

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA  
Setor de Ciências Exatas e Naturais  
Programa de Pós-Graduação em Ciências  
Área de Concentração: Física

VINÍCIUS SALEM

**Estudo de Espalhamento em Sistemas Aharonov-Bohm  
em Espaço Cônico**

Ponta Grossa  
2017

Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Setor de Ciências Exatas  
Pós-graduação em Ciências/Física

**Vinícius Salem**

**Estudo de Espalhamento em Sistemas Aharonov-Bohm  
em Espaço Cônico**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências, com área de concentração em Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade

Ponta Grossa  
2017

**Ficha Catalográfica**  
**Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG**

S168 Salem, Vinícius  
Estudo de espalhamento em sistemas  
Aharonov-Bohm em espaço cônico/ Vinícius  
Salem. Ponta Grossa, 2017.  
87f.

Dissertação (Mestrado em Ciências -  
Área de Concentração: Física),  
Universidade Estadual de Ponta Grossa.  
Orientador: Prof. Dr. Fabiano Manoel de  
Andrade.

1.Efeito Aharonov-Bohm. 2.Potenciais  
eletromagnéticos. 3.Espalhamento.  
4.Topologia cônica. 5.Estados ligados.  
I.Andrade, Fabiano Manoel de. II.  
Universidade Estadual de Ponta Grossa.  
Mestrado em Ciências. III. T.

CDD: 537

## TERMO DE APROVAÇÃO

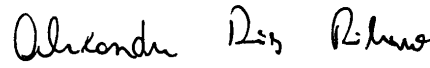
VINICIUS SALEM

### “ESTUDO DE ESPALHAMENTO EM SISTEMAS AHARONOV-BOHM EM ESPAÇO CÔNICO”.

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Ciências - Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador:

  
Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade  
Departamento de Matemática, UEPG/ PR

  
Prof. Dr. Alexandre Dias Ribeiro  
Departamento de Física, UFPR

  
Prof. Dr. José Danilo Szezech Júnior  
Departamento de Física, UEPG/ PR

Ponta Grossa, 13 de março de 2017.

# Agradecimentos

- A Deus, pelo constante beneplácito e permissão concedida a todo aquele que busca deslumbrar e aproximar-se da verdade revelada.
- À família, pelo contínuo apoio e compreensão.
- Ao Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade, pela orientação e apoio durante o curso.
- Aos colegas de pós-graduação, pela sincera amizade.
- Aos professores do departamento de Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pelos ensinamentos durante a graduação e a pós-graduação.
- À Capes, pelo apoio financeiro concedido para a realização deste trabalho.

# Resumo

No presente trabalho, procura-se explicar de forma concisa a fenomenologia do Efeito Aharonov-Bohm (AB) magnético, bem como o sistema aplicado a partículas de *spin* 1/2. Também são discutidas possíveis interpretações para o fenômeno através de uma cuidadosa revisão sobre o tema na literatura, buscando sumarizar as distintas opiniões sobre a possível realidade física dos potenciais eletromagnéticos, em especial do potencial vetor, uma vez que o foco neste trabalho concentra-se no Efeito AB magnético. Posteriormente, é estudada em detalhes a construção e solução da Equação de Dirac para o caso limite não-relativístico do elétron com anomalia do momento magnético (i.e.,  $g \neq 2$ ) em uma topologia cônica. Para isto é utilizado o método de extensão auto-adjunta de operadores na versão desenvolvida por Bulla e Gesztesy, a fim de obter expressões para as energias de estados ligados e espalhamento. O parâmetro de extensão obtido no estudo de estados ligados e espalhamento apresentou resultados físicos consistentes com a literatura em geral. Por fim, o papel da anomalia no momento magnético do elétron em proporcionar estados ligados no sistema é discutido detalhadamente, algo até então pouco abordado na literatura.

**Palavras chaves:** Efeito Aharonov-Bohm; Potenciais Eletromagnéticos; Espalhamento; Topologia Cônica, Estados Ligados.

# Abstract

In the present work, it is explained in a concise way the Aharonov-Bohm (AB) Effect in the magnetic case. Possible interpretations involving the phenomena are discussed too, through a careful review about the theme in literature, in purpose to summarize the different interpretations concerning the possible physical reality of electromagnetic potentials in physics, in special the case of the vector potential, since this work focuses in the magnetic AB effect. Also, the construction and solution of Dirac equation is studied in details for the non-relativistic limit case of an electron possessing anomalous magnetic moment (i.e.,  $g \neq 2$ ) in a conical space. For this purpose, the self-adjoint extensions method as developed by Bulla and Gesztesy is used in order to obtain expressions for bound states energies and scattering. The self-adjoint extension parameter obtained in the study of bound states and scattering showed very plausible physical results, consonant with the literature in general, as exposed in detail in chapter four. Finally, it is discussed the role of anomaly of the electron magnetic moment in providing bound states energies, a theme rarely discussed in literature since now.

**Keywords:** Aharonov-Bohm effect; electromagnetic potentials; Scattering; Conical Espace; Bound States.

# Lista de Figuras

1.1	Ilustração Esquemática do efeito Aharonov-Bohm com Campo Magnético.	18
1.2	Figura de Interferência Observada no efeito Aharonov-Bohm. Repare ao centro o deslocamento das franjas de interferência, um resultado atípico e inesperado até então. Segundo propunha o artigo original de Aharonov e Bohm, o campo magnético atua sobre os elétrons através do potencial vetor, provocando uma alteração no fator de fase da interferência. . . . .	19
1.3	Ilustração do experimento usual de duas fendas com interferência de elétrons. Este experimento foi essencial para a concepção do conceito de dualidade onda-partícula, hipótese predominante na Física atualmente. . .	22
1.4	Ilustração do experimento das duas fendas com interferência de elétrons na presença de um solenoide com fluxo magnético no seu interior. Embora o campo magnético seja nulo no exterior do solenoide, a presença do potencial vetor nessa região supostamente desloca a franja de interferência eletrônica observada. . . . .	25
1.5	Potencial Quântico para o experimento da dupla fenda sem a presença de um campo magnético. . . . .	34
1.6	Potencial Quântico para o experimento da dupla fenda com a presença de um campo magnético, e conseqüentemente do potencial vetor. Neste caso, a interação do potencial vetor com o potencial quântico revela a defasagem – e portanto uma assimetria – dos elétrons. . . . .	34
1.7	Trajetórias das partículas para o efeito AB. Segundo a versão da teoria de variáveis ocultas de Broglie-Bohm, o potencial quântico, mediante intermediação do potencial vetor, induz pontos de bifurcação responsáveis por direcionar os elétrons ao longo de suas trajetórias. Assim como ocorreu na figura (1.6), as trajetórias à esquerda na presente figura apresenta uma assimetria (indicada pelo círculo vermelho), a qual gerará a defasagem no padrão de interferência quando as partículas atingirem o anteparo. . . . .	35



2.1	Em um interferômetro do tipo Aharonov-Bohm (figura à esquerda), o campo magnético confinado no interior de um solenóide afeta o comportamento de elétrons que percorrem o exterior do mesmo. No interferômetro de fluxo de Berry (figura à direita), a intersecção cônica dos níveis de energia (conhecido como cone de Dirac) para a estrutura do Grafeno desempenha o papel do solenóide no interferômetro. . . . .	38
2.2	Na presente figura, o interior do solenóide é uma região inacessível ao elétron. Todavia, o estado da partícula representado pela função de onda incidente apresenta espalhamento ao interagir com o fluxo magnético, ainda que de forma discutível. . . . .	39

# Lista de Símbolos

$\vec{A}$ : Potencial vetor

$\phi$ : Potencial escalar

$\vec{B}$ : Campo magnético

$\vec{E}$ : Campo elétrico

$\Delta_M$ : Mudança na fase magnética

$\Delta_E$ : Mudança na fase elétrica

$\Delta_0$ : Interferência das ondas no detector na ausência de campo magnético

$\Delta$ : Interferência das ondas no detector na presença de campo magnético

$\mu_0$ : Permeabilidade magnética no vácuo

$\vec{j}$ : Densidade de corrente elétrica

$g$ : Fator-g do elétron

$h$ : Constante de Planck  $\approx 6,626 \times 10^{-34} J.s$

$\Psi$ : Spinor do elétron

$\hat{U}$ : Operador de evolução temporal

$\hat{S}$ : Matriz de espalhamento

$\delta$ : Delta de Dirac

$\mu_B$ : Magneton de Bohr

$\sigma_i$ : Matrizes de Pauli

$\partial_\mu$ : Derivada covariante de *gauge*

$\gamma^\mu$ : Matrizes de Dirac

$F^{\mu\nu}$ : Tensor eletromagnético em coordenadas cilíndricas

$\Pi$ : *Momentum* generalizado.

$h_\eta$ : Hamiltoniano de Bulla-Gesztesy

$h_0$ : Hamiltoniano livre (Sem a presença da delta de Dirac)

$h$ : Extensão do hamiltoniano livre mediante da inclusão da Delta

$\Gamma_\mu$ : Conexão de *spin*

$\phi$ : Fluxo magnético

$\alpha$ : Ângulo de declinação do cone

$s$ : *spin* do elétron

$m$ : Número quântico de *momentum* angular

$M$ : Massa do elétron

$E_b$ : Energia de estado ligado

$r_0$ : Raio do solenoide

$\theta$ : Parâmetro de extensão (notação utilizada somente no capítulo 3)

$\lambda_m$ : Parâmetro de extensão para energia de estado ligado

$\lambda_m^s$ : Parâmetro de extensão para espalhamento

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>13</b>
<b>Objetivos</b>	<b>16</b>
<b>Parte I: O Efeito Aharonov-Bohm e a Realidade Física dos Potenciais Eletromagnéticos</b>	<b>17</b>
<b>1 O Efeito Aharonov-Bohm “Puro”</b>	<b>18</b>
1.1 O Efeito Aharonov-Bohm Magnético . . . . .	18
1.2 Fenomenologia do Efeito Aharonov-Bohm . . . . .	26
1.3 Efeitos Não-Locais . . . . .	28
1.4 A Realidade Física dos Potenciais Eletromagnéticos . . . . .	30
<b>Parte II:</b>	
<b>Fundamentação Teórica; Obtenção da Energia de Estado Ligado e Espalhamento para o Elétron com Momento Anômalo em Espaço Cônico</b>	<b>36</b>
<b>2 Fundamentação Teórica</b>	<b>37</b>
2.1 A Matriz de Espalhamento ou Matriz S . . . . .	37
2.1.1 Definição da Matriz de Espalhamento . . . . .	37
2.2 A Topologia Cônica no Efeito Aharonov-Bohm . . . . .	38
2.3 Potenciais Singulares . . . . .	40
2.4 O Método da Extensão Auto-adjunta de Operadores . . . . .	41
2.4.1 Os índices de deficiência e o Teorema de Von Neumann . . . . .	43
2.4.2 O Método de Bulla-Gesztesy . . . . .	45
2.5 Partículas de Spin 1/2 . . . . .	46
2.5.1 A Equação de Pauli-Darwin . . . . .	47
2.5.2 A Equação de Dirac . . . . .	50
<b>3 O Efeito AB Em Partículas de Spin 1/2</b>	<b>54</b>
3.1 As distintas abordagens na literatura para o cálculo da função de onda . . . . .	54

