidade, isto é, que independente de as medições serem realizadas existe um resultado a elas associado e que as medições feitas em uma parte do sistema não afetam as medições realizadas na outra parte, estão indissociavelmente presentes nesta estrutura. Por outro lado, existem estados quânticos que violam esta desigualdade para um determinado conjunto de medições quânticas. Exemplo disso é o estado de Bell  $|\Psi^-\rangle$ , em que  $E(\vec{a}, \vec{b})$ , na notação de Dirac pode ser colocado da seguinte forma

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \langle \Psi^- | \vec{a} \cdot \hat{\sigma} \otimes \vec{b} \cdot \hat{\sigma} | \Psi^- \rangle = -\vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (2.12)$$

Dessa forma, ao escrever  $S$  nestes termos, obtemos

$$\begin{aligned} S &= |-\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b}'| + |\vec{a}' \cdot \vec{b}' + \vec{a}' \cdot \vec{b}| \\ &= |\vec{a} \cdot (\vec{b}' - \vec{b})| + |\vec{a}' \cdot (\vec{b}' + \vec{b})|, \end{aligned} \quad (2.13)$$

Se  $\vec{a}$  e  $\vec{a}'$ , bem como  $\vec{b}$  e  $\vec{b}'$  são perpendiculares entre si e, além disso,  $\vec{a}$  e  $\vec{a}'$  são paralelos a  $\vec{b}' - \vec{b}$  e  $\vec{b}' + \vec{b}$ , respectivamente, então

$$S = |\vec{a}| |\vec{b}' - \vec{b}| + |\vec{a}'| |\vec{b}' + \vec{b}| = 2\sqrt{2}. \quad (2.14)$$

Este resultado, por sua vez, é uma evidente violação da desigualdade de Bell. Portanto, como podemos bem observar, Bell coloca o problema em linhas quantitativas, deixando para a natureza confirmar a validade ou invalidade das previsões da teoria quântica. É interessante destacar que desde então vários trabalhos experimentais confirmaram as previsões da teoria quântica em detrimento das previsões clássicas da forma como apresentado por Bell (BELL et al., 2014; ASPECT; GRANGIER; ROGER, 1981; CHRISTENSEN et al., 2013; PAN et al., 2000).

## 2.2 DEFINIÇÃO

### 2.2.1 Emaranhamento e Inseparabilidade

Para introduzir o conceito de inseparabilidade é necessário estabelecer o cenário físico em que se situa tal definição. Para tanto, é preciso, como já foi feito anteriormente, considerarmos um sistema físico de duas partes que interagem em algum momento no passado e que no presente estão sob a posse de dois observadores espacialmente separados, Alice e Bob.

Se o subsistema de Alice tem dimensão  $d_A$  em um espaço de Hilbert  $\mathbb{H}_A$  e a parte de Bob tem dimensão  $d_B$  num espaço de Hilbert  $\mathbb{H}_B$ , então podemos escrever um

estado arbitrário  $|\psi\rangle$  no espaço de Hilbert  $\mathbb{H}_A \otimes \mathbb{H}_B$  associado ao sistema global como

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j}^{d_A, d_B} c_{ij} |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle. \quad (2.15)$$

Na equação acima, ambos os conjuntos  $\{|a_i\rangle\}$  e  $\{|b_j\rangle\}$  são bases para os espaços de Hilbert  $\mathbb{H}_A$  e  $\mathbb{H}_B$ , respectivamente. Sendo assim, de posse destes conceitos, temos:

**Definição:** Denomina-se estado **separável** ou **estado produto** de um sistema bipartite a todo estado  $|\psi\rangle$  que possa ser posto sob a forma

$$|\psi\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle. \quad (2.16)$$

Na equação acima,  $|\phi_A\rangle$  é um estado associado ao subsistema de Alice enquanto que  $|\phi_B\rangle$  é um vetor de estado associado ao subsistema que está sob a posse de Bob. Por outro lado, se o estado não é separável, isto é, se não existem  $|\phi_A\rangle$  e  $|\phi_B\rangle$  por meio dos quais podemos escrevê-lo, então o estado é dito ser **emaranhado**.

O significado físico da separabilidade é imediato, isto é, medições realizadas na parte de Alice não tem nenhuma influência na parte de Bob e vice-versa. Sendo assim, o estado global tem a interessante propriedade de que é possível prepará-lo localmente, ou seja, por cada uma das partes - Alice e Bob - de forma independente.

Para ilustrar a ideia, é interessante observar que alguns vetores de estado podem ser expressos de forma mais simples a partir de uma simples mudança de base. Por exemplo, o vetor

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle), \quad (2.17)$$

pode ser escrito de uma maneira mais simples ao adotarmos a base dada pelo par de vetores  $\{|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\}$ . Neste caso, o vetor  $|\psi\rangle$  pode ser escrito simplesmente como

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle|+\rangle. \quad (2.18)$$

Como podemos ver, neste caso, a probabilidade conjunta de encontrar o sistema neste estado se fatora no produto das probabilidades dos sistemas individuais estarem nos referidos estados. Ou seja,

$$p^{A,B}(|\psi\rangle) = p^A(|+\rangle)p^B(|+\rangle). \quad (2.19)$$

Contudo, ao escrevermos o vetor de estado na base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , percebemos que a probabilidade conjunta não fatora como no caso da Eq. (2.18), o que, por sua vez, significa que existe algum tipo de correlação entre os resultados de medidas nesta base. Isto pode nos levar a supor erroneamente que podemos encontrar uma base

para a qual o estado singleto de (2.3) fatora como um estado produto de forma similar ao que vemos em (2.17). Sendo assim, podemos tentar escrever o estado em (2.3), um estado emaranhado, como

$$|\psi^-\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle). \quad (2.20)$$

Porém, não existe nenhuma solução possível para este sistema. Isto indica que o tipo de correlação presente no estado  $|\psi^-\rangle$ , dado pela Eq. (2.3), tem características peculiares. Mais precisamente, está associada à impossibilidade de escrever o estado global do sistema como o produto dos estados dos subsistemas. Por fim, pode-se mostrar que existe uma hierarquia entre os conceitos de emaranhamento e não-localidade de Bell.

### 2.2.2 Emaranhamento em Classes Mais Abrangentes

Na seção anterior, definimos emaranhamento para o caso de estados puros de sistemas de duas partes - bipartites. Como é de se esperar, fundamentalmente e de forma direta, o emaranhamento, por se tratar de um tipo de correlação existente entre os resultados de medições realizadas nos diferentes subsistemas de um sistema composto, deve ser definido sobre um sistema que possibilite a sua decomposição em, pelo menos, duas partes.

Por outro lado, o emaranhamento não se limita às correlações e à inseparabilidade de duas partes, tampouco ao caso de estados puros e, portanto, pode ser definido de maneira mais genérica como segue. Seja  $\mathbb{H}$  o espaço de Hilbert associado à um sistema de  $n$  partes. Estabelecendo-se que  $\mathbb{H}_i$  é o espaço de Hilbert associado a  $i$ -ésima parte do sistema global, ou seja, é o  $i$ -ésimo subsistema, podemos escrever

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathbb{H}_n. \quad (2.21)$$

**Definição:** Denomina-se estado **separável de um sistema multipartite de  $n$  partes** a todo estado  $|\psi\rangle$  que possa ser posto sob a forma

$$|\psi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\phi_n\rangle, \quad (2.22)$$

com  $|\phi_i\rangle$  um vetor pertencente ao espaço de Hilbert  $\mathbb{H}_i$ . Além disso, se o estado  $|\psi\rangle$  não pode ser posto na forma da Eq. (2.22), então ele é dito **emaranhado**.

Pode-se ainda estender a definição de emaranhamento servindo-se do formalismo do operador densidade de tal forma que, se o espaço de operadores lineares atuantes nos vetores de  $\mathbb{H}$  é  $\mathbb{O}$  e, além disso, o espaço de operadores lineares atuantes nos vetores de  $\mathbb{H}_i$  é  $\mathbb{O}_i$ , então vale a seguinte definição

**Definição:** Denomina-se estado **separável de um sistema multipartite puro de**

$n$  partes representado pelo operador densidade  $\rho$  a todo estado que pode ser posto sob a forma

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \dots \otimes \rho_n, \quad (2.23)$$

em que  $\rho_i$  é um operador densidade pertencente ao espaço  $\mathbb{O}_i$ , que representa adequadamente a  $i$ -ésima parte do sistema. Por outro lado, similarmente ao caso da Eq. (2.22), se  $\rho$  não pode ser posto sob a forma (2.23), o sistema é emaranhado.

No caso de estados mistos, a extensão é natural e só pode ser feita no contexto do formalismo do operador densidade. Neste sentido, considerando as diferentes possibilidades de configurações  $1, 2, \dots, m$  e as respectivas probabilidades associadas a tais configurações  $p_1, p_2, \dots, p_m$  em um sistema constituído por  $n$  partes, podemos definir:

**Definição:** Denomina-se estado separável de um sistema multipartite misto de  $m$  partes representado pelo operador densidade  $\rho$  a todo estado que pode ser posto sob a forma

$$\rho = \sum_{j=1}^m p_j \rho_1^{(j)} \otimes \rho_2^{(j)} \otimes \dots \otimes \rho_n^{(j)}. \quad (2.24)$$

Seguindo o caminho natural da extensão para o caso misto de sistemas multipartites, se o estado misto multipartite não pode ser posto sob a forma da equação (2.24), então o sistema é emaranhado.

O conteúdo físico presente em tais definições é claro e objetivo, apesar de exposto para diferentes cenários (estados puros bipartites, estados puros multipartites, estados mistos multipartites), isto é, a capacidade de preparar os estados dos diferentes subsistemas localmente é determinante na identificação do emaranhamento presente em determinado sistema.

Por fim, devido ao fato de tais definições estarem associadas à identificação de estados emaranhados, podemos ser levados a supor erroneamente que o problema de caracterização do emaranhamento é trivialmente resolvido quando posto em sua forma mais genérica, conforme as definições apresentadas. Por outro lado, na esmagadora maioria das vezes, decidir se determinado estado é emaranhado ou não é um problema complexo e apresenta soluções simples apenas para alguns casos particulares.

## 2.3 EMARANHAMENTO

### 2.3.1 Paradigma LOCC

Podemos tentar entender o que são Operações Locais e Comunicação Clássica LOCC e sua importante relação com emaranhamento na área de informação quântica a partir de um protocolo muito conhecido: o teletransporte quântico. Tal protocolo foi imaginado primeiramente por Charles Bennett em 1933 (BENNETT et al., 1993)

e é apresentado de forma sistemática e didática em muitas referências (NIELSEN; CHUANG, 2000; ALBER et al., 2003; JAEGER, 2007; BARNETT, 2009), mas por questão de completude será apresentado aqui de forma sintética.

O sistema necessário para a implementação do referido protocolo é composto por três qubits, um controlado por Bob e dois por Alice. Um dos qubits de Alice está, junto com o de Bob, em um estado de Bell  $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle)$  e o outro em um estado desconhecido  $|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  que Alice deseja enviar para Bob. Sendo assim, Alice permite que seus dois qubits interajam via interação unitária  $U_{CNOT}$  (NIELSEN; CHUANG, 2000).

As portas controladas, das quais  $U_{CNOT}$  é um exemplo, ao emprestarmos a terminologia da teoria da computação, descreve uma interação entre dois qubits de tal forma que o estado de um dos qubits (qubit alvo) é alterado dependendo do estado em que se encontra o outro qubit (qubit de controle). Mais especificamente, no caso da  $U_{CNOT}$  a alteração no qubit alvo é tal que se o estado dele é  $|0\rangle$  passa a ser  $|1\rangle$  e vice-versa e, por outro lado, está condicionado ao fato do estado do qubit de controle estar em  $|1\rangle$ .

Assim, como o estado do sistema global, composto pelos dois qubits de Alice e o de Bob, antes da atuação de  $U_{CNOT}$  é dado por  $|\Psi\rangle = |\phi\rangle |\Phi^+\rangle$  temos que o resultado da atuação de  $U_{CNOT}$ ,  $|\Psi'\rangle = U_{CNOT} \otimes I_B |\Psi\rangle$  para o estado global do sistema pode ser escrito como

$$|\Psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha|0\rangle(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) + \beta|1\rangle(|1\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle)]. \quad (2.25)$$

Após isso, suponha que Alice realize uma operação do tipo Hadamard no primeiro qubit, definida pela eq. (2.26), isto é, aquele cujo o estado ela deseja enviar. Uma vez que a operação Hadamard  $H$  tem por representação matricial

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

o estado do sistema  $|\Psi''\rangle = H \otimes I \otimes I |\Psi'\rangle$ , será dado por

$$|\Psi''\rangle = \frac{1}{2} [\alpha (|0\rangle + |1\rangle) (|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) + \beta (|0\rangle - |1\rangle) (|1\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle)]. \quad (2.27)$$

Se simplesmente reorganizarmos os termos, ficaremos com:

$$|\Psi''\rangle = \frac{1}{2} [|0\rangle|0\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |0\rangle|1\rangle (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + |1\rangle|0\rangle (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |1\rangle|1\rangle (\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)]. \quad (2.28)$$

Por fim, Alice realiza uma medição na base de  $\sigma_z$  em seus dois qubits, o que conforme

a equação (2.28) resultará em um dos quatro estados seguintes para Bob

$$\begin{aligned}
 |0\rangle|0\rangle &\rightarrow \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \\
 |0\rangle|1\rangle &\rightarrow \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle, \\
 |1\rangle|0\rangle &\rightarrow \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle \text{ ou} \\
 |1\rangle|1\rangle &\rightarrow \alpha|1\rangle - \beta|0\rangle.
 \end{aligned}
 \tag{2.29}$$

Feito isso, Alice informa o resultado das medidas de  $\sigma_z$  em seus dois qubits para Bob. Este, por sua vez, terá o estado enviado por Alice caso o resultado seja  $|0\rangle|0\rangle$ , ou poderá alcançá-lo através de uma operação  $\sigma_z$  se o resultado for  $|0\rangle|1\rangle$ ,  $\sigma_x$  se o resultado for  $|1\rangle|0\rangle$ , ou ainda,  $\sigma_z\sigma_x$  se o resultado for  $|1\rangle|1\rangle$ . Resumidamente, se rotularmos os resultados das medições nos dois qubits de Alice como  $M_1$  e  $M_2$ , teremos que a operação local a ser realizada por Bob para que este tenha sob sua posse o estado enviado por Alice é  $\sigma_z^{M_1}\sigma_x^{M_2}$ .

A finalidade da apresentação deste protocolo não está nele mesmo, apesar de ser um resultado interessantíssimo, mas no que ele é capaz de ilustrar. Primeiramente, vemos que tanto Alice e Bob estão espacialmente separados, isto é, nem Alice tem acesso direto à parte de Bob e nem Bob tem acesso à parte do sistema que corresponde aos qubits de Alice. Desta forma, a ação deles no sistema global está restrita às manipulações locais das respectivas partes. E é exatamente isso que vemos no protocolo, todas as operações envolvidas no protocolo,  $U_{CNOT}$ ,  $H$ ,  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$ , são realizadas localmente. Além disso, observamos que caso o estado compartilhado por Alice e Bob dos dois qubits fosse um estado separável, não seria possível realizar o protocolo.

Conclui-se então pela necessidade de um estado de Bell - qualquer um deles é suficiente, visto que podemos obter um do outro a partir das operações locais  $\sigma_z^{M_1}\sigma_x^{M_2}$  conforme exposto nos parágrafos anteriores - e que este estado apresenta correlações não locais, verifica-se a necessidade de emaranhamento para a implementação dos estados de Bell no sistema global. Em outras palavras, operar localmente nestas partes do sistema não é suficiente para criar o tipo de correlação exigida para implementação do protocolo. Este é apenas um exemplo de vários protocolos que exigem emaranhamento para que sua implementação seja possível.

Uma outra observação que podemos fazer é que, se somos capazes de distribuir sistemas quânticos emaranhados perfeitamente, somos capazes de distribuir estados quânticos via teletransporte quântico perfeitamente e vice-versa. Porém, sistemas com essa dimensão são muito sensíveis às interações com o ambiente o que, por sua vez, torna muito difícil a eficiência na sua distribuição. Contudo, podemos distribuí-los por meio de canais quânticos acessíveis experimentalmente e combater os efeitos de ruído por meio de operações locais nas partes.

