

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: FÍSICA**

RAMON FRANCESCOCCI COSTA

**EXTENSÃO AUTOADJUNTA DO HAMILTONIANO DO SISTEMA DE
AHARONOV-BOHM COM MOMENTO MAGNÉTICO ANÔMALO**

**PONTA GROSSA
2016**

RAMON FRANCESCOLOI COSTA

**EXTENSÃO AUTOADJUNTA DO HAMILTONIANO DO SISTEMA DE
AHARONOV-BOHM COM MOMENTO MAGNÉTICO ANÔMALO**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ciências - Área de concentração: Física - da Universidade Estadual de Ponta Grossa como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade.

**PONTA GROSSA
2016**

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

C837 Costa, Ramon Francescolli
Extensão autoadjunta do Hamiltoniano do sistema de Aharonov-Bohm com momento magnético anômalo/ Ramon Francescolli Costa. Ponta Grossa, 2016.
71f.

Dissertação (Mestrado em Ciências - Área de Concentração: Física), Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Orientador: Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade.

1.Extensão autoadjunta.
2.Aharonov-Bohm. 3.Momento magnético anômalo. I.Andrade, Fabiano Manoel de. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Mestrado em Ciências. III. T.

CDD: 531.1

TERMO DE APROVAÇÃO

RAMON FRANCESCOCCI COSTA

“EXTENSÃO AUTOADJUNTA DO HAMILTONIANO DO SISTEMA DE AHARONOV-BOHM COM MOMENTO MAGNÉTICO ANÔMALO”

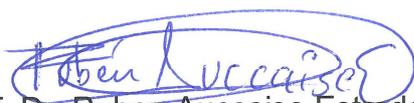
Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Ciências - Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.



Orientador: Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade
Departamento de Física, UEPG/PR.



Prof. Dr. Renato Moreira Angelo
Departamento de Física, UFPR/PR



Prof. Dr. Ruben Auccaise Estrada
Departamento de Física, UEPG/PR

Ponta Grossa, 04 de março de 2016.

Agradecimentos

Ao orientador Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade pela ajuda em todos os aspectos do trabalho.

Ao Prof. Dr. Edilberto Oliveira Silva (UFMA) pelas contribuições e esclarecimentos.

Aos professores Dr. André Maurício Brinatti, Dr. José Danilo Szezech Júnior, Dr. Renato Moreira Angelo (UFPR) e Dr. Ruben Auccaise Estrada pelas sugestões e leitura crítica da dissertação.

Aos professores dos Departamentos de Física e de Matemática e Estatística da UEPG.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho é apresentado o efeito e sistema de Aharonov-Bohm, além de suas implicações. Trata-se também da extensão autoadjunta de operadores em mecânica quântica. O principal objetivo é a investigação da relação entre o parâmetro da extensão autoadjunta do Hamiltoniano do sistema de Aharonov-Bohm, que tem origem matemática, e a física desse sistema. Interesse particular é dado à busca da relação entre o parâmetro da extensão e a anomalia do momento magnético do elétron. Para tal são usados dois métodos de extensão autoadjunta: o de Bulla-Gesztesy e o de Kay-Studer. A expressão matemática procurada é obtida, além de expressões para as energias dos estados ligados do sistema. Conclui-se que os métodos utilizados são adequados para atingir os objetivos propostos.

Palavras-chave: Extensão autoadjunta. Aharonov-Bohm. Momento magnético anômalo.

Abstract

In this work we present the Aharonov-Bohm effect, as well as its implications. We also present the self-adjoint extension, an important tool in quantum mechanics. This work's main objective is to investigate the relation between the self-adjoint extension parameter and the Aharonov-Bohm system's parameters. Of particular interest is the relation between the self-adjoint extension parameter and the electron's anomalous magnetic dipole moment. This is done by comparison between two self-adjoint extension methods: Bulla-Gesztesy's and Kay-Studer's. We obtain the mathematical relation between the aforementioned quantities and conclude that the chosen methods are suitable to accomplish our goals.

Keywords: Self-adjoint extension. Aharonov-Bohm. Anomalous magnetic moment.

Lista de Figuras

1.1	Experimento magnético de Aharonov-Bohm	10
2.1	Sequência descontínua que aproxima-se da delta de Dirac	20
2.2	Sequência gaussiana que aproxima-se da delta de Dirac	20
2.3	Transformação de sistema de coordenadas.	35

Sumário

Lista de figuras	6
1 Sistema de Aharonov-Bohm	9
1.1 Efeito Aharonov-Bohm	9
1.1.1 Sistema de Aharonov-Bohm	10
1.1.2 Interpretações	13
1.2 Revisão bibliográfica	14
1.3 Objetivos	17
2 Fundamentação teórica	18
2.1 Potenciais singulares	18
2.1.1 Delta de Dirac	19
2.2 Quantização de sistemas físicos	21
2.3 Extensão autoadjunta de operadores	23
2.3.1 Espaço de Hilbert	23
2.3.2 Operadores lineares	26
2.3.3 Uso das extensões autoadjuntas	30
2.3.4 Índices de deficiência e teorema de Von Neumann	32
2.3.5 Método de Bulla-Gesztesy	33
2.3.6 Método de Kay-Studer	34
2.4 Relatividade restrita	35
2.5 Equação de Dirac	37
2.5.1 Momento anômalo magnético	38
2.5.2 Matriz S	39
3 Soluções de sistemas com momento anômalo	41

	8
3.1 Equação de Dirac	41
3.1.1 Redução dimensional	43
3.1.2 Limite não-relativístico	47
3.2 Decomposição da função de onda	49
3.3 Extensão autoadjunta pelo método de Bulla-Gesztesy	51
3.3.1 Hamiltoniano e condição de contorno	51
3.3.2 Determinação das energias de estado ligado	53
3.4 Extensão autoadjunta pelo método de Kay-Studer	58
Conclusão	61
Referências bibliográficas	62
Apêndice A - Potenciais de gauge	67
Apêndice B - Componentes do tensor eletromagnético	70

Capítulo 1

Sistema de Aharonov-Bohm

1.1 Efeito Aharonov-Bohm

Em física clássica, no formalismo Newtoniano, as equações de movimento de sistemas que envolvem eletromagnetismo são escritas em termos dos campos elétrico e magnético. Por exemplo, no caso da força de Lorentz sobre uma partícula

$$\mathbf{F} = e [\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})], \quad (1.1)$$

sendo e a carga elétrica e \mathbf{v} a velocidade da partícula. Portanto os campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} aparecem diretamente na equação da segunda lei de Newton.

Os potenciais elétricos e potenciais vetoriais magnéticos, por sua vez, são relegados à condição de ferramenta matemática conveniente, mas sem realidade física [1]. A crença de que os potenciais não possuem significado físico é consolidada pela invariância de gauge (apêndice A): transformações de gauge geram potenciais diferentes que correspondem a campos iguais.

Ainda em física clássica, os potenciais aparecem diretamente nas equações de movimento do formalismo Hamiltoniano. No entanto, os formalismos Newtoniano e Hamiltoniano implicam resultados equivalentes.

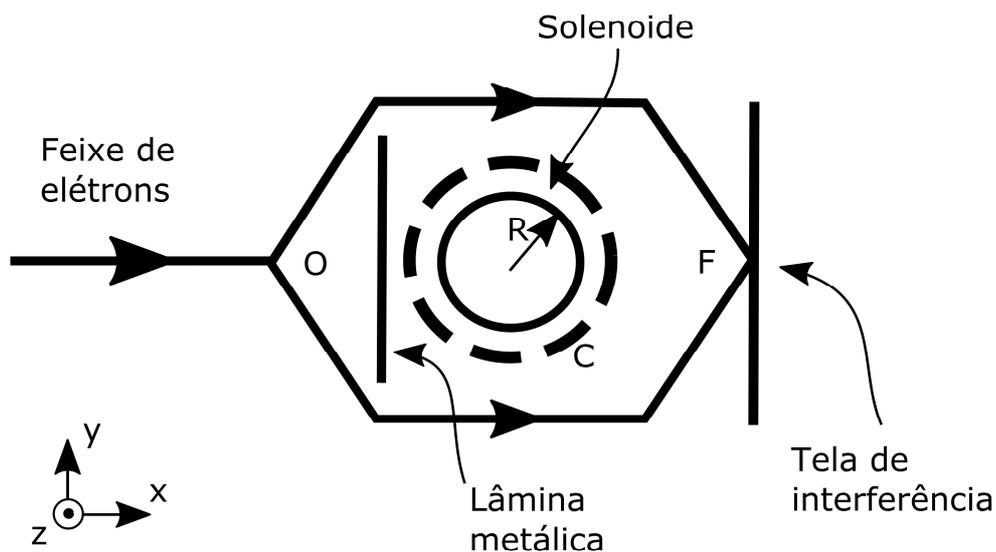
Em mecânica quântica, os potenciais aparecem diretamente nas equações de movimento, como nas equações de Schrödinger e de Dirac. Há, no entanto, uma diferença fundamental: em 1959 Aharonov e Bohm publicaram resultados que previam efeitos dos potenciais elétrico e magnético sobre partículas carregadas, mesmo em

regiões de campo nulo [1]. Nesse artigo eles sugeriram dois experimentos para constatar a existência do efeito, um de caráter elétrico e outro de caráter magnético. Somente o sistema magnético será abordado nessa dissertação. Na próxima seção será apresentado e discutido o experimento magnético sugerido por Aharonov e Bohm, e as previsões correspondentes.

1.1.1 Sistema de Aharonov-Bohm

Nesse experimento, ilustrado pela figura 1.1, um solenoide longo de raio R gera um campo magnético B em seu interior.

Figura 1.1: Experimento sugerido para demonstrar interferência entre feixes de elétrons devido ao potencial vetorial independente do tempo [1].



Se o solenoide é longo o suficiente (idealmente infinito), o campo magnético em sua região externa é nulo. No entanto, o fluxo magnético Φ_0 através do solenoide não é nulo, e pode ser escrito da seguinte maneira

$$\Phi_0 = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}. \quad (1.2)$$

Sabe-se que o campo magnético B está relacionado ao potencial vetorial A por $B = \nabla \times A$. Aplicando-se o teorema de Stokes, obtém-se

$$\Phi_0 = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}, \quad (1.3)$$

onde o caminho de integração C da equação (1.3) é fechado e ao redor do solenoide, e A é o potencial vetorial independente do tempo correspondente ao campo magnético do sistema.

É importante ressaltar que o caminho C não intercepta o solenoide em lugar algum, e ainda assim está relacionado ao fluxo dentro do solenoide pela equação (1.3). Se o potencial vetorial A fosse nulo em todo lugar fora do solenoide, Φ_0 também seria nulo em decorrência da integração. A contrapositiva dessa afirmação diz que, como o fluxo Φ_0 não é nulo, então o potencial A não pode ser nulo em toda a região externa ao solenoide.

No experimento sugerido [1], um feixe coerente de elétrons é dividido em duas partes no ponto O . Os feixes viajam ao redor do solenoide e são recombinados no ponto F . Conseqüentemente, os feixes percorrem caminhos onde o campo magnético B se anula mas, em alguma região, o potencial A não se anula.

Com o objetivo de descobrir quais serão os padrões de interferência obtidos na região F , a princípio imagina-se que tratem-se de partículas livres. O Hamiltoniano correspondente seria

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad (1.4)$$

onde \mathbf{p} é o momento e m é a massa da partícula. No entanto é necessário usar o momento cinético, ou momento invariante de gauge, expresso pela troca

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}. \quad (1.5)$$

Aqui e é a carga da partícula e c é a velocidade da luz no vácuo. A troca (1.5) corresponde ao acoplamento mínimo com o campo magnético, como será discutido no capítulo 2. O Hamiltoniano nesse caso é

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2. \quad (1.6)$$

A função de onda $\Psi(\mathbf{x})$ correspondente ao estado estacionário de cada feixe deve satisfazer a equação de Schrödinger independente do tempo

$$\frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \Psi(\mathbf{x}) = E\Psi(\mathbf{x}). \quad (1.7)$$

Para obter a diferença de fase entre os feixes superior e inferior quando esses se recombinam no ponto F , primeiramente decompõe-se a função de onda em um produto da forma

$$\Psi(\mathbf{x}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}S(\mathbf{x})\right)\Psi_0(\mathbf{x}), \quad (1.8)$$

onde $\Psi_0(\mathbf{x})$ é a função de onda na ausência do potencial vetorial e $S(\mathbf{x})$ é a variação da ação clássica do sistema devido aos potenciais de gauge. A decomposição (1.8) não afeta a probabilidade de um elétron ser encontrado em uma dada posição, visto que $|\Psi(\mathbf{x})|^2 = |\Psi_0(\mathbf{x})|^2$. Aqui $S(\mathbf{x})$ é a integral do ponto O até x de

$$S(\mathbf{x}) = \frac{e}{c} \int_O^x \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}. \quad (1.9)$$

Mais detalhes sobre os efeitos dos potenciais de gauge sobre funções de onda podem ser encontrados em [2].

A diferença de fase entre os feixes no ponto F é a diferença entre os argumentos das exponenciais de cada feixe. Ou seja

$$\begin{aligned} \frac{S_{inf}(\mathbf{x}) - S_{sup}(\mathbf{x})}{\hbar} &= \frac{e}{\hbar c} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \\ &= \frac{e\Phi_0}{\hbar c} \end{aligned} \quad (1.10)$$

e a defasagem encontrada é invariante de gauge, isto é, independe da forma específica do potencial \mathbf{A} .

O padrão de interferência é uma função periódica do fluxo magnético, e o período é igual a uma unidade de London [3]

$$T = \frac{2\pi\hbar c}{e}. \quad (1.11)$$

A diferença dada pela equação (1.10) é a fase de Aharonov-Bohm, um caso particular de fase de Berry [4]. O fato notável é que os feixes viajam em uma região com ausência de campo (mas na presença do potencial vetorial) e, ainda assim, observa-se padrões de interferência. Como a interferência é entre as funções de onda, não há análogo clássico desse efeito.

O primeiro teste experimental do efeito Aharonov-Bohm magnético é devido à Chambers [5]. O experimento de Chambers possui configuração similar à sugerida

por Aharonov e Bohm, e confirma a existência do efeito.

1.1.2 Interpretações

No artigo original que descreve o efeito, duas possíveis interpretações são discutidas por Aharonov e Bohm [1]:

1. Os feixes de elétrons dos experimentos são afetados não pelo campo magnético, mas pelo potencial correspondente. Deste modo, os potenciais deixam de ser apenas ferramentas matemáticas convenientes, e podem ser considerados grandezas físicas. Eles descrevem de maneira mais fundamental o que ocorre na natureza.
2. Esse fenômeno demonstra um caráter não local da mecânica quântica. Ou seja, os feixes de elétrons são afetados pelo campo magnético, mesmo que a distância.

Aharonov e Bohm descartam a hipótese dois visto que, de acordo com as noções relativísticas, os campos devem interagir somente localmente, e não a distância. Portanto, a conclusão de Aharonov e Bohm é que os potenciais são grandezas físicas. Por outro lado, existem efeitos não locais em mecânica quântica [6] que não violam o limite da velocidade da luz para comunicação. Como trata-se de um efeito sem análogo clássico, a escolha entre as hipóteses 1 e 2 não é simples. Uma discussão mais abrangente sobre os aspectos filosóficos do efeito Aharonov-Bohm pode ser encontrada em [7].