<b>4 O Efeito AB com Momento Anômalo em Espaço Cônico</b>	<b>60</b>
4.1 A Equação de Dirac Para o Sistema Aharonov-Bohm em Espaço Cônico. . .	60
4.2 Decomposição da Função de Onda . . . . .	65
4.3 Extensões auto-adjuntas pelo Método de Bulla-Gesztesy . . . . .	67
4.4 Determinação das Energias de Estado Ligado . . . . .	69
4.5 Determinação da Matriz de Espalhamento . . . . .	72
<b>Conclusões</b>	<b>77</b>
<b>Perspectivas Futuras</b>	<b>79</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>80</b>

# Introdução

É fato inegável que o advento da Mecânica Quântica (MQ) no século XX surpreendeu praticamente toda a comunidade científica ao apresentar propriedades estranhas às noções clássicas dominantes na Física até então. Fenômenos como a dualidade onda-partícula, tunelamento e emaranhamento quântico exigiram uma adequação do vocabulário utilizado pelos físicos à época. Tais peculiaridades, aparentemente intrínsecas à natureza quando estudada a nível microscópico, foram preditas em teoria e posteriormente confirmadas mediante experimentação. Um caso de grande importância em Física é o denominado “efeito Aharonov-Bohm” (AB) (1, 2); este efeito (conforme será apresentado em maiores detalhes no capítulo 1) pode ser idealizado experimentalmente como um solenóide – cujo interior contém um campo magnético ( $\vec{B}$ ) – ao redor do qual passam feixes de elétrons, os quais percorrem a região externa ao solenóide até atingirem um anteparo, produzindo uma figura de interferência, fenômeno já conhecido à época. O resultado surpreendente é que, embora os elétrons percorressem uma região inacessível ao campo  $\vec{B}$ , as franjas de interferência no anteparo eram deslocadas por um fator proporcional à intensidade do fluxo magnético no interior do solenoide.

Tal fenômeno, primeiramente abordado na literatura de forma indireta em 1949 por Ehrenberg e Siday<sup>1</sup> (3), obteve atenção especial ao ser especialmente estudado e previsto teoricamente em 1959 por Bohm e Aharonov<sup>2</sup>(1). Atualmente este fenômeno ainda é alvo constante de pesquisa por parte de físicos teóricos e experimentais (4, 5), principalmente no que concerne à discussão sobre a possibilidade de existência de ações não-locais e a realidade física dos potenciais eletromagnéticos. No aspecto clássico, o papel dos potenciais estava fadados à função de meros apoiadores matemáticos para os cálculos da intensidade do campo eletromagnético. Contudo, as teorias de *Gauge* e o fenômeno AB trouxeram à tona o pertinente questionamento: A literatura têm dada a devida atenção aos potenciais eletromagnéticos? Ainda que em geral os pesquisadores afirmem consensualmente que o

---

<sup>1</sup>Werner Ehrenberg (1901-1975) e Raymond Siday (1912-1956). Através de um tratamento semiclássico, a dupla obteve os primeiros resultados teóricos sugerindo um deslocamento da franja de interferência em um anteparo devido ao potencial vetor em uma região livre de campos magnéticos (resultado típico do efeito AB).

<sup>2</sup>David Bohm (1917 – 1992) e Yakir Aharonov (1932 – ).

eletromagnetismo clássico é obra concluída<sup>3</sup>, a eletrodinâmica quântica pode fornecer interessantes lições aparentemente ignoradas quando somente o contexto clássico da teoria é abordado, como a realidade física dos potenciais.

Tão logo o artigo de Bohm e Aharonov começou a atrair a atenção dos pesquisadores, enquanto teóricos têm se debruçado sobre a polêmica questão dos potenciais, experimentalistas buscaram com afino reproduzir em laboratório o efeito até então previsto teoricamente. Chambers (7) foi um dos primeiros a comprovar existência do efeito utilizando um filamento de ferro magnetizado com cerca de  $75 \mu\text{m}$  de diâmetro para desempenhar o papel do solenoide.

Posteriormente, Marton (8) e Boersch *et. al.* (9) reproduziram o efeito em experimento semelhante, confirmando o deslocamento da franja de interferência (resultado típico do efeito AB, conforme será exposto em maiores detalhes no capítulo 1). Contudo, enquanto a existência do efeito AB vinha se confirmando através da sucessiva realização de experimentos independentes, do ponto de vista teórico o debate consistia em explicar o fenômeno em questão, o que passava por admitir ou descartar a real existência do potencial vetor, para o caso magnético. Muitas opiniões distintas emergiram na literatura ao longo das últimas décadas buscando trazer luz ao assunto, e de fato contribuíram para o aperfeiçoamento dos argumentos, fossem eles favoráveis ou contrários à hipótese dos potenciais. Não obstante, o fenômeno AB trouxe à tona uma ampla gama de implicações relacionadas às diversas áreas que envolvem pesquisas sobre teoria de espalhamento, cordas cósmicas (10) e até mesmo em Física do Estado Sólido (em estudos de redes para o Grafeno) (5, 11).

Portanto, no intento de embarcar tanto os assuntos mais fundamentais concernentes à possível realidade dos potenciais quanto os aspectos mais pragmáticos do problema, a presente dissertação é dividida em duas partes: a primeira, de cunho mais conceitual, dedicar-se-á em explicar a fenomenologia do fenômeno AB, além de apresentar uma breve discussão sobre o dilema da possível realidade física dos potenciais eletromagnéticos, apondo argumentos contrários e favoráveis a esta posição. A segunda parte, com aspecto mais formal, aplicará o método matemático da extensão auto-adjunta de operadores conforme desenvolvido por Bulla e Gesztesy (12) na Equação de Dirac para o elétron imerso em uma topologia cônica com o intuito de obter expressões para a energia de estado ligado e a matriz de espalhamento. Embora no primeiro artigo de Bohm e Aharonov sobre o tema o *spin* do elétron não tenha sido levado em consideração (para fins de simplificação), abordagens posteriores o fizeram (13, 14), ocasionando o surgimento de uma divergência do tipo delta de Dirac adicionada ao Hamiltoniano do problema. A singularidade da delta é proveniente do acoplamento Zeeman entre o campo magnético confinado no filamento de raio idealmente nulo e o *spin* do elétron. Porém, tais abordagens não levaram em

---

<sup>3</sup>Cabe ressaltar que essa opinião não é absoluta. Ver por exemplo Ferreira (6), o qual sugere algumas questões que aparecem mesmo no eletromagnetismo clássico.



conta a anomalia do momento magnético para o elétron, uma vez que o fator  $g$  para o mesmo é ligeiramente maior do que 2 (cujo valor será explicitado no segundo capítulo), conforme já demonstrado empiricamente (15). Sendo uma das propriedades físicas com maior precisão de medida na história da Física, o fator  $g$  (também denominado *momento magnético adimensional*) é responsável por caracterizar o momento magnético e o fator giromagnético de um átomo, partícula ou núcleo. Pode ser considerado essencialmente como uma constante de proporcionalidade que relaciona o momento magnético observado de uma partícula com o seu *momentum* angular. Todavia, o tema relacionado o parâmetro de extensão (oriundo do método de extensão) com a anomalia do momento magnético e as energias de estado ligado pouco fora abordado na literatura (16, 17).

Por fim, cabe a este trabalho prover a associação entre o parâmetro de extensão e as condições de contorno adaptadas a situações distintas (nas quais variam-se a topologia, o fluxo magnético e o número quântico de *momentum* angular) de maneira a relacionar estas situações com características físicas do sistema, a saber, a anomalia no momento magnético do elétron e suas possíveis consequências (*e.g.*, o surgimento de estados ligados, hipótese até então negada por parte da literatura – ver Hagen (13) *et. al.* –) A seguir, serão apresentados ao leitor os objetivos principais cumpridos ao longo do trabalho. A primeira parte tratará em explicar de concisa maneira a fenomenologia do efeito AB e suas possíveis consequências à interpretação dos potenciais eletromagnéticos. A segunda parte está focada principalmente na aplicação do método de extensão ao efeito AB com a métrica cônica.

# Objetivos

A presente dissertação visa cumprir os seguintes objetivos ao longo do texto, o qual está dividido em duas partes:

**Parte I:** Compreende o primeiro capítulo deste trabalho, e tem por objetivos:

- Apresentar a fenomenologia do Efeito Aharonov-Bohm na presença de campos magnéticos;
- Mediante revisão da literatura, reunir as principais fontes de discussões surgidas nas últimas décadas sobre as possíveis interpretações quanto ao fenômeno, confrontando opiniões de correntes contrárias;
- Introduzir ao leitor argumentos favoráveis à hipótese da ação não-local e argumentos a favor da realidade física dos potenciais eletromagnéticos.

**Parte II:** Envolve os três últimos capítulos do presente trabalho, e tem por objetivos:

- Revisar de forma sucinta a fundamentação teórica necessária para o melhor entendimento dos capítulos finais deste trabalho.
- Apresentar de forma breve os cálculos relacionados ao Efeito Aharonov-Bohm para o elétron;
- Aplicar o método da extensão auto-adjunta conforme versão desenvolvida por Bulla e Gesztesy ao problema do Efeito Aharonov-Bohm magnético para o elétron com momento anômalo na presença de uma métrica cônica;
- Relacionado ao item anterior, obter resultados para a energia de estado ligado e espalhamento, explicitando a função da anomalia do momento magnético no surgimento das energias de estado ligado, especificando o parâmetro de extensão a situações físicas específicas.

## Parte I

*O Efeito Aharonov-Bohm: Fenomenologia e  
Interpretações.*

# Capítulo 1

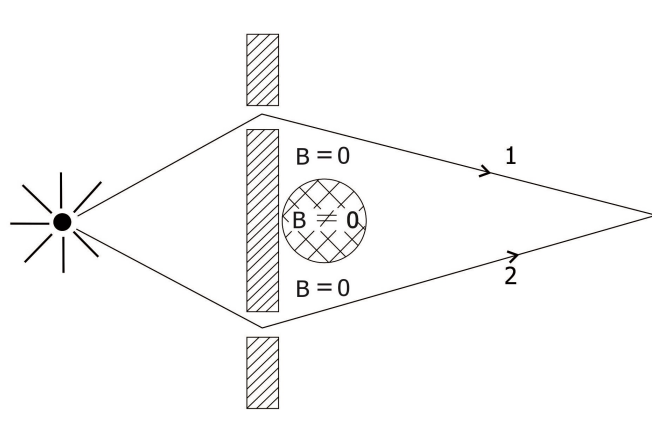
## O Efeito Aharonov-Bohm “Puro”

O efeito Aharonov-Bohm, exposto na literatura primeiramente em 1949 por Ehrenberger e Siday (3), é um fenômeno de notável importância e interesse por parte de físicos teóricos e experimentais. No presente trabalho, concentraremos atenção no efeito AB “puro”, ou seja, no caso de um solenoide (considerado infinito para facilitação dos cálculos) com a presença de um campo magnético no interior do mesmo. O fenômeno será explicado em maiores detalhes a seguir.

### 1.1 O Efeito Aharonov-Bohm Magnético

Na versão do experimento AB conforme apresentada por Feynman (18), o mesmo consiste basicamente em um arranjo de dupla fenda na qual uma bobina solenoidal é inserida entre as mesmas fendas, conforme ilustrado na figura (1.1). Então, uma corrente elétrica circula a bobina, e conseqüentemente produz um campo magnético no seu interior (de acordo com a Lei de Ampère),.