Além disso, não há razão alguma para que durante o processo de manipulação das partes do sistema, os controladores não usem canais clássicos para se comunicar assim como o faz Alice ao informar para o Bob os resultados de sua medição no protocolo de teletransporte quântico. Tendo dito isso, podemos perceber a importante relação entre emaranhamento e operações locais assistidas por comunicação clássica. Sendo assim, podemos dar um passo a mais e definir emaranhamento como o tipo de correlação em sistemas que não pode ser criada via OLCC nem reproduzido por quaisquer meios clássicos.

## 2.4 QUANTIFICAÇÃO DO EMARANHAMENTO

Os estados emaranhados, como bem sugere a Seção 2.3.1, desempenham um papel fundamental em muitos protocolos associados ao processamento, codificação e comunicação de informação quântica (JAEGER, 2007). Sendo assim, é fundamental criar uma estrutura de quantificação e subsequente classificação dos estados de acordo com a sua utilidade para tais protocolos.

### 2.4.1 Medidas Entrópicas de Emaranhamento

Um resultado interessante é obtido ao analisarmos conjuntamente as consequências da decomposição de Schmidt e a idempotência, nome atribuído à propriedade de um operador densidade  $\rho$  que satisfaz  $\rho = \rho^2$  dos operadores densidade reduzidos de estados de sistemas bipartites, isto é, sistemas compostos por duas partes, digamos, parte 1 e parte 2. É imediato observar que se o estado  $\rho$  for separável, então o operador densidade reduzido da parte 1  $\rho^{(1)}$ , tem apenas um autovalor e, portanto,  $[\rho^{(1)}]^2 = \rho^{(1)}$ .

Por outro lado, se o operador densidade reduzido da parte 1 é idempotente, então significa que o estado  $\rho$  associado ao sistema composto é separável. Em outras palavras, a idempotência dos operadores densidade reduzidos, no contexto dos estados puros de sistemas bipartites, é condição necessária e suficiente para existência de emaranhamento (JAEGER, 2007):

$$\rho^{(i)} \neq [\rho^{(i)}]^2 \forall i \iff \rho \text{ Emaranhado.} \quad (2.30)$$

Neste sentido, as medidas entrópicas de emaranhamento são uma tentativa de quantificar o “grau de não idempotência” associada aos operadores densidade reduzidos de determinado estado emaranhado. Além disso, para se tratar de medidas autênticas de emaranhamento é razoável exigir que tais medidas não dependam da particular base escolhida para representar o estado. Isto, por sua vez, é conseguido fazendo uso da operação traço.

Algumas medidas entrópicas frequentemente utilizadas são:

### 1. Entropia de Von Neuman:

$$S[\rho^{(i)}] = -\text{tr}[\rho^{(i)} \log_2 \rho^{(i)}] = -\sum_{\mu} p_{\mu} \log_2 p_{\mu} \geq 0. \quad (2.31)$$

### 2. Entropia Linear:

$$S_L(\rho^{(i)}) = \text{tr}[\rho^{(i)}] - \text{tr}[(\rho^{(i)})^2] = 1 - \sum_{\mu} p_{\mu}^2 \geq 0. \quad (2.32)$$

### 3. Entropia de “2-Rényi”:

$$S_R[\rho^{(i)}] = -\log_2(\text{tr}[(\rho^{(i)})^2]) = -\log_2\left(\sum_{\mu} p_{\mu}^2\right) \geq 0, \quad (2.33)$$

onde  $p_{\mu}$  são os autovalores do operador  $\rho$ .

Vale ressaltar que nas medidas entrópicas de emaranhamento elencadas nas Eqs. (2.31), (2.32) e (2.33) o uso da base 2 no logaritmo é totalmente arbitrária, uma vez que uma mudança na base resultaria em uma mudança de escala dos valores das entropias apresentadas nos itens 1-3, apenas. Além disso, nos termos da seção anterior, o conjunto de medidas entrópicas independe de qual operador densidade reduzido é escolhido (da parte 1 ou da parte 2), já que, da decomposição de Schmidt, sabemos que ambos compartilham os mesmos autovalores (PERES, 1995).

#### 2.4.2 Emaranhamento Destilável e o Custo de Emaranhamento

O conceito de Emaranhamento Destilável  $E_D$  tem origem na seguinte ideia: quantas cópias do estado misto de interesse  $\rho$  são necessárias para conseguir determinado número de estados de Bell servindo-se apenas de OLCC? De maneira mais precisa e formal, definimos  $E_D[\rho]$  associado ao estado  $\rho$ , como

$$E_D(\rho) := \max\{r : \lim_{n \rightarrow \infty} [\min_{\Lambda} \text{tr} |\Lambda(\rho^{\otimes n}) - \Phi(2^{rn})|] = 0\}, \quad (2.34)$$

em que  $\Phi(2^{rn})$  é o operador densidade associado ao estado maximamente emaranhado em  $2^{rn}$  dimensões e, além disso, é escolhido o mapa  $\Lambda$  entre todas as possíveis LOCC's de forma a minimizar a distância entre o estado  $\Lambda(\rho^{\otimes n})$  e o operador  $\Phi(2^{rn})$ .

Enquanto no  $E_D$ , a ideia chave é a taxa de conversão das cópias de  $\rho$  em estados maximamente emaranhados, no Custo de Emaranhamento  $E_C$  a ideia é encontrar o número de cópias necessárias de estados maximamente emaranhados para obter determinado número de cópias de  $\rho$ , isto é, quanto emaranhamento é necessário.



Formalmente, definimos  $E_C[\rho]$  associado ao estado  $\rho$  como

$$E_C(\rho) = \min\{r : \lim_{n \rightarrow \infty} [\min_{\Lambda} D(\rho^{\otimes n}, \Lambda(\Phi(2^{rn})))] = 0\}. \quad (2.35)$$

Apesar de ambos os quantificadores de emaranhamento servirem-se de nuances variacionais que, na maioria das vezes, tornam complexo o cálculo em casos práticos, podemos obter, para uma certa variedade de casos, limites superiores e inferiores que são de grande valia para a quantificação de emaranhamento em alguns sistemas de interesse. Contudo, para o caso de estados puros, é possível mostrar (BENNETT et al., 1996) que os valores de  $E_C$  e  $E_D$  coincidem com a entropia de emaranhamento definida pela Eq. (2.31), indicando ser essa a medida de emaranhamento mais adequada para a classe de estados puros em sistemas de duas partes.

### 2.4.3 Emaranhamento de Formação

Uma proposta para a quantificação de emaranhamento adequada para o caso de estados mistos é o Emaranhamento de Formação  $E_F$ . Neste caso, a motivação é o cálculo da média de emaranhamento sobre a decomposição em estados puros que minimiza o valor de  $E_F(\rho)$ . Ou seja,

$$E_F(\rho) := \min \left\{ \sum_i p_i E(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|) : \rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \right\}, \quad (2.36)$$

em que  $E(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|)$  é a Entropia de Emaranhamento definida por (2.31) para o estado  $|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ . A esta altura, é interessante notar a relação desta quantidade com  $E_C$ , pois pode-se mostrar que (HAYDEN; HORODECKI; TERHAL, 2001)

$$E_F^\infty(\rho) = E_C(\rho), \quad (2.37)$$

em que

$$E_F^\infty(\rho) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_F(\rho^{\otimes n})}{n}, \quad (2.38)$$

em que  $E_F^\infty(\rho)$  é a versão assintótica de  $E_F$ .

### 2.4.4 Fidelidade

A fidelidade  $F$ , não foi originalmente pensada como um quantificador de emaranhamento, mas como uma medida de distância entre matrizes. Neste sentido, se houver um estado de referência como é o caso dos estados de Bell no contexto bipartite de dois qubits (PLENIO; VIRMANI, 2006). Sendo assim, podemos quantificar emaranhamento contido em um estado arbitrário a partir da medida da distância desse estado

com relação ao estado de referência.

$F(\rho, \sigma)$  de um estado arbitrário  $\rho$  com relação a um estado de referência  $\sigma$  é definido como

$$F(\rho, \sigma) = \text{tr}\{\rho\sigma\}. \quad (2.39)$$

Uma vez que tanto o operador  $\rho$  quanto  $\sigma$  são operadores densidades legítimos, devem satisfazer, no caso de estados puros,  $\rho^2 = \rho$  e  $\text{tr}\rho = 1$ . Definida nestes termos, os valores de  $F$  variam de 0 até 1, sendo que o valor 1 é alcançado para o caso em que temos o estado  $\rho$  igual ao estado de referência; portanto, se este é adequadamente escolhido, teremos para o presente caso máximo emaranhamento.

A fidelidade  $F$  é apenas uma das possibilidades entre os quantificadores de emaranhamento baseados em medidas de distância entre os estados quânticos. Por outro lado, é fundamental que, independente da escolha de medida de distância  $D(\rho, \sigma)$ , seja observado que a referida função atenda ao critério

$$D(\rho, \sigma) \geq D(\Lambda(\rho), \Lambda'(\sigma)), \quad (2.40)$$

em que  $\Lambda$  e  $\Lambda'$  são quaisquer LOCC's que possam ser realizadas nos estados  $\rho$  e  $\sigma$ . Tal exigência é pelo menos razoável, tendo em vista que emaranhamento não pode ser criado nem aumentado com esta classe de operações. Contudo, para citar apenas um, dentre outros possíveis, quantificadores de emaranhamento baseadas em distância, temos:

**Distância de Hilbert-Schmidt:** Definindo-se o produto interno entre duas matrizes  $A$  e  $B$  como

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^\dagger), \quad (2.41)$$

temos como consequência imediata desta definição o estabelecimento da norma neste espaço de matrizes, dada por

$$\|A\|^2 = \text{tr}(AA^\dagger). \quad (2.42)$$

Com a definição da norma, somos capazes de propor para este espaço, a distância  $d(A, B)$  entre duas matrizes  $A$  e  $B$ , definida como

$$d(A, B) = \|A - B\|. \quad (2.43)$$

#### 2.4.5 Concorrência

A concorrência  $C(\rho)$  (NIELSEN; CHUANG, 2000) associada ao estado  $\rho$  é um quantificador de emaranhamento aplicável tanto a estados puros quanto para os estados

mistos de dois qubits e é dada por

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}. \quad (2.44)$$

Os  $\lambda_i$ 's são os autovalores do operador  $R$  dispostos em ordem decrescente ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ ), o qual é definido por

$$R = \sqrt{\sqrt{\rho} \tilde{\rho} \sqrt{\rho}}. \quad (2.45)$$

Na Eq. (2.45) aparece o operador  $\tilde{\rho}$  que é chamado de spin-flip e pode ser escrito para o complexo conjugado  $\rho^*$  do operador  $\rho$  como

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y). \quad (2.46)$$

Da mesma forma que a entropia de emaranhamento, a concorrência associada a determinado estado toma valores no intervalo  $[0, 1]$ . Os estados que assumem valor 1 são estados maximamente emaranhados, enquanto estados separáveis naturalmente retornam valor nulo para o cálculo da concorrência  $C(\rho)$ .

Além disso, é interessante observar que a concorrência guarda relação com outro importante quantificador, o emaranhamento de formação  $E_F$ . As duas quantidades são monotonicamente relacionadas por

$$E_F(\rho) = s\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2(\rho)}}{2}\right), \quad (2.47)$$

em que  $s(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2 (1 - x)$ , a entropia de Shannon para uma distribuição de probabilidade com somente dois elementos (SHANNON, 1948).

Aqui é interessante ressaltar que o traço parcial definido no capítulo 1 é uma ferramenta útil para tratar de sistemas com mais de duas partes. Nestes casos, podemos tomar o traço sobre algumas partes o que, por sua vez, significa descartar parte da informação sobre as probabilidades associadas as medições realizadas sobre elas. Em seguida, é possível avaliar a quantidade de emaranhamento contido em sistemas bipartites com quantificadores definidos para este tipo de sistemas como, por exemplo, a concorrência.

#### 2.4.6 Negatividade

Uma outra proposta interessante de quantificar emaranhamento surge do critério de Peres-Horodecki, teorema apresentado em 1996 por Asher Peres e integrantes da família Horodecki (PERES, 1996). Enquanto o critério de idempotência está associado à identificação de emaranhamento apenas em estados puros, o critério de Peres-Horodecki, por sua vez, é capaz de detectar emaranhamento tanto em estados puros

quanto em estados mistos.

O Critério de Peres-Horodecki estabelece que se  $\rho$  é um estado separável, então os autovalores da transposta parcial de  $\rho$ ,  $\rho^{TP}$ , são não-negativos. A transposta parcial  $\rho^{TP}$  de um operador densidade  $\rho = \sum_{ijkl} p_{ijkl} |i\rangle \langle j| \otimes |k\rangle \langle l|$  é definida como  $\rho^{TP} = \sum_{ijkl} p_{ijkl} |i\rangle \langle j| \otimes |l\rangle \langle k|$ . Desta forma, se  $\rho^{TP}$  tem autovalores negativos, então  $\rho$  é garantidamente emaranhado.

Da mesma forma que o critério de idempotência dá origem às medidas entrópicas de emaranhamento, o critério de Peres-Horodecki dá origem à negatividade  $N[\rho]$ , que é definida por

$$N(\rho) = \frac{\|\rho^{TP}\| - 1}{2}, \quad (2.48)$$

em que  $\|A\|_T = [\text{tr}(A^T A)]^{\frac{1}{2}}$  é a norma traço. A definição da negatividade é muito simples de ser compreendida, pois a norma traço para o caso de matrizes hermitianas é simplesmente a soma dos valores absolutos de seus autovalores. Por outro lado, considerando que o traço de uma matriz densidade transposta é igual a 1, chegamos à conclusão de que a quantidade  $\|\rho^{TP}\| - 1$  é simplesmente o dobro da soma dos autovalores negativos de  $\rho^{TP}$ .

### 3 EMARANHAMENTO EM ESTADOS GRAFO

*“Anybody who is not shocked by quantum theory has not understood it.”*

*Niels Bohr*

Neste capítulo aplicaremos a estrutura conceitual do Capítulo 2 juntamente com novos conceitos aqui introduzidos a fim de caracterizar e quantificar emaranhamento em estados grafo.

#### 3.1 ESTADOS GRAFO

##### 3.1.1 Introdução aos Estados Grafo

A ideia de estados grafo é uma forma particular de resolver o problema geral do mapeamento de grafos em estados quânticos. Em outras palavras, dado um grafo, quais os tipos de associação devem ser feitas para um mapeamento conveniente entre as duas diferentes estruturas? Tal problema é atacado em (IONICIOIU; SPILLER, 2012), donde temos uma abordagem axiomática que converge para o que é utilizado na definição de estados grafo. Isto é, associamos os vértices a sistemas físicos, qubits ou até mesmo sistemas quânticos de dimensionalidade superior a 2 com os respectivos espaços de Hilbert  $\mathbb{H}_i$ , enquanto às arestas do grafo associamos interações unitárias entre estes sistemas que dão origem à definição de estados grafo baseada em padrões de interação.

Existem pelo menos duas razões que motivam a definição e o estudo do emaranhamento em estados grafo. A primeira é que devido ao fato de que emaranhamento multipartite ser ainda pouco entendido para o caso genérico, é necessário estudar o emaranhamento multipartite em estados que apresentem algum tipo de simetria para facilitar a sua caracterização e quantificação nestes estados. A outra razão é que estados grafo têm a eles associados protocolos de processamento de informação quântica, como é o caso em códigos de correção quântica cujas “codewords” são estados grafo e a “one way quantum computing” (computação quântica de direção única, também chamada de computação quântica baseada em medições) que tem o estado cluster, um tipo de estado grafo, como recurso (HEIN et al., 2006).

Assim, o benefício de se tratar estados grafo é que, devido a forte presença de simetrias, podemos reescrever os problemas de emaranhamento na linguagem de grafos e resolvê-los de forma mais simples (como veremos), sem as complicações encontradas no caso mais geral e que, na maioria das vezes, estão ligadas aos problemas de minimização e maximização que surgem na definição dos quantificadores de emaranhamento no limite assintótico.

Vale salientar que, como é de se esperar, a modelagem de estados quânticos em grafos apresenta características que estão intimamente ligadas ao tipo de grafo que dá origem ao estado. A primeira é que o operador unitário associado às arestas deve ser não local. Ou seja, espera-se que operadores locais levem estados separáveis em estados separáveis. Por outro lado, no caso de estados grafo, partimos de um estado separável e queremos obter um estado emaranhado, o estado grafo, para entender as suas características de emaranhamento.