A existência do efeito Aharonov-Bohm foi desafiada muitas vezes nas décadas posteriores à sua descoberta. Alguns argumentos comuns são: a) há vazamento de campo, e os feixes não são adequadamente blindados. b) o efeito não é causado pelos potenciais, e sim pelo fluxo magnético a distância, como indica a equação (1.10).

Uma revisão extensa e detalhada sobre experimentos realizados pode ser encontrada em [3]. A maioria dos experimentos realizados confirma a existência do efeito. Em particular, no experimento de Osakabe [8] usa-se um campo magnético toroidal confinado por um supercondutor, de modo a evitar o vazamento do campo. Nesse caso o efeito foi confirmado.

1.2 Revisão bibliográfica

Nesta seção será feita uma breve revisão bibliográfica sobre o efeito Aharonov-Bohm. Como a quantidade de publicações relacionadas ao efeito é muito grande, dá-se ênfase aos artigos pertinentes a esse trabalho.

Ainda em seu artigo original de 1959 [1], Aharonov e Bohm propuseram o estudo de um problema análogo ao experimento magnético sugerido, mas com um detalhe idealizado: para desconsiderar qualquer contribuição devido à geometria do solenoide ou do campo, toma-se o limite em que o solenoide tem raio nulo. Eles resolveram esse sistema supondo que a função de onda não era singular na origem na origem, ou seja, supõem $\Psi(r = 0) = 0$. É importante ressaltar que os cálculos do artigo original não levam em conta o spin $1/2$ do elétron. A adição do spin (como será demonstrado no capítulo 3) leva à adição de um termo extra ao Hamiltoniano do sistema. Esse termo é proporcional ao campo magnético dentro do solenoide, e representa a interação entre o spin e o campo magnético. No caso de um solenoide com raio idealmente nulo, o campo magnético é

$$e\mathbf{B} = -\phi \frac{\delta(r)}{r} \hat{z}, \quad (1.12)$$

onde ϕ é o fluxo magnético em unidades de London. O Hamiltoniano correspondente é

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - s\phi \frac{\delta(r)}{r} \right]. \quad (1.13)$$

onde $s = \pm 1$ é o dobro do spin. O Hamiltoniano expresso por (1.13) possui singularidade do tipo delta de Dirac bidimensional, que será discutida no capítulo 2.

No experimento proposto, ilustrado pela figura 1.1, o caminho percorrido pelos feixes está restrito a um plano, e portanto pode-se formular o problema em duas dimensões. Em seu artigo de 1979 [9], Aharonov e Casher estudam o sistema de partículas carregadas de spin $1/2$ movendo-se em um plano sob a influência do potencial de um campo magnético perpendicular a este. Provam a existência de $(N - 1)$ estados de modo zero (estados normalizáveis de energia zero), onde N é a parte inteira do fluxo magnético. Esses resultados valem tanto para o caso relativístico (em que usa-se a equação de Dirac) quanto para o limite não-relativístico, correspondente à equação de Schrödinger-Pauli (equação de Schrödinger adaptada para partículas

de spin $1/2$).

No ano de 1989, Gerbert publicou um artigo [10] que trata de férmions sujeitos ao potencial de Aharonov-Bohm com tubo de fluxo de raio infinitamente pequeno. Nesse problema relativístico bidimensional, Gerbert usou extensão autoadjunta (ferramenta apresentada no capítulo 2) para descrever o sistema em termos de um parâmetro livre. Esse parâmetro é chamado de parâmetro da extensão autoadjunta. Gerbert descobriu que, para alguns intervalos de valores do parâmetro da extensão, existem estados ligados.

Em 1990, Hagen descreveu o solenoide tridimensional como um anel bidimensional [11, 12], e dividiu o espaço em duas regiões: dentro e fora do anel. Esse é um procedimento de regularização. A norma do campo magnético escolhida é análoga à dada pela equação (1.12):

$$eB(r) = -\phi \frac{\delta(r - R)}{R}, \quad (1.14)$$

onde ϕ é o fluxo magnético e R é o raio do anel. O potencial vetorial correspondente é expresso por

$$eA_i = \begin{cases} \frac{\phi \epsilon_{ij} r_j}{r^2}, & r > R \\ 0, & r < R \end{cases} \quad (1.15)$$

onde $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$ e $\epsilon_{12} = +1$. Hagen supôs que as funções de onda no interior do anel não possuem singularidades. Supôs também que as funções de onda externas podem ser singulares. Eventualmente concluiu que, no limite de pequeno raio, não se pode ignorar as soluções singulares. Em alguns casos, as soluções singulares na origem são as únicas que contribuem para a função de onda radial, e dão contribuições para a amplitude de espalhamento.

Bordag e Voropaev publicaram em 1993 um artigo [13] que trata do problema de Aharonov-Bohm com a adição do momento magnético anômalo. Trata-se de uma anomalia na relação entre o momento magnético e o spin do elétron, discutida no capítulo 2. Em termos matemáticos adiciona-se um termo extra, fenomenológico, à equação de movimento do sistema.

Bordag e Voropaev relacionaram o parâmetro da extensão autoadjunta à anomalia do momento magnético do elétron. Para isso usaram a extensão autoadjunta do Hamiltoniano com três tipos diferentes de regularização da delta de Dirac. As expressões obtidas dependem do raio da regularização, de modo que divergem no limite

de raio nulo. Esse problema é resolvido através da renormalização do Hamiltoniano do sistema. A técnica de renormalização está além do escopo dessa dissertação.

Em 1993 Hagen estudou o problema de Aharonov-Bohm Coulomb [14]. Trata-se da adição de um potencial Coulombiano ao potencial de Aharonov-Bohm para partículas de spin $1/2$. O Hamiltoniano em questão é

$$H = H_0 + \frac{\xi}{r}, \quad (1.16)$$

Aqui H_0 é o Hamiltoniano singular dado pela equação (1.13) e ξ é a constante de acoplamento do potencial Coulombiano. Hagen encontrou energias de estado ligado da forma

$$E_B = -\frac{1}{2} \frac{M\xi^2}{\left(n - \frac{1}{2} \pm |m + \phi|\right)^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.17)$$

onde m é o número quântico relacionado à coordenada angular, M é a massa da partícula e os sinais superior e inferior referem-se às soluções não singulares e singulares da equação de Schrödinger, respectivamente.

Em 1994 Park e Oh [15] também estudaram o problema de Aharonov-Bohm Coulomb, nesse caso sob a perspectiva da extensão autoadjunta de operadores. Eles tratam o Hamiltoniano singular do problema como uma extensão autoadjunta do Hamiltoniano não singular correspondente. No limite $\xi \rightarrow 0$, encontraram as energias de estado ligado

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} E_B = \frac{2}{M} \left[-\frac{1}{\lambda} \frac{\Gamma(1 + |m + \phi|)}{\Gamma(1 - |m + \phi|)} \right]^{1/|m + \phi|}, \quad (1.18)$$

onde λ é o parâmetro da extensão e Γ denota a função gama. Além disso eles provam que, nos limites de $\lambda \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow \infty$, é possível resgatar as energias de estado ligado obtidas por Hagen (1.17).

Em 2012 Andrade, Silva e Pereira [16] estudaram os efeitos de uma partícula de spin $1/2$ sob a ação de um potencial do tipo Aharonov-Bohm em espaços cônicos. Usando a extensão autoadjunta de operadores, obtiveram resultados similares aos de Park (equação (1.18)). Pela aplicação de um segundo método, obtiveram o parâmetro λ em termos de constantes físicas e geométricas.

1.3 Objetivos

Uma das técnicas disponíveis para tratar o sistema de Aharonov-Bohm com spin é a utilização de condições de contorno autoadjuntas. Essas são prescritas por métodos de extensão autoadjunta de operadores. Como dito anteriormente, a extensão autoadjunta de um operador leva a resultados em termos de uma família de parâmetros matemáticos reais. Um dos desafios dessa abordagem é expressar esses parâmetros matemáticos em função da física do sistema em questão.

Relações entre o parâmetro da extensão autoadjunta do Hamiltoniano do sistema de Aharonov-Bohm e a anomalia do momento magnético do elétron foram obtidas por Bordag e Voropaev [13]. Para tal, três técnicas foram utilizadas: extensão autoadjunta de operadores, renormalização e regularização. As relações obtidas variam ligeiramente, dependendo do tipo de regularização escolhida.

Este trabalho tem como objetivo efetuar a relação entre o parâmetro da extensão autoadjunta e as constantes físicas, em particular a anomalia do momento magnético eletrônico, sem recorrer à renormalização do Hamiltoniano do sistema. Para isso serão utilizados dois métodos de extensão autoadjunta: os métodos de Bulla-Gesztesy e de Kay-Studer. Essa abordagem foi utilizada com sucesso em outros contextos [16, 17], como em sistemas de Aharonov-Bohm em espaços cônicos.

No capítulo 2 serão apresentados, com mais profundidade, alguns conceitos importantes nesse trabalho. Dentre eles: extensão autoadjunta de operadores, momento magnético anômalo e a equação de Dirac.

Finalmente, no capítulo 3 dessa dissertação, será resolvido o problema de um elétron de spin $1/2$ com momento magnético anômalo, sujeito ao potencial de Aharonov-Bohm.

Capítulo 2

Fundamentação teórica

Esse capítulo trata da fundamentação teórica do trabalho, em particular dos aspectos matemáticos. São discutidos mais a fundo alguns temas citados no capítulo 1, assim como apresentadas relações e informações que serão úteis para a resolução do sistema de Aharonov-Bohm com momento magnético anômalo, disponível no capítulo 3.

2.1 Potenciais singulares

O operador Hamiltoniano correspondente ao sistema magnético de Aharonov-Bohm com spin $1/2$ e raio infinitesimal é

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - s\phi \frac{\delta(r)}{r} \right]. \quad (2.1)$$

Esse Hamiltoniano é singular na origem. A existência do termo singular é demonstrada no capítulo 3. A singularidade vem da interação entre o spin e o campo magnético pontual.

Potenciais singulares possuem algumas características interessantes. Como será discutido posteriormente neste capítulo, os Hamiltonianos correspondentes não são autoadjuntos e, por isso, a condição de integrabilidade das funções de onda no intervalo de 0 até infinito não é suficiente para selecionar um conjunto de autovetores ortonormais. Em algumas situações [18] o problema não é corrigido nem supondo que a função de onda satisfaz $\Psi(r = 0) = 0$, visto que o Hamiltoniano em questão não é

limitado (seção 2.3.2.2).

Como potenciais singulares não são analíticos, ou seja, não são infinitamente diferenciáveis, a teoria de perturbações pode falhar: é possível perturbar um Hamiltoniano singular e, ao tomar o parâmetro da perturbação como zero, que não se recupere o espectro do Hamiltoniano não perturbado. Esse é o fenômeno de Klauder [19].

Alguns tipos de potenciais singulares como $1/r^2$ e a delta de Dirac bidimensional adquirem uma escala de comprimento característica quando quantizados [20]. Essa situação é chamada de anomalia, e pode ser resolvida através da renormalização do potencial.

As três principais maneiras de se abordar problemas com Hamiltonianos singulares são: regularização das singularidades, renormalização e extensão autoadjunta. Os procedimentos de regularização são simples e intuitivos, mas produzem energias de estado ligado infinitas [18]. Existe certa arbitrariedade nos procedimentos de regularização visto que diferentes regularizações podem produzir resultados diferentes [13]. O problema das energias de estado ligado infinitas pode ser resolvido pela renormalização do potencial correspondente. A terceira alternativa, e a mais matematicamente rigorosa, é a extensão autoadjunta de operadores. Para baixas energias, renormalização e extensão autoadjunta levam aos mesmos resultados [18].

2.1.1 Delta de Dirac

A delta de Dirac $\delta(x)$, também chamada de função delta de Dirac, é uma maneira de se representar singularidades em equações. Em física, ela é usada para representar distribuições altamente concentradas, partículas e, neste trabalho, um solenoide ou campo magnético pontual.

A delta de Dirac é definida de maneira que satisfaça às seguintes propriedades:

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0 \quad (2.2)$$

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx, \quad (2.3)$$

onde $f(x)$ é qualquer função bem comportada. Para que satisfaça tais propriedades, é necessário que $\delta(x)$ assumam valor infinito na origem. Como infinito não é um número, a função delta de Dirac não é uma função no sentido convencional.

A delta de Dirac pode ser formulada em termos de seqüências de funções.

Por exemplo [21]

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{2n} \\ n, & -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n} \\ 0, & x > \frac{1}{2n} \end{cases} \quad (2.4)$$

ou

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}. \quad (2.5)$$

Funções das seqüências (2.4) e (2.5) são ilustradas nas figuras 2.1 e 2.2, respectivamente. A ideia dessa abordagem é que, para n grande, essas funções satisfazem de maneira aproximada as propriedades (2.2) e (2.3).

Figura 2.1: Sequência descontínua que se aproxima do comportamento da delta de Dirac.

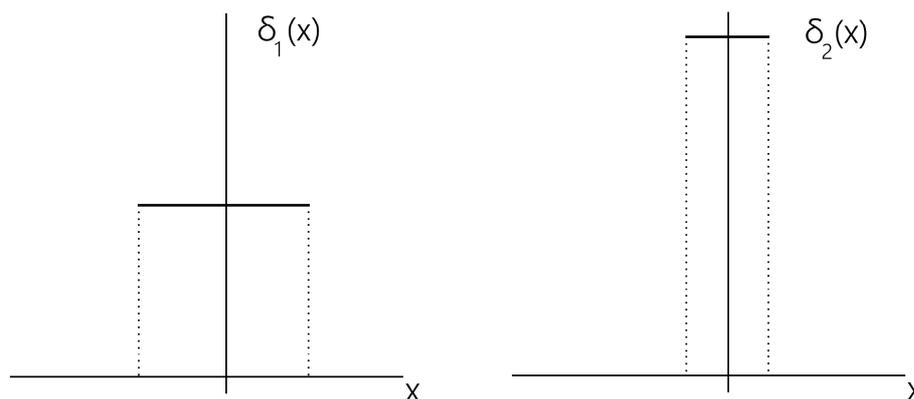
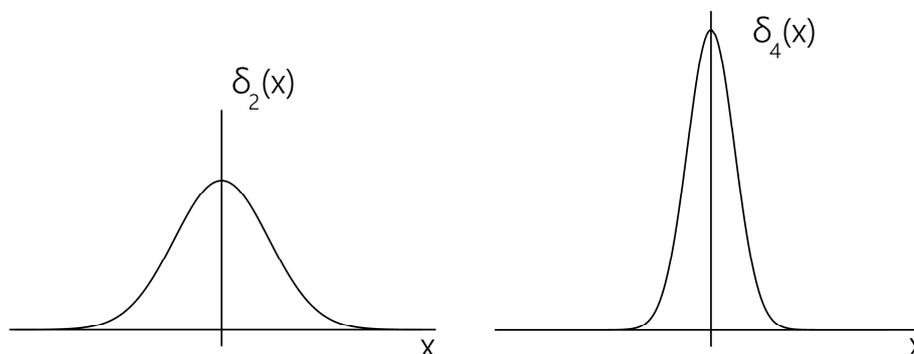


Figura 2.2: Sequência gaussiana que se aproxima do comportamento da delta de Dirac.



Qualquer elemento $\delta_n(x)$ dessas seqüências satisfaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = 1. \quad (2.6)$$

No entanto o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x)$ não converge em $x = 0$. Outra maneira de se definir a delta de Dirac é em termos da equação

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) f(x) dx = f(0). \quad (2.7)$$

Nesse caso, $\delta(x)$ é chamada de distribuição ao invés de função, e a integral no primeiro membro de (2.7) não é uma integral de Riemann [21].