Figura 1.1: Ilustração Esquemática do efeito Aharonov-Bohm com Campo Magnético.

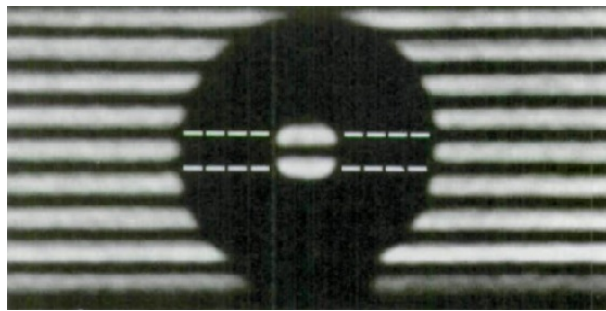


FONTE: Adaptado de Duca *et.al.* (5)

O campo magnético está presente apenas no interior do solenoide, o qual é considerado praticamente infinito em comparação às dimensões do aparato experimental (especificadas em maiores detalhes posteriormente), de modo que os efeitos de borda do campo possam ser desprezados. No experimento em questão, os elétrons ejetados da fonte  $S$  passam por duas fendas, produzindo o resultado observado na figura (1.2).

Ao passarem ao redor do solenoide, esperava-se que os elétrons não “sentiriam” a presença do campo magnético, e a força de Lorentz sobre a partícula fosse nula, uma vez que o campo produzido pela bobina estaria presente apenas no interior da mesma; Todavia, experimentalmente é possível perceber que o padrão de interferência dos elétrons é deslocado por um fator de fase proporcional à intensidade do fluxo magnético.

Figura 1.2: Figura de Interferência Observada no efeito Aharonov-Bohm. Repare ao centro o deslocamento das franjas de interferência, um resultado atípico e inesperado até então. Segundo propunha o artigo original de Aharonov e Bohm, o campo magnético atua sobre os elétrons através do potencial vetor, provocando uma alteração no fator de fase da interferência.



Fonte: Adaptado de Batelaan *et.al.* (19)

Logicamente, alguma propriedade física estaria produzindo este deslocamento. Esse resultado aparentemente paradoxal sugeriu uma revisão do eletromagnetismo clássico, uma vez que o deslocamento das franjas de interferência não era esperado. Conforme sugerido por Aharonov e Bohm, essa grandeza física é o potencial vetor.

Classicamente, o potencial vetor era considerado um auxiliar matemático pelos físicos em geral, uma vez que os campos elétricos e magnéticos podem ser obtidos através dos potenciais vetor  $\vec{A}(\vec{r})$  e escalar  $\phi(\vec{r}, t)$ .

Sabemos que quando o divergente de um campo vetorial é nulo, como ocorre na segunda equação de Maxwell (Lei de Gauss para o magnetismo) (20)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.1)$$

então, podemos escrever o campo magnético como:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (1.2)$$

onde  $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$  é o potencial vetor. Podemos substituir a equação (1.2) na Lei de Faraday, obtendo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

de modo a relacionar o campo elétrico com o potencial vetor  $\vec{A}$ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{A})}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (1.4)$$

ou seja,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \left( \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0, \quad (1.5)$$

portanto, obtemos

$$\vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.6)$$

Logo, uma vez que o rotacional do campo expresso na equação anterior é nulo, concluímos que existe um potencial escalar  $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$  que satisfaz a seguinte relação:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \varphi. \quad (1.7)$$

Dessa maneira, o campo elétrico  $\vec{E}$  pode ser escrito em termos das derivadas de ambos os potenciais  $\varphi(\vec{r}, t)$  e  $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (1.8)$$

Na equação (1.7),  $\varphi(\vec{r}, t)$  representa um potencial escalar, cujo sinal negativo à frente do gradiente é introduzido a fim de recuperarmos o caso eletrostático quando  $\vec{A}$  é independente do tempo.

Todavia, se de fato o potencial vetor for o responsável pelos resultados observados na figura de interferência, então a função até então associada aos potenciais devem ser revistas. Para uma discussão semelhante envolvendo o potencial escalar  $\varphi(\vec{r}, t)$ , o leitor pode consultar as referências (1, 21, 6).

Devido à intrigante participação do potencial vetor no efeito AB, nesta seção também discutiremos de forma mais detalhada o papel deste potencial no eletromagnetismo. Seria apenas um auxiliar no cálculo do campo magnético, ou de fato um campo “real”? Devemos considerar apenas o campo magnético  $\vec{B}$  como um campo real, uma vez que este é o responsável pela força atuante sobre uma partícula em movimento?

Na verdade, a própria ideia de um campo é bastante abstrata, uma vez que não se pode

“sentir” um campo diretamente, como se apalpa um objeto. E ainda devemos levar em conta o fato de que o próprio valor do campo magnético não é muito bem definido, já que é possível escolher um sistema de coordenadas adequado tal que o campo em dado ponto desapareça. Segundo Feynman <sup>1</sup> (18), um campo “real” é uma função matemática utilizada para evitar a ideia de ação à distância. Por exemplo, se temos uma partícula carregada em certa posição  $P$ , a mesma será afetada por outras cargas localizadas a uma certa distância de  $P$ . Então, é possível descrever essa situação como se as outras cargas criassem uma “condição” qualquer no ambiente em  $P$ . Tal condição, descrita matematicamente através dos conceitos de campos elétrico e magnético permitem a determinação do comportamento da partícula – sem nenhuma referência posterior a como aquelas condições surgiram. Simplificadamente, dizemos que se as outras cargas que interagem com a partícula em  $P$  forem alteradas, mas as condições em  $P$  descritas pelos campos magnético e elétrico permanecerem, então o movimento da carga será o mesmo. Ou seja, nos termos acima apresentados, um campo “real” poderia ser considerado como um conjunto de números especificados de tal maneira que *o que ocorre em um ponto* depende apenas dos números *naquele ponto*. Seguindo esse raciocínio, Feynman considera que não é necessário saber o que ocorre em outras regiões além do ponto  $P$ .

Partindo dessa discussão, devemos analisar agora se o potencial vetor pode ser classificado como um campo “real” ou não. A partir da equação (1.1), obtemos a seguinte relação para o potencial vetor através da transformação de *gauge*:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda. \quad (1.9)$$

Isso significa que o potencial vetor não é único, i.e., ele pode ser mudado adicionando-se a ele o gradiente de qualquer escalar sem que ocorra qualquer mudança nas forças sobre as partículas, e isto é conveniente em muitos casos. Entretanto, deste fato não podemos simplesmente concluir que o potencial vetor não tem uma realidade física. Assim como na eletrostática o potencial elétrico é usado para cálculo do campo elétrico, para o magnetismo é possível utilizar a seguinte integral vetorial para calcular o potencial vetor

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} d^3\vec{r}, \quad (1.10)$$

que contém obviamente três integrais. Além disso, teríamos que tomar o rotacional de  $\vec{A}$  para obter o campo magnético  $\vec{B}$ , e esse procedimento nem sempre é trivial. Muitas vezes podemos utilizar a Lei de Biot-Savart como a maneira mais simples de calcular o campo  $\vec{B}$  diretamente:

---

<sup>1</sup>Richard Philips Feynman (1918-1988), prêmio Nobel de Física (1965) por suas contribuições ao desenvolvimento da Teoria da Eletrodinâmica Quântica.

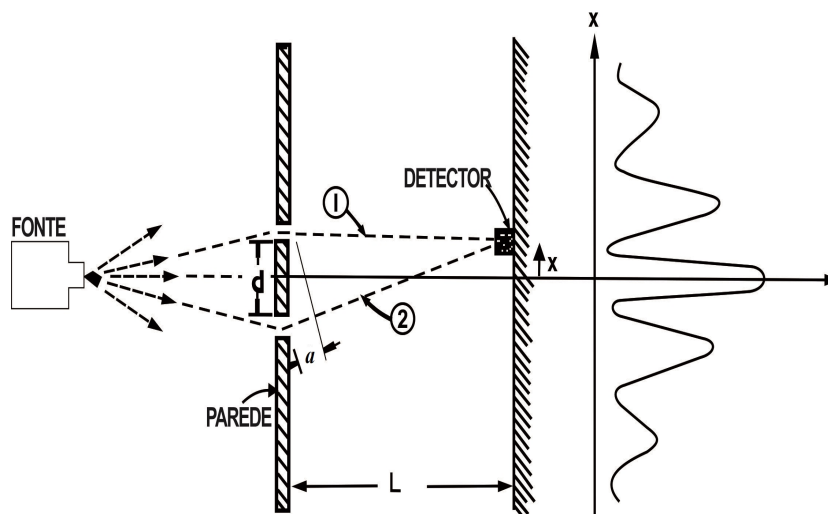
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}. \quad (1.11)$$

Em Mecânica Quântica, sabemos que o conceito de trajetória é substituído pelo de amplitude de probabilidades. Nessas amplitudes existem comprimentos de onda relacionados aos *momenta* e frequências que estão relacionadas com as energias das partículas, de acordo com as relações de Einstein e De Broglie.

Logo, os *momenta* e as energias desempenham um papel fundamental em Mecânica Quântica, pois exercem influência sobre as fases das funções de onda. Assim ao invés de “força” analisamos as formas nas quais as interações alteram o comprimento de onda. Devido ao papel primordial das grandezas *momentum* e energia, os potenciais vetor e escalar também proporcionam uma maneira direta de introduzir efeitos eletromagnéticos nas descrições da MQ. Recorramos ao famoso experimento da fenda dupla com interferência de elétrons, presente em todo livro introdutório sobre o assunto.

Nesse experimento, elétrons com a mesma energia são emitidos da fonte em direção ao anteparo com duas fendas estreitas. Além do anteparo, existe uma tela com um detector móvel, responsável por medir a taxa (I) na qual os elétrons atingem a tela a uma distância  $x$  do eixo de simetria. A taxa é proporcional à probabilidade de um elétron especificamente atingir certa região da tela. Agora, convém retornarmos ao experimento de interferência eletrônica exposto anteriormente para analisá-lo em maiores detalhes. Como já é conhecido, o fenômeno da interferência das duas amplitudes (uma de cada fenda) é o responsável pela forma da distribuição de probabilidade observada na figura (1.3).

Figura 1.3: Ilustração do experimento usual de duas fendas com interferência de elétrons. Este experimento foi essencial para a concepção do conceito de dualidade onda-partícula, hipótese predominante na Física atualmente.



FONTE: Adpatado de Feynman (18).



Conforme o leitor pode consultar em (18) para maiores detalhes, a interferência entre as duas ondas depende da sua diferença de fase. Ou seja, se escrevermos as amplitudes na forma  $C_1 e^{i\phi_1} + C_2 e^{i\phi_2}$ . Então, sendo  $L$  a distância entre a tela e as fendas e  $a$  a diferença nos comprimentos dos caminhos de elétrons passando através das duas fendas, a diferença de fase  $\Delta_0$  será (na ausência de campos magnéticos ou elétricos)

$$\Delta_0 = a \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (1.12)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda da variação espacial da amplitude de probabilidade. Se considerarmos  $x \ll L$ , então podemos escrever a distância  $a$  e a fase  $\Delta_0$  nas respectivas formas:

$$a = \frac{x}{L} d \quad (1.13)$$

e

$$\Delta_0 = \frac{x}{L} \frac{2\pi d}{\lambda}. \quad (1.14)$$

Repare que caso  $x = 0$ , a diferença de fase  $\Delta_0$  também é nula, e as ondas estão em fase, de modo que a probabilidade é máxima. Todavia, caso  $\Delta_0 = \pi$ , as ondas estarão fora de fase, a interferência será destrutiva, e conseqüentemente a probabilidade tem um mínimo.