Para que a modelagem tenha consistência do ponto de vista da física, modelagem restringe-se a grafos simples, isto é, grafos sem loops (arestas que conectam um vértice a ele mesmo) e que não possuem mais de uma aresta conectando dois vértices. Além disso, temos:

- uma vez que não há uma ordem na aplicação dos operadores unitários associados a arestas, temos

$$[U_{ab}, U_{bc}] = 0, \quad (3.1)$$

em que  $U_{ab}$  é um operador devido a aresta associada à interação entre os sistemas  $a$  e  $b$ ;

- uma vez que as arestas de grafos simples são não-direcionadas, devemos ter

$$U_{ab} = U_{ba}; \quad (3.2)$$

- para estados grafo onde as arestas não são especificadas por pesos, todos os qubits interagem com a mesma interação  $U_{ab}$ .

É possível provar, conforme (HEIN et al., 2006), a partir das restrições acima que qualquer padrão de interação que as respeite pode ser posta sob a forma

$$\phi_{ab} H_{ab} = \phi_{ab} \sigma_z^{(a)} \sigma_z^{(b)} + \alpha_a \sigma_z^{(a)} + \alpha_b \sigma_z^{(b)}, \quad (3.3)$$

em que  $\phi_{ab}$ ,  $\alpha_a$  e  $\alpha_b$  são constantes reais que representam a metade do ângulo de rotação em torno do eixo  $z$  da esfera de Bloch para os qubits  $a$  e  $b$ . Ou seja, a menos de rotações locais nos qubits, é uma interação do tipo Ising, que é dada por

$$U_{ab}^I(\phi_{ab}) := e^{-i\phi_{ab}\sigma_x^{(a)}\sigma_x^{(b)}}. \quad (3.4)$$

Desta observação resulta que podemos obter estados grafo a partir de qualquer sistema físico que permita interações do tipo Ising, como é o caso de átomos frios em redes óticas (FIGGER; MESCHEDE; ZIMMERMANN, 2002).

### 3.1.2 Definição de Estados Grafo

Há duas formas diferentes, porém equivalentes, de se definir estados grafo. A primeira é fazendo uso do, já mencionado, padrão de interação. Nesta abordagem, cada vértice corresponde a um sistema quântico de dois níveis – o qubit – e as arestas representam interações que denotaremos por  $U_{ab}$ , a porta controlada  $Z$  (NIELSEN; CHUANG, 2000). Desta forma, podemos definir:

**Definição:** Seja  $G$  o grafo a partir do qual será obtido o estado grafo. O estado grafo  $|G\rangle$  é dado por

$$|G\rangle = \prod_{\{ab\} \in E} U_{ab} |+\rangle^{\otimes V}, \quad (3.5)$$

em que  $U_{ab}$  é a porta controlada  $Z$  ou porta fase que é aplicada em todos os vértices  $a$  e  $b$  que são conectados no grafo  $G$ . Há, pelo menos, duas observações interessantes que podem ser feitas aqui. A primeira é que a definição via padrão de interação para estados grafo é bastante intuitiva, pois, codifica o procedimento de preparação do estado. Em outras palavras, se preparamos todos os qubits do sistema no estado  $|+\rangle$ , autoestado do operador  $\sigma_x$  com autovalor  $+1$ , e em seguida permitirmos a interação, dois a dois, que dê origem a porta fase  $U_{ab}$  nos qubits que são conectados no grafo  $G$ , obteremos o estado grafo  $|G\rangle$ . O leitor atento pode ter percebido que foi usada a porta fase (ou controlada  $Z$ , que é um caso especial da porta fase) apesar de se ter mencionado na seção anterior a do tipo Ising como a interação adequada para a preparação dos estados grafo. O que justifica tal uso é a observação de que a porta fase  $U_{ab}$  pode ser escrita como

$$U_{ab}[\phi_{ab}] = e^{-i\phi_{ab}H_{ab}}, \quad (3.6)$$

cujo Hamiltoniano de interação  $H_{ab}$  é dado por

$$H_{ab} := |1\rangle\langle 1|^{(a)} \otimes |1\rangle\langle 1|^{(b)}, \quad (3.7)$$

em que  $|1\rangle$  é o autoestado do operador  $\sigma_z$  com autovalor  $-1$ . Podemos reescrever os projetores  $|1\rangle\langle 1|$  como

$$|1\rangle\langle 1| = \frac{\mathbb{I} - \sigma_z}{2}. \quad (3.8)$$

Desta forma, nós podemos escrever o hamiltoniano  $H_{ab}$  como

$$H_{ab} = \frac{\mathbb{I} - \sigma_z^{(a)}}{2} \otimes \frac{\mathbb{I} - \sigma_z^{(b)}}{2} = \frac{1}{4} (\mathbb{I}^{(ab)} - \sigma_z^{(a)} - \sigma_z^{(b)} - \sigma_z^{(a)}\sigma_z^{(b)}) \quad (3.9)$$

e o operador  $U_{ab}$  como

$$U_{ab} = e^{-i\frac{\phi_{ab}}{4}} e^{i\frac{\phi_{ab}\sigma_z^{(a)}}{4}} e^{i\frac{\phi_{ab}\sigma_z^{(b)}}{4}} e^{-i\frac{\phi_{ab}\sigma_z^{(a)}\sigma_z^{(b)}}{4}}. \quad (3.10)$$

A escolha de  $\phi_{ab} = \pi$  garante que a aplicação de  $U_{ab}$  no estado separável  $|+\rangle_a|+\rangle_b$  dá origem ao estado maximamente emaranhado de dois qubits a menos de operações locais. De forma que podemos reescrever a Eq. (3.10) como

$$U_{ab} = e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_z^{(a)}} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_z^{(b)}} e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_z^{(a)}\sigma_z^{(b)}}. \quad (3.11)$$

Sabemos que  $e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_z^{(a)}}$  corresponde a uma rotação local de  $\frac{\pi}{4}$  em torno do eixo  $z$  no estado do qubit  $a$ , quando representado na esfera de Bloch. Portanto, podemos concluir a partir de (3.11) que a porta controlada  $Z$ , caso especial da porta fase, corresponde à interação Ising a menos de rotações locais nos estados dos qubits.

A outra observação que podemos fazer a respeito da primeira forma de se definir estados grafo é que  $U_{ab}$  tanto “insere” a aresta, quando a aplicamos pela primeira vez, como “remove”, quando a aplicamos duas vezes entre os vértices  $a$  e  $b$ , pois  $U_{ab}^2 = \mathbb{I}$ .

A segunda forma de se definir estados grafo é fazendo uso do formalismo estabilizador. Sendo assim, é conveniente entender o formalismo antes de usá-lo para a descrição de estados grafo. O formalismo estabilizador apoia-se na ideia de que é possível descrever um estado quântico a partir do operador cujo estado quântico é seu autovetor com autovalor 1. Em outras palavras, o operador acaba “estabilizando” o vetor de estado correspondente, daí a denominação “estabilizador”. Além disso, as transformações do vetor de estado podem ser descritas inteiramente a partir das transformações deste operador, sem a modificação das informações estatísticas do sistema quântico.

Para ilustrar a ideia do formalismo estabilizador, pode-se servir de um exemplo de estado que tem papel fundamental nos protocolos de processamento, codificação e comunicação de informação quântica. A saber, um dos estados de Bell. Este estado é importante devido ao emaranhamento nele contido e que serve como recurso para os tipos de protocolo citados acima. Um dos estados de Bell, o estado  $|\Psi^+\rangle$ , pode ser escrito como

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle). \quad (3.12)$$

Por outro lado, podemos perceber que este estado pode ser visto como sendo o único autovetor comum aos operadores  $\sigma_x\sigma_x$  e  $\sigma_z\sigma_z$  com autovalor +1. Desta forma, podemos descrevê-lo a partir deste conjunto de observáveis. Supondo que este estado sofra algum tipo de erro, por exemplo, uma transformação representada pela porta lógica Hadamard  $H$ , teremos

$$\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)} \rightarrow H\sigma_z^{(1)}H^\dagger\sigma_z^{(2)} = \sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)} \quad (3.13)$$



e

$$\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)} \rightarrow H\sigma_x^{(1)}H^\dagger\sigma_x^{(2)} = \sigma_z^{(1)}\sigma_x^{(2)}. \quad (3.14)$$

Esta conveniência na descrição pode ser uma consequência do fato que, para alguns casos, o número de elementos necessários para descrição diminui significativamente ao adotarmos a descrição via formalismo estabilizador em detrimento daquela associada aos vetores de estado. Além disso, outro fator que pode contribuir para esta conveniência é a observação de que algumas transformações, como no exemplo da Hadamard, facilmente descritas em termos do estabilizador. De forma específica, é fácil observar que as transformações representadas pelas matrizes de Pauli têm este tipo de conveniência. Neste caso, isto é resultante do fato de que a aplicação de matrizes de Pauli nelas mesmas leva ainda a uma matriz de Pauli.

**Definição:** Seja  $G$  o grafo a partir do qual obtém-se o estado grafo  $|G\rangle$ , então  $|G\rangle$  é o único autoestado com autovalor  $+1$  do conjunto de observáveis  $K_a$ , onde estes operadores são definidos como

$$K_a = \sigma_x^{(a)}\sigma_z^{N_a} := \sigma_x^{(a)} \prod_{b \in N_a} \sigma_z^{(b)}, \quad (3.15)$$

onde  $N_a$  é a vizinhança do vértice  $a$ , e  $a$  representa cada um dos vértices pertencentes ao conjunto de vértices  $V$  do grafo  $G$ .

Por fim, resta apenas mostrar a equivalência entre as duas definições dadas anteriormente. Para isso, pode-se observar que para o caso do grafo vazio as duas definições coincidem, isto é,  $K_a = \sigma_x^{(a)}$  estabiliza o estado produto  $|G\rangle = \bigotimes_{v \in V} |+\rangle$ . É suficiente mostrar então que a aplicação de  $U_{ab}$  no estado grafo estabilizado por  $K_a$  corresponde à adição ou remoção da aresta entre os vértices  $a$  e  $b$ . Assim sendo, quando aplicamos  $U_{ab}$  em  $K_a$  obtemos um novo estabilizador  $K'_a = U_{ab}K_aU_{ab}^\dagger$ .

Interessante notar que  $U_{ab}$  pode ser escrita como

$$U_{ab} = |0\rangle\langle 0|^{(a)} \otimes I^{(b)} + |1\rangle\langle 1|^{(a)} \otimes \sigma_z^{(b)}, \quad (3.16)$$

ou em sua forma matricial na base computacional como

$$U_{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Isto acontece porque a porta controlada  $Z$  corresponde à aplicação do operador identidade no qubit  $b$  se  $a$  estiver no estado  $|0\rangle$  e à aplicação de  $\sigma_z$  em  $b$  se  $a$  estiver

no estado  $|1\rangle$ . Desta forma, a partir da equação (3.17) é possível escrever  $K'_a$  como

$$K'_a = U_{ab} [\sigma_x^{(a)} \otimes \sigma_z^{(b)}] (|0\rangle\langle 0|^{(a)} \otimes I^{(b)} + |1\rangle\langle 1|^{(a)} \otimes \sigma_z^{(b)}). \quad (3.18)$$

Temos ainda que

$$\sigma_x|0\rangle\langle 0| = |1\rangle\langle 1|\sigma_x \quad (3.19)$$

e

$$\sigma_x|1\rangle\langle 1| = |0\rangle\langle 0|\sigma_x. \quad (3.20)$$

Substituindo (3.19) e (3.20) em (3.18), chegamos a

$$K'_a = U_{ab} (|1\rangle\langle 1|^{(a)} \otimes I^{(b)} + |0\rangle\langle 0|^{(a)} \otimes \sigma_z^{(b)}) \sigma_x^{(a)} \sigma_z^{(b)}. \quad (3.21)$$

A partir de (3.15), e deixando  $\sigma_z^{(b)}$  em evidência, obtemos

$$\begin{aligned} K'_a &= U_{ab} \sigma_z^{(b)} (|1\rangle\langle 1|^{(a)} \otimes I^{(b)} + |0\rangle\langle 0|^{(a)} \otimes \sigma_z^{(b)}) K_a \\ &= U_{ab} \sigma_z^{(b)} U_{ab}^\dagger K_a. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Considerando que  $[U_{ab}, \sigma_z^{(b)}] = 0$ , temos

$$K'_a = \sigma_z^{(b)} K_a. \quad (3.23)$$

De forma similar ao que foi feito antes, se apenas trocarmos os rótulos, pois, afinal não há nada de restritivo com o índice  $a$  podemos escrever

$$K'_b = \sigma_z^{(a)} K_b. \quad (3.24)$$

Em outras palavras, o que temos é que o novo grafo  $G'$  corresponde à adição da nova aresta entre  $a$  e  $b$ . Como  $\sigma_z^2 = I$ , a reaplicação de  $U_{ab}$  em  $K'_a$  implicaria na exclusão da aresta. Sendo assim, fica demonstrada a equivalência entre as duas definições de estados grafo.

Por fim, existe um caso especial de estados grafo, os estados cluster, de particular importância nos estudos das propriedades não clássicas no âmbito de estados grafo. Os estados cluster surgem da restrição de que os vértices conectam-se apenas com os vizinhos mais próximos em uma rede de uni, bi ou tridimensional. Estas características conferem aos estados cluster grande simetria, donde emerge sua importância para protocolos de informação quântica (RAUSSENDORF; BRIEGEL, 2001).

## 3.2 MEDIDA DE SCHMIDT: QUANTIFICAÇÃO DO EMARANHAMENTO EM ESTADOS GRAFO

### 3.2.1 Panorama Geral do Quantificador

A medida de Schmidt é um monótono de emaranhamento, em outras palavras, um funcional dependente do estado  $\rho$  do sistema de interesse que não aumenta sob LOCC, que é útil para o estudo de emaranhamento de sistemas de várias partes com dimensões arbitrárias (EISERT; BRIEGEL, 2001). A ideia por trás da quantificação por meio deste funcional é bem simples e está associada ao número mínimo de estados produto que são necessários para a descrição do estado global do sistema. Esta ideia não é nova e já foi explorada em trabalhos que estudam emaranhamento presentes em estados cluster  $|\phi_n\rangle$  de  $n$  qubits (BRIEGEL; RAUSSENDORF, 2001), tipos de emaranhamento presentes em estados de três qubits (DÜR; VIDAL; CIRAC, 2000) e na própria definição do rank de Schmidt para estados puros (PERES, 1995).

A medida de Schmidt fundamenta-se em uma visão bastante pragmática sobre o emaranhamento. Se por um lado, a ênfase do estudo do emaranhamento em sistemas de várias partes está na estrutura conceitual e matemática do tipo de correlação, para a medida de Schmidt, por outro lado, está no fato de as propriedades de emaranhamento servirem como recurso para execução de determinadas tarefas que são impossíveis no contexto da computação clássica.

Com as mesmas inclinações pragmáticas que motivaram a introdução da medida de Schmidt, alguns autores elencam uma lista de condições que um bom quantificador de emaranhamento deve satisfazer, entre eles, numa estrutura axiomática gerada a partir da ideia que emaranhamento não pode ser criado a partir de OLCC (PLENIO; VIRMANI, 2006). Na sequência, essas propriedades serão elencadas.

Assim sendo, podemos definir o que vem a ser a medida de Schmidt  $P(|\psi\rangle)$  para um estado puro  $|\psi\rangle$  (EISERT; BRIEGEL, 2001). Dado um sistema composto por  $N$  partes rotuladas por  $1, 2, \dots, N$  com a dimensionalidade do  $i$ -ésimo subsistema rotulada por  $d_i$ , sendo que o estado do sistema global é denotado por  $|\psi\rangle \in \mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathbb{H}_N$ , em que  $\mathbb{H}_i$  é o espaço de Hilbert associado ao  $i$ -ésimo subsistema. Então é possível escrever o estado  $|\psi\rangle$  como a soma de  $R$  termos da seguinte forma

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^R \alpha_j |\psi_1^{(j)}\rangle \otimes |\psi_2^{(j)}\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N^{(j)}\rangle, \quad (3.25)$$

onde  $|\psi_i^{(j)}\rangle \in \mathbb{H}_i$  e  $\alpha_j$  são os coeficientes de expansão de  $|\psi\rangle$  na base utilizada para  $\mathbb{H}$ . Com isso, somos capazes de definir  $P(|\psi\rangle)$  como

$$P(|\psi\rangle) = \log_2(r), \quad (3.26)$$

onde  $r$ , o rank de Schmidt, é o menor valor de  $R$  possível na expansão (3.25) obtida a partir de uma escolha adequada de base em  $\mathbb{H}$  para escrever o vetor  $|\psi\rangle$ .