Outra maneira de se tratar singularidades do tipo delta de Dirac é pela teoria de integração de Lebesgue: Pode-se adicionar o elemento ∞ aos números reais, formando um novo conjunto. Usa-se então maneiras alternativas de se medir conjuntos e integrar [22].

Em coordenadas polares, a função delta bidimensional [23] é expressa por

$$\delta^2(\mathbf{r}) = \frac{\delta(r)}{\pi r}. \quad (2.8)$$

No capítulo 3, usa-se o método da extensão autoadjunta de operadores para solução de problemas em que aparece uma delta de Dirac bidimensional no Hamiltoniano.

2.2 Quantização de sistemas físicos

Para motivar o estudo da extensão autoadjunta de operadores, primeiramente serão examinados alguns problemas decorrentes da quantização idealizada de sistemas físicos. O termo idealizada é usado aqui para indicar situações em que não é feita uma verificação rigorosa com relação aos operadores serem ou não autoadjuntos.

A quantização canônica é o processo em que os operadores da teoria clássica são substituídos pelos operadores correspondentes da teoria quântica. O critério para julgar o sucesso de uma dada prescrição de quantização é científico: a prescrição é adequada se os resultados obtidos estão de acordo com experimentos realizados.

A constante de Planck $h \approx 6,626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ é um fator de escala relacionado aos fenômenos quânticos. É importante, para qualquer prescrição de quantização, que se recuperem os resultados da teoria clássica correspondente no limite de grandes ações. Esse limite deve ser atingido tomando $h \rightarrow 0$.

De acordo com os postulados da mecânica quântica [24], o estado do sistema é completamente definido pelo vetor Ψ , que pertence a um dado espaço de Hilbert \mathfrak{H} (descrito na seção 2.3.1). Por se tratar de um espaço vetorial, vale o princípio da superposição

$$\Psi = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2 + \dots \quad (2.9)$$

onde os coeficientes c_n são números complexos, ou seja, $c_n \in \mathbb{C}$. E Ψ_n são outros vetores pertencentes a \mathfrak{H} .

De acordo com outro postulado da mecânica quântica [24], a cada grandeza física mensurável (observável) a , corresponde um operador autoadjunto A . Alguns exemplos de observáveis são posição, momento, energia e momento angular. Operadores autoadjuntos possuem autovalores reais, que correspondem aos valores medidos das grandezas observáveis. Cada um desses operadores tem como domínio um espaço de Hilbert \mathfrak{H} .

Se A é um operador, seu adjunto A^\dagger é definido de modo que

$$(\Psi_1, A^\dagger\Psi_2) = (A\Psi_1, \Psi_2) \quad (2.10)$$

para todo vetor Ψ_1 e Ψ_2 em \mathfrak{H} . A notação (ψ, ϕ) indica o produto interno nesse espaço de Hilbert. Para que um operador seja autoadjunto, ele precisa satisfazer

$$(\Psi_1, A\Psi_2) = (A\Psi_1, \Psi_2) \quad (2.11)$$

para todo vetor Ψ_1 e Ψ_2 em \mathfrak{H} . Portanto, se A é autoadjunto, ele necessariamente precisa possuir o mesmo domínio que A^\dagger .

De acordo com a prescrição canônica de quantização, há uma correspondência entre os parênteses de Poisson da mecânica clássica e os comutadores da mecânica quântica. Os parênteses de Poisson das grandezas f e g são dados por

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \quad (2.12)$$

e sua correspondência com os comutadores quânticos é

$$\{f, g\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}, \hat{g}] \quad (2.13)$$

onde \hat{f} e \hat{g} são os operadores correspondentes às grandezas f e g . Daqui pode-se tirar a relação fundamental de comutação entre \hat{x} e \hat{p} :

$$\begin{aligned} [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar \{x_i, p_j\} \\ &= i\hbar \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

A interpretação dos estados Ψ é probabilística, e a evolução temporal é dada pela equação de Schrödinger dependente do tempo

$$H\Psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t). \quad (2.15)$$

Com exceção dessa seção, não há comparações entre grandezas clássicas e quânticas nessa dissertação. Logo, não se faz necessário o uso de notação específica para denotar operadores quânticos.

Em alguns sistemas, a aplicação dos princípios da mecânica quântica pode levar a paradoxos, em particular quando trata-se de operadores não limitados. Exemplos de paradoxos desse tipo podem ser vistos em [25] e [26]. Para resolver esses problemas adequadamente, é necessário utilizar a teoria da extensão autoadjunta de operadores.

2.3 Extensão autoadjunta de operadores

Nesta seção serão expostos os conceitos necessários para discutir os principais resultados e teoremas utilizados neste trabalho, como os índices de deficiência de von Neumann, e os métodos de Bulla-Gesztesy e Kay-Studer. O objetivo principal desta seção é desenvolver o vocabulário necessário, e por isso a maioria dos teoremas é apresentada sem prova. As provas estão disponíveis na literatura [28–30].

2.3.1 Espaço de Hilbert

Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial com propriedades matemáticas específicas, como definido posteriormente. Uma definição axiomática comum [28] de espaço vetorial é a seguinte: Um espaço linear ou espaço vetorial é um conjunto de elementos, denominados vetores, em que estão definidas as operações de soma

de vetores e multiplicação de vetor por escalar. A soma dos vetores ψ e ϕ define o vetor $\psi + \phi$. A multiplicação do vetor ψ pelo escalar a define o vetor $a\psi$. Essas duas operações devem ser escolhidas de modo que os seguintes axiomas sejam satisfeitos:

1. $\psi + \phi = \phi + \psi$;
2. $\psi + (\phi + \chi) = (\phi + \psi) + \chi$;
3. $\psi + 0 = \psi$, onde o vetor nulo 0 é único;
4. $a(\psi + \phi) = a\psi + a\phi$;
5. $(a + b)\psi = a\psi + b\psi$;
6. $a(b\psi) = (ab)\psi$;
7. $1\psi = \psi$, onde 1 é escalar;
8. $0\psi = 0$, onde 0 é escalar no lado direito e vetor no lado esquerdo;

sendo ψ , ϕ e χ vetores quaisquer e a e b escalares. Alguns exemplos de espaços vetoriais são:

1. Conjunto dos vetores em um espaço euclidiano.
2. Conjunto das soluções de algumas equações diferenciais, como

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2\psi(x). \quad (2.16)$$

3. Funções $\psi(x)$ de quadrado integrável $\int |\psi(x)|^2 dx = a$, onde a é escalar.

Um espaço linear é metrizável [29] se, para cada par de vetores ψ e ϕ , existe um número (ψ, ϕ) que satisfaz as seguintes condições:

1. $(\psi, \phi) = \overline{(\phi, \psi)}$, onde a barra indica conjugação complexa;
2. $(a\psi_1 + b\psi_2, \phi) = a(\psi_1, \phi) + b(\psi_2, \phi)$;
3. $(\psi, \psi) \geq 0$, sendo a igualdade válida somente quando o vetor ψ é nulo.

O número (ψ, ϕ) é o produto interno dos vetores ψ e ϕ .

A norma de um vetor ψ , análoga ao comprimento de um segmento de reta, é dada pela raiz positiva $\sqrt{(\psi, \psi)}$, e é denotada por $\|\psi\|$. De acordo com as propriedades do produto interno, o único vetor com norma nula é o vetor 0.

Um espaço com produto interno é denominado espaço métrico se a distância $D(\psi, \phi)$ entre dois pontos ψ e ϕ é definida por

$$D(\psi, \phi) := \|\psi - \phi\|. \quad (2.17)$$

Nesse caso, a norma é dita induzida pelo produto interno.

Se uma sequência de vetores ψ_n em um espaço métrico converge para um vetor ψ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = \psi, \quad (2.18)$$

ou seja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(\psi_n, \psi) = 0. \quad (2.19)$$

Ou equivalentemente, quando n e m tendem a infinito de maneira independente e

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} D(\psi_n, \psi_m) = 0, \quad (2.20)$$

a sequência ψ_n é chamada de sequência fundamental. Apesar de todos os elementos ψ_n de uma sequência fundamental pertencerem ao espaço métrico em questão, não há garantia de que o vetor limite ψ dessa sequência pertença.

Um espaço métrico M é dito completo quando todas as sequências fundamentais nesse espaço convergem para vetores em M . Para completar um espaço métrico incompleto, basta adicionar a ele os limites das sequências que estão fora de M [29].

Finalmente, um espaço de Banach é um espaço vetorial normado completo [30]. De posse das definições vistas até aqui, é possível definir um espaço de Hilbert, que é um conceito central em mecânica quântica. Um espaço de Hilbert é um espaço de Banach com respeito à norma induzida e com produto interno [30].

Geralmente, e nesse trabalho em particular, os espaços de Hilbert são espaços de funções quadraticamente integráveis. Aqui, o produto interno é definido pela inte-

gral

$$(\psi, \phi) = \int_a^b \overline{\psi(x)} \phi(x) dx. \quad (2.21)$$

E, portanto, a norma de um vetor ψ é

$$\|\psi\|^2 = (\psi, \psi) = \int_a^b |\psi(x)|^2 dx. \quad (2.22)$$

Como o produto interno (ψ, ψ) é um número, se a integral (2.22) divergir, então $\psi(x)$ não pertence ao espaço de Hilbert em questão. Do ponto de vista físico, é difícil interpretar probabilisticamente um estado cuja norma diverge.

2.3.2 Operadores lineares

O objetivo desta seção é apresentar operadores lineares limitados e não limitados. Um operador linear A em um espaço vetorial associa a cada vetor ψ outro vetor $A\psi$. O operador é dito linear porque satisfaz as seguintes relações:

$$A(\psi + \phi) = A\psi + A\phi \quad (2.23)$$

e

$$A(a\psi) = aA\psi, \quad (2.24)$$

onde a é um escalar. Dois operadores lineares A e B são iguais se $A\psi = B\psi$ para todo vetor ψ em seu domínio. Os operadores lineares que agem em um espaço linear formam, por sua vez, outro espaço linear, com operação de soma

$$(A + B)\psi = A\psi + B\psi, \quad (2.25)$$

e multiplicação por escalar

$$(aA)\psi = aA\psi. \quad (2.26)$$

2.3.2.1 Operadores limitados

Um operador linear é dito limitado se existe um número b tal que, para todo vetor ψ no domínio de A

$$\|A\psi\| \leq b\|\psi\|. \quad (2.27)$$

O menor número b que satisfaz (2.27) é chamado de norma de A e denotado $\|A\|$.

Um operador A é contínuo se, para cada sequência de vetores ψ_n que converge para ψ ocorra também

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A\psi_n = A\psi. \quad (2.28)$$

De acordo com um teorema [28], um operador é limitado se e somente se é contínuo. Isso é bastante relevante nesse trabalho visto que, se o operador é limitado, ele possui uma única extensão autoadjunta (seção 2.3.3). Um Hamiltoniano descontínuo, como os que possuem singularidades do tipo delta de Dirac, não é limitado e, por isso, podem existir zero ou infinitas extensões.

Os critérios para definir um operador limitado A como autoadjunto são relativamente simples. O adjunto A^\dagger do operador limitado A é definido por

$$(\phi, A^\dagger \psi) = (A\phi, \psi), \quad (2.29)$$

para todos os vetores ψ e ϕ no espaço em questão. Esse é o mesmo critério dado pela equação (2.10). O adjunto A^\dagger de um operador limitado A também é limitado, e ambos possuem a mesma norma: $\|A\| = \|A^\dagger\|$.

De (2.29) pode-se definir um operador limitado autoadjunto ou Hermitiano por

$$(\phi, A\psi) = (A\phi, \psi) \quad (2.30)$$

ou

$$(\phi, A\psi) = \overline{(\psi, A\phi)} \quad (2.31)$$

ou seja, quando $A = A^\dagger$.

Como exemplo de operador, seja A definido como

$$A\psi(x) = x\psi(x). \quad (2.32)$$

Seu domínio é o espaço de funções $\psi(x)$ de quadrado integrável $\mathcal{L}^2(a, b)$. a e b são

números reais, ou seja $a, b \in \mathbb{R}$. Quando a integral

$$\begin{aligned} (\phi, A\psi) &= \int_a^b \overline{\phi(x)} x \psi(x) dx \\ &= \int_a^b \overline{x \phi(x)} \psi(x) dx \\ &= (A\phi, \psi) \end{aligned} \quad (2.33)$$

converge, A possui a propriedade hermitiana. Como

$$\begin{aligned} \|A\psi\|^2 &= \int_a^b |x\psi(x)|^2 dx \\ &\leq \max\{a, b\} \|\psi\|^2, \end{aligned} \quad (2.34)$$

o operador A é limitado.

2.3.2.2 Operadores não limitados

Considere agora um operador A definido como (2.32), mas cujo domínio é o espaço de funções $\psi(x)$ de quadrado integrável $\mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$. Nesse caso o valor de x não é limitado e

$$\|A\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x\psi(x)|^2 dx \quad (2.35)$$

pode ser maior que

$$\|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx \quad (2.36)$$

por qualquer número. Portanto A não é limitado.

O operador (2.32) não pode ser definido para todos os vetores em $\mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$ visto que (2.35) não é finito para todo vetor. Na realidade é impossível definir um operador não limitado autoadjunto para todos os vetores de um espaço [28].

É possível abdicar da propriedade autoadjunta do operador não limitado e, assim, defini-lo em todo o espaço de Hilbert [31]. Essa abordagem, no entanto, pode causar problemas em física. Operadores autoadjuntos possuem espectro (conjunto dos autovalores) real. Além disso possuem base ortonormal, algo importante para a interpretação probabilística da mecânica quântica.

Nas seções anteriores foi suposto que cada operador é definido no espaço vetorial inteiro. Como, em se tratando de operadores não limitados, isso é impossível,

a partir de agora alguns conceitos precisam ser redefinidos. Dois operadores A e B só serão considerados iguais ($A = B$) se A e B possuírem o mesmo domínio.

Sejam A e B dois operadores. Se o domínio de A contém o domínio de B , ou seja $\mathcal{D}(A) \supseteq \mathcal{D}(B)$, e no domínio de B ambos são iguais, então diz-se que A uma extensão de B .

O domínio de um operador A é dito denso se, para cada vetor ψ nesse domínio existe uma sequência ψ_n tal que $\psi_n \rightarrow \psi$. Se um operador A tem domínio denso, seu adjunto A^\dagger pode ser definido da seguinte maneira: o domínio de A^\dagger é o conjunto dos vetores ψ tal que existe um vetor $A^\dagger\psi$ que satisfaça

$$(\phi, A^\dagger\psi) = (A\phi, \psi), \quad (2.37)$$

para todo vetor $\phi \in \mathcal{D}(A)$.

Um operador com domínio denso A é simétrico se

$$(\phi, A\psi) = (A\phi, \psi) \quad (2.38)$$

para todo ϕ e ψ em seu domínio. Nesse caso A^\dagger é definido e como $A^\dagger\psi = A\psi$ para todo $\psi \in \mathcal{D}(A)$, e A^\dagger é uma extensão de A . Se $A^\dagger = A$, A é autoadjunto ou hermitiano. A palavra hermitiano significa simétrico em matemática e, em física, significa autoadjunto. Por isso evita-se usá-la nesse contexto.