Agora convém descrever como a influência do campo magnético irá afetar as amplitudes de probabilidade. De acordo com Feynman (18) a fase da amplitude de uma partícula que segue por qualquer fenda é alterada pela presença do campo magnético, por uma quantidade igual a integral do potencial vetor ao longo da mesma trajetória, multiplicada pela carga da partícula sobre a constante de Planck. Matematicamente, essa mudança na fase magnética pode ser expressa como

$$\Delta_M = \frac{q}{\hbar} \int \vec{A} \cdot d\vec{s}, \quad (1.15)$$

cujo análogo elétrico é escrito na seguinte forma

$$\Delta_E = -\frac{q}{\hbar} \int \phi dt. \quad (1.16)$$

Logo, nota-se que na presença de campos magnéticos, a fase da onda incidente é acrescida do valor da integral (1.15). É importante ressaltar que as expressões acima são equivalentes à equação clássica de Lorentz  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  e continuam válidas para campos dinâmicos.

Conforme já mencionado, a interferência nas ondas determinará onde estarão os máximos de probabilidade. Se denominarmos  $\Phi_1$  a fase da onda que segue a trajetória pela

fenda 1 e  $\Phi_1(B = 0)$  a fase sem o campo magnético, então, ao ligarmos o campo, a fase  $\Phi_1$  poderá ser escrita como

$$\Phi_1 = \Phi_1(B = 0) + \frac{q}{\hbar} \int_{(1)} \vec{A} \cdot d\vec{s}, \quad (1.17)$$

e analogamente, para a fase da onda que segue a trajetória pela fenda 2,

$$\Phi_2 = \Phi_2(B = 0) + \frac{q}{\hbar} \int_{(2)} \vec{A} \cdot d\vec{s}. \quad (1.18)$$

Portanto, a interferência ( $\Delta$ ) das ondas no detector depende da defasagem escrita como:

$$\Delta = \Phi_1(B = 0) - \Phi_2(B = 0) + \frac{q}{\hbar} \int_{(1)} \vec{A} \cdot d\vec{s} - \frac{q}{\hbar} \int_{(2)} \vec{A} \cdot d\vec{s}, \quad (1.19)$$

onde a diferença de fase sem o campo é justamente o termo  $\Delta_0$  expresso na equação (1.14). As integrais acima descritas para  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  podem ser condensadas em uma integral para um caminho fechado correspondentes às fendas 1 e 2 da seguinte maneira:

$$\Delta = \Delta_0(B = 0) + \frac{q}{\hbar} \oint_{(1-2)} \vec{A} \cdot d\vec{s}. \quad (1.20)$$

Esta equação mostra como o movimento das partículas é alterado pelo campo magnético, e permite calcular as novas posições para os máximos e mínimos de interferência. Um ponto bastante interessante surge a esta altura da discussão: conforme já observado, o potencial vetor  $\vec{A}$  possui certa arbitrariedade, i.e., duas funções distintas  $\vec{A}$  e  $\vec{A}'$  podem ser escolhidas de modo que as mesmas venham a diferir por um gradiente de uma função escalar e ainda assim representem o mesmo campo magnético, uma vez que o rotacional do gradiente é sempre igual a zero. Logo, se substituirmos  $\vec{A}$  por  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$ , a integral de caminho adquirirá a forma seguinte:

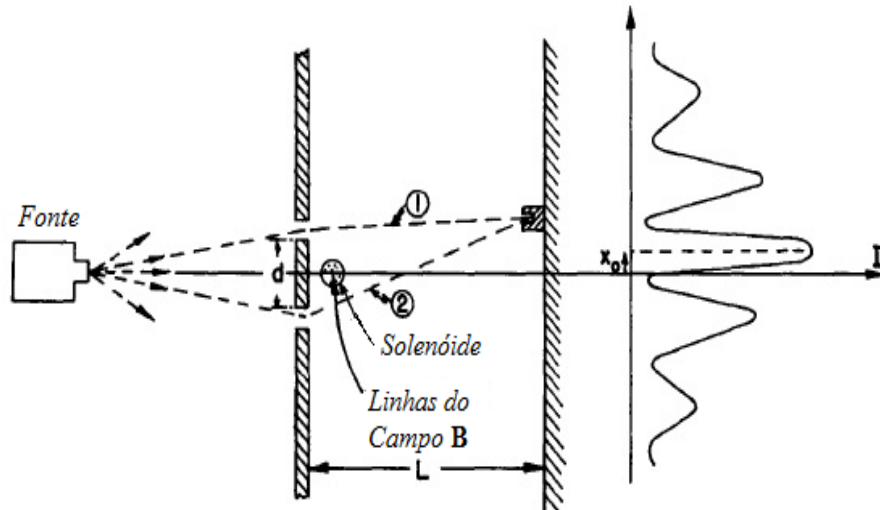
$$\oint_{(1-2)} \vec{A}' \cdot d\vec{s} = \oint_{(1-2)} \vec{A} \cdot d\vec{s} + \oint_{(1-2)} \vec{\nabla}\Lambda \cdot d\vec{s}. \quad (1.21)$$

Porém, de acordo com o Teorema de Stokes, a integral da componente tangencial de um gradiente ao longo de uma trajetória fechada é igual a zero, então tanto  $\vec{A}$  quanto  $\vec{A}'$  fornecem as mesmas diferenças de fase e conseqüentemente os mesmos efeitos de interferência quânticos.

Se retornarmos à definição dada anteriormente de campo “real” como aquele campo que não age à distância sobre uma partícula, mas considerarmos um campo com raio de atuação extremamente pequeno, de modo que a ação direta do mesmo sobre qualquer partícula seja ineficaz. Como no efeito AB, o campo magnético  $\vec{B}$  no exterior do solenoide é definitivamente nulo, mas ainda há influência no movimento dos elétrons que

percorrem o exterior do cilindro. Embora classicamente isso seja impossível pois a força depende apenas de  $\vec{B}$ , quanticamente a interferência dos elétrons é afetada por outro campo presente fora do solenoide. Consideremos a figura abaixo:

Figura 1.4: Ilustração do experimento das duas fendas com interferência de elétrons na presença de um solenoide com fluxo magnético no seu interior. Embora o campo magnético seja nulo no exterior do solenoide, a presença do potencial vetor nessa região supostamente desloca a franja de interferência eletrônica observada.



FONTE: Adaptado de Feynman (18).

Comparando com a figura (1.3), na ausência de corrente elétrica percorrendo o solenoide, não há  $\vec{B}$  ou  $\vec{A}$  e obtemos o padrão de interferência da primeira figura.

Contudo, se houver um campo  $\vec{B}$  no interior do solenoide, certamente haverá um campo  $\vec{A}$  no exterior do mesmo, proporcionando uma diferença de fase proporcional à circulação do potencial vetor no exterior do cilindro, e conseqüentemente o padrão de máximos e mínimos será deslocado para outra posição. Para  $\vec{B} = 0$  fora do cilindro, devemos ter  $\vec{A}$  constante, e para cada ponto de chegada temos a mesma mudança na fase - e isso corresponde a deslocar todo o padrão de interferência por uma quantidade  $x_0$ , a qual podemos calcular através das equações anteriores (1.15) e (1.16) de modo a obter:

$$x_0 = -\frac{\lambda L}{2\pi d} \frac{q}{\hbar} \oint_{(1-2)} \vec{A} \cdot d\vec{s}. \quad (1.22)$$

O padrão obtido é o observado na figura (1.2). Conforme já abordado, o experimento referente ao efeito AB não é simples de ser reproduzido, uma vez que o comprimento de onda dos elétrons é muito pequeno e o aparato deve ter uma escala minúscula para observar o deslocamento da interferência.

Além disso, as fendas devem estar muito próximas, o que implica na utilização de um solenoide extremamente pequeno. Referente a isso, alguns cristais de ferro crescidos na forma de filamentos muito finos e longos (em inglês são denominados *whiskers*) ao serem

magnetizados podem ser utilizados como mini-solenoides, nos quais o campo no exterior é inexistente, exceto próximo às extremidades.

Portanto, de acordo com o sentido dado nesta seção para campo “real”, podemos afirmar que o campo  $\vec{A}$  é “real”, uma vez que o campo magnético  $\vec{B}$  é nulo fora do cilindro, que é justamente a região por onde passam os elétrons. Logo, o campo magnético simplesmente não pode agir diretamente sobre estas partículas, mas o potencial vetor é capaz.

Assim, a menos que queiramos assumir a difícil posição de que um campo é capaz de agir a distância sobre partículas, necessitamos utilizar o potencial vetor em nossa análise do fenômeno em questão. A partir desta interessante análise, concluímos que o potencial vetor, que aparece explicitamente na MQ, produz o equivalente a uma força clássica de Lorentz, assim como no caso quântico o que realmente importa é a interferência entre as partículas, e não o conceito de trajetória.

Ainda de acordo com Feynman (18), na teoria mais geral da eletrodinâmica quântica (QED), os potenciais vetor e escalar são as quantidades fundamentais em um conjunto de equações que substitui as equações de Maxwell. Ou seja, os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  estão desaparecendo lentamente da expressão moderna das leis físicas, enquanto os potenciais  $\phi$  e  $\vec{A}$  os estão substituindo.

Após a explanação anterior, nota-se que o efeito AB é de natureza puramente quântica, i.e., não há análogo clássico que permita uma descrição física facilmente adaptável ao senso comum (*e.g.*, o mesmo ocorre no estudo do *spin* do elétron). De certa maneira, isto colabora para a divergência de opiniões acerca da correta explicação para o presente caso. As múltiplas argumentações que tentam explicar este fenômeno, assim como as consequências que cada uma implicaria em Física, serão apresentadas em maiores detalhes adiante.

## 1.2 Fenomenologia do Efeito Aharonov-Bohm

Nesta etapa da dissertação, é conveniente apresentar ao leitor alguns aspectos fenomenológicos concernentes ao efeito AB (22).

- **Deslocamento de fase na franja de interferência:** O mais intrigante resultado do experimento relacionado ao efeito AB é o deslocamento da franja de interferência devido à presença do campo magnético ou elétrico.
- **Estabilidade do anteparo de interferência:** Boyer (23) mostrou que o invólucro do anteparo do padrão de interferência é imóvel, mesmo quando o padrão de interferência apresenta o deslocamento, pois assim o faz sem perturbar o anteparo como um todo, garantindo a confiabilidade do aparato experimental no que tange à sua estabilidade.