É possível ainda generalizar a medida de Schmidt de maneira a torná-la habilitada para quantificar emaranhamento em estados mistos de sistemas quânticos de várias partes a partir de uma construção de raiz convexa, conforme (EISERT; BRIEGEL, 2001). Nesse contexto, para um estado misto  $\rho = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ ,  $P(\rho)$  fica definido como

$$P(\rho) = \min \sum_i \lambda_i P(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|), \quad (3.27)$$

em que  $\min$  significa que é tomado o menor dos valores gerados a partir do estudo de todas as possíveis decomposições de  $\rho$  em estados puros  $|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$  e do cálculo de  $P(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|)$  para estes estados tal como ele aparece em (3.26). É possível mostrar que (EISERT; BRIEGEL, 2001)

- i.  $P \geq 0$ , sendo que  $P(\rho) = 0$  se  $\rho$  é separável;
- ii.  $P$  é uma função convexa, isto é,

$$P[\lambda\rho_1 + (\lambda - 1)\rho_2] \leq \lambda P(\rho_1) + (\lambda - 1)P(\rho_2), \quad (3.28)$$

com  $\lambda \in [0, 1]$  e  $\rho_1, \rho_2 \in S(\mathbb{H})$ , onde  $S(\mathbb{H})$  é o espaço das matrizes densidade associadas ao espaço de Hilbert  $\mathbb{H}$ .

- iii.  $P(\rho)$  não pode aumentar a partir de OLCC. Posto de outra forma, isto significa que se pensarmos em uma operação local genérica assistida por comunicação clássica que mapeie o estado quântico  $\rho$  em algum estado do conjunto  $\{\rho_i\}$  com probabilidade  $p_i$ , então

$$P(\rho) \geq \sum_i p_i P(\rho_i); \quad (3.29)$$

Como  $P(|\psi\rangle)$  (estado puro) é um caso particular de  $P(\rho)$  na situação em que temos  $\lambda_i = \{1, 0\}$ , se  $P(\rho)$  definido por meio de (3.27) satisfaz as condições de (i)-(iii), então  $P(|\psi\rangle)$  também o faz.

### 3.2.2 Propriedades da Medida de Schmidt $P(|\psi\rangle)$ em Estados Puros $|\psi\rangle$

É de se esperar que devido ao caráter mais específico da definição presente em (3.26) teremos uma gama maior de propriedades, quando comparada com as que são satisfeitas por  $P(\rho)$  definido através de (3.27). Sendo assim, nos desbruçaremos sobre as principais destas propriedades (HEIN; EISERT; BRIEGEL, 2004).

- i.  $P(|\psi\rangle)$  não aumenta a partir da aplicação de operações estocásticas locais assistidas por comunicação clássica (OELCC).

A classe de operações OELCC é mais genérica do que as operações OLCC por permitir um relaxamento na relação de completeza para os operadores de Kraus  $L^{(i)}$ , permitindo que operadores que satisfazem  $L^{(i)\dagger}L^{(i)} \leq I$  sejam considerados adequados para descrever as transformações nos estados (LI, 2018). Assim sendo, podemos escrever

$$P(|\psi\rangle) \geq P\left(\frac{L^{(i)}|\psi\rangle}{\langle\psi|L^{(i)\dagger}L^{(i)}|\psi\rangle^{\frac{1}{2}}}\right). \quad (3.30)$$

Além disso, como é de se esperar, a partir da aplicação de operações unitárias locais  $L_U$ , a quantidade  $P(|\psi\rangle)$  fica inalterada. Em outras palavras, se  $|\psi'\rangle = L_U|\psi\rangle$ , então, necessariamente

$$P(|\psi\rangle) = P(|\psi'\rangle), \quad (3.31)$$

pois, considerando a reversibilidade associada as operações locais unitárias  $L_U$  e (3.30), concluímos que (3.31) deve ser satisfeita.

Ainda é possível inferir a partir da inequação (3.30) que de qualquer sequência de medidas projetivas que levem o estado  $|\psi\rangle$  a um estado produto, nós podemos obter um limite superior para  $P(|\psi\rangle)$ , ou seja

$$P(|\psi\rangle) \leq \log_2(m), \quad (3.32)$$

em que  $m$  é o número de resultados possíveis para as medidas realizadas. Pois, se é possível pensar em uma sequência de medições projetivas que desemaranhará o estado  $|\psi\rangle$ , então é possível escrever  $|\psi\rangle$  em uma base que contenha, pelo menos, um número de estados produtos igual ao número de possíveis resultados de medições  $m$  e, como tais operações não podem aumentar a quantidade de emaranhamento nestes estados, conclui-se que  $r$  não pode ser maior que  $m$ .

A propriedade a seguir estabelece limites para a comparação do emaranhamento calculado por meio da medida de Schmidt para diferentes formas de estabelecer as partições em determinado grafo. Isto é, se dois subsistemas são fundidos para formar um novo subsistema, então o emaranhamento não pode aumentar. Formalmente:

- ii. Dadas duas possíveis partições  $(1, 2, \dots, N)$  e  $(1', 2', \dots, M)$  para o grafo  $G$  que dá origem ao estado grafo  $|G\rangle$ , então

$$P^{(1,2,\dots,N)}(|G\rangle) \geq P^{(1',2',\dots,M)}(|G\rangle), \quad (3.33)$$

com todas partes de  $(1, 2, \dots, N)$  estando contidas nas partes da partição  $(1', 2', \dots, M)$  com  $M \leq N$  para um dado grafo, ou seja, a primeira é uma partição mais fina em relação à segunda.

- iii. Para duas partições  $(A_1, A_2, \dots, A_N)$  e  $(B_1, B_2, \dots, B_M)$  associadas a espaços de

Hilbert diferentes  $\mathbb{H}_A$  e  $\mathbb{H}_B$ , teremos

$$P^{(A_1, A_2, \dots, A_N, B_1, \dots, B_M)}(|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle) \leq P^{(A_1, A_2, \dots, A_N)}(|\psi_A\rangle) + P^{(B_1, B_2, \dots, B_M)}(|\psi_B\rangle), \quad (3.34)$$

para  $|\psi_A\rangle \in \mathbb{H}_A$  e  $|\psi_B\rangle \in \mathbb{H}_B$ .

De (iii) pode-se inferir que se  $|\psi_A\rangle$  é um estado produto com relação à bipartição  $(B_1, \dots, B_M)$ , teremos

$$P^{(A_1, \dots, A_N, B_1, \dots, B_M)}(|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle) = P^{(B_1, \dots, B_M)}(|\psi_B\rangle). \quad (3.35)$$

Por fim, a propriedade mais utilizada no contexto de estados grafo por desempenhar um papel fundamental na separação das diferentes classes de estados grafos é a seguinte:

iv. Dada uma bipartição num dado grafo  $G$  a partir do qual se obtém o estado grafo  $|G\rangle$ , então

$$P(|G\rangle) = \log_2(\text{rank}[tr_A(|G\rangle\langle G|)]). \quad (3.36)$$

Decorre disso que  $P(|\psi\rangle)$  é aditivo para uma dada bipartição, ou seja, dados  $A = A_1 \cup A_2$  e  $B = B_1 \cup B_2$ , teremos

$$P^{(A, B)}(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = P^{(A_1, B_1)}(|\psi_1\rangle) + P^{(A_2, B_2)}(|\psi_2\rangle). \quad (3.37)$$

Vale ressaltar que os cálculos necessários para encontrar o mínimo em (3.27) tornam-se muito complexos a medida que o número de qubits aumenta, de modo que as técnicas de cálculo numérico já não são eficientes para esta situação. Por outro lado, é possível, a partir de conceitos da teoria de grafos, definir limites superiores e inferiores para  $P(|\psi\rangle)$ , que por vezes coincidem (EISERT; BRIEGEL, 2001) e acabam por fornecer o valor exato desta função para algumas classes de estados.

### 3.2.3 Transformações em Grafos

Assumida a medida de Schmidt como a que se mostra adequada para estudar emaranhamento de várias partes, enfrentamos o problema da obtenção dos limites já mencionados na subseção anterior. Isto se torna possível a partir da “tradução” do que acontece com os estados grafo no nível do grafo que lhe dá origem. Sendo assim, faz-se necessário a introdução de alguns conceitos de teorias de grafos que viabilizam tal “tradução”.

- **Matriz Adjacência**  $\Gamma_G$ : Este é um conceito importante da teoria de grafos, pois, comporta toda informação acerca das ligações presentes no grafo. Em outras

palavras, a matriz adjacência associada a determinado grafo  $G$  concentra a informação de como se dão as conexões entre os vértices do conjunto  $V$ . Os elementos  $(\Gamma_G)_{ij}$  são definidos como segue

$$(\Gamma_G)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{i, j\} \in E. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.38)$$

Em (3.38),  $\{i, j\}$  representa a aresta que liga os vértices  $i$  e  $j$ , enquanto  $E$  é o conjunto de arestas que define o grafo.

- **Caminho:** Um caminho em um dado grafo  $G$  é uma lista ordenada de vértices  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  em que dois vértices consecutivos são adjacentes, ou seja,  $a_i$  e  $a_{i+1}$  são sempre adjacentes.
- **Grafo Conectado:** É todo grafo em que entre dois vértices quaisquer é sempre possível encontrar um caminho.

Uma das vantagens de se trabalhar com estados grafo e, portanto, com o formalismo estabilizador que os define, reside no fato de que a aplicação dos operadores de Pauli, cuja realização física está associada às medidas de spin nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , mapeia estados grafo em estados grafo. Além disso, é simples escrever as modificações introduzidas pelos operadores de Pauli no estabilizador do estado grafo, conforme já pontuado.

Pelas razões expostas no parágrafo anterior torna-se muito conveniente escrever, no nível dos grafos, as modificações trazidas pelas medidas projetivas associadas aos operadores de Pauli sem a necessidade de aplicar os projetores nos espaços de Hilbert.

Importante ressaltar aqui, dado que as medições na base de Pauli resultam em  $G \rightarrow G'$ , que a equivalência entre o estado grafo  $G'$  associado ao grafo  $|G'\rangle$  gerado a partir das medições projetivas e o estado resultante da aplicação do operador de medição no estado  $|G\rangle$  acontece a menos de operações unitárias locais. Por outro lado, em (HEIN; EISERT; BRIEGEL, 2004) e (SCHLINGEMANN, 2003) é apresentado e provado o conjunto de regras para obtenção dos estabilizadores  $S'$  dos estados grafo gerados da transformação a partir dos antigos  $S$ :

$$S' = USU^\dagger, \quad (3.39)$$

bem como as transformações que acontecem no nível dos grafos. Em outras palavras, se uma das medidas projetivas associadas a algum dos operadores  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ou  $\sigma_z$  é aplicada, é possível obter:

$$P_{i,\pm}^{(a)}|G\rangle = |i, \pm\rangle^{(a)} \otimes U_{i,\pm}^{(a)}|G'\rangle, \quad (3.40)$$

onde  $i = \{x, y, z\}$  e  $U_{i,\pm}$  é uma operação unitária local dependente de qual operador de Pauli é aplicado e do resultado da medida ser  $\pm 1$  enquanto que  $P_{i,\pm(a)}$  representa o projetor associado ao operador de Pauli  $i$  do seu autovetor com autovalor  $\pm 1$ . Tais operadores podem ser consultados em (HEIN; EISERT; BRIEGEL, 2004).

Por outro lado, podemos analisar as transformações no nível dos grafos como segue (HEIN et al., 2006)

$$G' = \begin{cases} G - \{a\}, & \text{para } \sigma_z^{(a)}. \\ G - E(N_a, N_a) - \{a\}, & \text{para } \sigma_y^{(a)}, \end{cases} \quad (3.41)$$

sendo que  $N_a$  é a vizinhança do vértice  $a$ ,  $G - \{a\}$ , o grafo resultante a partir da exclusão vértice  $a$  do grafo  $G$  e  $G - E(N_a, N_a)$ , o grafo resultante da exclusão do conjunto de arestas  $E(N_a, N_a)$  que ligam vizinhos do vértice  $a$  a outros vizinhos do vértices  $a$ .

Para o caso da aplicação de  $\sigma_x$ , o novo grafo obtido  $G'$  relaciona-se com o antigo grafo  $G$  da seguinte forma (HEIN et al., 2006)

$$G' = G \Delta E(N_{b_0}, N_a) \Delta E(N_{b_0} \cap N_a, N_{b_0} \cap N_a) \Delta E(\{b_0\}, N_a - \{b_0\}), \quad (3.42)$$

em que a diferença simétrica  $\Delta E(V, V')$  é definida como  $\Delta E(V, V') = E \cup (V, V') - E \cap (V, V')$ , para  $(V, V')$  sendo as arestas que conectam os vértices  $V$  aos vértices  $V'$  e  $G \Delta E(V, V')$  sendo o grafo resultante do cálculo da diferença simétrica a partir do grafo  $G$  que tem como conjunto de arestas inicial  $E$ .

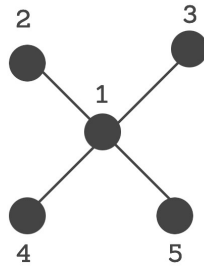
Como podemos bem observar, a medida projetiva associada ao operador  $\sigma_z$  é a mais simples de interpretar, pois, reflete-se simplesmente na exclusão do vértice da rede de forma análoga ao que é observado na Eq. (3.24) da Seção 3.1.2.

Para ilustrar este ponto, é interessante olharmos o resultado da aplicação de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ou  $\sigma_z$  no nível dos grafos para alguns exemplos. Para isto, observemos que a partir da aplicação da medição projetiva associada ao operador  $\sigma_z$  no vértice central da Figura 3.1, um grafo estrela de cinco vértices, obteremos um estado separável, pois, a exclusão do vértice 1 implica na exclusão de todas as arestas a ele incidentes e, conforme visto na Seção 3.1.2, o estado grafo associado ao novo grafo será  $|\psi_4\rangle = |+\rangle |+\rangle |+\rangle |+\rangle$ .

Por outro lado, dado um grafo completo de seis vértices, como o que é apresentado na Figura 3.2, podemos constatar que uma medição projetiva do operador  $\sigma_y$  leva à exclusão de todas as arestas do grafo e conseqüentemente o torna um estado separável, o estado  $|\psi_5\rangle = |+\rangle |+\rangle |+\rangle |+\rangle |+\rangle$ . Isto porque em termos da teoria de grafo tal medida implica no procedimento de complementação local  $G \rightarrow \tau(G)$ , processo de transformação do grafo no qual o conjunto de arestas  $E'$  do grafo obtido  $\tau(G)$  é tal que  $E' = E \Delta E(N_a, N_a)$ , com  $a$  sendo um vértice arbitrário de  $G$ . Escrita no nível dos



Figura 3.1: Grafo Estrela de Cinco Vértices



estados, temos

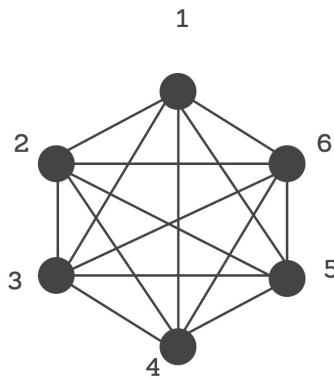
$$|\tau(G)\rangle = U_a(G)|G\rangle, \quad (3.43)$$

onde

$$U_a(G) = (-i\sigma_x^{(a)})^{\frac{1}{2}} \prod_{b \in N_a} (i\sigma_z^{(b)})^{\frac{1}{2}}. \quad (3.44)$$

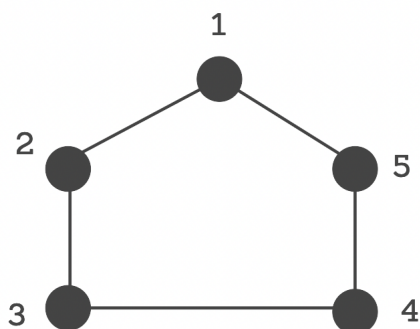
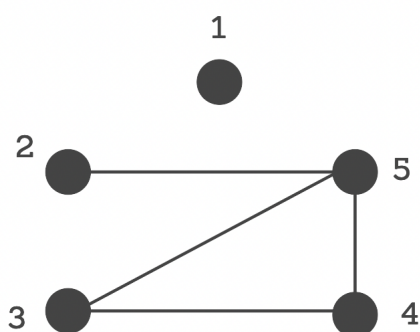
Este resultado está conectado às propriedades do grupo de Clifford e sua demonstração pode ser encontrada em (NEST; DEHAENE; MOOR, 2004).