Como exemplo, seja A um operador cujo domínio denso é o conjunto dos vetores $\psi(x)$ de modo que $x\psi(x)$ são de quadrado integrável. Seja $\psi_n(x)$ uma sequência no domínio de A definida por

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \psi(x), & |x| \leq n \\ 0, & |x| > n. \end{cases} \quad (2.39)$$

A norma da diferença entre $\psi(x)$ e $\psi_n(x)$ dada por

$$\begin{aligned} \|\psi(x) - \psi_n(x)\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (\psi(x) - \psi_n(x)) \overline{(\psi(x) - \psi_n(x))} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (|\psi(x)|^2 - \overline{\psi(x)}\psi_n(x) - \psi(x)\overline{\psi_n(x)} + |\psi_n(x)|^2) dx. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Separando a integral em três regiões: $(-\infty, -n)$, $(-n, n)$, (n, ∞) , pode-se substituir $\psi_n(x)$ em cada região de acordo com (2.39). Os únicos termos que não se anulam são:

$$\|\psi(x) - \psi_n(x)\|^2 = \int_{-\infty}^{-n} |\psi(x)|^2 dx + \int_n^{\infty} |\psi(x)|^2 dx. \quad (2.41)$$

Como o lado direito de (2.41) tende a zero quando $n \rightarrow \infty$, conclui-se que $\psi_n \rightarrow \psi$. Como visto, A é simétrico e portanto A^\dagger é uma extensão de A . Para descobrir se esse operador A é autoadjunto, é necessário responder a seguinte pergunta: o domínio de A^\dagger é maior que o de A ? A só é autoadjunto se os domínios de A^\dagger e A forem iguais.

Um operador simétrico não necessariamente é autoadjunto, isso acontece quando A é um operador simétrico e A^\dagger é uma extensão de A para um domínio maior. Um operador simétrico que não pode ser estendido para um domínio maior é chamado de operador simétrico máximo. Além disso, todo operador autoadjunto é um operador simétrico máximo. No entanto, nem todo operador simétrico máximo é autoadjunto.

Finalmente define-se um operador fechado. Como discutido, operadores não limitados não são contínuos, e a condição para um operador ser fechado é mais fraca que a condição para que seja contínuo.

Seja ψ_n uma sequência que pertence ao domínio de um operador A e ψ um vetor de modo que $\psi_n \rightarrow \psi$. Se a sequência $A\psi_n$ converge para um vetor ϕ então $\psi \in \mathcal{D}(A)$ e $\phi = A\psi$. Isso é relevante porque todo operador com domínio denso possui adjunto fechado, e todo operador autoadjunto é fechado.

2.3.3 Uso das extensões autoadjuntas

A aplicação idealizada dos postulados da mecânica quântica pode levar a paradoxos. Em particular, nem toda escolha de fronteira para um sistema garante que os operadores em estudo sejam autoadjuntos.

Para a definição correta de uma função, é necessário uma regra, domínio e contradomínio. Por exemplo, a função afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = ax + b, \quad (2.42)$$

tem como domínio e contradomínio os números reais, e a regra é dada pela equação (2.42). Operadores em mecânica quântica precisam ser vistos da mesma maneira.

Não basta a regra. Para definir corretamente um operador é necessário definir um domínio (espaço de Hilbert) adequado.

Muitos livros-texto clássicos sobre mecânica quântica de autores como Sakurai [32], Cohen-Tannoudji [33], Shankar [34] e Gasiorowicz [35] não mencionam os problemas que podem ser causados pela definição incorreta dos operadores. Dentre as exceções encontra-se o livro do autor Ballentine [36].

A matemática da mecânica quântica é a teoria dos operadores lineares em espaços de Hilbert. Os problemas e paradoxos encontrados surgem das regras simplificadas utilizadas em muitos livros-texto. Um exemplo de regra simplificada é o uso da teoria de operadores limitados no tratamento de operadores não limitados, como no paradoxo discutido em [26].

As regras da quantização canônica de operadores são de natureza preliminar e geralmente produzem apenas candidatos a operadores quânticos não limitados. Isso porque essas regras não prescrevem domínios de operadores. Esses candidatos a operadores são chamados de operadores formais.

Quando os potenciais são singulares, não há dificuldade em encontrar operadores simétricos que evitam as singularidades ou fronteiras. Esses operadores não necessariamente são autoadjuntos. Nesse caso precisa-se saber se esses operadores preliminares podem ser estendidos para que tornem-se autoadjuntos. Isso pode ser feito através do teorema de von Neumann (seção 2.3.4).

Em se tratando de operadores simétricos e limitados, as extensões existem e são únicas. No entanto, o problema não é tão simples para o caso dos operadores não limitados. Nesse caso, mesmo que extensões existam, elas não são únicas, e suas interpretações são baseadas na física do sistema. Cada extensão é parametrizada por uma família de constantes e é uma prescrição para o comportamento do sistema nas proximidades de fronteiras ou singularidades.

Outro problema é que operadores não limitados não podem ser definidos para todas as funções de um espaço de Hilbert, ou seja, não necessariamente valem para um estado arbitrário.

2.3.4 Índices de deficiência e teorema de Von Neumann

Depois de apresentar o conceito de extensão autoadjunta, é importante saber responder quantas extensões autoadjuntas um operador admite. A resposta é dada por um teorema devido a von Neumann [37]. Para usá-lo, é necessário conhecer os índices de deficiência do operador em questão.

Seja A um operador simétrico e fechado com domínio $\mathcal{D}(A)$ e analogamente A^\dagger com domínio $\mathcal{D}(A^\dagger)$ o adjunto de A . Os subespaços de deficiência \mathcal{N}_\pm são definidos por [26]

$$\mathcal{N}_+ = \{\psi \in \mathcal{D}(A^\dagger), \quad A^\dagger\psi = z_+\psi, \quad \text{Im}(z_+) > 0\} \quad (2.43)$$

e

$$\mathcal{N}_- = \{\psi \in \mathcal{D}(A^\dagger), \quad A^\dagger\psi = z_-\psi, \quad \text{Im}(z_-) < 0\}. \quad (2.44)$$

Sejam n_\pm as dimensões dos espaços \mathcal{N}_\pm . O par ordenado de inteiros não negativos (n_+, n_-) é chamado de índices de deficiência do operador A . A escolha de z_\pm não é importante, contanto que z_+ esteja na parte superior do plano complexo e z_- na parte inferior. Pode-se então escolher $z_+ = i\omega$ e $z_- = -i\omega$, onde ω é um número real positivo arbitrário, usado por razões dimensionais. Para obter os índices de deficiência, basta resolver as equações

$$A^\dagger\psi = z_\pm\psi, \quad (2.45)$$

e contar quantas soluções linearmente independentes pertencem ao espaço de Hilbert em questão. Por isso, só são contadas as soluções com norma finita.

De acordo com teorema descoberto por Weyl para operadores diferenciais de segunda ordem [38] e generalizado por Von Neumann [37], um operador A com índices de deficiência (n_+, n_-) admite três possibilidades:

1. Se $n_+ = n_-$, A é autoadjunto.
2. Se $n_+ = n_- \geq 1$, então A possui infinitas extensões autoadjuntas, parametrizadas por uma matriz unitária de dimensão n contendo n^2 parâmetros.
3. Se $n_+ \neq n_-$, então A não admite extensões autoadjuntas.

2.3.5 Método de Bulla-Gesztesy

Bulla e Gesztesy calcularam os índices de deficiência e construíram condições de contorno autoadjuntas de Hamiltonianos singulares com interações pontuais. Esses Hamiltonianos podem conter um número infinito (contável) de interações pontuais [39]. Para problemas desse tipo, soluções analíticas são conhecidas [40].

O seguinte teorema de Bulla e Gesztesy é usado no capítulo 3 para tratar o sistema de Aharonov-Bohm com momento anômalo magnético. De acordo com Bulla e Gesztesy, todas as extensões autoadjuntas de um Hamiltoniano h_ζ da forma

$$h_\zeta = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell-1)}{r^2} + \frac{\gamma}{r} + \frac{\alpha}{r^{-a}} + W \quad (2.46)$$

possuem domínio

$$\mathcal{D}(h_\zeta) = \left\{ g(x) \in \mathcal{L}^2((0, \infty)) \mid g, g' \in AC_{loc}((0, \infty)); \right. \\ \left. -g'' + \frac{\ell(\ell-1)}{r^2}g + \frac{\gamma}{r}g + \frac{\alpha}{r^{-a}}g \in \mathcal{L}^2((0, \infty)) \right\}, \quad (2.47)$$

onde *loc* indica convergência local, e devem satisfazer a condição de contorno

$$\zeta g_{0,\ell} = g_{1,\ell} \quad (2.48)$$

com constantes

$$-\infty < \zeta \leq \infty, \quad \frac{1}{2} \leq \ell < \frac{3}{2}, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \quad 0 < a < 2. \quad (2.49)$$

O termo $g_{0,\ell}$ de (2.48) é definido como

$$g_{0,\ell} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{g(r)}{G_\ell^{(0)}(r)}, \quad (2.50)$$

e $g_{1,\ell}$ como

$$g_{1,\ell} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \left[g(r) - g_{0,\ell} G_\ell^B(r) \right] \frac{1}{F_\ell^{(0)}(r)}. \quad (2.51)$$

As funções $F_\ell^{(0)}(r)$, $G_\ell^{(0)}(r)$ são dadas por

$$F_\ell^{(0)}(r) = r^\ell \quad (2.52)$$

e

$$G_\ell^{(0)}(r) = \begin{cases} -r^{1/2} \ln(r), & \ell = \frac{1}{2} \\ \frac{r^{1-\ell}}{(2\ell-1)}, & \frac{1}{2} < \ell < \frac{3}{2} \end{cases} \quad (2.53)$$

$G_\ell^B(r)$ denota a expansão assintótica de $G_\ell(r)$ quando $r \rightarrow 0^+$ até ordem r^t , onde $t \leq 2\ell - 1$.

Como discutido anteriormente, não é possível garantir que um operador seja autoadjunto para uma escolha qualquer de fronteira. No capítulo 3 usa-se a condição de fronteira de Bulla-Gesztesy, dada pela equação (2.48), na origem do sistema de Aharonov-Bohm pontual.

2.3.6 Método de Kay-Studer

Kay e Studer estudaram, no contexto de extensões autoadjuntas, as condições de contorno para alguns sistemas quânticos em espaços cônicos [54]. É importante salientar que o espaço plano é um caso particular de espaço cônico. Dentre os problemas abordados, estão sistemas do tipo Aharonov-Bohm em duas dimensões.

Para um sistema regularizado de Aharonov-Bohm bidimensional (um anel de raio r_0 , com parte interna e externa), o método de Kay-Studer é aplicado da seguinte maneira [16]:

- Substitui-se o Hamiltoniano singular pelo Hamiltoniano não singular correspondente.
- Resolve-se as equações (2.45) do espaço de deficiência correspondentes ao operador sem singularidade.
- As soluções obtidas são utilizadas para completar o espaço de soluções do sistema.
- Finalmente, a condição de contorno utilizada para as funções de onda é a igualdade entre as derivadas logarítmicas das soluções gerais e das soluções de energia zero.

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0^+} \left. \frac{r_0}{f_0} \frac{df_0}{dr} \right|_{r=r_0} = \lim_{r_0 \rightarrow 0^+} \left. \frac{r_0}{f_\rho} \frac{df_\rho}{dr} \right|_{r=r_0} \quad (2.54)$$

Aqui f_ρ são as soluções na forma completa obtida como descrito no procedimento acima, e f_0 são as soluções de energia zero. Esse método também será utilizado no capítulo 3.

A exposição da extensão autoadjunta de operadores para por aqui. Agora é necessário abordar alguns fundamentos físicos importantes nesse trabalho.

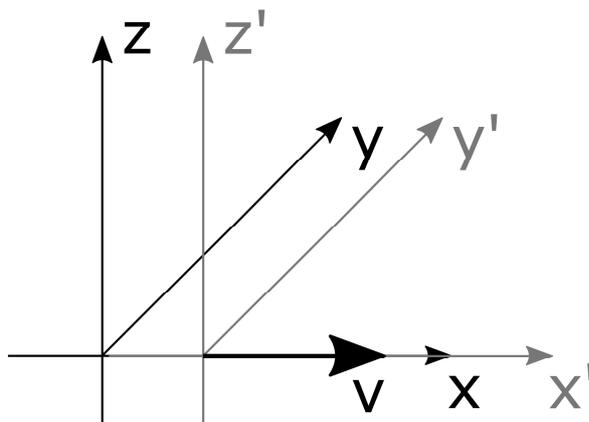
2.4 Relatividade restrita

No capítulo 3, o problema de Aharonov-Bohm é abordado inicialmente de um contexto relativístico. Logo faz-se necessário tratar de relatividade restrita.

De acordo com a transformação de Galileu, as coordenadas de um evento (x, y, z, t) num referencial inercial O e (x', y', z', t') em outro referencial inercial O' quando o movimento relativo entre eles é o ilustrado pela figura 2.3 é

$$\begin{aligned}x' &= x - vt, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= t.\end{aligned}\tag{2.55}$$

Figura 2.3: Transformação de sistema de coordenadas.



As leis de Newton são invariantes sob transformações de Galileu. Por outro

lado, as leis de Maxwell são invariantes sob transformações de Lorentz:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.\end{aligned}\tag{2.56}$$

Com objetivo de remover essa incompatibilidade e salvar o eletromagnetismo Maxwelliano, Einstein reformulou a mecânica de modo que também fosse invariante sob transformações de Lorentz [41]. Para tal usou dois postulados:

1. Princípio da relatividade: Não há experimento que possa medir a velocidade absoluta de um observador. Os resultados dos experimentos realizados por um observador não dependem de sua velocidade relativa a outros observadores que não estão envolvidos no experimento.
2. Universalidade da velocidade da luz: A velocidade da luz relativa a qualquer observador não acelerado é c , independente da velocidade relativa entre o observador e a fonte de luz.

O postulado da relatividade já era usado por Galileu, mas não o da universalidade da velocidade da luz. Como consequência dos postulados da relatividade restrita [42] conclui-se que o intervalo (ou distância) euclidiano, dado por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2\tag{2.57}$$

não é invariante sob troca de referencial inercial. Isso causa fenômenos não intuitivos como dilatação temporal e contração de comprimentos quando da troca de referencial. Para solucionar o problema usa-se outra definição de intervalo:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2\tag{2.58}$$

onde o tempo recebe tratamento similar ao recebido pelas coordenadas espaciais. (2.58) é o intervalo de Minkowski. Outra formulação que produz resultados equivalen-

tes é

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Aqui η é o tensor métrico com componentes

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

A assinatura de (2.60) é $(+ - - -)$, dada pelos sinais da diagonal principal. A assinatura correspondente à (2.58) é $(- + + +)$.

Na equação (2.59) foi usada a notação de Einstein para somatórios. A cada índice repetido corresponde um somatório. Em notação usual, a equação (2.59) seria expressa como

$$ds^2 = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (2.61)$$

Letras gregas como índices repetidos indicam que o somatório vai de zero até três. No capítulo 3 são usados também letras latinas como índices, que indicam que o somatório vai de um até três.

A energia de uma partícula também deve ser corrigida quando se leva em conta a relatividade restrita. Para uma partícula como o elétron, a relação entre a energia relativística E e a não relativística ε é

$$E = mc^2 + \varepsilon. \quad (2.62)$$

2.5 Equação de Dirac

A equação de Schrödinger trata o tempo de maneira diferente das coordenadas espaciais:

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t). \quad (2.63)$$

A derivada temporal é de primeira ordem, e as derivadas espaciais são de segunda ordem. Isso fere os princípios relativísticos, e foi necessário procurar outra equação.