- **O deslocamento de franjas de interferência independe da efetividade da blindagem do campo magnético:** Desde sua descoberta, o efeito AB foi observado em diversas ocasiões (24). Se o deslocamento dos máximos e mínimos de interferência de alguma forma fossem afetados pelo vazamento do fluxo de campo, observar-se-ia uma relação inversa de proporcionalidade entre a efetividade na blindagem do campo e o deslocamento das franjas de interferência; todavia, esta hipótese jamais fora observada.
- **O deslocamento persiste mesmo com blindagens quase ideais:** Na tentativa de aperfeiçoar o experimento original, Tonomura (25) utilizou diversas camadas de blindagem, entre elas revestimentos com cobre e supercondutores, e de fato concluiu que não há “vazamento” de campo suficiente para considerar o mesmo responsável diretamente pelo efeito observado no anteparo.

### 1.3 Efeitos Não-Locais

Uma das possíveis explicações para o efeito AB envolve a hipótese da não-localidade, defendida por diversos pesquisadores atualmente. Segundo estes, os campos exercem influência sobre as partículas ainda que os mesmos não as “toquem” diretamente, agindo de forma não-local sobre estas, produzindo o intrigante fenômeno observado. Dentre os argumentos apresentados a favor desta interpretação, cabe destacar duas referências:

- **Opinião de Greenberger acerca da não-localidade:** Greenberger (26) é um dos autores que não acredita na possibilidade de que o potencial vetor tenha realidade física, e portanto este não é o responsável pelo fenômeno em questão (27). De acordo com o mesmo, o efeito AB é um fenômeno geométrico para uma topologia quadridimensional que age de forma não-local sobre as partículas. Greenberger também rejeita a tentativa feita por autores como Boyer (28) em explicar o efeito Aharonov-Bohm classicamente (26).
- **Argumentos de Aharonov acerca da não-localidade:** No artigo publicado em 1984 (1), Aharonov adotou a interpretação da não-localidade dos campos na tentativa de explicar o efeito AB, e conseqüentemente rejeitou a hipótese da realidade física dos potenciais. Em um recente trabalho, Aharonov tornou a defender a mesma hipótese, ao alegar que o efeito AB ocorre de forma instantânea e não-local (29).

Segundo o mesmo, os fenômenos não-locais e os efeitos topológicos desempenham um importante papel em diversas áreas da Física; Aharonov também afirma que além de fornecer um exemplo particularmente claro da não-localidade, o efeito AB é comum a todas as teorias de *gauge*. Além disso, Aharonov afirma que a principal diferença entre as duas hipóteses (a que advoga a favor da ação não-local dos campos e a que defende a ação direta dos potenciais) reside no fato de que a não-localidade possibilitaria a obtenção de informação através de mensurações independentes em duas regiões do sistema. No segundo caso isto não seria possível.

Aharonov também apresenta alguns argumentos na tentativa de defender a hipótese da não-localidade dos campos e refutar a hipótese da realidade física dos potenciais; entre estes, estão:

1. A arbitrariedade do potencial vetor em relação ao *gauge* escolhido;
2. Supostos “vazamentos” de campo não são suficientes para produzir o deslocamento de fase observado;
3. A função de onda não deve possuir múltiplos valores;
4. As equações não-lineares da hidrodinâmica, aparentemente locais, ocultam efeitos não-locais.

O argumento final a favor da ação não-local dos campos eletromagnéticos provém da teoria do espalhamento. Se o experimento AB é considerado um caso de espalhamento, as partículas que atingem o solenoide podem passar normalmente ao outro lado, serem defletidas e continuarem o percurso em direção ao anteparo, ou simplesmente serem refletidas à direção oposta.

Todavia, através de cálculos convencionais da teoria do espalhamento, Aharonov percebeu que o espalhamento das partículas ocorre mesmo no caso em que o raio do solenoide tende a zero, em contraste com o que realmente aconteceria em um típico experimento envolvendo espalhamento, onde a taxa de partículas espalhadas desaparece quando as dimensões do alvo são reduzidas a zero, uma vez que não há colisões.

Entretanto, no caso do efeito AB, os cálculos realizados mediante a teoria de espalhamento prevêm o fenômeno mesmo quando as colisões possuem uma probabilidade quase nula de ocorrer. Este fato têm levado muitos Físicos, a exemplo de Aharonov, à conclusão imediata que o efeito AB é causado por uma ação não-local.

Porém, cabe ressaltar que este argumento implica um ataque à possível explanação baseada em diretas colisões das partículas com o solenoide (em uma linguagem talvez inconvenientemente clássica), mas não fornece refutações plausíveis contra a visão realista dos potenciais eletromagnéticos.

## 1.4 A Realidade Física dos Potenciais Eletromagnéticos

Na literatura menos recente – referente a década de 1970 – (e portanto, antes do amadurecimento das teorias quânticas de campo), autores como Vaidman (30) e mais especificamente Bocchieri *et.al.* (31) equivocadamente atribuíram uma origem puramente matemática ao efeito AB, ao associar a componente  $A_\varphi$  do potencial vetor com o termo referente ao fluxo magnético produzido pelo solenoide, e, ao desconsiderar *a priori* a validade física do potencial vetor, o mesmo conclui que o resultado obtido não possui realidade física. Além disso, ao alterar a representação do operador *momentum* para justificar uma arbitrariedade de *gauge*, conforme notado em (32) por Breiteneker, Bocchieri não leva em conta a influência do domínio do operador em questão sobre o seu respectivo espectro, algo sumariamente importante na aplicação de operadores do Hamiltoniano, conforme será abordado brevemente no capítulo 2.

Por outro lado, desde a investigação do fenômeno no artigo original (1) até a literatura mais recente, diversos autores têm defendido veementemente a veracidade física do potencial vetor na produção do efeito Aharonov-Bohm, pautados inclusive em argumentos filosóficos, como é o caso de Bohm (33), Healey (34), Philippidis *et.al.* (35), Leeds (36) e Bunge (37). Bunge<sup>2</sup> defende simplesmente a inexistência de paradoxos na formulação dos potenciais na eletrodinâmica. No que concerne à utilização do *gauge* na formulação do potencial vetor, em uma publicação que pode ser considerada a continuação do artigo original sobre o efeito AB (1, 8), Bohm e Aharonov propuseram uma explanação física na tentativa de justificar a arbitrariedade de *gauge* fisicamente. Segundo os mesmos, deve ser possível definir uma diferença física entre dois estados quânticos que diferem apenas por uma transformação de *gauge*. Ou seja, em um sistema contenedor de um número indefinido de partículas carregadas, (i.e., uma superposição de estados de cargas totais distintas), um novo operador Hermitiano, essencialmente uma variável de ângulo, pode ser introduzida, a qual é relacionada com a densidade de carga e deve gerar um significado ao *gauge*.

Sob uma perspectiva realista (38), Bunge reafirma a veracidade física dos potenciais na eletrodinâmica quântica, e vai ainda além ao argumentar que a teoria eletromagnética construída em termos dos potenciais é mais forte do que se baseada nos campos de intensidade. Bunge inicia seu argumento citando Konopinski (39), o qual mostrou que a o potencial vetor  $\vec{A}$  pode ser mensurado fisicamente diretamente. Segundo Konopinski, o potencial vetor está associado a “um momentum de campo disponível para conversão em momentum cinético da matéria carregada”, sugerindo (a exemplo de outros físicos que também vêm afirmando o mesmo na literatura) que as equações para os potenciais são mais fundamentais do que as equações de Maxwell para os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  – mas

---

<sup>2</sup>Mário Bunge (1919 –). Físico e estudioso da filosofia da ciência, Bunge defende o realismo científico como a abordagem filosófica mais apropriada à formulação e interpretação das teorias físicas.



(conforme ressalva Konopinski) apenas porque os potenciais representam de forma mais direta a interação energia-momentum através dos quais os campo e cargas são observados (39). Assim como Feynmann (18), Bunge acredita que uma teoria eletromagnética em termos dos potenciais (POT) é mais forte que a correspondente teoria formulada em termos das intensidades de campo (INT), pois a primeira opção revela um aspecto do campo eletromagnético não abarcado pela teoria INT, uma vez que o fenômeno de interferência observado no efeito AB para uma partícula carregada ocorre fora da presença do campo magnético (37). Bunge reconhece a evidência experimental para o assim chamado efeito Aharonov-Bohm, recordando que a mensurabilidade de uma propriedade é suficiente mas não necessária para sua realidade física. Em qualquer evento, a observabilidade é uma propriedade conjunta do sistema aparato/objeto, e tal sistema não pode ser construído ou inteligido sem o auxílio de indicadores.

Afinal, ao contrário do que a ingênua filosofia operacionalista propõe (ao afirmar que um símbolo adquire significado físico apenas após uma definição operacional), o significado precede a operação – afinal, o campo elétrico “E” possui um significado físico antes mesmo de se prescrever um procedimento para medi-lo, uma vez que as mensurações só nos permitem determinar um número finito de valores de uma função, de modo que, longe de atribuir significados, a mensuração apenas os pressupõem (38).

Logo, segundo os autores acima citados, não é de modo algum descabido admitir uma realidade física para o potencial vetor, ao invés de atribuir ao mesmo apenas uma função matemática auxiliar. Aharonov (a princípio) e Bohm não descartaram a perspectiva realista em relação aos potenciais na Eletrodinâmica Quântica, pelo contrário; Na referência (40), ambos argumentam que uma formulação da mesma teoria em termos de ações não-locais e sem a realidade física dos potenciais não era possível até o momento.

Em (35), ao tentar explicar o fenômeno AB em termos do potencial vetor, Bohm introduz a ideia de uma teoria quântica em termos da interpretação de trajetórias de partículas sujeitas a um “potencial quântico”  $Q$ . Segundo ele, o potencial vetor agiria como um intermediário entre a linha de fluxo magnético e o potencial quântico, produzindo o efeito de deslocamento da franja de interferência observada no anteparo. A noção de um potencial quântico foi desenvolvida a partir da formulação Broglie-Bohm da Mecânica Quântica, a qual postula a existência do potencial atuante sobre a partícula, guiando a mesma em sua trajetória. Na verdade, ao sugerir a noção de um potencial desta natureza – também denominado de “potencial informacional” Bohm aprimorou a ideia de “onda-piloto” proposta por De Broglie<sup>3</sup>; Nessa argumentação (também defendida em (41)), a equação de onda é reescrita na forma polar usando a função de onda como  $\psi = Re^{i\frac{S}{\hbar}}$ , onde  $R$  representa amplitude da função de onda e  $\frac{S}{\hbar}$  é o fator de fase, relacionado de certa forma

---

<sup>3</sup>Louis-Victor-Pierre-Raymond (1892-1987), importante físico francês que inicialmente elaborou uma teoria de variáveis ocultas baseada no conceito de “onda-piloto”, a qual supostamente guiaria a partícula em sua trajetória determinística e existiria independentemente do observador, coadunando com a hipótese realista.