Figura 3.2: Grafo Completo de Seis Vértices



Por fim, podemos analisar o resultado da realização de uma medição projetiva do operador  $\sigma_x$  no vértice 1 do grafo ciclo de cinco vértices ilustrado na Figura 3.3. O vértice  $b_0$  que aparece na Eq. (3.42) pode ser qualquer um pertencente à vizinhança de  $a$ , pois é possível mostrar que os diferentes estados obtidos a partir de diferentes escolhas de  $b_0$  são equivalentes a menos de transformações unitárias locais. Pode-se então escolher o vértice  $b_0 = 2$  e proceder a análise das diferenças simétricas que aparecem em (3.42) de tal forma que a escolha que fizemos resulta nos seguintes conjuntos

Figura 3.3: Grafo Ciclo de Cinco Vértices

Figura 3.4: Grafo da Figura 3.3 transformado a partir da aplicação de  $\sigma_x^{(1)}$ .

$$N_{b_0} = \{1, 3\} \quad (3.45)$$

e

$$N_a = \{2, 5\}. \quad (3.46)$$

Assim sendo, as possíveis arestas que podem aparecer entre os dois conjuntos são dadas por

$$(N_a, N_{b_0}) = \{(1, 2), (1, 5), (2, 3), (3, 5)\}. \quad (3.47)$$

Aqui o grafo  $G\Delta E(N_a, N_{b_0})$ , é o grafo obtido a partir do conjunto de arestas  $E \cup (N_a, N_{b_0})$  menos aquelas que constam no conjunto  $E \cap (N_a, N_b)$ , pois:  $G\Delta F = (E \cup F) - (E \cap F)$ . Sendo assim, a partir de uma análise rápida do conjunto  $E \cap (N_a, N_b)$ , do conjunto  $E \cup (N_a, N_{b_0})$  e de (3.47), pode-se concluir que o novo grafo é obtido a partir da adição da aresta  $\{(3, 5)\}$  enquanto se exclui as arestas  $\{(1, 2), (1, 5), (2, 3)\}$  da figura 3.3. Para a segunda diferença simétrica que aparece em (3.42),  $G\Delta E(N_{b_0} \cap N_a, N_{b_0} \cap N_a)$  notamos que  $N_{b_0} \cap N_a = \emptyset$  de forma que esta operação não implicará em mudança no grafo obtido a partir da primeira diferença simétrica. Por fim, ao analisar

a diferença simétrica  $G\Delta E(\{b_0\}, N_a - \{b_0\})$ , sob linhas análogas ao que foi feito para  $G\Delta E(N_a, N_{b_0})$ , chegamos a conclusão de que a única mudança introduzida no grafo é a adição da aresta (2, 5) de tal forma que obtemos o grafo ilustrado na Figura 3.4.

Interessante notar que a partir destas observações e das propriedades elencadas na Subseção 3.2.2, é possível inferir limites superiores para os grafos sob análise. É nisto que reside a vantagem das modificações introduzidas pelas medições de Pauli no grafo  $G$  associado ao estado grafo  $|G\rangle$ . Tais observações apontam para a existência de um número mínimo de medições de Pauli necessárias para desemaranhar completamente um estado grafo. Tal número é chamado de Persistência de Pauli ( $PP$ ). Em (HEIN et al., 2006) é mostrado que ( $PP$ ) é um limite superior para a medida de Schmidt do estado grafo associado ao grafo sob análise.

### 3.3 CLASSES EQUIVALENTES DE ESTADOS GRAFO

A medida de Schmidt pode ser também usada para quantificar o emaranhamento presente numa dada bipartição em determinado estado grafo em termos de conceitos que são essencialmente da teoria de grafos. Neste sentido, podemos definir uma bipartição para um grafo da seguinte forma:

**Definição:** Dados dois conjuntos de vértices  $A = \{a_i\}$  e  $B = \{b_j\}$  de  $V$ , sendo que  $V$  é o conjunto de vértices do grafo  $G$ . Temos então que  $(A, B)$  é uma bipartição possível se, e somente se,  $A \cap B = \emptyset$  e  $A \cup B = V$  são satisfeitas. Por outro lado, podemos escrever a matriz adjacência  $\Gamma_G$  em termos da bipartição da seguinte forma

$$\Gamma_G = \begin{bmatrix} \Gamma_A & \Gamma_{AB} \\ \Gamma_{AB} & \Gamma_B \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

em que  $\Gamma_A$  e  $\Gamma_B$  são as matrizes adjacência associadas aos vértices de  $A$  e  $B$ , respectivamente, de tal forma que  $\Gamma_{AB}$  são preenchidos de modo a recuperar a matriz adjacência de  $G$ . Definimos, a partir disso, uma nova matriz  $\Gamma_{G_{AB}}$  como

$$\Gamma_{G_{AB}} = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_{AB} \\ \Gamma_{AB} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Com isto, podemos escrever a medida de Schmidt para esta bipartição como (HEIN; EISERT; BRIEGEL, 2004)

$$P^{(A,B)}(|G\rangle) = \frac{1}{2} \text{rank}_{\mathbb{F}_2}(\Gamma_{G_{AB}}). \quad (3.50)$$

O subscrito  $\mathbb{F}_2$  indica que é feita o calculo das Linhas Linearmente independentes com base na soma  $\pmod{2}$ . Em outras palavras,  $P^{(A,B)}(|G\rangle)$  é a metade do número de linhas Linearmente Independentes que compõem a matriz  $\Gamma_{G_{AB}}$ . Por outro lado,

de (3.33) sabemos que este valor obtido para  $P$  não pode ser maior do que o que é obtido para a partição mais fina definida no grafo  $G$  de forma que

$$P(|G\rangle) \geq \frac{1}{2} \text{rank}_{\mathbb{F}_2}(\Gamma_{G_{AB}}). \quad (3.51)$$

Considerando que uma folha em um grafo é um vértice em que sobre ele incide apenas uma aresta e, por outro lado, a existência de ciclo no grafo significa que é possível conceber pelo menos um caminho em que partindo de um vértice  $a$  é possível retornar a  $a$ . Temos que, conforme provado em (HEIN et al., 2006), constitui-se condição suficiente para que a medida de Schmidt seja máxima a de que o grafo não contenha ciclos e, no máximo, uma folha com relação ao subgrafo obtido a partir de  $G$  por considerar apenas as arestas ligando os elementos de  $A$  aos elementos de  $B$ .

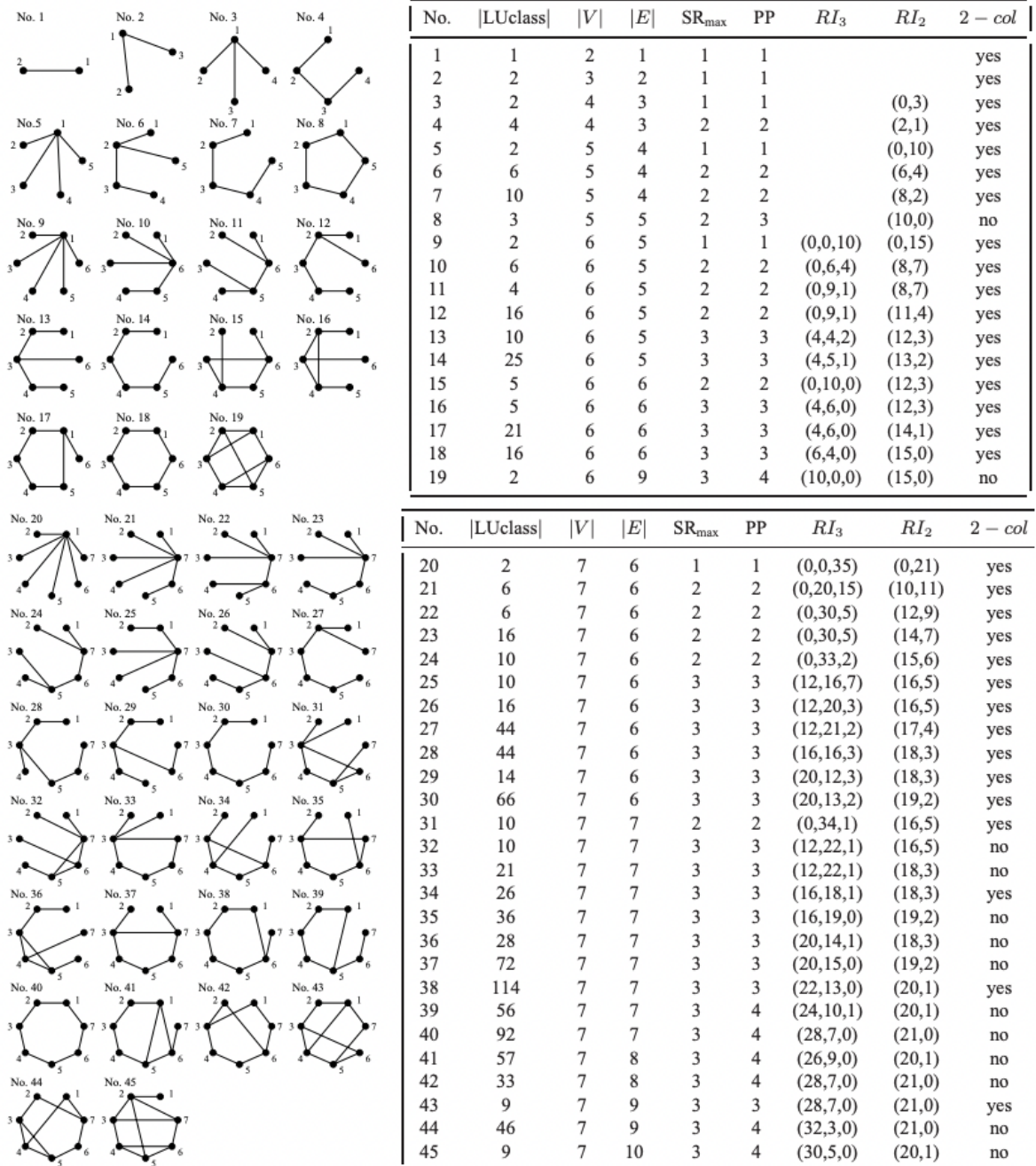
Finalmente, em (HEIN; EISERT; BRIEGEL, 2004) foi feito um trabalho excepcional ao analisarem o rank de Schmidt para as diferentes partições em grafos com até sete qubits que não podem ser relacionados através de algum tipo de isomorfismo. Isomorfismo em dois grafos  $A$  e  $B$  é o mapeamento dos vértices do grafo  $A$  em vértices do grafo  $f(A) = B$  de tal forma que as arestas que conectam os vértices de  $A$  continuam conectando os vértices correspondentes de  $A$  depois do mapeamento. A conclusão a que chegaram é que foram encontrados 995 grafos que não se relacionam através de algum tipo de isomorfismo e, além disso, dentre as 995 classes foi feita a separação daquelas classes de estados que não podem ser obtidas a partir de outras por meio de operações locais unitárias considerando-se a partição mais fina possível, aquela em que cada qubit é tomado como uma parte.

Neste sentido, em (HEIN et al., 2006) é estabelecida condição suficiente para que dois estados grafo sejam equivalentes, a menos de operações locais unitárias (LU) equivalentes. Sendo assim, dado um estado grafo  $|G\rangle$  para que seja LU equivalente a outro  $|G'\rangle$  deve ser possível obter  $G'$  a partir de complementação local de  $G$ , isto é, deve ser possível  $G \rightarrow \tau(G) = G'$ .

Considerando que a medida de Schmidt é invariante sob operações locais unitárias, ao estudar a lista de rank's de Schmidt para todas as bipartições possíveis, é possível classificar os diferentes estados grafo e os grafos a eles associados a partir das listas de rank's de Schmidt geradas conforme a Figura 3.5.

Por fim, ao compilarmos os resultados das duas últimas seções, percebemos que a medida de Schmidt  $P(|\psi\rangle)$  não pode ser maior que  $PP$ , assim como não pode ser menos que o rank de Schmidt para qualquer bipartição, de forma que chegamos a alguns casos em que ambos os limites coincidem retornando o valor exato de  $P(|\psi\rangle)$ . Este é o caso, por exemplo, dos estados  $|GHZ\rangle$  com  $P(|GHZ\rangle) = 1$  e de estados cluster  $|\phi_n\rangle$  de  $n$  qubits com  $P(|\phi_n\rangle) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  (GÜHNE et al., 2005).

Figura 3.5: Diferentes Classes Sob Isomorfismos e Operações Locais Unitárias. Imagem retirada de (HEIN et al., 2006).



## 4 NÃO-LOCALIDADE EM ESTADOS GRAFO

*“...what is proved by impossibility proofs is lack of imagination.  
John Bell”*

Neste capítulo será definida a não localidade, propriedade não clássica, em sua forma mais geral e com a respectiva interpretação geométrica. Além disso, de posse do conceito de não localidade serão apresentadas duas maneiras de identificar não localidade em estados grafo, uma servindo-se de desigualdades de Bell e outra não.

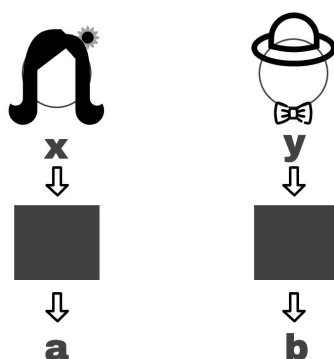
### 4.1 CONJUNTO DAS CORRELAÇÕES

#### 4.1.1 O Cenário

O primeiro passo para iniciar uma discussão sobre não localidade e desigualdades de Bell é o estabelecimento do cenário físico sobre o qual tal estudo será realizado. Sendo assim, conjecturamos a existência de dois experimentadores, Alice e Bob, cada um deles podendo escolher uma entre  $m$  possibilidades de configurações de medidas. Cada configuração de medida escolhida do conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  pode retornar um de  $\Gamma$  valores possíveis, geralmente rotulados como  $\{a, b, c, \dots\}$ .

Tal situação é idealmente representada por meio de uma caixa preta em que ambos os experimentadores escolhem arbitrariamente um valor de entrada (input), a configuração de medição, enquanto que para cada escolha desse tipo a caixa retorna um entre os  $\Gamma$  valores possíveis (output), ou seja, um resultado da medição.

Figura 4.1: Representação esquemática do cenário de Bell com o auxílio de "caixas pretas"



É importante ressaltar que a escolha dos rótulos para os resultados e configurações associadas as medições tem caráter puramente convencional e não restringe de forma alguma a generalidade dos resultados obtidos. Por outro lado, se definirmos

como  $x$  e  $y$ , as escolhas de medidas realizadas por Alice e Bob e, além disso,  $a$  e  $b$ , os resultados por eles obtidos, teremos um conjunto de  $\Gamma^2 m^2$  probabilidades conjuntas  $p = \{p(a, b|x, y)\}$  que descrevem integralmente o comportamento do sistema estabelecido no cenário em questão.

Por fim, é interessante notar que o comportamento  $p$  associado a determinado cenário pode ser interpretado geometricamente como um ponto no espaço de probabilidades  $\mathbb{P}$  cuja dimensão é dada por  $(\Gamma^2 - 1)m^2$ . A dimensionalidade é justificada pelas restrições de positividade que limitam o conjunto de probabilidades que podem integrar o comportamento  $p$ .

#### 4.1.2 Correlações Não-Sinalizadoras NS

Uma primeira tentativa de restringir o comportamento num número menor de probabilidades conjuntas é a exigência de que a particular escolha de medida de Bob não interfira nos resultados das medições realizadas por Alice e vice-versa. De maneira mais precisa e formal, podemos expressar esta restrição de não-sinalização NS como

$$\sum_{b=1}^{\Gamma} p(a, b|x, y) = \sum_{b=1}^{\Gamma} p(a, b|x, y'), \quad \forall a, y, y' \quad (4.1)$$

$$\sum_{a=1}^{\Gamma} p(a, b|x, y) = \sum_{a=1}^{\Gamma} p(a, b|x', y), \quad \forall b, x, x'. \quad (4.2)$$

O conteúdo físico desta restrição é claro e objetivo, isto é, trata-se da impossibilidade de tanto Alice quanto Bob, a partir da escolha da medição realizada no seu respectivo subsistema comunicar-se com a outra parte, pois isto constituiria uma clara violação à teoria da relatividade de Einstein.

De forma especial, para o cenário com dois observadores, duas configurações de medição e dois possíveis resultados para cada configuração de medição  $(2, 2, 2)$ , é possível mostrar que a exigência da não-sinalização em que temos duas configurações de medição possíveis com dois valores possíveis para cada configuração, encontramos

$$\sum_b p(a, b|x, 0) = \sum_b p(a, b|x, 1), \quad \forall a, x, \quad (4.3)$$

assim como

$$\sum_a p(a, b|0, y) = \sum_a p(a, b|1, y), \quad \forall b, y, \quad (4.4)$$

em que rotulamos como  $x, y \in \{0, 1\}$  e  $a, b \in \{-1, 1\}$ . No caso  $(2, 2, 2)$  é possível mostrar que a exigência da não-sinalização diminui o número de parâmetros livres de 12 para 8. Do ponto de vista geométrico, o que se tem neste caso particular é um

polígono em que a introdução da condição de não-sinalização equivale a limitar um polígono no espaço de  $\mathbb{R}^{12}$  por hiperplanos, as Eqs. (4.3) e (4.4), de tal forma que, a partir de então, será definido um novo polígono de dimensão menor.