Historicamente, durante a década de 1920, a primeira tentativa bem sucedida de formular uma equação de onda relativística análoga à de Schrödinger resultou em

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0, \quad (2.64)$$

conhecida como equação de Klein-Gordon. A equação de Klein-Gordon é válida para descrever a dinâmica de partículas sem spin, mas é difícil de se interpretar para partículas com spin 1/2, como o elétron [43]. Em 1928 Dirac apresentou sua equação [44], que resolve esse problema:

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi = 0. \quad (2.65)$$

O termo mc corresponde à equivalência massa-energia relativística. O termo ψ em (2.65) possui quatro componentes, e é chamado spinor de Dirac. As quatro matrizes gama, denotadas por γ^μ , são quadradas e de ordem quatro. Existem várias representações possíveis para as matrizes gama. A representação usada nesse trabalho é apresentada no capítulo 3.

Qualquer solução da equação de Dirac é solução da equação de Klein-Gordon, mas o inverso não é necessariamente verdade.

2.5.1 Momento anômalo magnético

A relação entre o momento magnético e o momento angular de spin do elétron é

$$\boldsymbol{\mu} = -g \frac{e}{2m} \mathbf{S}, \quad (2.66)$$

onde o fator g é uma constante de proporcionalidade. A anomalia do momento magnético do elétron é definida por

$$a = \frac{g - 2}{2}. \quad (2.67)$$

Dirac inicialmente usou $g = 2$ em sua equação, e nesse caso não há anomalia pois $a = 0$. Observou-se experimentalmente em 1947 [45] que o fator g do elétron não é 2, e portanto há uma anomalia no momento. De acordo com medições mais

precisas [46] o fator g é $g = 2.00231930436182(52)$.

Para levar em conta os efeitos eletromagnéticos nas equações de movimento da mecânica quântica, usa-se o acoplamento mínimo, como visto no capítulo 1:

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}. \quad (2.68)$$

A existência do momento anômalo indica que o mecanismo acima não é suficiente. Para considerar a anomalia do momento magnético é necessário adicionar um termo fenomenológico ao Hamiltoniano do sistema [43]:

$$- a \frac{\mu_B}{2c\hbar} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (2.69)$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético e $\sigma^{\mu\nu}$ é definido em termos das matrizes gama:

$$\sigma^{\mu\nu} := \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (2.70)$$

Quando é feita a inclusão do termo extra (2.69) na equação de movimento, diz-se que a prescrição é não mínima. O acoplamento não mínimo será utilizado no capítulo 3.

2.5.2 Matriz S

Em um experimento de espalhamento, prepara-se um estado inicial de entrada ϕ em $t \rightarrow -\infty$ e mede-se um estado de saída ψ em $t \rightarrow \infty$, posterior ao choque com o alvo. A amplitude de transição entre os estados é dado pelo produto escalar

$$S_{\psi\phi} = (\psi, \phi) \quad (2.71)$$

O conjunto das amplitudes definidas por (2.71) é conhecido como operador de espalhamento, ou matriz S. [47] Os polos da matriz S no plano complexo estão relacionados às energias de estado ligado do sistema em questão.

No capítulo 3 usa-se a seguinte expressão para a matriz S [16]:

$$S = e^{2i\delta_m}, \quad (2.72)$$

onde δ_m é a diferença de fase decorrente do espalhamento.

De posse dos conhecimentos abordados nesse capítulo, é possível estudar o problema de Aharonov-Bohm com momento magnético anômalo.

Capítulo 3

Soluções de sistemas com momento anômalo

Neste capítulo o problema de um elétron com momento magnético anômalo sujeito ao potencial magnético de Aharonov-Bohm é formulado e resolvido. Não há campo elétrico externo. Inicialmente obtém-se a equação de Dirac de acordo com as prescrições descritas no capítulo 2. Depois de tomado o limite não-relativístico, serão usadas diferentes abordagens de extensão autoadjunta para obter informações sobre o sistema. As respectivas energias de estado ligado são comparadas.

3.1 Equação de Dirac

Primeiramente obtém-se a equação de Dirac correspondente ao sistema. Como visto na seção 2.5, a equação de Dirac que descreve um sistema formado por uma partícula livre é

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi = 0. \quad (3.1)$$

A partir daqui são usadas as unidades de Planck: $\hbar = c = 1$, também conhecidas como unidades naturais. A representação usada das matrizes γ é apresentada na seção seguinte. Os índices repetidos indicam que há um somatório com índice μ variando de zero até três. O termo m corresponde à equivalência massa-energia relativística. É necessário trocar a derivada que aparece na equação (3.1) pela derivada covariante

de gauge. De acordo com o acoplamento mínimo:

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu, \quad (3.2)$$

onde e é a carga elétrica da partícula. Deste modo, a equação (3.1) pode ser reescrita como

$$\left[i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - m \right] \Psi = 0. \quad (3.3)$$

A expressão (3.3) é a equação de Dirac correspondente ao efeito Aharonov-Bohm relativístico. Basta agora acrescentar o termo fenomenológico (equação (2.69)) correspondente ao momento anômalo magnético

$$\left[i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - m - a\frac{\mu_B}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \right] \Psi = 0. \quad (3.4)$$

Ou, equivalentemente

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m - a\frac{\mu_B}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \right) \Psi = 0. \quad (3.5)$$

A expressão (3.5) é a equação de Dirac correspondente ao problema de um elétron carregado de spin $1/2$ e momento magnético anômalo, e sujeito ao potencial magnético de Aharonov-Bohm. Essa expressão pode ser encontrada na literatura [48, 49].

Como o spinor de Dirac Ψ possui quatro componentes, trata-se de um conjunto de quatro equações diferenciais. Nas duas seções seguintes a equação de Dirac será manipulada para que dois objetivos sejam atingidos:

1. Reduzir o número efetivo de equações de 4 para 2: como o sistema é simétrico com relação ao eixo \hat{z} , visto que o campo magnético é paralelo a este, é possível remover termos e dimensões de modo que o problema seja formulado num plano.
2. Tomar o limite não-relativístico a fim de obter uma equação diferencial do tipo Schrödinger-Pauli.

3.1.1 Redução dimensional

O ponto de partida é a equação (3.5). Separando os termos temporais (com $\mu = 0$ e $\nu = 0$) dos somatórios, vêm

$$\left[i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^i \partial_i - e\gamma^0 A_0 - e\gamma^i A_i - m - a \frac{\mu B}{2} \left(\sigma^{0\nu} F_{0\nu} + \sigma^{\mu 0} F_{\mu 0} + \sigma^{ij} F_{ij} \right) \right] \Psi = 0. \quad (3.6)$$

Em (3.6) os somatórios sobre os índices latinos i e j vão de um até três. O tensor eletromagnético $F^{\mu\nu}$, quando a assinatura da métrica é $(+ - - -)$, é representado por

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Como dito anteriormente, não há campo elétrico nesse sistema. Logo $F^{0\nu} = F^{\mu 0} = 0$. Como consequência $F_{0\nu}$ e $F_{\mu 0}$ também são nulos, visto que $F_{0\nu} = -F^{0\nu}$ e $F_{\mu 0} = -F^{\mu 0}$ (demonstrado no apêndice B). Da mesma maneira $A_0 = 0$ visto que A_0 é o potencial elétrico. Portanto, a expressão (3.6) pode ser escrita como

$$\left(i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^i \partial_i - e\gamma^i A_i - m - a \frac{\mu B}{2} \sigma^{ij} F_{ij} \right) \Psi = 0. \quad (3.8)$$

Agora o termo $\sigma^{ij} F_{ij}$ de (3.8) será simplificado. $\sigma^{\mu\nu}$ é definido em termos da comutação das matrizes γ :

$$\sigma^{\mu\nu} := \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (3.9)$$

e a representação das matrizes γ usada nesse trabalho é [49]:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & i\sigma_1 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

e

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

O símbolo I denota a matriz identidade. Os símbolos σ_i acima indicam as matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

O campo magnético é paralelo à direção \hat{z} , e por isso somente as componentes F^{12} e F^{21} de (3.7) não se anulam. Como as componentes espaciais do tensor eletromagnético satisfazem $F_{ij} = F^{ij}$ (demonstrado no apêndice B), o termo $\sigma^{ij}F_{ij}$ pode ser expresso por

$$\begin{aligned} \sigma^{ij}F_{ij} &= \sigma^{12}F_{12} + \sigma^{21}F_{21} \\ &= \frac{i}{2}[\gamma^1, \gamma^2](-B_3) + \frac{i}{2}[\gamma^2, \gamma^1](B_3) \\ &= -i[\gamma^1, \gamma^2]B_3. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Portanto (3.8) fica

$$\left(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - e\gamma^i A_i - m - a\frac{\mu B}{2}(-i)[\gamma^1, \gamma^2]B_3 \right) \Psi = 0. \quad (3.16)$$

Na métrica (+ - - -), as matrizes γ satisfazem a identidade

$$(\gamma^\mu)^2 = \begin{cases} I, & \mu = 0 \\ -I, & \mu \neq 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Logo, multiplicando (3.16) por $-\gamma^0$ e colocando a derivada temporal no segundo membro da equação resulta em

$$\left(-i\gamma^0\gamma^i\partial_i + e\gamma^0\gamma^i A_i + \gamma^0 m - a\frac{\mu_B}{2}i\gamma^0[\gamma^1, \gamma^2]B_3\right)\Psi = i\partial_0\Psi. \quad (3.18)$$

Pode-se reconhecer $i\partial_0$ como o operador energia correspondente a estados estacionários. Assim:

$$\left\{\gamma^0\gamma^i(-i\partial_i + eA_i) + \gamma^0 m - a\frac{\mu_B}{2}i\gamma^0[\gamma^1, \gamma^2]B_3\right\}\Psi = E\Psi. \quad (3.19)$$

Como visto anteriormente, o termo $-i\partial_i + eA_i$ é o momento cinético Π_i . Nesse sistema, apenas a componente z do campo magnético não se anula. Logo, a solução procurada é um autoestado do operador Π_3 com autovalor 0, e (3.19) fica

$$\left(\gamma^0\gamma^i\Pi_i + \gamma^0 m - a\frac{\mu_B}{2}i\gamma^0[\gamma^1, \gamma^2]B_3\right)\Psi = E\Psi. \quad (3.20)$$

Os termos matriciais em (3.20) podem ser calculados usando as representações das matrizes γ apresentadas anteriormente. Portanto:

$$\gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

$$\gamma^0\gamma^2 = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

e

$$i\gamma^0[\gamma^1, \gamma^2] = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Deste modo, a equação (3.20) pode ser representada usando matrizes de

ordem 2:

$$\left[\begin{pmatrix} \sigma_1 \Pi_1 + \sigma_2 \Pi_2 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \Pi_1 + \sigma_2 \Pi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a\mu_B B_3 & 0 \\ 0 & a\mu_B B_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m\sigma_3 - E & 0 \\ 0 & -m\sigma_3 - E \end{pmatrix} \right] \Psi = 0 \quad (3.24)$$

ou, usando matrizes de ordem 4

$$\begin{pmatrix} -a\mu_B B_3 + m - E & \Pi_1 - i\Pi_2 & 0 & 0 \\ \Pi_1 + i\Pi_2 & -a\mu_B B_3 - m - E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +a\mu_B B_3 - m - E & \Pi_1 - i\Pi_2 \\ 0 & 0 & \Pi_1 + i\Pi_2 & +a\mu_B B_3 + m - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = 0. \quad (3.25)$$

A equação matricial acima corresponde ao sistema de equações

$$\begin{cases} (\Pi_1 - i\Pi_2)\Psi_2 + (-a\mu_B B_3 + m - E)\Psi_1 = 0, \\ (\Pi_1 + i\Pi_2)\Psi_1 + (-a\mu_B B_3 - m - E)\Psi_2 = 0, \\ (\Pi_1 - i\Pi_2)\Psi_4 + (+a\mu_B B_3 - m - E)\Psi_3 = 0, \\ (\Pi_1 + i\Pi_2)\Psi_3 + (+a\mu_B B_3 + m - E)\Psi_4 = 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

O sistema de quatro equações (3.26) pode ser representado por duas equações apenas. Para esse fim é introduzido o parâmetro s , que pode assumir os valores $s = \pm 1$. O parâmetro s é interpretado como o dobro do spin da partícula. Desta maneira:

$$\begin{cases} (\Pi_1 - si\Pi_2)\Psi_b + (-sa\mu_B B_3 + m - E)\Psi_a = 0, \\ (\Pi_1 + si\Pi_2)\Psi_a + (-sa\mu_B B_3 - m - E)\Psi_b = 0, \end{cases} \quad (3.27)$$

onde

$$\Psi_a = \begin{cases} \Psi_1, & s = 1, \\ \Psi_4, & s = -1, \end{cases} \quad (3.28)$$

e

$$\Psi_b = \begin{cases} \Psi_2, & s = 1, \\ \Psi_3, & s = -1. \end{cases} \quad (3.29)$$

Ou, em forma matricial

$$\begin{pmatrix} -sa\mu_B B_3 + m - E & \Pi_1 - is\Pi_2 \\ \Pi_1 + is\Pi_2 & -sa\mu_B B_3 - m - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \end{pmatrix} = 0. \quad (3.30)$$

A expressão (3.30) é a equação de movimento reduzida. Para todos os efeitos o sistema foi resumido a duas equações que envolvem apenas duas dimensões espaciais. Esse resultado é esperado visto que, devido à simetria com relação ao eixo \hat{z} , o problema pode ser formulado em um plano.

3.1.2 Limite não-relativístico

Nesta seção será tomado o limite não-relativístico da equação (3.30). A energia da partícula é $E = m + \varepsilon$, onde ε é a energia não-relativística. No limite não-relativístico, $\varepsilon \ll m$. Logo, pode-se reescrever alguns termos de (3.30) como

$$m - E = -\varepsilon \quad (3.31)$$

e, visto que $-sa\mu_B B_3 \ll m$

$$-sa\mu_B B_3 - m - E \approx -2m. \quad (3.32)$$

Portanto a equação (3.30) fica

$$\begin{pmatrix} -sa\mu_B B_3 - \varepsilon & \Pi_1 - is\Pi_2 \\ \Pi_1 + is\Pi_2 & -2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \end{pmatrix} = 0. \quad (3.33)$$

Em forma de sistema linear

$$\begin{cases} (-sa\mu_B B_3 - \varepsilon) \Psi_a + (\Pi_1 - is\Pi_2) \Psi_b = 0 \\ (\Pi_1 + is\Pi_2) \Psi_a - 2m \Psi_b = 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

Eliminando Ψ_b do sistema acima, obtém-se

$$\left[(-sa\mu_B B_3 - \varepsilon) + (\Pi_1 - is\Pi_2) \frac{(\Pi_1 + is\Pi_2)}{2m} \right] \Psi_a = 0. \quad (3.35)$$

O produto $(\Pi_1 - is\Pi_2)(\Pi_1 + is\Pi_2)$ é

$$(\Pi_1 - is\Pi_2)(\Pi_1 + is\Pi_2) = \Pi_1^2 + \Pi_2^2 + is[\Pi_1, \Pi_2]. \quad (3.36)$$

De acordo com [2], o comutador $[\Pi_1, \Pi_2]$ é

$$[\Pi_1, \Pi_2] = ieB_3. \quad (3.37)$$

Logo

$$\left[(-sa\mu_B B_3 - \varepsilon) + \frac{1}{2m} (\Pi_1^2 + \Pi_2^2 - seB_3) \right] \Psi_a = 0, \quad (3.38)$$

que implica

$$\frac{1}{2m} [\Pi_1^2 + \Pi_2^2 - seB_3 - s2ma\mu_B B_3] \Psi_a = \varepsilon \Psi_a. \quad (3.39)$$

A expressão (3.39) é a equação não relativística procurada. Basta substituir alguns termos como o magneton de Bohr

$$\mu_B = \frac{e}{2m} \quad (3.40)$$

e o campo magnético

$$eB_3 = -\frac{e\Phi_0}{2\pi} \frac{\delta(r)}{r} = -\phi \frac{\delta(r)}{r}, \quad \text{onde } \phi := \frac{e\Phi_0}{2\pi}, \quad (3.41)$$

para finalmente obter

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{1}{i} \nabla - e\vec{A} \right)^2 + \eta \frac{\delta(r)}{r} \right] \Psi_a = \varepsilon \Psi_a. \quad (3.42)$$

A constante η é

$$\eta = (1 + a)s\phi = \frac{g}{2}s\phi, \quad (3.43)$$

onde foi usada a equação (2.67) que relaciona o fator g à anomalia do momento magnético.