à ação. Desta forma, a equação de Schrödinger<sup>4</sup> assume uma parte imaginária (referente à equação da continuidade), dada por:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{1}{2M} \left[ R\nabla^2 S + 2\nabla R \nabla S \right], \quad (1.23)$$

e outra parte real, reproduzindo a equação de Hamilton-Jacobi para o caso quântico, isto é:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = - \left[ \frac{|\nabla S|^2}{2M} + V + Q \right]. \quad (1.24)$$

Deve-se notar que a equação (1.24) difere do caso clássico apenas pela adição do termo  $Q$ , que representa o já citado potencial quântico de Bohm, e é escrito como:

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\nabla^2 R}{R}. \quad (1.25)$$

Logo, no limite clássico em que  $\hbar \rightarrow 0$ , a função  $S$  (a ação estendida ao domínio quântico) é solução da equação clássica de Hamilton-Jacobi. Nas referências (35) e (41), os autores apresentam algumas figuras relacionadas à teoria de variáveis ocultas mediante o uso do potencial quântico como condutor das trajetórias da partícula. De acordo com a concepção Bohmiana, as “incertezas” da MQ são flutuações objetivas que podem ser explicadas em termos de causas sem recorrer às noções subjetivistas da interpretação de Copenhagen (38). Assim, de acordo com a proposta de Bohm (42), as flutuações seriam ocasionadas por partículas sub-atômicas, até então inobservadas, que atuariam de forma semelhante ao das moléculas de ar responsáveis pela causa dos movimentos brownianos de partículas de poeira ou fumaça. Então, essas entidades seriam descritas por “variáveis ocultas”<sup>5</sup>, isto é, variáveis não-estocásticas (por conseguinte que não se espalham) do tipo clássico. Embora interessante, o programa Bohmiano que visava construir teorias de nível mais profundo pouco atraiu a atenção da comunidade científica, bastante influenciada à época pela interpretação de Copenhagen (43). A seguir são reproduzidas as figuras (1.5) e (1.6), para título de comparação apenas, da relação entre potencial quântico e das trajetórias destas partículas:

É interessante notar que, na abordagem realista de Broglie-Bohm, o potencial quântico  $Q$  afeta as partículas através do potencial vetor  $\vec{A}$ , que age como um mediador guiando os elétrons em suas respectivas “trajetórias”. Conforme afirmaram Bohm e Hiley em (44), o potencial quântico pode proporcionar pontos de bifurcação instáveis – ver figura (1.7)– que separam classes de trajetórias pelos quais os elétrons prosseguem, de acordo com

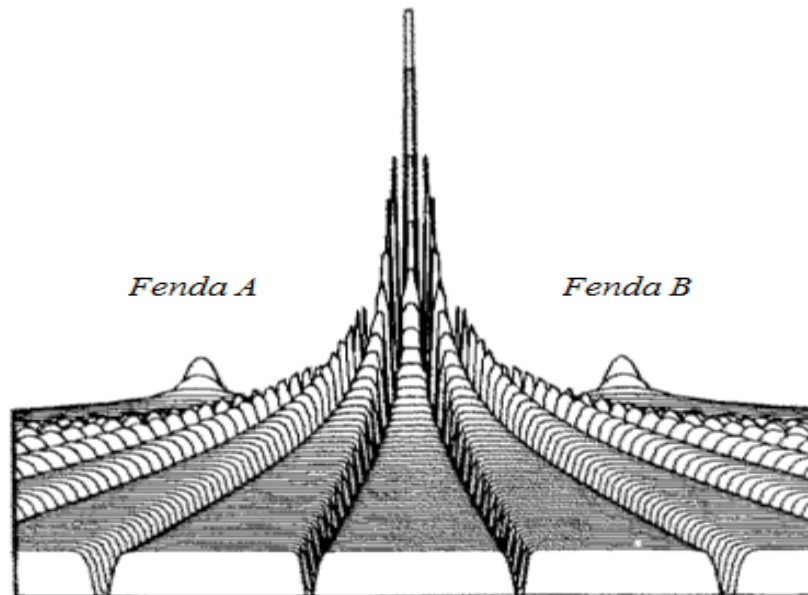
<sup>4</sup>Erwin R. J. Alexander Schrödinger (1887-1961), físico teórico austríaco, cuja equação central da Mecânica Quântica recebeu o seu nome, pela qual recebeu o Nobel de Física em 1933.

<sup>5</sup>Segundo Bunge (38), o uso de “oculto” pelo físico é incorreto, uma vez que todas as variáveis dinâmicas das teorias quânticas são ocultas no sentido epistemológico, pois dizem respeito a microsistemas e não representam propriedades acessíveis aos sentidos.

as fendas em que os mesmos incidem. Isto explica como a medição seria possível sem recorrermos para o “colapso” da função de onda, e consequentemente como toda a sorte de processos quânticos (*e.g.*, a transição entre estados e emaranhamento) são capazes de ocorrer sem a necessidade do observador humano.

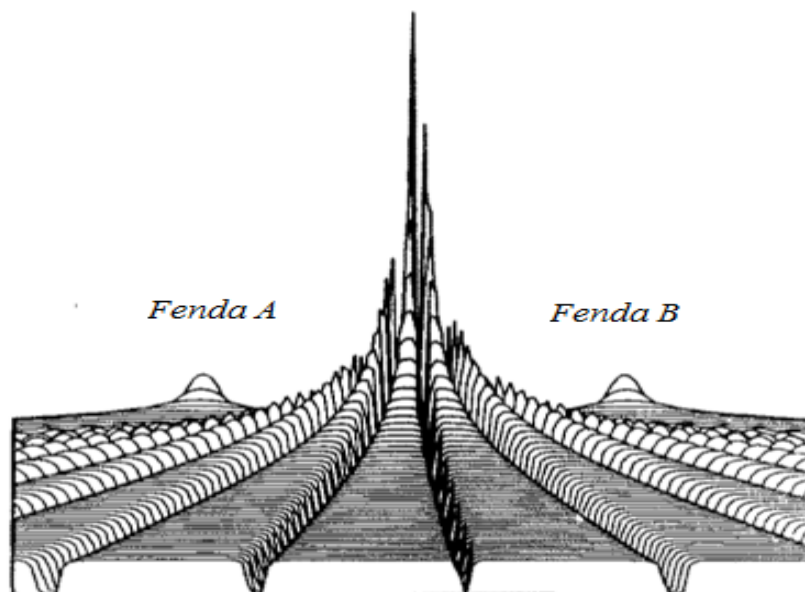
Em suma de tudo o que foi exposto nesta primeira parte do trabalho, concluímos que impor uma posição meramente ferramental aos potenciais eletromagnéticos tende a limitar a interpretação do Teoria da Eletrodinâmica Quântica e isso pode levar a incoerências, por exemplo, ao creditar efeitos não-locais ao campo eletromagnético e restringir a hipótese da realidade física dos potenciais, ainda que estes venham desempenhando papéis mais fundamentais nas teorias físicas modernas (como ocorre na Eletrodinâmica Quântica). Nos próximos capítulos deste trabalho, serão apresentados resultados para espalhamento e energia de estado ligado referente ao efeito AB para o elétron imerso em uma métrica cônica. Tais resultados obtidos mediante método de extensão auto adjunta não estão totalmente alheios à primeira parte deste trabalho, ao contrário, o deslocamento de fase da interferência obtida para o efeito AB será apresentada ao fim do capítulo 4. Conforme sugere Voropaev (45), a interação entre o *spin* da partícula e o fluxo magnético confinado a um solenoide infinitamente fino é capaz de gerar um potencial atrativo o suficiente para gerar estados ligados. Tais energias serão calculadas na segunda parte deste trabalho, onde ao final será realizada uma tentativa em conciliar fisicamente a existência de estados ligados ao momento magnético anômalo do elétron, relacionando diretamente as duas partes desta dissertação (a primeira, com um aspecto mais formal e dissertativo, e a segunda parte, de cunho mais pragmático), algo até então não abordado na literatura.

Figura 1.5: Potencial Quântico para o experimento da dupla fenda sem a presença de um campo magnético.



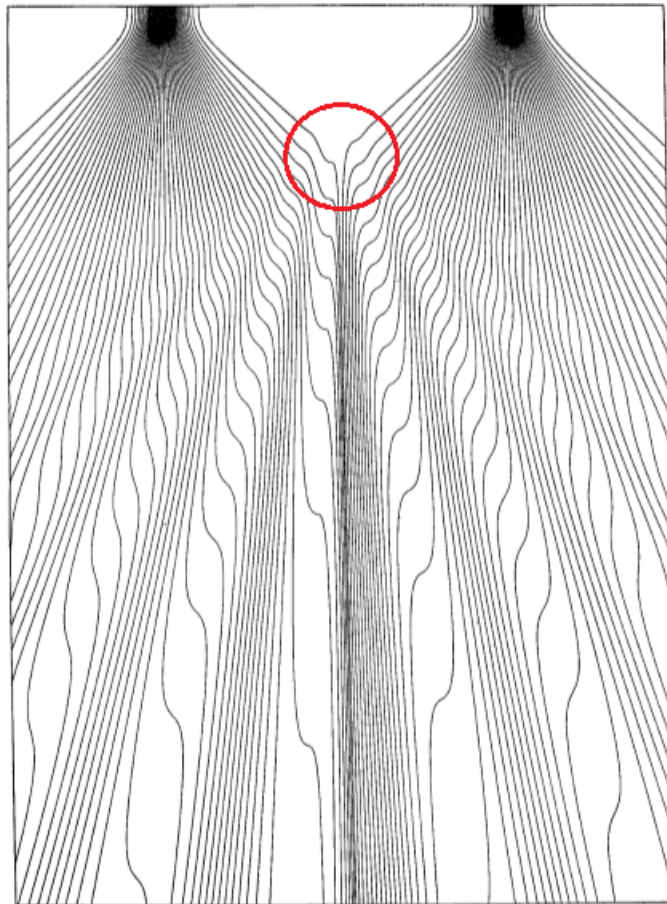
FONTE: Adaptado de Philippidis *et.al.* (35)

Figura 1.6: Potencial Quântico para o experimento da dupla fenda com a presença de um campo magnético, e conseqüentemente do potencial vetor. Neste caso, a interação do potencial vetor com o potencial quântico revela a defasagem – e portanto uma assimetria – dos elétrons.



FONTE: Adaptado de Philippidis *et.al.* (35)

Figura 1.7: Trajetórias das partículas para o efeito AB. Segundo a versão da teoria de variáveis ocultas de Broglie-Bohm, o potencial quântico, mediante intermediação do potencial vetor, induz pontos de bifurcação responsáveis por direcionar os elétrons ao longo de suas trajetórias. Assim como ocorreu na figura (1.6), as trajetórias à esquerda na presente figura apresenta uma assimetria (indicada pelo círculo vermelho), a qual gerará a defasagem no padrão de interferência quando as partículas atingirem o anteparo.



FONTE: Adaptado de Philippidis *et.al.* (35).

## Parte II

*Fundamentação Teórica; Obtenção da  
Energia de Estado Ligado e Espalhamento  
para o Elétron com Momento Anômalo em  
Espaço Cônico.*

## Capítulo 2

# Fundamentação Teórica

No presente capítulo, é discutido o aspecto teórico de noções relacionadas ao tema da presente dissertação, e que exigem uma breve exposição dos conceitos essenciais para a realização deste trabalho.

### 2.1 A Matriz de Espalhamento ou Matriz S

O conceito de matriz de espalhamento é extremamente útil na teoria do espalhamento, uma vez que a mesma pode ser relacionada com as taxas de transição e as seções de choque  $\sigma$ . Agora é apropriado definir a matriz de espalhamento matematicamente.

#### 2.1.1 Definição da Matriz de Espalhamento

Definamos o *ket*  $|i\rangle$  como o representante de um estado inicial de um sistema físico em um passado longínquo, ou seja, em que o tempo  $t \rightarrow -\infty$ , de modo que não haja interação entre os componentes do sistema (46). Como exemplo, considere um sistema físico composto por partículas; no instante  $t \rightarrow -\infty$ , elas estarão separadas por uma distância considerável.