#### 4.1.3 O Conjunto das Correlações Locais $\mathbb{L}$

Interessante notar que, apesar de a condição de não-sinalização restringir os valores de probabilidade do comportamento  $p$ , não impede que haja algum tipo de correlação já que, em geral

$$p(a, b|x, y) \neq p(a|x)p(b|y). \quad (4.5)$$

Uma condição bem mais restritiva que a não-sinalização para as probabilidades conjuntas associadas aos resultados de medição realizadas por duas ou mais partes é a condição de localidade. Formalmente, a condição de localidade para o cenário estabelecido na seção 4.1.1. pode ser escrita como

$$p(a, b|x, y) = \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) p(a|x, \lambda) p(b|y, \lambda). \quad (4.6)$$

Nesta última equação, aparece a variável  $\lambda$  que assume valores no espaço  $\Lambda$  com densidade de probabilidade  $\rho(\lambda)$  e representa o conjunto de variáveis ocultas introduzidas historicamente nos primórdios da MQ.

De maneira bastante pragmática, a variável  $\lambda$  pode ser entendida como representante do conjunto de fatores cuja natureza desconhecemos apesar de sua influência sobre os resultados das medições realizadas. Sendo assim, os resultados  $a$  e  $b$  dependerão, ambos, do valor assumido pela variável oculta  $\lambda$  e das configurações de medida  $x$  e  $y$ , escolhidas por Alice e Bob.

Os comportamentos  $p$  que satisfazem a condição de localidade, satisfazem a condição de não-sinalização. Por outro lado, o inverso não é verdade, ou seja, é possível encontrar comportamentos  $p$  que satisfazem a condição de não-sinalização e que não satisfazem a condição de localidade (4.6) (BRUNNER et al., 2014).

É simples provar a conjectura de que  $\mathbb{L} \subset \mathbb{NS}$ , pois escrevendo a definição de probabilidade marginal para os resultados das medições realizadas em seu subsistema por Alice, temos

$$p(a|x, y) = \sum_b p(a, b|x, y). \quad (4.7)$$

Escrevendo em (4.7) a condição de localidade expressa em (4.6), temos



$$\begin{aligned}
p(a|x, y) &= \sum_b \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) p(a|x, \lambda) p(b|y, \lambda) \\
&= \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) p(a|x, \lambda) \sum_b [p(b|y, \lambda)] \\
&= \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) p(a|x, \lambda).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Desta forma, podemos escrever então  $p(a|x, y) = p(a|x)$ , que é precisamente a condição de não-sinalização. Seguindo-se linhas completamente análogas às anteriores, podemos provar que  $p(b|x, y) = p(b|y)$ .

Um importante resultado, no contexto do conjunto das correlações locais  $\mathbb{L}$ , é a possibilidade de escrever os elementos do conjunto  $p$  como a soma convexa dos pontos determinísticos a ele associado. Os pontos determinísticos são aqueles correspondentes aos conjuntos em que todas as probabilidades conjuntas são dadas por  $p(a, b|x, y) \in \{0, 1\}$ . Assim sendo, é possível inferir muitos resultados importantes para os comportamentos determinísticos e simplesmente estendê-los para o caso mais geral.

#### 4.1.4 O Conjunto das Correlações Quânticas $\mathbb{Q}$

A última classe de correlações a ser estudada é a classe das correlações quânticas. Esta, por sua vez, nos ajudará a entender onde situam-se as desigualdades de Bell com a ajuda, posteriormente, da incorporação de novos conceitos que facilitarão tal elucidação. Neste sentido, os comportamentos quânticos correspondem ao conjunto de comportamentos cujas probabilidades conjuntas  $p(a, b|x, y)$  podem ser postas sob a seguinte forma

$$p(a, b|x, y) = \text{tr}(\rho_{AB} M_{a|x} \otimes M_{b|y}). \tag{4.9}$$

Na Eq. (4.9)  $\rho_{AB}$  é o estado quântico do sistema composto pelas partes Alice e Bob e, além disso,  $M_{a|x}$  e  $M_{b|y}$  são POVM's, isto é, satisfazem tanto a relação de positividade  $M_{a|x}, M_{b|y} \geq 0$  e de completudeza  $\sum_a M_{a|x} = \sum_b M_{b|y} = \mathbb{I}$ .

Uma importante propriedade do conjunto de correlações quânticas  $\mathbb{Q}$  é que ele está contido no conjunto das correlações não-sinalizadoras  $\mathbb{NS}$ . Isso garante, ao menos neste aspecto, uma compatibilidade fundamental entre as previsões da MQ e da relatividade. Para provar que  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{NS}$  podemos tomar como ponto de partida a definição de probabilidade marginal  $p(a|x, y)$  associada a medida de Alice, teremos

$$p(a|x, y) = \sum_b p(a, b|x, y). \tag{4.10}$$

Substituindo em (4.10), a condição que deve ser satisfeita pelos comportamentos do conjunto das correlações quânticas, temos

$$p(a|x, y) = \sum_b \text{tr}(\rho_{AB} M_{a|x} \otimes M_{b|y}) = \text{tr}\left(\rho_{AB} M_{a|x} \otimes \sum_b [M_{b|y}]\right). \quad (4.11)$$

Devido ao fato de os operadores  $M_{b|y}$  satisfazerem a relação de completza, podemos escrever

$$p(a|x, y) = \text{tr}(\rho_{AB} M_{A|x}). \quad (4.12)$$

Em outras palavras,  $p(a|x, y) = p(a|x)$ , de tal forma que as probabilidades marginais associadas as medições realizadas por Alice independem das escolhas de configuração de medições realizadas por Bob e, portanto, são não-sinalizantes. Conforme é de se esperar, os rótulos usados para a medição de Alice nada tem de especial que nos impeçam de substituí-los pelos de Bob sem qualquer prejuízo para a generalidade dos resultados. De forma análoga ao que acontece com a localidade, apesar de todos os conjuntos de probabilidade que satisfazem a Eq. (4.9) satisfazerem a condição de não-sinalização, o inverso não é necessariamente verdade. É possível uma descrição, do ponto de vista geométrico, para as informações de que dispomos dadas nas Eqs. (4.1), (4.2), (4.6) e (4.9) em termos de politopos e hiperplanos que definem e limitam os conjuntos  $\mathbb{NS}$ ,  $\mathbb{L}$  e  $\mathbb{Q}$ .

#### 4.1.5 Desigualdades de Bell: Análise Conceitual

Todos os conjuntos de correlação vistos até aqui,  $\mathbb{L}$ ,  $\mathbb{NS}$  e  $\mathbb{Q}$ , satisfazem as seguintes propriedades:

- i. fechados;
- ii. limitados;
- iii. convexos.

Tais propriedades garantem a aplicabilidade do teorema de hiperplanos de separação (BRUNNER et al., 2014). Tal teorema estabelece que dado um comportamento  $p$  que não pertence, neste contexto particular, a algum dos três conjuntos  $\mathbb{K} = \mathbb{L}$ ,  $\mathbb{NS}$  e  $\mathbb{Q}$ , então é possível encontrar uma desigualdade linear que o separa do respectivo conjunto. Tal desigualdade tem a seguinte forma

$$s.p = \sum_{abxy} s_{xy}^{ab} p(a, b|x, y) \leq S_k, \quad (4.13)$$

em que escrevemos para  $s$  um vetor cujo número de elementos é igual ao número de elementos do comportamento  $p$ , isto é, associamos a cada elemento  $p(a, b|x, y)$  um número real  $s_{xy}^{ab}$ . Esta desigualdade é satisfeita por todos os elementos de  $\mathbb{K}$  e é violada por  $p$  enquanto, naturalmente,  $S_k$  estabelece a condição de que o comportamento pertença ao conjunto de correlações sob análise. Além disso, é comum referir-se a um arbitrário  $s$  como uma expressão de Bell.

Cabe aqui uma observação importante, a de que há duas formas diferentes de caracterizar um politopo; como é o caso, por exemplo, do que é formado pelo conjunto das correlações locais  $\mathbb{L}$ . A primeira forma é a caracterização por pontos extremais, em que definimos o politopo como o fecho convexo dos pontos extremais (pontos determinísticos). Em outras palavras, por todas as combinações convexas possíveis dos pontos extremais que variam a depender do cenário sob análise. Outra possibilidade para a caracterização é realizá-la por facetar, isto é, através dos hiperplanos que limitam o politopo descritas por meio das desigualdades lineares; como é o caso, por exemplo, da restrição de positividade para os conjuntos de correlações.

Desta forma, as desigualdades de Bell do tipo CHSH discutidas na Seção 2.1. que trata da fenomenologia do emaranhamento são, em termos mais formais e precisos, facetar/hiperplanos não triviais que separam o conjunto das correlações locais das correlações não-locais.

#### 4.2 O MODELO DETERMINÍSTICO DE VARIÁVEIS OCULTAS E OS MODELOS ESTOCÁSTICOS FATORÁVEIS

Em seu trabalho (FINE, 1982), Arthur Fine, mostrou a equivalência entre cinco afirmações no contexto do estudo do conjunto das correlações do cenário  $(2, 2, 2)$  que satisfazem a restrição de localidade, são elas:

- i. Existe um Modelo de Variáveis Ocultas Determinístico que explica o resultado de determinado experimento;
- ii. Existe um Modelo Estocástico Fatorável;
- iii. Existe uma distribuição de probabilidades conjuntas para todos os observáveis envolvidos no experimento, inclusive contemplando observáveis que não comutam;
- iv. Existem distribuições conjuntas de probabilidade bem definidas para todos os pares e triplas de observáveis que comutam e que não comutam definidos no cenário  $(2,2,2)$ ;
- v. As desigualdades de Bell são satisfeitas.

Vale a pena estudar as estratégias de que o autor se utiliza para realizar a demonstração da equivalência entre estas conjecturas, pois são capazes de trazer insights acerca do estudo de não-localidade, inclusive para cenários mais abrangentes. Porém, nesta dissertação será dada maior ênfase à equivalência entre a existência do modelo de variáveis ocultas determinístico e a existência de um modelo estocástico fatorável que abarque as probabilidades previstas para o experimento por se tratar de um ponto fundamental em muitos estudos de não-localidade em estados grafo.

A existência de um modelo estocástico é a forma padrão de como é escrita a restrição de localidade. A fatorização implica, conforme argumentado na Seção 2.1, que não há correlações entre os resultados de Alice e Bob, além daquelas que são estabelecidas na fonte. Por outro lado, a equivalência entre o modelo determinístico e a forma geral (4.6) está longe de ser direto e/ou óbvio e, portanto, precisa ser provado.

A prova da equivalência envolve, pelo menos, duas etapas, isto é, a da suficiência e a da necessidade; vamos enumerar os dois passos por (i) e (ii).

- i. Se existe um modelo de variáveis ocultas determinístico que descreve adequadamente as probabilidades associadas às medições realizadas no experimento, então existe um modelo estocástico fatorável que também o faz.

Esta primeira parte é a mais simples e pode ser provada a partir da observação de que o modelo de variáveis ocultas determinístico é um caso particular do modelo geral apresentado em (6). Isto é, neste caso particular, dadas as escolhas de Alice e Bob, é possível prever com certeza quais resultados serão obtidos por Alice e Bob.

- ii. Dado que existe um modelo estocástico fatorável que se adequa às previsões do experimento, então existe um modelo determinístico que é capaz de explicar os resultados experimentais.

Para provar (ii), definimos novas variáveis  $\mu_1, \mu_2 \in [0, 1]$ . E, além disso, definimos uma nova variável oculta  $\lambda' = \lambda'(\lambda, \mu_1, \mu_2)$  que guarda relação com novas variáveis de probabilidade definidas a partir de:

$$p'(a|x, \lambda') = \begin{cases} 1, & \text{se } F(a-1|x, \lambda) \leq \mu_1 < F(a|x, \lambda) \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4.14)$$

com  $F(a|x, \lambda) = \sum_{\tilde{a} < a} p(\tilde{a}|x, \lambda)$ . Posto de outra forma, para o cenário (2,2,2), as novas probabilidades ficam definidas como

$$p'(0|x, \lambda') = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq \mu_1 < p(0|x, \lambda) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.15)$$

$$p'(1|x, \lambda') = \begin{cases} 1, & \text{se } p(0|x, \lambda) \leq \mu_1 \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.16)$$

$$p'(0|y, \lambda') = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq \mu_2 < p(0|y, \lambda) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.17)$$

$$p'(1|y, \lambda') = \begin{cases} 1, & \text{se } p(0|y, \lambda) \leq \mu_2 \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.18)$$

Se considerarmos o conjunto de probabilidades  $\tilde{\rho}$  distribuídas uniformemente sobre  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , partindo de (4.6), teremos

$$\begin{aligned} p(a|x, y) &= \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) p(a|x, \lambda) p(b|y, \lambda) \\ &= \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) \left( \int_0^1 d\mu_1 \tilde{\rho}(\mu_1) p'(a|x, \lambda, \mu_1) \right) \left( \int_0^1 d\mu_2 \tilde{\rho}(\mu_2) p'(b|x, \lambda, \mu_2) \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Reorganizando os termos da Eq. (4.19), ficamos com

$$p(a, b|x, y) = \int_{\Lambda} \int_0^1 \int_0^1 d\mu_1 d\mu_2 d\lambda \rho(\lambda) \tilde{\rho}(\mu_1) \tilde{\rho}(\mu_2) p'(a|x, \lambda, \mu_1) p'(b|y, \lambda, \mu_2), \quad (4.20)$$

em que reescrevemos os termos  $\rho'(\lambda') = \rho(\lambda) \tilde{\rho}(\mu_1) \tilde{\rho}(\mu_2)$  e  $d\lambda' = d\mu_1 d\mu_2 d\lambda$ .

É fundamental entender o movimento que aqui acontece no sentido de incorporar toda aleatoriedade que, no caso da Eq. (4.6), está nas probabilidades marginais para a nova variável oculta  $\lambda'$ . Além disso, como bem comprova esta demonstração, não há mais que se falar no caráter mais genérico do modelo estocástico fatorizável em detrimento do determinístico, pois, ambos são equivalentes.

### 4.3 NÃO-LOCALIDADE EM ESTADOS GRAFO

#### 4.3.1 O Argumento GHZ para o Estado $|\phi_4\rangle$

A forte motivação por trás do estudo das propriedades não clássicas dos estados grato e dos estados cluster - tipo particular de estados grafo - deve-se em grande parte ao fato desta classe de estados servir como recurso na execução de alguns protocolos relacionados ao processamento de informação quântica. Os estados cluster, em especial, são os estados recursos no modelo de computação quântica baseada em medições (one way quantum computing).

O argumento GHZ pode ser aplicado aos estados cluster a fim de estudar as propriedades não locais que neles se apresentam conforme discutido por Scarani e colaboradores (SCARANI et al., 2005). Num primeiro momento, pode-se analisar como tal situação se apresenta em estados cluster lineares de quatro qubits, tipo de estado grafo em que os vértices do grafo subjacente estão distribuídos linearmente,  $|\phi_4\rangle$ .

Definimos estes estados, conforme visto no Capítulo 3, por meio do conjunto de operadores  $\{s_i\}$  gerados a partir de  $g_k = \sigma_x^{(k)} \otimes_{b \in V_k} \sigma_z$  que o estabiliza, com  $V_k$  sendo o conjunto dos vértices vizinhos do vértice  $k$ , conforme as equações de autovalores

$$g_1|\phi_4\rangle = \sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)} \otimes I^{(3)} \otimes I^{(4)}|\phi_4\rangle = +1|\phi_4\rangle, \quad (4.21)$$

$$g_2|\phi_4\rangle = \sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)} \otimes \sigma_z^{(3)} \otimes I^{(4)}|\phi_4\rangle = +1|\phi_4\rangle, \quad (4.22)$$

$$g_3|\phi_4\rangle = I^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)} \otimes \sigma_x^{(3)} \otimes \sigma_z^{(4)}|\phi_4\rangle = +1|\phi_4\rangle \quad (4.23)$$

e

$$g_4|\phi_4\rangle = I^{(1)} \otimes I^{(2)} \otimes \sigma_z^{(3)} \otimes \sigma_x^{(4)}|\phi_4\rangle = +1|\phi_4\rangle. \quad (4.24)$$

A partir destes quatro operadores é possível obter todos os 16 elementos do grupo estabilizador  $S$ , gerado a partir da multiplicação dos termos  $g_i$  e da álgebra das matrizes de Pauli que, fundamentalmente, define o estado  $|\phi_4\rangle$ .