A expressão (3.42) é a equação não relativística do tipo Schrödinger-Pauli correspondente ao sistema em questão. A princípio a equação obtida seria válida somente para a componente Ψ_a do spinor. No entanto, de acordo com [50] a equação

correspondente à Ψ_b difere somente de uma troca $s \rightarrow -s$. Como o parâmetro s assume somente os valores ± 1 , então a equação (3.42) é suficiente para descrever o sistema.

3.2 Decomposição da função de onda

Nesta seção a função de onda Ψ_a de (3.42) é decomposta em autofunções da componente z do momento angular. Primeiramente expande-se o operador Hamiltoniano da seguinte maneira

$$\begin{aligned} 2m\varepsilon\Psi_a &= \left[\left(\frac{1}{i}\nabla - e\vec{A} \right)^2 + \eta \frac{\delta(r)}{r} \right] \Psi_a \\ &= -\nabla^2\Psi_a - \frac{e}{i}\vec{A} \cdot \nabla\Psi_a - \frac{1}{i}\nabla \cdot (e\vec{A}\Psi_a) + (e\vec{A})^2\Psi_a + \eta \frac{\delta(r)}{r}\Psi_a. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Definindo uma constante k para o termo de energia

$$k^2 = 2m\varepsilon \quad (3.45)$$

e usando o potencial de Aharonov-Bohm

$$e\vec{A} = -\frac{\phi}{r}\hat{\varphi}, \quad (3.46)$$

pode-se simplificar a equação diferencial (3.44)

$$k^2\Psi_a = -\nabla^2\Psi_a - \frac{2e}{i}\vec{A} \cdot \nabla\Psi_a - \frac{1}{i}\Psi_a\nabla \cdot (e\vec{A}) + (e\vec{A})^2\Psi_a + \eta \frac{\delta(r)}{r}\Psi_a. \quad (3.47)$$

Usando o gauge de Coulomb, discutido no apêndice B, toma-se o divergente do potencial vetorial como $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. Logo

$$k^2 = -\nabla^2\Psi_a + \frac{2\phi}{i r}\hat{\varphi} \cdot \nabla\Psi_a + \frac{\phi^2}{r^2}\Psi_a + \eta \frac{\delta(r)}{r}\Psi_a. \quad (3.48)$$

Agora a função de onda é decomposta em autofunções do momento angular. Em coordenadas polares r é o raio e φ é a coordenada angular. Deste modo escreve-

se Ψ_a como

$$\Psi_a(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(r) e^{im\varphi}. \quad (3.49)$$

As autofunções $e^{im\varphi}$ formam um conjunto linearmente independente. Portanto cada componente deve individualmente satisfazer

$$\begin{aligned} k^2 f_m(r) e^{im\varphi} = & - \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} (f_m(r) e^{im\varphi}) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} (f_m(r) e^{im\varphi}) \right\} \\ & + \frac{2\phi}{i r} \hat{\phi} \cdot \left[\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} (f_m(r) e^{im\varphi}) + \frac{\hat{\phi}}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (f_m(r) e^{im\varphi}) \right] \\ & + \frac{\phi^2}{r^2} (f_m(r) e^{im\varphi}) + \eta \frac{\delta(r)}{r} (f_m(r) e^{im\varphi}). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Derivando, obtém-se

$$\begin{aligned} k^2 f_m(r) e^{im\varphi} = & - \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{df_m(r)}{dr} + r \frac{d^2 f_m(r)}{dr^2} \right] e^{im\varphi} - \frac{m^2}{r^2} f_m(r) e^{im\varphi} \right\} \\ & + \frac{2\phi m}{r^2} f_m(r) e^{im\varphi} \\ & + \frac{\phi^2}{r^2} f_m(r) e^{im\varphi} + \eta \frac{\delta(r)}{r} f_m(r) e^{im\varphi}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

As funções exponenciais em (3.51) são comuns a todos os termos e nunca se anulam, portanto podem ser canceladas. Rearranjando os termos obtém-se

$$k^2 f_m(r) = \left[-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(m + \phi)^2}{r^2} + \eta \frac{\delta(r)}{r} \right] f_m(r). \quad (3.52)$$

Para denotar o Hamiltoniano radial efetivo em (3.52) usa-se h :

$$h := \left[-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(m + \phi)^2}{r^2} + \eta \frac{\delta(r)}{r} \right], \quad (3.53)$$

de modo que a equação (3.52) pode ser escrita simplesmente como

$$h f_m(r) = k^2 f_m(r). \quad (3.54)$$

Como visto no capítulo 2, um Hamiltoniano como h não é contínuo nem limitado, e portanto precisa ser manipulado com cuidado. O Hamiltoniano correspondente

a h , mas que exclui a singularidade do tipo delta, é denotado por h_0

$$h_0 := \left[-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(m + \phi)^2}{r^2} \right]. \quad (3.55)$$

Nas seções seguintes h será tratado como uma das possíveis extensões autoadjuntas de h_0 .

3.3 Extensão autoadjunta pelo método de Bulla-Gesztesy

Nesta seção será usada a condição de contorno de Bulla-Gesztesy para a obtenção de uma relação entre o parâmetro da extensão autoadjunta e a energia de estado ligado do sistema.

3.3.1 Hamiltoniano e condição de contorno

Para que seja possível aplicar o teorema de Bulla-Gesztesy no operador Hamiltoniano do sistema em questão, primeiramente ele precisa ser reescrito na forma dada pela equação (2.46), ou seja

$$h_\zeta = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell - 1)}{r^2} + \frac{\gamma}{r} + \frac{\alpha}{r^{-a}} + W. \quad (3.56)$$

Faz-se isso para descobrir quais são os fatores ℓ , γ , α e W correspondentes a este caso. O operador h_0 dado por (3.55) pode ser escrito desse modo através da aplicação do operador U , cujo efeito é

$$Uf(r) = r^{1/2} f(r). \quad (3.57)$$

Assim, a transformação Uh_0U^{-1} define \tilde{h}_0 :

$$\begin{aligned} \tilde{h}_0 f(r) &= Uh_0U^{-1} f(r) \\ &= r^{1/2} \left[-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(m + \phi)^2}{r^2} \right] [r^{-1/2} f(r)] \\ &= \left\{ -\frac{d^2}{dr^2} + \left[(m + \phi)^2 - \frac{1}{4} \right] \frac{1}{r^2} \right\} f(r). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Comparando as equações (3.58) e (3.56), conclui-se que \tilde{h}_0 possui a forma (3.56), com $\gamma = \alpha = W = 0$. A constante ℓ satisfaz

$$\ell(\ell - 1) = (m + \phi)^2 - \frac{1}{4}. \quad (3.59)$$

O teorema de Bulla-Gesztesy é aplicável nas situações em que o operador não é autoadjunto. Um operador da forma (3.56) não é autoadjunto quando [51]

$$\ell(\ell - 1) < \frac{3}{4}. \quad (3.60)$$

Caso contrário é essencialmente autoadjunto. Para descobrir qual é a situação do problema atual, substitui-se (3.59) em (3.60). Deste modo

$$(m + \phi)^2 - \frac{1}{4} < \frac{3}{4} \implies (m + \phi)^2 < 1. \quad (3.61)$$

Portanto nos casos em que $|m + \phi| < 1$, ou seja, $-1 < (m + \phi) < 1$, o operador não é autoadjunto, e o teorema de Bulla-Gesztesy é aplicável.

As duas soluções da equação quadrática (3.59) para ℓ são $\ell = \frac{1}{2} + |m + \phi|$ e $\ell = \frac{1}{2} - |m + \phi|$. Ambas produzem o mesmo operador, e o valor de ℓ é necessário para obter a condição de contorno correta. Opta-se por $\ell = \frac{1}{2} + |m + \phi|$, visto que é a única opção que satisfaz (2.49).

De posse de ℓ , pode-se reescrever as condições de contorno de Bulla-Gesztesy a partir das equações da seção 2.3.5. Com $\ell = \frac{1}{2} + |m + \phi|$, a condição de contorno dada por (2.48) fica

$$\begin{aligned} \zeta g_{0,\ell} &= g_{1,\ell} \\ \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{g(r)}{r^{\frac{1}{2}}} r^{|m+\phi|} &= \frac{1}{2\zeta|m+\phi|} \lim_{r \rightarrow 0^+} \left[\frac{g(r)}{r^{\frac{1}{2}}} - \left(\lim_{r' \rightarrow 0^+} \frac{g(r')}{r'^{\frac{1}{2}}} r'^{|m+\phi|} \right) \frac{1}{r^{|m+\phi|}} \right] \frac{1}{r^{|m+\phi|}}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Pode-se resumir a equação (3.62) definindo $\lambda_m := 1/(2\zeta|m + \phi|)$ e $\chi(r) := g(r)/r^{1/2}$. Deste modo escreve-se a condição de contorno de Bulla-Gesztesy (3.62) como

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \chi(r) r^{|m+\phi|} = \lambda_m \lim_{r \rightarrow 0^+} \left[\chi(r) - \left(\lim_{r' \rightarrow 0^+} \chi(r') r'^{|m+\phi|} \right) \frac{1}{r^{|m+\phi|}} \right] \frac{1}{r^{|m+\phi|}}. \quad (3.63)$$

A condição de contorno dada na equação (3.63) coincide com a obtida por Park [15] no estudo do problema de Aharonov-Bohm com potencial adicional Coulombiano. De maneira ainda mais reduzida, pode ser formulada como

$$f^{(0)} = \lambda_m f^{(1)}, \quad (3.64)$$

onde

$$f^{(0)} := \lim_{r \rightarrow 0^+} \chi(r) r^{|m+\phi|} \quad (3.65)$$

e

$$f^{(1)} := \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^{|m+\phi|}} \left[\chi(r) - f^{(0)} \frac{1}{r^{|m+\phi|}} \right]. \quad (3.66)$$

3.3.2 Determinação das energias de estado ligado

Nesta seção serão determinadas as energias de estado ligado do sistema em função do parâmetro da extensão λ_m . A equação diferencial correspondente ao Hamiltoniano h_0 é

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(m+\phi)^2}{r^2} - k^2 \right] f_m(r) = 0 \quad (3.67)$$

ou, equivalentemente

$$\left[\frac{d^2}{d(kr)^2} + \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} + 1 - \frac{(m+\phi)^2}{(kr)^2} \right] f_m(r) = 0. \quad (3.68)$$

A expressão (3.68) é a equação diferencial de Bessel. Uma das possíveis maneiras de expressar sua solução geral é por

$$f_m(r) = a_m J_\nu(kr) + b_m Y_\nu(kr), \quad (3.69)$$

onde $J_\nu(z)$ e $Y_\nu(z)$ são as funções de Bessel do primeiro e segundo tipo, respectivamente, e $\nu = |m + \phi|$.

O objetivo dos cálculos a seguir é usar a função de onda radial (3.69) e a condição de contorno de Bulla-Gesztesy (3.64) para encontrar uma expressão que correlacione os coeficientes a_m e b_m . Deste modo será relacionada a física do sistema

ao parâmetro da extensão. Primeiramente calcula-se $f^{(0)}$

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{|m+\phi|} [a_m J_\nu(kr) + b_m Y_\nu(kr)] \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \left[a_m r^{|m+\phi|} J_\nu(kr) + b_m r^{|m+\phi|} \frac{J_\nu(kr) \cos(|m+\phi|\pi) - J_{-\nu}(kr)}{\operatorname{sen}(|m+\phi|\pi)} \right]. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Como a extensão autoadjunta prescreve o comportamento do sistema nas proximidades da singularidade, usa-se a seguinte expansão assintótica de $J_\nu(z)$ para $z \rightarrow 0$ [52]:

$$J_\nu(z) \approx \left(\frac{z}{2}\right)^{|m+\phi|} \frac{1}{\Gamma(|m+\phi|+1)}. \quad (3.71)$$

Assim $f^{(0)}$ fica

$$f^{(0)} = -\frac{b_m}{\operatorname{sen}(|m+\phi|\pi)} \left(\frac{2}{k}\right)^{|m+\phi|} \frac{1}{\Gamma(1-|m+\phi|)}. \quad (3.72)$$

De maneira similar, usa-se a solução geral da equação diferencial de Bessel (3.69) para calcular $f^{(1)}$:

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^{|m+\phi|}} \left[f_m(r) - \frac{f^{(0)}}{r^{|m+\phi|}} \right] \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^\nu} \left[a_m J_\nu(kr) + b_m \frac{J_\nu(kr) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(kr)}{\operatorname{sen}(\nu\pi)} + \frac{b_m}{\operatorname{sen}(\nu\pi)} \left(\frac{2}{k}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{1}{r^\nu} \right]. \end{aligned} \quad (3.73)$$

E novamente faz-se uso da expansão assintótica da $J_\nu(z)$, dada por (3.71). Agora para simplificar (3.73):

$$f^{(1)} = a_m \left(\frac{k}{2}\right)^{|m+\phi|} \frac{1}{\Gamma(|m+\phi|+1)} + \frac{b_m}{\operatorname{sen}(|m+\phi|\pi)} \left(\frac{k}{2}\right)^{|m+\phi|} \frac{1}{\Gamma(|m+\phi|+1)} \cos(|m+\phi|\pi). \quad (3.74)$$

De posse de $f^{(0)}$ e $f^{(1)}$, é possível calcular a condição de contorno de Bulla-Gesztesy. Basta substituir (3.72) e (3.74) na equação (3.64). Portanto obtém-se a expressão

$$-\frac{b_m}{\operatorname{sen}(\nu\pi)} \left(\frac{2}{k}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} = \lambda_m \left[a_m \left(\frac{k}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + \frac{b_m}{\operatorname{sen}(\nu\pi)} \left(\frac{k}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \cos(\nu\pi) \right]. \quad (3.75)$$

O isolamento do coeficiente b_m produz uma expressão do tipo

$$b_m = -\mu_m^{(\lambda_m)} a_m, \quad (3.76)$$

onde o coeficiente $\mu_m^{(\lambda_m)}$ é dado por

$$\mu_m^{(\lambda_m)} = \lambda_m \frac{k^{2|m+\phi|} \Gamma(1 - |m + \phi|) \text{sen}(|m + \phi|\pi)}{4^{|m+\phi|} \Gamma(|m + \phi| + 1) + \lambda_m k^{2|m+\phi|} \Gamma(1 - |m + \phi|) \text{cos}(|m + \phi|\pi)}. \quad (3.77)$$

A equação (3.76) expressa a relação entre os coeficientes a_m e b_m , e depende do parâmetro da extensão λ_m . Assim a solução geral da equação diferencial de Bessel (3.69) pode ser escrita como

$$f_m(r) = a_m \left[J_\nu(kr) - \mu_m^{(\lambda_m)} Y_\nu(kr) \right]. \quad (3.78)$$

A equação (3.78) é um resultado bastante importante. Essa expressão dá a função de onda radial do sistema de Aharonov-Bohm em termos do parâmetro $\mu_m^{(\lambda_m)}$. Ela dá a relação entre a extensão autoadjunta pelo parâmetro λ_m e as soluções do sistema de Aharonov-Bohm. Da maneira como o sistema foi resolvido, λ_m é o parâmetro que controla a parte singular das soluções da equação de Schrödinger. Quando $\lambda = 0$, por exemplo, a contribuição da função singular na origem, $Y_\nu(kr)$, desaparece, e os resultados do sistema original de Aharonov-Bohm sem spin são retomados.