Todavia, com o evoluir do tempo, as partículas estarão cada vez mais próximas e interagir-se-ão no instante  $t \simeq 0$ , sendo seguidamente dispersadas umas das outras e detectadas em um futuro remoto, i.e.,  $t \rightarrow +\infty$ .

Conforme é conhecido na literatura (47), o estado de um sistema físico em um certo instante  $t$  é determinado através do operador linear e unitário  $\hat{U}(t, t_0)$ , conhecido como operador de evolução temporal.

Logo, considerando o intervalo temporal  $(-\infty, +\infty)$ , para o presente caso, teremos

$$\hat{U}(t, t_0) |i\rangle \equiv \hat{S}|i\rangle. \quad (2.1)$$

A equação anterior representa, em geral, uma superposição de vários estados finais do

sistema em questão. Assim, a amplitude para encontrar um determinado estado final  $|f\rangle$  será escrita como (46):

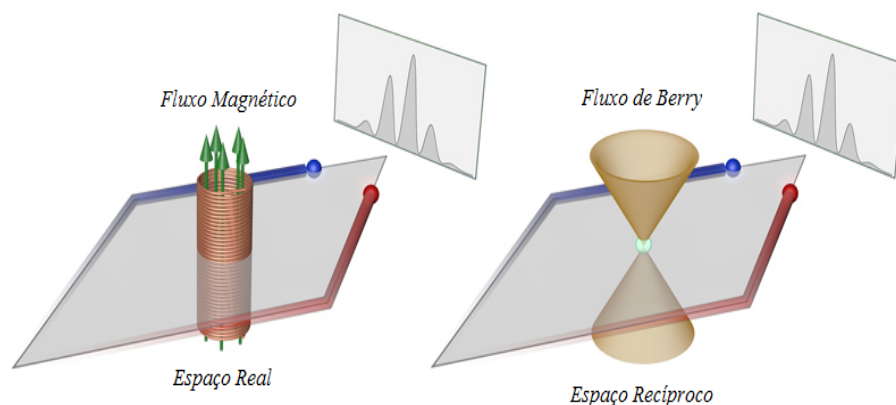
$$S_{fi} \equiv \langle f | \hat{S} | i \rangle, \quad (2.2)$$

a qual expressa a amplitude de transição  $i \rightarrow f$  ou matriz unitária  $\hat{S}$ , introduzida pelo físico alemão Werner K. Heisenberg em 1943 (48).

## 2.2 A Topologia Cônica no Efeito Aharonov-Bohm

Após o artigo original de Aharonov e Bohm em 1959 (1), houveram abordagens cada vez mais frequentes em tratar sistemas do tipo AB com variações, inclusive na topologia do problema. Uma topologia específica, a do tipo cônica, tem despertado interesse de físicos teóricos nos últimos anos, e gerado diversos trabalhos na literatura, conforme o leitor pode constatar em (11) e (4). O importante papel da topologia em sistemas físicos tem sido abordado em diversas pesquisas relacionadas à Teoria Gravitacional (49) e Física da Matéria Condensada (50). A fim de exemplificar as motivações relacionadas à topologia em questão, a figura (2.1) ilustra um caso análogo em que a métrica cônica também desempenha um papel fundamental na física do problema. Na referida figura, a topologia cônica é aplicada no espaço recíproco para o estudo de redes de Grafeno.

Figura 2.1: Em um interferômetro do tipo Aharonov-Bohm (figura à esquerda), o campo magnético confinado no interior de um solenóide afeta o comportamento de elétrons que percorrem o exterior do mesmo. No interferômetro de fluxo de Berry (figura à direita), a intersecção cônica dos níveis de energia (conhecido como cone de Dirac) para a estrutura do Grafeno desempenha o papel do solenóide no interferômetro.



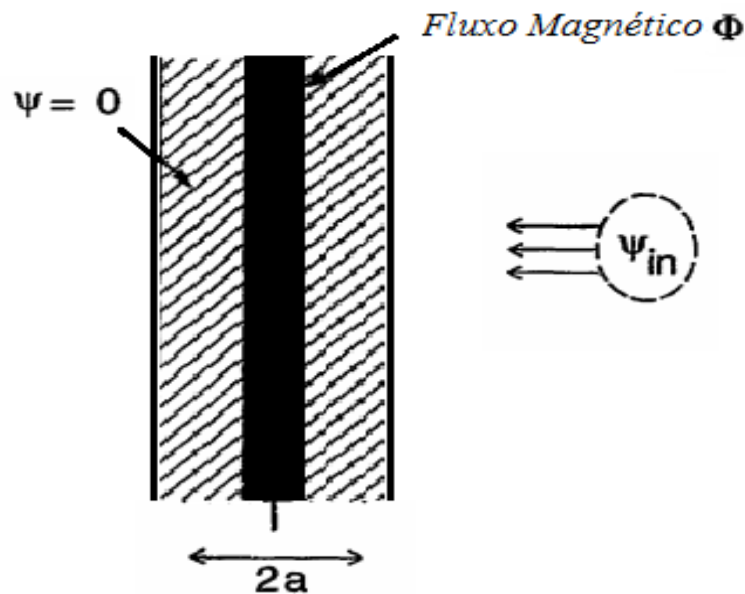
FONTE: Adaptada de Duca *et.al.* (5).

O Efeito AB é por vezes classificado na literatura como um efeito topológico. De acordo com Peshkin (51), efeitos desse tipo ocorrem apenas para espaços multiplamente



conectados e não podem ser responsabilizados por qualquer interação local – as equações de operadores não contém nenhum campo. O papel da topologia para o fenômeno é especialmente aparente para o caso magnético de espalhamento (ver figura 2.2).

Figura 2.2: Na presente figura, o interior do solenóide é uma região inacessível ao elétron. Todavia, o estado da partícula representado pela função de onda incidente apresenta espalhamento ao interagir com o fluxo magnético, ainda que de forma discutível.



FONTE: Adaptada de (51).

Ao apresentar uma singularidade puntual do tipo Delta de Dirac, a topologia cônica permite analisar diversas implicações físicas em sistemas do tipo AB (52), em Física do Estado Sólido (*e.g.*, no estudo da estrutura cristalina do Grafeno) - Figura (2.1), ou mesmo na abordagem das cordas cósmicas<sup>1</sup>, representadas como singularidades no espaço-tempo. (53), sistemas nos quais ainda que a partícula não acesse a região original, i.e., a singularidade, a função de onda e o espectro de energia são afetados pela simples presença do defeito puntual.

Contudo, a singularidade representada matematicamente pela *função* delta de Dirac revela a divergência na origem, onde a solução da função de onda pode apresentar uma irregularidade. Assim, algumas técnicas de renormalização devem ser utilizadas a fim de driblar as dificuldade encontradas em face à singularidade que *a priori* não admite soluções regulares. Adiante serão expostos *en passant* alguns procedimentos geralmente abordados para analisar problemas desta natureza.

<sup>1</sup>Cordas cósmicas referem-se a defeitos topológicos unidimensionais *hipotéticos* que teriam sido formados durante a quebra de simetria na transição de fase no início do processo de formação do universo.

## 2.3 Potenciais Singulares

Nesta seção, a singularidade do tipo delta de Dirac presente na topologia cônica é abordada, de modo a representar a singularidade puntual presente na topologia cônica.

Por potenciais singulares, entendemos como as funções que divergem em um ponto singular, geralmente escolhido como a origem. Segundo apresenta Gopalakrishnan (54), estes potenciais possuem algumas propriedades peculiares, entre as quais destacamos:

a) A condição de integrabilidade das funções de onda não necessariamente gera um conjunto de autofunções ortonormais, uma falha decorrente do fato de que a equação referente ao Hamiltoniano de um sistema nem sempre é auto-adjunto, conforme será explicado em detalhes na seção seguinte, inclusive sobre condição auto-adjunta.

b) No caso de operadores não-limitados, mesmo a imposição da condição de que a função de onda anule-se na origem ( $\psi(r=0) = 0$ ) não é suficiente para gerar um conjunto ortonormal de autofunções.

c) Devido à não-analiticidade dos potenciais singulares, a aplicação da teoria de perturbações pode ser frustrada, pois uma vez que o parâmetro de perturbação for levado à zero, o espectro de energia original do Hamiltoniano não-perturbado não será recuperado, evento denominado fenômeno de Klauder (55).

d) Alguns potenciais específicos (*e.g.*, o potencial do tipo  $1/r^2$  e a delta de Dirac bi-dimensional) apresentam uma escala de comprimento característica ao sofrerem a quantização, fenômeno conhecido na literatura como *anomalia* (46).

No Hamiltoniano concernente ao problema de Aharonov-Bohm para o elétron (férmion de *spin* 1/2), devido ao acoplamento spin-órbita relacionado ao campo magnético aplicado, conforme conhecido do efeito Zeeman<sup>2</sup>, e para um solenóide de raio infinitesimal, a delta de Dirac representa uma divergência na origem. Segundo Hagen (13), o Hamiltoniano citado pode ser escrito na forma:

$$\hat{H} = \frac{1}{2M} \left[ \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - s\phi \frac{\delta(r)}{r} \right], \quad (2.3)$$

onde  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{A}$  denotam os operadores de *momentum* linear e potencial vetor, respectivamente,  $\phi$  representa o fluxo magnético e  $s$  o *spin* da partícula.

Entretanto, conforme será abordado em maiores detalhes posteriormente, o Hamiltoniano (2.3) não é auto-adjunto, e portanto exige que um método de renormalização ou

---

<sup>2</sup>Peter Zeeman(1865-1943), físico neerlandês ganhador do prêmio Nobel em 1902 (em parceria com Hendrik Lorentz) por seus estudos envolvendo radiações eletromagnéticas.

extensão seja utilizado, conforme será exposto na seção a seguir.

## 2.4 O Método da Extensão Auto-adjunta de Operadores

O método de extensão auto-adjunta é especialmente importante na abordagem de potenciais singulares, pois além de possuir rigor matemático, evita possíveis divergências provenientes de potenciais singulares. Embora todo operador Hermitiano possua autovalores reais e autofunções ortogonais, os mesmos nem sempre geram uma evolução temporal unitária e nem sempre possuem adjuntos bem definidos; Essas importantes condições são omitidas em diversos livros-texto de Mecânica Quântica, o que pode levar a perigosas contradições (Para maiores detalhes, o leitor pode consultar Gitman (56) ou Bonneuau (57)). Dentre alguns títulos da literatura, cabe destacar a atenção dada por Balentine (58) às condições auto-adjuntas. As demais referências, entre elas Cohen-Tannoudji (59), Gasiorowicz (60), Shankar (61) e Sakurai (47) não ressalvam o tema.

Em análise funcional, para que um dado operador  $\mathbf{O}$  seja auto-adjunto é necessário que o mesmo satisfaça a condições de simetria em relação ao produto interno definido no Espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ ,

$$\langle \mathbf{O}\phi, \psi \rangle = \langle \phi, \mathbf{O}\psi \rangle, \quad (2.4)$$

para o caso de um operador auto-adjunto limitado, ou seja, um operador  $\mathbf{O}$  definido em um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  com domínio  $D(\mathbf{O}) \subseteq \mathcal{H}$  é tal que

$$\|\mathbf{O}\psi\| \leq k\|\psi\|, \quad (2.5)$$

para  $\psi \in D(\mathbf{O})$  e  $k \in \mathbb{R}^+$ . Um operador ilimitado é aquele para o qual não existe  $k$  tal que satisfaça a condição (2.5). De forma simplificada, pode-se dizer que um operador limitado mapeia os vetores em  $\mathcal{H}$  no interior de uma “casca” de raio  $k$  (62).