Algo bastante peculiar acontece ao realizarmos a multiplicação de três elementos do grupo Abelian, digamos,  $g_2$ ,  $g_3$  e  $g_4$ , pois, com um pouco de álgebra é possível mostrar que

$$g_2g_3g_4|\phi_4\rangle = \sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)} \otimes \sigma_x^{(3)} \otimes \sigma_y^{(4)}|\phi_4\rangle = -1|\phi_4\rangle. \quad (4.25)$$

Do ponto de vista da MQ, o que aqui temos é um estado para o qual os elementos do estabilizador predizem correlações perfeitas para os resultados das medições nos vértices (qubits) associadas aos operadores de Pauli  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$ . Por outro lado, do ponto de vista clássico, ou seja, assumindo-se as hipóteses de realismo e localidade, o que temos é uma lista de 12 bits  $\lambda = \{(x_k, y_k, z_k)_i\}$  em que  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$  e as variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  podem tomar um dos dois valores do conjunto  $\{-1, 1\}$ .

Agora podemos juntar outros elementos do grupo estabilizador para compor nossa análise como, por exemplo, aqueles que vêm das multiplicações  $g_1g_3$ ,  $g_2g_3$  e  $g_1g_3g_4$ . Isto é:

$$g_1g_3|\phi_4\rangle = \sigma_x^{(1)} \otimes I^{(2)} \otimes \sigma_x^{(3)} \otimes \sigma_z^{(4)}|\phi_4\rangle = 1|\phi_4\rangle, \quad (4.26)$$

$$g_2g_3|\phi_4\rangle = \sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)} \otimes \sigma_y^{(3)} \otimes \sigma_z^{(4)}|\phi_4\rangle = 1|\phi_4\rangle, \quad (4.27)$$

$$g_1g_3g_4|\phi_4\rangle = \sigma_x^{(1)} \otimes I^{(2)} \otimes \sigma_y^{(3)} \otimes \sigma_y^{(4)}|\phi_4\rangle = 1|\phi_4\rangle \quad (4.28)$$

e

$$g_2 g_3 g_4 |\phi_4\rangle = \sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)} \otimes \sigma_x^{(3)} \otimes \sigma_y^{(4)} |\phi_4\rangle = -1 |\phi_4\rangle. \quad (4.29)$$

Ao multiplicarmos as Eqs. (4.26), (4.27) e (4.28), supondo a classicalidade e, portanto, a comutatividade entre os elementos  $\sigma$ , já que deste ponto de vista os valores a eles atribuídos são predeterminados e, fundamentalmente, valores numéricos pertencentes ao conjunto  $\{-1, 1\}$ , chegamos a  $z_1 y_2 x_3 y_4 = 1$ , em clara contradição com a previsão da MQ (4.25). Em outras palavras, ao assumir que os valores são predeterminados, concluímos que a variável local  $\lambda$  não é capaz de satisfazer todas as propriedades listadas pelo conjunto de elementos do grupo estabilizador que dá origem ao estado  $|\phi_4\rangle$ .

A exemplo do que acontece com o estado  $|GHZ\rangle$ , a variável local  $\lambda$  é compatível com as previsões de 13 das 15 correlações estabelecidas pelos elementos do grupo estabilizador de  $|\phi_4\rangle$ , mostrando que o tipo de não-localidade apresenta certa familiaridade com aquela encontrada para o estado  $|GHZ\rangle$ .

#### 4.3.2 Desigualdade do Tipo Bell para o Estado $|\phi_4\rangle$

Apesar do argumento do tipo GHZ ser uma ferramenta adequada para a caracterização da não-localidade para certos conjuntos de estados, esta não permite comparar estados e não é capaz de lidar com estados afetados por ruído que constituem, por sua vez, os casos em que o experimentador será capaz de reproduzir em seu laboratório.

Em alguns casos é possível associar uma desigualdade de Bell ao sistema sob investigação que, apesar de detectar não localidade, não é capaz de detectá-la de maneira ótima. Para ilustrar esta ideia, podemos observar, conforme apontado por David Mermin em (MERMIN, 1990), que a desigualdade proposta é capaz de detectar otimamente a não-localidade presente nos estados  $|GHZ\rangle$ .

Por outro lado, conforme (SCARANI et al., 2005), é possível observar que a desigualdade do tipo Mermin-Ardehali-Belinski-Kylisho (MABK), quando aplicada aos estados cluster de quatro qubits retornam o valor  $2\sqrt{2}$  em contraponto ao limite 2 estabelecido pela desigualdade de Bell. A novidade aqui é que é possível obter outra desigualdade para os estados cluster cuja violação é bem maior que aquela obtida com a desigualdade MABK.

A desigualdade de Bell adequada para o estado  $|\phi_4\rangle$  é construída a partir da intuição gerada pelo argumento GHZ da seção anterior. Posto de outra forma, é possível pensar em uma combinação linear das possibilidades de medição das quatro partes de tal forma que o termo quântico, que retorna o valor  $-1$  seja subtraído na combinação linear e, desta forma, possamos tirar vantagem do fato que a predição clássica seja  $+1$ . Sendo assim, escrevendo o operador de Bell  $\mathbb{B}$  da forma como é apresentado

na literatura (BELL, 1964), obtemos

$$\mathbb{B} = AIC'D + AICD' + A'BCD - A'BC'D'. \quad (4.30)$$

Portanto, ante o exposto, uma combinação adequada para alcançar violação máxima é aquela em que realizamos as substituições  $A = \sigma_x$ ,  $A' = \sigma_z$ ,  $B = \sigma_y$ ,  $C = \sigma_y$ ,  $C' = \sigma_x$ ,  $D = \sigma_z$  e  $D' = \sigma_y$ . Não é difícil perceber que para este caso particular, o operador de Bell retorna um valor igual a 4, conforme as Eqs. (4.26) - (4.29). No entanto, para o caso clássico, obtemos

$$|ac'd + acd' + a'bcd - a'bc'd'| \leq 2. \quad (4.31)$$

### 4.3.3 Aplicação do Argumento para Estados Mais Gerais

De forma análoga ao que foi feito para o caso do cluster unidimensional de quatro qubits, podemos começar por estudar o estado associado ao cluster de redes unidimensionais de  $n$   $|C_n\rangle$  qubits por meio da análise das equações de autovalores que lhes dão origem, isto é

$$g_1 |C_n\rangle = \sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)} \otimes I^{(3)} \otimes \dots \otimes I^{(n)} |C_n\rangle = +1 |C_n\rangle, \quad (4.32)$$

$$g_2 |C_n\rangle = \sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)} \otimes \sigma_z^{(3)} \otimes I^{(4)} \otimes \dots \otimes I^{(n)} |C_n\rangle = +1 |C_n\rangle, \quad (4.33)$$

$$g_3 |C_n\rangle = I^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)} \otimes \sigma_x^{(3)} \otimes \sigma_z^{(4)} \otimes \dots \otimes I^{(n)} |C_n\rangle = +1 |C_n\rangle, \quad (4.34)$$

$$g_4 |C_n\rangle = I^{(1)} \otimes I^{(2)} \otimes \sigma_z^{(3)} \otimes \sigma_x^{(4)} \otimes \dots \otimes I^{(n)} |C_n\rangle = +1 |C_n\rangle, \quad (4.35)$$

.

.

.

$$g_n |C_n\rangle = I^{(1)} \otimes I^{(2)} \otimes \dots \otimes I^{(n-2)} \otimes \sigma_z^{(n-1)} \otimes \sigma_x^{(n)} |C_n\rangle = +1 |C_n\rangle. \quad (4.36)$$

Podemos, num primeiro momento, analisar o que acontece com os cinco primeiros qubits para, a partir daí, chegar a uma expressão geral para compará-la com (4.32)-(4.36) e o caso já estudado na seção anterior. A fim de não carregar demais a notação, podemos rotular os termos obtidos a partir da multiplicação dos geradores como  $s_{ij\dots n} = g_i g_j \dots g_n$ , obtemos



$$s_{23} |C_n\rangle = \sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)} \otimes \sigma_y^{(3)} \otimes \sigma_z^{(4)} \otimes I^{(5)} \otimes \dots \otimes I^{(n)} |C_n\rangle = +1 |C_n\rangle, \quad (4.37)$$

$$s_{34} |C_n\rangle = I^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)} \otimes \sigma_y^{(3)} \otimes \sigma_y^{(4)} \otimes \sigma_z^{(5)} \otimes \dots \otimes I^{(n)} |C_n\rangle = +1 |C_n\rangle \quad (4.38)$$

e

$$s_{234} |C_n\rangle = \sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)} \otimes \sigma_x^{(3)} \otimes \sigma_y^{(4)} \otimes \sigma_z^{(5)} \otimes \dots \otimes I^{(n)} |C_n\rangle = -1 |C_n\rangle. \quad (4.39)$$

Por outro lado, ao aplicarmos as noções de realismo local a estes conjuntos de operadores e, conseqüentemente, a comutatividade entre os termos, obtemos para o produto  $g_3 s_{23} s_{34}$  o correspondente clássico  $z_1 y_2 x_3 y_4 z_5 = +1$ . Contudo, a álgebra das matrizes de Pauli nos dá o resultado (4.39), revelando a incompatibilidade entre os dois resultados.

Sendo assim, podemos refazer o argumento anterior num cenário estabelecido por uma rede unidimensional de  $n$  qubits, observando os elementos  $s_{k,k+1}, s_{k+1,k+2}$  e  $s_{k,k+1,k+2}$ . Ao multiplicarmos os termos  $s_{k,k+1}, s_{k+1,k+2}$  e  $g_{k+1}$ , obteremos classicamente

$$g_{k+1} \cdot s_{k,k+1} \cdot s_{k+1,k+2} |C_n\rangle = 1 |C_n\rangle, \quad (4.40)$$

que contradiz a previsão quântica  $s_{k,k+1,k+2} = -1$ .

Além disso, é possível, de forma similar ao que foi feito para o caso de quatro qubits, propor uma desigualdade de Bell que é maximamente violada pelo estado cluster unidimensional de  $n$  qubits  $|\phi_n\rangle$ . Neste sentido, para o operador de Bell  $\mathbb{B}$

$$\mathbb{B} = (AB)C'(DE) + (A'B')C(DE) + (AB')C(D'E') - (A'B')C'(D'E'), \quad (4.41)$$

propomos as seguintes associações  $A = E = I, A' = E' = \sigma_z, B = D = \sigma_z, B' = D' = \sigma_y, C = Y$  e  $C' = \sigma_x$ . Com estas associações pode-se comparar o valor obtido para  $|\langle \mathbb{B} \rangle|$  no caso quântico com o previsto no caso clássico, a fim de identificar a violação de  $|\langle \mathbb{B} \rangle| \leq 2$ .

Até aqui fomos capazes de, a partir da análise das equações de autovalor que definem os estados cluster, inferir previsões acerca das propriedades não locais de cluster unidimensionais de  $n$  qubits. Porém, se tentarmos analisar redes bidimensionais ou tridimensionais esbarramos no problema de que a estrutura das equações de autovalores serão bem diferentes do caso unidimensional, pois no primeiro caso um mesmo qubit pode ter mais de dois vizinhos na rede, o que não é caso para redes em mais de uma dimensão.

Para contornar este problema, primeiramente estabelecemos a seguinte notação,

$g_{xy}$  é o elemento do grupo estabilizador associado ao qubit localizado na  $x$ -ésima linha e na  $y$ -ésima coluna, de tal forma que no caso de uma rede bidimensional quadrada de nove qubits, teremos

$$g_{11} : \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_z & I \\ \sigma_z & I & I \\ I & I & I \end{pmatrix} |C_n\rangle = +1 |C_n\rangle, \quad (4.42)$$

$$g_{12} : \begin{pmatrix} \sigma_z & \sigma_x & \sigma_z \\ I & \sigma_z & I \\ I & I & I \end{pmatrix} |C_n\rangle = +1 |C_n\rangle, \quad (4.43)$$

.

.

.

$$g_{22} : \begin{pmatrix} I & \sigma_z & I \\ \sigma_z & \sigma_x & \sigma_z \\ I & \sigma_z & I \end{pmatrix} |C_n\rangle = +1 |C_n\rangle. \quad (4.44)$$

A chave para a construção do argumento neste caso, assim como nos casos precedentes, é tomar um caminho de três qubits para obter os elementos advindos da multiplicação dos elementos do grupo estabilizador de tal forma que apareça em algum dos qubits uma multiplicação do tipo  $\sigma_z \sigma_x \sigma_z$ . Ao efetuarmos esta escolha do caminho como, por exemplo,  $g_{11}$ ,  $g_{12}$  e  $g_{22}$ , ficamos com

$$G_{[(1,1),(1,2)]} |C_n\rangle = g_{1,1} g_{1,2} |C_n\rangle = 1 |C_n\rangle, \quad (4.45)$$

$$G_{[(1,2),(2,2)]} |C_n\rangle = g_{1,2} g_{2,2} |C_n\rangle = 1 |C_n\rangle \quad (4.46)$$

e

$$G_{[(1,1),(1,2),(2,2)]} |C_n\rangle = g_{1,1} g_{1,2} g_{2,2} |C_n\rangle = -1 |C_n\rangle. \quad (4.47)$$

Se, por um lado, esta é a previsão quântica para os resultados das medições, então a previsão clássica pode ser obtida, supondo-se a comutatividade, a partir de  $G_{[(1,1),(1,2)]} G_{[(1,2),(2,2)]} g_{1,2} = 1$ . Dessa forma, o resultado aqui apresentado pode ser generalizado às redes tridimensionais e bidimensionais com mais de nove qubits tomando-se  $G_{[(k,k),(k,k+1)]}$ ,  $G_{[(k,k+1),(k+1,k+1)]}$  e  $G_{[(k,k),(k,k+1),(k+1,k+1)]}$  bem como  $g_{k,k}$ ,  $g_{k,k+1}$  e  $g_{k+1,k+2}$ , para  $k$  genérico escolhido no interior da rede. A condição para que seja possível, o leitor já deve ter notado, é de que os três qubits  $k$ ,  $k+1$  e  $k+2$  formem um caminho.

#### 4.3.4 Desigualdades de Bell para Estados Grafo Genéricos

A grande questão que se coloca é se é possível uma descrição das probabilidades associadas às medições realizadas em um estado grafo genérico em termos de algum modelo de variáveis ocultas. Neste contexto, é de suma importância a obtenção de desigualdades de Bell para estes estados a fim de identificar violações e, conseqüentemente, propriedades não locais. Este foi o caminho seguido por Gühne e colaboradores em trabalho (GÜHNE et al., 2005).

A ideia exposta em (GÜHNE et al., 2005) para a obtenção das desigualdades é muito simples e baseia-se no fato de os estabilizantes estabelecerem correlações perfeitas entre as partes do estado grafo (HEIN et al., 2006). Se definirmos o operador  $P \in \{I, \pm\sigma_x, \pm\sigma_y, \pm\sigma_z\}$ , podemos escrever os elementos  $g_i$  do grupo estabilizador  $S$  como

$$g_i = \bigotimes_{k=1}^n P_i^{(k)}. \quad (4.48)$$

Nestes termos, propõe-se a seguinte forma para o operador de Bell  $\mathbb{B}(G)$  associado ao grafo  $G$

$$\mathbb{B}(G) = \sum_{i=1}^{2^n} s_i(G) = \sum_{i=1}^{2^n} \bigotimes_{k=1}^n P_i^{(k)}, \quad (4.49)$$

onde  $\{s_i\}$  é o conjunto obtido a partir de todas as possíveis combinações de  $g_i$ . Assim, uma vez estabelecido o operador de Bell, é de fundamental importância calcular o limite clássico para este operador. A fim de realizar o cálculo para o modelo de variáveis ocultas podemos usar o resultado de (FINE, 1982) apresentado na seção 4.2, ou seja, a existência de um modelo estocástico fatorável é equivalente à existência de um modelo de variáveis ocultas determinístico para os resultados das medições. Sendo assim, se denotarmos por  $C(\mathbb{B})$ , o limite clássico associado ao operador de Bell definido por meio da Eq. (4.49), podemos escrever

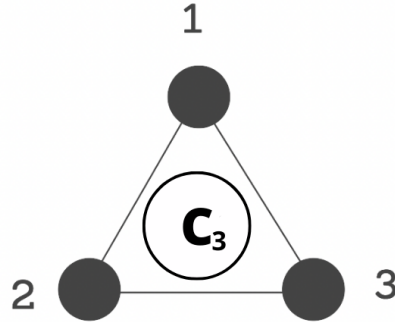
$$C(\mathbb{B}) = \max_{LHV} |\langle \mathbb{B} \rangle|, \quad (4.50)$$

em que o  $\max_{LHV}$  significa que é escolhido o modelo de variáveis ocultas determinístico, cuja distribuição de probabilidades retorna o maior valor de  $|\langle \mathbb{B} \rangle|$ . Na prática, isso significa que são estudadas todas as distribuições determinísticas de probabilidade ( $p \in \{0, 1\}$ ), que atribuem um dos valores do conjunto  $\{-1, 1\}$  para cada um dos observáveis  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  que atuam sobre os qubits do grafo.