É fundamental enfatizar que cada escolha do parâmetro λ_m (seja número real ou infinito) descreve uma situação física diferente. Como a solução foi obtida através do teorema de Bulla-Gesztesy, qualquer dessas escolhas garante que o Hamiltoniano seja autoadjunto. Essa situação contrasta com o paradoxo encontrado no estudo do valor esperado da energia de uma partícula em um poço de potencial infinito, discutido em [26]. Lá, as condições de fronteira escolhidas $\tilde{\Psi}(\pm \frac{L}{2}) = 0$ limitam as soluções possíveis para a equação de Schrödinger, de modo a limitar o domínio do Hamiltoniano, sacrificando sua propriedade autoadjunta e causando paradoxos. Em contrapartida, na solução obtida para o problema resolvido nesse capítulo, as escolhas de λ_m não comprometem a propriedade autoadjunta do Hamiltoniano.

Resumindo o resultado obtido aqui, o que ocorreu foi uma troca: abdicou-se da liberdade de se escolher condições de contorno intuitivamente e contentou-se em fazer escolhas para o valor do parâmetro λ_m . A troca altera o domínio do Hamiltoniano

e garante que este seja autoadjunto.

Como o parâmetro λ_m aparece na função de onda, espera-se que qualquer resultado obtido a partir dessa dependa também de λ_m . Essa dependência pode ser observada, por exemplo, nas energias de estado ligado do sistema, calculadas a seguir.

No limite assintótico $r \rightarrow \infty$, as soluções da equação diferencial de Bessel podem ser expressas por [52]:

$$\begin{aligned} J_\nu(kr) &\approx \sqrt{\frac{2}{kr\pi}} \cos\left(kr - \frac{|m + \phi|\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ Y_\nu(kr) &\approx \sqrt{\frac{2}{kr\pi}} \text{sen}\left(kr - \frac{|m + \phi|\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Deste modo, a função de onda radial (3.78) fica

$$f_m(r) \approx a_m \sqrt{\frac{2}{kr\pi}} \left[\cos\left(kr - \frac{|m + \phi|\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \mu_m^{(\lambda_m)} \text{sen}\left(kr - \frac{|m + \phi|\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (3.80)$$

A forma assintótica da função de onda para o sistema de Aharonov-Bohm é [53]

$$f_m(r) \sim \sqrt{\frac{2}{kr\pi}} \cos\left(kr - \frac{|m|\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \delta_m^{\lambda_m}(k, \phi)\right) \quad (3.81)$$

onde $\delta_m^{\lambda_m}(k, \phi)$ é a diferença de fase. Comparando a equação obtida (3.80) com (3.81), conclui-se que

$$\begin{aligned} \delta_m^{\lambda_m}(k, \phi) &= \frac{\pi}{2} (|m| - |m + \phi|) + \arctan\left(\mu^{(\lambda_m)}\right) \\ &= \Delta_m^{AB}(\phi) + \theta_{\lambda_m}, \end{aligned} \quad (3.82)$$

onde $\Delta_m^{AB}(\phi) := \frac{\pi}{2} (|m| - \nu)$ e $\theta_{\lambda_m} := \arctan\left(\mu^{(\lambda_m)}\right)$.

A seguir usa-se a matriz S para calcular as energias de estado ligado. A diferença de fase $\delta_m^{\lambda_m}(k, \phi)$ pode ser usada para calcular a matriz S [16], de acordo

com a equação (2.72):

$$\begin{aligned}
S_{\phi,m}^{\lambda_m} &= e^{2i\delta_m^{\lambda_m}(k,\phi)} \\
&= e^{2i\Delta_m^{AB}(\phi)} e^{2i\theta_{\lambda_m}} \\
&= e^{2i\Delta_m^{AB}(\phi)} \left[\frac{1 + i\mu_m^{\lambda_m}}{1 - i\mu_m^{\lambda_m}} \right] \\
&= e^{2i\Delta_m^{AB}(\phi)} \left[\frac{4^\nu \Gamma(1 + \nu) + \lambda_m k^{2\nu} \Gamma(1 - \nu) \cos(\nu\pi) + i\lambda_m k^{2\nu} \Gamma(1 - \nu) \sin(\nu\pi)}{4^\nu \Gamma(1 + \nu) + \lambda_m k^{2\nu} \Gamma(1 - \nu) \cos(\nu\pi) - i\lambda_m k^{2\nu} \Gamma(1 - \nu) \sin(\nu\pi)} \right].
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Como dito na seção 2.5.2, as energias de estados ligados do sistema podem ser obtidas a partir dos polos da matriz S . Esses encontram-se na parte superior do plano complexo. Para tal iguala-se o denominador de (3.83) a 0 e efetua-se a troca $k \rightarrow i\kappa$. Desta maneira obtém-se

$$4^\nu \Gamma(1 + \nu) - \lambda_m k^{2\nu} \Gamma(1 - \nu) \cos(\nu\pi) + i\lambda_m k^{2\nu} \Gamma(1 - \nu) \sin(\nu\pi) = 0. \tag{3.84}$$

As energias de estado ligado pode ser obtida de (3.84) por intermédio da equação (3.45). Elas são

$$\varepsilon_B = -\frac{2}{M} \left[-\frac{1}{\lambda_m} \frac{\Gamma(1 + |m + \phi|)}{\Gamma(1 - |m + \phi|)} \right]^{1/|m + \phi|}, \tag{3.85}$$

para $\lambda_m < 0$. Essas energias concordam com os valores obtidos na literatura [15].

Analisando-se as energias de estados ligados obtidas, nota-se algumas coisas. Primeiramente, seja n a parte inteira do fluxo ϕ . Como os resultados obtidos são válidos somente na região $|m + \phi| < 1$, conclui-se que os estados afetados são os que satisfazem $n = -m$ ou $n = -m - 1$. Ou seja, ajustando-se o fluxo magnético pode-se selecionar quais são as energias de estado ligado disponíveis no sistema.

Como esperado, as energias de estado ligado dependem do parâmetro λ_m . Por outro lado, não foi encontrada dependência explícita entre as energias e a anomalia do momento magnético. Isso porque a informação sobre a anomalia do momento magnético aparece na constante que multiplica a delta de Dirac bidimensional no Hamiltoniano. Aqui, no entanto, esse Hamiltoniano (3.53) é tomado como extensão auto-adjunta do Hamiltoniano (3.55). Como o método parte de (3.55), ele não tem acesso direto à informação sobre o momento magnético anômalo do elétron.

A amplitude de espalhamento pode ser expressa em termos da matriz S . A

relação é

$$f_\phi(k, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2ik\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (S_{\phi,m}^{\lambda_m} - 1) e^{im\varphi}. \quad (3.86)$$

Alguns casos particulares da matriz $S_{\phi,m}^{\lambda_m}$ (equação (3.83)) com diferentes valores do parâmetro da extensão λ_m são

$$S_{\phi,m}^{\lambda_m} = \begin{cases} e^{2i\Delta_m^{AB}(\phi)}, & \lambda_m = 0 \\ e^{2i\Delta_m^{AB}(\phi)} e^{2i\pi|m+\phi|}, & \lambda_m = \pm\infty \end{cases} \quad (3.87)$$

O valor calculado para $\lambda_m = 0$ recupera o resultado do problema original de Aharonov-Bohm.

3.4 Extensão autoadjunta pelo método de Kay-Studer

Como visto anteriormente, cada valor de λ_m possui implicações físicas diferentes. Por isso, é possível relacionar λ_m às constantes físicas e à geometria do sistema. Uma maneira de fazê-lo é usando outro método de extensão autoadjunta, o de Kay-Studer, descrito na seção 2.3.6. O objetivo dessa seção é fazer essa relação.

As constantes e operadores usados aqui são os mesmos que foram definidos nas seções anteriores. Novamente o Hamiltoniano singular h dado por (3.53) será tomado como extensão autoadjunta do Hamiltoniano h_0 , expresso pela equação (3.55). Primeiramente encontra-se o subespaço de deficiência de (3.55), de acordo com o teorema de von Neumann visto na seção 2.3.4. Assim

$$h_0^\dagger f_\rho^\pm(r) = \pm ik_0 f_\rho^\pm(r). \quad (3.88)$$

Aqui k_0 é incluído por razões dimensionais, e é análogo à equação (3.45). As únicas soluções de (3.88) com quadrado integrável em $|m+\phi| < 1$ são as funções modificadas de Bessel $K_{|m+\phi|}(r\sqrt{\mp i}k_0)$. Os índices de deficiência portanto são (1, 1).

De acordo com [55], a forma geral das funções no domínio de h_0 é

$$f_\rho(r) = f_m(r) + C \left[K_{|m+\phi|}(\sqrt{-i}k_0 r) + e^{i\rho} K_{|m+\phi|}(\sqrt{+i}k_0 r) \right], \quad (3.89)$$

onde foram incluídas as soluções nos espaços de deficiência, e C é uma constante. A

função $f_m(r)$ é a função de onda radial regular na origem, com $f_m(r_0) = df_m/dr|_{r_0} = 0$.

Nas seções anteriores foi resolvido o problema de Aharonov-Bohm com campo magnético pontual, ou seja, com raio infinitamente pequeno. Aqui primeiramente usa-se um raio finito: escolhe-se um raio r_0 não nulo e faz-se uma divisão do espaço em duas regiões: $r > r_0$ e $r < r_0$. A condição de fronteira usada é a dada pela equação (2.54):

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0^+} \frac{r_0}{f_0} \frac{df_0}{dr} \Big|_{r=r_0} = \lim_{r_0 \rightarrow 0^+} \frac{r_0}{f_\rho} \frac{df_\rho}{dr} \Big|_{r=r_0} \quad (3.90)$$

onde f_0 refere-se às soluções de energia zero do Hamiltoniano h . Integrando de 0 até r_0 a equação para energia zero:

$$hf_0(r) = 0 \quad (3.91)$$

resulta em

$$\int_0^{r_0} \left(-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(m + \phi)^2}{r^2} + \eta \frac{\delta(r - r_0)}{r_0} \right) f_0 r dr = 0. \quad (3.92)$$

Ou seja

$$-\int_0^{r_0} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df_0}{dr} \right) dr + (m + \phi)^2 \int_0^{r_0} \frac{1}{r^2} f_0 r dr + \int_0^{r_0} \eta \frac{\delta(r - r_0)}{r_0} f_0 r dr = 0. \quad (3.93)$$

Para soluções regulares de f_0 , a segunda integral em (3.93) se anula. Deste modo obtém-se

$$-r \frac{df_0}{dr} \Big|_0^{r_0} = -\frac{\eta}{r_0} f_0 r \Big|_0^{r_0}. \quad (3.94)$$

No limite $r_0 \rightarrow 0^+$, a equação (3.94) torna-se

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0^+} \frac{r_0}{f_0} \frac{df_0}{dr} \Big|_{r=r_0} = \eta. \quad (3.95)$$

O lado esquerdo da equação (3.95) é o lado esquerdo da condição de contorno (3.90). Para calcular o lado direito de (3.90), substitui-se as soluções $K_{|m+\phi|}(\alpha r)$. A constante $\alpha = \sqrt{-2M\varepsilon_B}$ é usada por conveniência. Assim

$$\frac{r_0}{K_{|m+\phi|}(\alpha r_0)} \frac{dK_{|m+\phi|}(\alpha r_0)}{dr_0} = \eta. \quad (3.96)$$

A função de Bessel modificada do segundo tipo possui representação as-

sintótica

$$K_{|m+\phi|} \approx \frac{\pi}{2\text{sen}(\pi|m+\phi|)} \left[\frac{z^{-|m+\phi|}}{2^{-|m+\phi|}\Gamma(1-|m+\phi|)} - \frac{z^{|m+\phi|}}{2^{|m+\phi|}\Gamma(1+|m+\phi|)} \right]. \quad (3.97)$$

Usando a representação assintótica (3.97) pode-se reescrever (3.96) como

$$\frac{-|m+\phi|\alpha^{-|m+\phi|}r_0^{-|m+\phi|}}{2^{-|m+\phi|}\Gamma(1-|m+\phi|)} - \frac{|m+\phi|\alpha^{|m+\phi|}r_0^{|m+\phi|}}{2^{|m+\phi|}\Gamma(1+|m+\phi|)} = \eta \left[\frac{\alpha^{-|m+\phi|}r_0^{-|m+\phi|}}{2^{-|m+\phi|}\Gamma(1-|m+\phi|)} - \frac{\alpha^{|m+\phi|}r_0^{|m+\phi|}}{2^{|m+\phi|}\Gamma(1+|m+\phi|)} \right]. \quad (3.98)$$

Rearranjando os termos (3.98) e isolando α obtém-se

$$\alpha^2 = \frac{2^2}{r_0^2} \left[\frac{(\eta + |m + \phi|) \Gamma(1 + |m + \phi|)}{(\eta - |m + \phi|) \Gamma(1 - |m + \phi|)} \right]^{1/|m+\phi|}. \quad (3.99)$$

Com $\alpha^2 = -2M\epsilon_B$, obtém-se uma expressão para as energias de estado ligado do sistema:

$$\epsilon_B = -\frac{2}{Mr_0^2} \left[\frac{(\eta + |m + \phi|) \Gamma(1 + |m + \phi|)}{(\eta - |m + \phi|) \Gamma(1 - |m + \phi|)} \right]^{1/|m+\phi|}. \quad (3.100)$$

Finalmente, comparando a energia obtida aqui (3.100) com a energia obtida do método de Bulla-Gesztesy (3.85), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_m} &= -\frac{1}{r_0^2} \left(\frac{\eta + |m + \phi|}{\eta - |m + \phi|} \right) \\ &= -\frac{1}{r_0^2} \left[\frac{\eta + |m + \phi|}{\eta - |m + \phi|} \right]. \end{aligned} \quad (3.101)$$

A expressão acima relaciona λ_m a parâmetros físicos e geométricos. Como o parâmetro η é função da anomalia do momento magnético a do elétron (ou seja, $\eta = \eta(a)$), é possível expressar o parâmetro λ_m em função de a . Não foi possível obter uma relação explícita para o parâmetro da extensão autoadjunta pela aplicação isolada do método de Bulla-Gesztesy. A comparação das energias de estados ligados dos dois métodos, no entanto, permite que se expresse o parâmetro da extensão em termos da física do sistema.

Conclusão

Nesse trabalho estudou-se o efeito Aharonov-Bohm e os sistemas correspondentes, assim como suas implicações fundamentais para o entendimento da mecânica quântica.

Aqui também se estudou a extensão autoadjunta de operadores. Foi mostrada sua relevância e aplicações em sistemas físicos, principalmente na solução de problemas com Hamiltonianos singulares. Dentre as ferramentas disponíveis para o tratamento de Hamiltonianos singulares, a extensão autoadjunta é a única capaz de garantir a propriedade autoadjunta dos operadores, e portanto não fere os princípios da mecânica quântica.

Tratou-se do limite não-relativístico do sistema de elétrons que possuem momento magnético anômalo sob o efeito do potencial de Aharonov-Bohm. Nesse, deu-se ênfase aos métodos de extensão autoadjunta de operadores. Foram encontradas as energias de estado ligado usando dois métodos distintos. Através da aplicação do método de Bulla-Gesztesy, não foi possível relacionar de maneira explícita o parâmetro da extensão autoadjunta à física do sistema. Esse método, no entanto, relaciona as energias de estados ligados ao parâmetro em questão. O método de Kay-Studer relaciona as energias de estados ligados à anomalia do momento magnético, mas não ao parâmetro da extensão. A combinação de ambos os métodos, portanto, faz a relação entre a física do sistema e o parâmetro da extensão. Desta maneira, foi atingido o objetivo principal do trabalho.

Uma sugestão de trabalho futuro é a investigação da relação entre as soluções propostas por Hagen (baseadas em regularizações), e a solução baseada em extensão autoadjunta. Se a solução de Hagen é correta, espera-se que possa ser reproduzida por alguma escolha do parâmetro da extensão.

Referências Bibliográficas

- [1] AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory. **Physical Review**. v. 115, n. 3, p. 485-491. 1959.
- [2] SAKURAI, J. J. **Modern Quantum Mechanics**. Revised Edition. Addison-Wesley. p. 109-139. 1994.
- [3] PESHKIN, M.; TONOMURA, A. The Aharonov-Bohm Effect. **Lecture Notes in Physics**. Hemsbach: Springer-Verlag. 1989. 152 p.
- [4] GRIFFITHS, D. J. **Introduction to Quantum Mechanics**. 1. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall. 1995. 394 p.
- [5] CHAMBERS, R. G. Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux. **Physical Review Letters**. v. 5, n. 3. 1960.
- [6] BRUNNER, N. et al. Bell nonlocality. **Review of Modern Physics**. v. 86, p. 419. maio 2014.
- [7] HEALEY, R. Nonlocality and the Aharonov-Bohm Effect. **Philosophy of Science**. v. 64, n. 1, p. 18-41. mar 1997.
- [8] OSAKABE, N. et al. Experimental confirmation of Aharonov-Bohm effect using a toroidal magnetic field confined by a superconductor. **Physical Review A**. v. 34. ago 1986.
- [9] AHARONOV, Y.; CASHER, A. Ground state of a spin-1/2 charged particule in a two-dimensional magnetic field. **Physical Review A**. v. 19, n. 6, p. 2461-2462. jun 1979.
- [10] GERBERT, P. S. Fermions in an Aharonov-Bohm field and cosmics string. **Physical Review D**. v. 40, n. 4, p. 1346-1349. ago 1989.

- [11] HAGEN, C. R. Aharonov-Bohm scattering amplitude. **Physical Review D**. v. 41, n. 6, p. 2015-2017. mar 1990.
- [12] HAGEN, C. R. Spin dependence of the Aharonov-Bohm effect. **International Journal of Modern Physics A**. v. 6, n. 18, p. 3119-3149. 1991.
- [13] BORDAG, M.; VOROPAEV, S. Charged particle with magnetic moment in the Aharonov-Bohm potential. **Journal of Physics A: Mathematical, Nuclear and General**. v. 26, p. 7637-7649. 1993.
- [14] HAGEN, C. R. Effects of nongauge potentials on the spin- $\frac{1}{2}$ Aharonov-Bohm problem. **Physical Review D**. v. 48, n 12, p. 5935-5939. dez 1993.
- [15] PARK, D. K.; OH, J. G. Self-adjoint extension approach to the spin-1/2 Aharonov-Bohm-Coulomb problem. **Physical Review D**. v. 50, n. 12. dez. 1994.
- [16] ANDRADE, F. M.; SILVA, E. O.; PEREIRA, M. On the spin-1/2 Aharonov-Bohm problem in conical space: Bound states, scattering and helicity nonconservation. **Annals of Physics**. v. 339, p. 510-530. 2013.
- [17] ANDRADE, F. M.; SILVA, E. O.; PEREIRA, M. Physical regularization for the spin-1/2 Aharonov-Bohm problem in conical space. **Physical Review D**. v. 85. fev 2012.
- [18] GOPALAKRISHNAN, Sarang. **Self-Adjointness and the Renormalization of Singular Potentials**. 2006, 165f. Monografia - (Física matemática) - Amherst College, Amherst, 2006.
- [19] KLAUDER, J. R. Field structure through model studies: aspects of nonrenormalizable theories. **Acta Physica Austriaca**. v. 11. p. 341-387. 1973.
- [20] BEREZIN, F. A.; L. FADDEEV, D. A remark on Schrödinger's equation with a singular potential. **Soviet Mathematics Doklady**. v. 2, p. 372-375. 1961.
- [21] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. **Mathematical Methods for Physicists**. 6. ed. Elsevier. 2005. 1182 p.
- [22] WILCOX, H. J.; MYERS, D. L. **An Introduction to Lebesgue Integration and Fourier Series**. Dover. 1995. 192 p.

- [23] BRACEWELL, R. **The Fourier Transform and its applications**. 3. ed. McGraw-Hill: 1999. 640 p.
- [24] DOROBANTU, V. The postulates of Quantum Mechanics. **Quantum Computability**. v. 1. dez 2005.
- [25] GITMAN, D. M.; TYUTIN, I. V.; VORONOV, B. L. **Self-adjoint Extensions in Quantum Mechanics**. Springer. 2012. p. 9-14.
- [26] BONNEAU, G.; FARAUT, J.; VALENT, G. Self-adjoint extensions of operators and the teaching of quantum mechanics. **American Journal of Physics**. v. 69, n. 3. 2001.
- [27] **File:Infinite potential well.svg**. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Infinite_potential_well.svg. Acesso em: 10 ago 2015.
- [28] JORDAN, T. F.; **Linear Operators for Quantum Mechanics**. Mineola: Dover. 2006. 144 p.
- [29] AKHIEZER, N. I.; GLAZMAN, I. M. **Theory of linear operators in Hilbert space**. New York: Dover. 1993.
- [30] HANSEN, V. L.; **Functional analysis**. Singapore: World Scientific. 2006. 136 p.
- [31] TAYLOR, A. E. **Introduction to Functional Analysis**. New York: Wiley, 1958. 423 p.
- [32] SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. **Modern Quantum Mechanics**. 2. ed. Addison-Wesley. 2011. 550 p.
- [33] COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOE, F. **Quantum Mechanics**. Wiley-VCH. 1992. 1524 p.
- [34] SHANKAR, R. **Principles of Quantum Mechanics**. 2. ed. Plenum Press. 2011. 676 p.
- [35] GASIOROWICZ, S. **Quantum Physics**. 3. ed. Wiley. 2003. 352 p.

- [36] BALLENTINE, L. E.; **Quantum Mechanics: A Modern Development**. Wspsc. 1998. 672 p.
- [37] VON NEUMANN, J. General eigenvalue theory of Hermitian functional operators. **Math. Ann.** v. 102, p 49-131. 1929.
- [38] WEYL, H. On ordinary differential equations with singularities. **Math. Ann.** v. 68, p 220-269. 1910.
- [39] BULLA, W.; GESZTESY, F. Deficiency indices and singular boundary conditions in quantum mechanics. **Journal of Mathematical Physics**. v. 26. n 10. out 1985.
- [40] ALBEVERIO, S.; GESZTESY, F.; HØEGH-KROHN, R.; HOLDER, H. **Solvable Models in Quantum Mechanics**. 2. ed. Providence: AMS Chelsea Publishing. 2004.
- [41] EINSTEIN, A. On the electrodynamics of moving bodies. **Annalen der Physik** v. 17, p. 891-921. 1905.
- [42] SCHUTZ, B. **A First Course in General Relativity**. 2. ed. Cambridge. 2009. 393 p.
- [43] SAKURAI, J. J.; **Advanced Quantum Mechanics**. Addison-Wesley. 1967. 336 p.
- [44] DIRAC, P. A. M. The Quantum Theory of the Electron. **Proceedings of the Royal Society A**. v. 117, p. 610-624. fev 1928.
- [45] KUSCH, P.; FOLEY, H.M. Precision Measurement of the Ratio of the Atomic "g Values" in the $^2P_{3/2}$ and $^2P_{1/2}$ States of Gallium. **Physical Review**. v. 72. 1947.
- [46] **The NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty**. Disponível em: http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?gem|search_for=all!>. Acesso em: 10 nov 2015.
- [47] WEINBERG, S. **The Quantum Theory of Fields**. v. 1. Cambridge. 1995. 609 p.
- [48] E. R. BEZERRA DE MELLO. Effects of anomalous magnetic moment in the quantum motion of neutral particle in magnetic and electric fields produced by a linear source in a conical spacetime. **Journal of High Energy Physics**. v. 06, n. 016. 2004.

- [49] BORDAG, M.; VOROPAEV, S. Bound states of an electron in the field of the magnetic string. **Physics Letters B**. v. 333, p. 238-244. 1994.
- [50] THALLER, B. **The Dirac Equation**. Berlin: Springer-Verlag. 1992. 357 p.
- [51] REED, M.; SIMON, B. **Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness**. p. 159-161. London: Academic Press. 1975. 361 p.
- [52] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of Mathematical Functions**. National Bureau of Standards. 1972. 1045 p.
- [53] DE OLIVEIRA, C. R.; PEREIRA, M. Scattering and self-adjoint extensions of the Aharonov-Bohm Hamiltonian. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**. v. 33. 2010.
- [54] KAY, B. S.; STUDER, U. M. Boundary Conditions for Quantum Mechanics on Cones and Fields Around Cosmic Strings. **Communications in Mathematical Physics**. v. 139, p. 103-139. 1991.
- [55] FILGUEIRAS, C.; MORAES, F. On the quantum dynamics of a point particle in a conical space. **Annals of Physics**. v. 323, p. 3150-3157. 2008.
- [56] JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics**. 3. ed. Wiley. 1998. 808 p.
- [57] GRIFFITHS, D. J. **Introduction to Eletrodynamics**. 3. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall. 1999. 576 p.

Apêndice A - Potenciais de gauge

Como visto no capítulo 1, o efeito Aharonov-Bohm foi previsto em decorrência da introdução dos momentos invariantes de gauge no Hamiltoniano do sistema. A invariância de gauge tem origem no eletromagnetismo. O eletromagnetismo clássico é modelado pelas equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right). \quad (\text{A.4})$$

Nessas equações os campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} são as grandezas principais.

A identidade $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{K}) = 0$ para um campo vetorial bem comportado \mathbf{K} qualquer e (A.2) sugerem que o campo magnético possa ser escrito como o rotacional de um potencial vetorial:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (\text{A.5})$$

Como $\nabla \times (\nabla \Lambda) = 0$ para um campo escalar bem comportado Λ qualquer, a equação (A.5) admite a transformação

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \Lambda \quad (\text{A.6})$$

sem que o campo magnético seja afetado.

A substituição de (A.5) em (A.3) resulta em

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{A.7})$$

onde o termo entre parênteses pode ser escrito como o gradiente de uma função $-\phi$, sendo ϕ o potencial escalar. Assim, obtém-se uma expressão para o campo elétrico em termos dos potenciais:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (\text{A.8})$$

A aplicação da transformação (A.6) em (A.8) resulta em

$$\mathbf{E} = -\nabla \left(\phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (\text{A.9})$$

de modo que o campo elétrico foi afetado. Para que a transformação (A.6) não altere o campo elétrico (A.8), o potencial elétrico precisa ser transformado também:

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}. \quad (\text{A.10})$$

O conjunto (A.6) e (A.10) é chamado transformação de gauge, e a invariância dos campos sob a transformação é chamada invariância de gauge [56].

Gauge de Coulomb

O gauge de Coulomb é uma escolha de Λ de forma que o potencial vetorial satisfaça [57]

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (\text{A.11})$$

Dada uma transformação de gauge como

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla \Lambda, \quad (\text{A.12})$$

para que (A.11) seja cumprida, basta uma escolha de Λ que satisfaça

$$\nabla^2 \Lambda = -\nabla \cdot \mathbf{A}'. \quad (\text{A.13})$$

A substituição do campo elétrico (A.8) na lei de Gauss (A.1) implica

$$-\nabla^2 \phi - \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (\text{A.14})$$

Com o gauge de Coulomb, a equação acima torna-se a equação de Poisson e o poten-

cial escalar é igual ao potencial coulombiano. Portanto, o uso do gauge de Coulomb remove termos do tipo $\nabla \cdot A$ sem que seja necessário sacrificar outras propriedades dos potenciais.

Apêndice B - Componentes do tensor eletromagnético

Nesse apêndice são calculadas as componentes covariantes do tensor eletromagnético a partir das componentes contravariantes e da métrica:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Para abaixar os dois índices de $F^{\mu\nu}$ é necessário contrair com a métrica covariante duas vezes. Deste modo

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}F^{\alpha\beta}. \quad (\text{B.3})$$

A separação dos termos com índices μ e ν nulos dos somatórios implica

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0}F^{00} + \eta_{\mu i}\eta_{\nu 0}F^{i0} + \eta_{\mu 0}\eta_{\nu i}F^{0i} + \eta_{\mu i}\eta_{\nu j}F^{ij}. \quad (\text{B.4})$$

Como $F^{00} = 0$ e $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, pode-se simplificar (B.4). Assim

$$F_{\mu\nu} = (-\eta_{\mu i}\eta_{\nu 0} + \eta_{\mu 0}\eta_{\nu i})F^{0i} + \eta_{\mu i}\eta_{\nu j}F^{ij}. \quad (\text{B.5})$$

Para provar que $F_{0k} = -F^{0k}$, basta substituir $\mu = 0$ e $\nu = k$ em (B.5). Logo

$$F_{0k} = (-\eta_{0i}\eta_{k0} + \eta_{00}\eta_{ki}) F^{0i} + \eta_{0i}\eta_{kj} F^{ij}. \quad (\text{B.6})$$

Como as componentes espaciais da métrica podem ser expressas em termos do delta de Kronecker $\eta_{mn} = -\delta_{mn}$, a expressão acima fica

$$\begin{aligned} F_{0k} &= -\delta_{ki} F^{0i} \\ &= -F^{0k}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Para provar que $F_{kl} = F^{kl}$, basta substituir $\mu = k$ e $\nu = l$ em (B.5). Logo

$$F_{kl} = (-\eta_{ki}\eta_{l0} + \eta_{k0}\eta_{li}) F^{0i} + \eta_{ki}\eta_{lj} F^{ij}. \quad (\text{B.8})$$

Expressando novamente as componentes espaciais da métrica em termos do delta de Kronecker, obtém-se

$$\begin{aligned} F_{kl} &= (-\delta_{ki})(-\delta_{lj}) F^{ij} \\ &= F^{kl}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$