Por outro lado, não é difícil de perceber a existência de  $2^n$  elementos pertencentes ao grupo estabilizador, gerados a partir da multiplicação dos geradores  $g_i$ . Desta forma, podemos prever que haverá propriedades não locais todas as vezes em que o

valor obtido para  $C(\mathbb{B})$  for menor que  $2^n$ . Um grafo não trivial que podemos usar para aplicar as ideias até aqui expostas é o grafo de três qubits, associado ao estado  $|C_3\rangle$ , ilustrado na figura 4.2.

Figura 4.2: Grafo conectado de três qubits



Os geradores que podemos obter a partir do grafo podem ser escritos da seguinte forma

$$g_0 = I^{(1)} \otimes I^{(2)} \otimes I^{(3)}, \quad (4.51)$$

$$g_1 = \sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)} \otimes \sigma_z^{(3)}, \quad (4.52)$$

$$g_2 = \sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)} \otimes \sigma_z^{(3)}, \quad (4.53)$$

$$g_3 = \sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)} \otimes \sigma_x^{(3)}, \quad (4.54)$$

$$g_1 g_2 = \sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)} \otimes I^{(3)}, \quad (4.55)$$

$$g_1 g_3 = \sigma_y^{(1)} \otimes I^{(2)} \otimes \sigma_y^{(3)} \quad (4.56)$$

e

$$g_1 g_2 g_3 = -\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)} \otimes \sigma_x^{(3)}. \quad (4.57)$$

A partir de (4.51)-(4.57), podemos escrever o operador de Bell para este estado como

$$\begin{aligned} \mathbb{B} = & I^{(1)} \otimes I^{(2)} \otimes I^{(3)} + \sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)} \otimes \sigma_z^{(3)} + \sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)} \otimes \sigma_z^{(3)} \\ & + \sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)} \otimes \sigma_x^{(3)} + \sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)} \otimes I^{(3)} + \sigma_y^{(1)} \otimes I^{(2)} \otimes \sigma_y^{(3)} \\ & - \sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)} \otimes \sigma_x^{(3)}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

O valor esperado do operador de Bell no estado grafo  $|\langle \mathbb{B} \rangle|$  pode ser calculado com facilidade, visto que todos os termos que compõem a soma o estabilizam,  $|\langle \mathbb{B} \rangle| = 8$ . Por outro lado, ao estudarmos as diferentes possibilidades de distribuição das probabilidades num modelo determinístico adequado para este cenário, chegamos a conclusão que o maior valor que pode ser obtido para o limite clássico é  $C(\mathbb{B}) = 6$ , revelando, portanto, a presença de propriedades não locais no estado grafo sob análise.

Neste contexto, um resultado interessante que foi demonstrado em (GÜHNE et al., 2005) é que dados dois subgrafos  $G_1$  e  $G_2$  do grafo  $G$  e uma ligação simples de um vértice de  $G_1$  com um vértice de  $G_2$ , então vale a seguinte relação

$$D(G) \leq D(G_1)D(G_2), \quad (4.59)$$

onde  $D(G) = \frac{C(\mathbb{B})}{2^n}$ . Isso significa que se  $D(G) < 1$ , então o estado grafo associado ao grafo  $G$  viola a hipótese de realismo-local. Sendo assim, o que pode ser extraído de (4.59) é que se  $G_1$  e  $G_2$  violam a desigualdade de Bell proposta, então o estado grafo associado ao grafo  $G$  também apresenta propriedades não-locais.

A conjectura apresentada permite inferir outro resultado de caráter bem mais abrangente. Para mostrar isso é suficiente observar que o estado grafo de dois vértices e uma aresta é equivalente aos estados de Bell maximamente emaranhados a menos de operações locais. Sendo assim, é possível concluir, a partir da observação de que qualquer grafo tem pelo menos dois vértices interligados, que o resultado para qualquer estado grafo é tal que  $D(G) < 1$ .

Outro resultado importante para o estudo de estados grafo é que o mapeamento de um operador de Bell  $\mathbb{B}$  em outro  $\mathbb{B}'$ , a partir do mapeamento de operadores de Pauli em operadores de Pauli, não muda os valores obtidos para a função  $D(\mathbb{B})$ . A principal e mais importante consequência disso é que dados dois grafos  $G_1$  e  $G_2$ , sendo que um é obtido do outro através de complementação local tal como apresentada no capítulo 3, então  $D(G_1) = D(G_2)$ , pois a complementação local mapeia matrizes de Pauli em matrizes de Pauli.

Existem ainda outras propostas de desigualdades de Bell que podem ser usadas na detecção de não localidade para estados grafo como, por exemplo, as que são apresentadas em (BACCARI et al., 2020) e (WERNER; WOLF, 2001), cada uma delas com vantagens específicas, seja a escalabilidade ou a conveniência experimental.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Cumpramos observar que este trabalho respondeu à altura os objetivos que motivaram a sua proposição. Isto é, a detecção de não localidade de Bell e a análise do emaranhamento na classe de estados denominada "Estados Grafo".

No caso do estudo de emaranhamento na referida classe de estados, foram levantados os principais elementos da teoria do emaranhamento como, por exemplo, a análise fenomenológica que identificou as propriedades não locais no contexto das discussões da formação da estrutura conceitual da Mecânica Quântica e os critérios de separabilidade com as propostas de medida de emaranhamento a que dão origem, para citar dois. Apresentou-se, além disso, algumas outras propostas de quantificadores no âmbito da teoria de emaranhamento e, especialmente, a Medida de Schmidt.

Esta última mostrou-se adequada para o estudo de Emaranhamento em Estados Grafo, pois possibilita uma série de previsões expressas em termos, essencialmente, dos grafos que dão origem aos estados cujo emaranhamento é objeto de estudo. Esse fato, quando aliado a pertinência dessa classe de estados em protocolos de processamento de informação quântica, resulta num ganho significativo no entendimento do papel do emaranhamento em Teoria da Informação Quântica.

Além disso, foram levantadas duas das possibilidades de detecção de emaranhamento em Estados Grafo, os argumentos do tipo GHZ e as desigualdades de Bell. Para os argumentos do tipo de GHZ, existe a vantagem de não se utilizar da estrutura conceitual das desigualdades de Bell, apesar da detecção de não-localidade ser restrita a uma subclasse específica de estados grafo, a de estados cluster. Por outro lado, foram apresentados os principais elementos que envolvem a detecção de não-localidade para estados quânticos em geral, a fim de subsidiar o entendimento da proposta de um operador de Bell em termos, unicamente, dos elementos do grupo estabilizador que dão origem a determinados estados grafo.

Contudo, alguns possíveis temas de investigação em trabalhos futuros que despontam a partir da presente dissertação são: o estudo da possibilidade de proposição de outras estruturas de classificação de estados grafo, que viabilizem tal construção para sistemas com mais de 7 qubits; o estudo das propriedades não clássicas e estrutura de classificação de Estados Localmente Maximamente Emaranhados (LME), que representam uma classe mais geral de estados da qual estados grafo constituem um caso específico (BRYAN et al., 2019); a geração de estados cluster em sistemas optomecânicos (HOUHOU; AISSAOUI; FERRARO, 2015); o estudo da dinâmica de estados grafo em sistemas suscetíveis a ruído (SHIRIZLY; MISGUICH; LANDA, 2023) e a implementação de estados grafo na modelagem de computação quântica baseada em medições (BROWNE; BRIEGEL, 2006).

## REFERÊNCIAS

- ALBER, G. et al. **Quantum Information: An Introduction to Basic Theoretical Concepts and Experiments**. Springer Berlin Heidelberg, 2003. (Springer Tracts in Modern Physics). ISBN 9783540446781. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=pefvCAAQBAJ>>.
- ASPECT, A.; GRANGIER, P.; ROGER, G. Experimental tests of realistic local theories via bell's theorem. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 47, p. 460–463, Aug 1981. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.47>>.
- BACCARI, F. et al. Scalable bell inequalities for qubit graph states and robust self-testing. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 124, n. 2, jan 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.020402>>.
- BARNETT, S. **Quantum Information**. OUP Oxford, 2009. (Oxford Master Series in Physics). ISBN 9780198527626. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=A2k4HH2tFR8C>>.
- BELL, B. et al. Experimental demonstration of graph-state quantum secret sharing. **Nature communications**, v. 5, 11 2014.
- BELL, J. S. On the einstein podolsky rosen paradox. **Physics Physique Fizika**, American Physical Society, v. 1, p. 195–200, Nov 1964. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195>>.
- BENNETT, C. et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. **Physical review letters**, v. 70, p. 1895–1899, 04 1993.
- BENNETT, C. H. et al. Concentrating partial entanglement by local operations. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 53, p. 2046–2052, Apr 1996. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.53.2046>>.
- BOHM, D. **Quantum Theory**. Dover Publications, 1951. (Dover Books on Physics Series). ISBN 9780486659695. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=9DWim3Rhymc>>.
- BOHM, D.; AHARONOV, Y. Discussion of experimental proof for the paradox of einstein, rosen, and podolsky. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 108, p. 1070–1076, Nov 1957. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.108.1070>>.
- BRIEGEL, H. J.; RAUSSENDORF, R. Persistent entanglement in arrays of interacting particles. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 86, p. 910–913, Jan 2001. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.910>>.
- BROWNE, D. E.; BRIEGEL, H. J. **One-way Quantum Computation - a tutorial introduction**. 2006.

BRUNNER, N. et al. Bell nonlocality. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society (APS), v. 86, n. 2, p. 419–478, apr 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.419>>.

BRYAN, J. et al. Locally maximally entangled states of multipart quantum systems. **Quantum**, Verein zur Forderung des Open Access Publizierens in den Quantenwissenschaften, v. 3, p. 115, jan 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.22331/q-2019-01-06-115>>.

CHRISTENSEN, B. G. et al. Detection-loophole-free test of quantum nonlocality, and applications. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 111, p. 130406, Sep 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.130406>>.

CLAUSER, J. F. et al. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 23, p. 880–884, Oct 1969. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.23.880>>.

COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. **Quantum mechanics; 1st ed.** New York, NY: Wiley, 1977. Trans. of : Mécanique quantique. Paris : Hermann, 1973. Disponível em: <<https://cds.cern.ch/record/101367>>.

DIESTEL, R. **Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)**. Springer, 2005. Hardcover. ISBN 3540261826. Disponível em: <<http://www.amazon.ca/exec/obidos/redirect?tag=citeulike04-20&path=ASIN/3540261>>.

DÜR, W.; VIDAL, G.; CIRAC, J. I. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. **Physical Review A**, American Physical Society (APS), v. 62, n. 6, nov 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.062314>>.

EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 47, p. 777–780, May 1935. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.47.777>>.

EISERT, J.; BRIEGEL, H. J. Schmidt measure as a tool for quantifying multiparticle entanglement. **Physical Review A**, American Physical Society (APS), v. 64, n. 2, jul 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.64.022306>>.

FIGGER, H.; MESCHÉDE, D.; ZIMMERMANN, C. Laser physics at the limits. In: . [s.n.], 2002. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118293859>>.

FINE, A. Hidden variables, joint probability, and the bell inequalities. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 48, p. 291–295, Feb 1982. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.48.291>>.

GÜHNE, O. et al. Bell inequalities for graph states. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 95, p. 120405, Sep 2005. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.95.120405>>.

HAYDEN, P. M.; HORODECKI, M.; TERHAL, B. M. The asymptotic entanglement cost of preparing a quantum state. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, IOP Publishing, v. 34, n. 35, p. 6891–6898, aug 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0305-4470/34/35/314>>.



HEIN, M. et al. **Entanglement in Graph States and its Applications**. 2006.

HEIN, M.; EISERT, J.; BRIEGEL, H. J. Multiparty entanglement in graph states. **Physical Review A**, American Physical Society (APS), v. 69, n. 6, jun 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.69.062311>>.

HOUHOU, O.; AISSAOUI, H.; FERRARO, A. Generation of cluster states in optomechanical quantum systems. **Physical Review A**, American Physical Society (APS), v. 92, n. 6, dec 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.92.063843>>.

IONICIOIU, R.; SPILLER, T. P. Encoding graphs into quantum states: An axiomatic approach. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 85, p. 062313, Jun 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.85.062313>>.

JAEGER, G. **Quantum Information: An Overview**. Springer New York, 2007. ISBN 9780387369440. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=E0ho97k7S4oC>>.

JÚNIOR, J. et al. Teoria dos grafos aplicada À roteirizaÇÃo na logÍstica de distribuiÇÃo: O problema do caixeiro-viajante em uma empresa fabricante de farinha de trigo. In: . [S.l.: s.n.], 2019.

LI, D. Stochastic local operations and classical communication (slocc) and local unitary operations (lu) classifications of n qubits via ranks and singular values of the spin-flipping matrices. **Quantum Information Processing**, Springer Science and Business Media LLC, v. 17, n. 6, abr. 2018. ISSN 1573-1332. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s11128-018-1900-3>>.

MERMIN, N. D. Extreme quantum entanglement in a superposition of macroscopically distinct states. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 65, p. 1838–1840, Oct 1990. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.65.1838>>.

NEST, M. Van den; DEHAENE, J.; MOOR, B. D. Graphical description of the action of local clifford transformations on graph states. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 69, p. 022316, Feb 2004. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.69.022316>>.

NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum Computation and Quantum Information**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000.

PAN, J.-W. et al. Experimental test of quantum nonlocality in three-photon Greenberger–Horne–Zeilinger entanglement. **Nature**, v. 403, n. 6769, p. 515–519, February 2000. Disponível em: <[https://ideas.repec.org/a/nat/nature/v403y2000i6769d10.1038\\_35000514.html](https://ideas.repec.org/a/nat/nature/v403y2000i6769d10.1038_35000514.html)>.

PERES, A. **Quantum Theory: Concepts and Methods**. Springer Netherlands, 1995. (Fundamental Theories of Physics). ISBN 9780792336327. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=rMGqMyFBcL8C>>.

PERES, A. Separability criterion for density matrices. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 77, n. 8, p. 1413–1415, aug 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>>.

PLENIO, M. B.; VIRMANI, S. **An introduction to entanglement measures**. 2006.

RAUSSENDORF, R.; BRIEGEL, H. J. A one-way quantum computer. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 86, p. 5188–5191, May 2001. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.5188>>.

RIBEIRO, M. et al. A rede social complexa de o senhor dos anéis. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 38, 11 2015.

SAKURAI, J. J. **Modern quantum mechanics; rev. ed.** Reading, MA: Addison-Wesley, 1994. Disponível em: <<https://cds.cern.ch/record/1167961>>.

SCARANI, V. et al. Nonlocality of cluster states of qubits. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 71, p. 042325, Apr 2005. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.71.042325>>.

SCHLINGEMANN, D. **Cluster states, algorithms and graphs**. 2003.

SHANKAR, R. **Principles of quantum mechanics**. New York, NY: Plenum, 1980. Disponível em: <<https://cds.cern.ch/record/102017>>.

SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. **The Bell System Technical Journal**, v. 27, p. 379–423, 1948. Disponível em: <<http://plan9.bell-labs.com/cm/ms/what/shannonday/shannon1948.pdf>>.

SHIRIZLY, L.; MISGUICH, G.; LANDA, H. **Dissipative Dynamics of Graph-State Stabilizers with Superconducting Qubits**. 2023.

WERNER, R. F.; WOLF, M. M. All-multipartite bell-correlation inequalities for two dichotomic observables per site. **Physical Review A**, American Physical Society (APS), v. 64, n. 3, aug 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.64.032112>>.

WILSON, R. J. **Introduction to Graph Theory**. New York: Prentice Hall/Pearson, 2010. ISBN 027372889X 9780273728894.