Entretanto, para serem considerados auto-adjuntos, os operadores ilimitados (que não obedecem a relação (2.5)) devem satisfazer outra exigência além da condição (2.4). Nestes casos, também é necessária que a coincidência de domínios seja válida:

$$D(\mathbf{O}) = D(\mathbf{O}^\dagger), \quad (2.6)$$

sendo  $\mathbf{O}^\dagger$  a representação para o operador adjunto para  $\mathbf{O}$ .

Para a classe de operadores limitados, as condições (2.4) e (2.6) coincidem, de modo que se um operador obedece a condição de simetria e é definido sobre todo  $\mathcal{H}$ , então este operador é limitado, de acordo com o Teorema de Hellinger e Toeplitz (63, 62).

Conforme o leitor pode constatar em Powell (64), o produto escalar de duas funções quaisquer  $f(x)$  e  $g(x)$  definidas no intervalo  $[a, b]$  é dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f^*(x)g(x)dx. \quad (2.7)$$

Uma função  $f(x)$  qualquer é quadraticamente integrável em  $[a, b]$  se a seguinte norma existir:

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 dx. \quad (2.8)$$

Assim, a classe das funções quadraticamente integráveis define um espaço vetorial linear, e a desigualdade de Schwarz, como se segue

$$|\langle f, g \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle \quad (2.9)$$

mostra que  $\langle f, g \rangle$  existe se  $f(x)$  e  $g(x)$  são quadraticamente integráveis, e então a combinação

$$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x), \quad (2.10)$$

também é quadraticamente integrável. O espaço vetorial definido desta maneira é denominado um espaço de Hilbert (o Apêndice A apresenta algumas propriedades essenciais concernentes a espaços de Hilbert).

Porém, note que se a física do problema não for especificada, o problema é puramente matemático: um operador  $\mathbf{O}$  atuando em um espaço de Hilbert. Desse modo, a condição de simetria (2.4) para um operador auto-adjunto revela que matematicamente as condições de contorno para um sistema não devem ser impostas – as mesmas entram na própria definição do operador em questão.

De acordo com Filgueiras (65), isto significa que no domínio de tal operador teremos auto-funções que satisfazem a distintas condições de contorno. Logo, antes de especificar o problema físico, é pertinente questionarmos o domínio no qual um operador simétrico é efetivamente auto-adjunto. Conforme pode ser constatado com prova em (66), todo operador simétrico e limitado é essencialmente auto-adjunto.

Na verdade, conforme será abordado a seguir, um operador simétrico  $\mathbf{O}$  que atua em um subespaço de Hilbert admite, na maioria das situações, infinitas condições de contorno - nestes casos, dizemos que o operador auto-adjunto  $\mathbf{O}$  possui infinitas extensões auto-adjuntas.

Como exemplo, considere o operador *momentum* linear  $\mathbf{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$  atuando sobre um espaço de funções definidas no intervalo fechado  $[0, \mathcal{L}]$ . O domínio deste operador é escrito como

$$D(\mathbf{p}) = \left\{ \phi, \dot{\phi} \in \mathcal{L}^2([0, \mathcal{L}]); \phi(0) = \phi(\mathcal{L}) = 0 \right\}, \quad (2.11)$$

em que  $\dot{\phi}$  representa a derivada espacial da função. Deve-se ressaltar que o problema físico (partícula em uma caixa unidimensional) ainda não especificado, mas apenas afirmou-se a existência de um operador  $\mathbf{p}$  que atua em um intervalo fechado  $[0, \mathcal{L}]$ . Se  $\mathbf{p}$  for um operador observável, deverá satisfazer a condição (2.4)

$$\left\langle \psi, -i\hbar \frac{d}{dx} \phi \right\rangle - \left\langle -i\hbar \frac{d}{dx} \psi, \phi \right\rangle = -i\hbar [\psi^*(\mathcal{L})\phi(\mathcal{L}) - \psi^*(0)\phi(0)] = 0. \quad (2.12)$$

Repare que se  $\psi = \phi$  e  $\phi(\mathcal{L}) = e^{i\theta}\phi(0)$ , então  $\mathbf{p}$  ainda será simétrico no intervalo  $[0, \mathcal{L}]$  pois a relação de simetria é satisfeita. Logo, o domínio em que este operador é auto-adjunto (e portanto, observável) é escrito como

$$D_\theta(\mathbf{p}) = \left\{ \phi, \dot{\phi} \in \mathcal{L}^2([0, \mathcal{L}]); \phi(\mathcal{L}) = e^{i\theta}\phi(0) \right\}, \quad (2.13)$$

tal que  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Então, percebemos que o problema admite infinitas condições de contorno parametrizadas por  $\theta$ . Portanto, o operador em questão possui infinitas extensões auto-adjuntas, e cada valor de  $\theta$  tomado no intervalo  $[0, 2\pi]$  corresponde a uma situação física distinta. Note que se  $\theta = 0$ , as condições de contorno periódica (2.11) referentes ao problema da partícula em uma caixa unidimensional são recuperadas.

Todavia, se como exemplo considerarmos o problema de uma partícula carregada com *momentum*  $P$  se movendo em um anel no qual atravessa um fluxo magnético, a periodicidade da função de onda poderá ser afetada de maneira que  $\theta \neq 0$ .

### 2.4.1 Os índices de deficiência e o Teorema de Von Neumann

A principal questão que emerge do estudo de Hamiltonianos auto-adjuntos é a seguinte: Quantas extensões o sistema descrito admite? Alguns podem permitir infinitas extensões, outros apenas uma; no último caso, há apenas um valor para o parâmetro de extensão tal que o Hamiltoniano permanece auto-adjunto e a extensão não é necessária. Nessas ocasiões o operador é denominado essencialmente auto-adjunto. Um operador  $\mathbf{O}$  com domínio denso  $D(\mathbf{O})$  é considerado auto-adjunto se  $D(\mathbf{O}^\dagger) = D(\mathbf{O})$  e  $\mathbf{O} = \mathbf{O}^\dagger$ ; Nesta seção, a exemplo de Bonneau *et. al.* (57), assumamos que  $(\mathbf{O}, D(\mathbf{O}))$  é densamente definido, simétrico e fechado, com  $(\mathbf{O}^\dagger, D(\mathbf{O}^\dagger))$  sendo o respectivo adjunto. Então, podemos definir os chamados subespaços de deficiências  $\mathcal{N}_\pm$

$$\mathcal{N}_+ = \left\{ \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{O}^\dagger), \mathbf{O}\psi = z_+\psi, \text{Im } z_+ > 0 \right\}, \quad (2.14)$$

$$\mathcal{N}_- = \{\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{O}^\dagger), \mathbf{O}\psi = z_- \psi, \text{Im } z_- < 0\}, \quad (2.15)$$

cujas dimensões são representadas pelo par ordenado dos índices de deficiência  $n_-$  e  $n_+$ , i.e.,  $(n_-, n_+)$ . Desde que  $z_+$  esteja na parte superior do plano complexo, e  $z_-$  na parte inferior do mesmo, a escolha de  $z_\pm$  não é crucial, de modo que poderíamos escolher  $z_+ = i\omega$  e  $z_- = -i\omega$  tal que  $\omega$  é um número real positivo arbitrário. Logo, uma vez resolvida a equação

$$\mathbf{O}\psi = z_\pm \psi, \quad (2.16)$$

e determinadas as soluções linearmente independentes, é possível descobrir os valores dos índices de deficiência  $n_\pm$ .

O seguinte teorema, proposto inicialmente em 1910 pelo físico alemão Hermann Weyl<sup>3</sup> no estudo de operadores diferenciais de segunda ordem e generalizado posteriormente por Von Neumann<sup>4</sup> em 1929 (67), sumariza de forma concreta o papel fundamental dos índices de deficiência na extensão auto-adjunta:

• **Teorema de Von Neumann:** Para um operador  $\mathbf{O}$  com índices de deficiência  $(n_-$  e  $n_+)$ , existem três possibilidades:

1) Se  $n_+ = n_- = 0$ , então o operador  $\mathbf{O}$  é considerado auto-adjunto, que é uma condição necessária e suficiente.

2) Se  $n_+ = n_- = n \geq 1$ , então  $\mathbf{O}$  possui infinitas extensões auto-adjuntas parametrizadas por uma matriz unitária de ordem  $n \times n$  (ou seja,  $n^2$  parâmetros reais).

3) Caso  $n_+ \neq n_-$ , o operador  $\mathbf{O}$  não possui extensões auto-adjuntas.

A aplicação deste teorema em um problema qualquer consiste em basicamente três etapas:

Primeiramente, é necessário encontrar um domínio  $D(\mathbf{O})$  no qual o operador  $\mathbf{O}$  é fechado e simétrico; Então, deve-se determinar o adjunto  $(\mathbf{O}^\dagger, D(\mathbf{O}^\dagger))$  e seus índices de deficiência. Caso  $n_- = n_+$ , o operador admite extensões auto-adjuntas, e cabe ao investigador descobrir os domínios de cada extensão. Ao leitor interessado em estudar os detalhes da extensão auto-adjunta de operadores, são sugeridas as referências de Reed

<sup>3</sup>Hermann Klaus Hugo Weyl (1885-1955), matemático alemão com importantes contribuições à Física.

<sup>4</sup>John Von Neumann (1903-1957), matemático húngaro de origem judaica, naturalizado estadunidense.

(63), Naimark (68), Akhiezer (69).

## 2.4.2 O Método de Bulla-Gesztesy

Conforme observado anteriormente, um operador  $\mathbf{O}$  não é necessariamente auto-adjunto para qualquer condição de contorno escolhida. Logo, é importante saber quais condições de contorno são admissíveis na escolha dos parâmetros de extensão (63). Concernente a isso, em meados da década de 1980 Wolfgang Bulla e Fritz Gesztesy (12) aprimoraram a teoria da extensão auto-adjunta para Hamiltonianos singulares com interações pontuais. Segundo eles, qualquer extensão auto-adjunta de um Hamiltoniano  $h_\eta$  expresso na forma apresentada por Bulla e Gesztesy (12):

$$h_\eta = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l-1)}{r^2} + \frac{\gamma}{r} + \frac{\mu}{r^{-a}} + W, \quad (2.17)$$

possui o domínio conforme se segue:

$$D(h_\eta) = \{g(x) \in \mathcal{L}^2(0, \infty) | g, g' \in C_{loc}(0, \infty)\}, \quad (2.18)$$

onde  $C_{loc}$  define a convergência local. Na equação (2.17),  $\gamma$ ,  $\mu$  e  $W$  são parâmetros obtidos em (12) que tornam o Hamiltoniano 2.17 geral o suficiente a permitir que outros Hamiltonianos sejam adaptados em termos do primeiro para garantia de que estes sejam auto-adjuntos. Da mesma forma,

$$-g'' + \frac{l(l-1)}{r^2}g + \frac{\gamma}{r}g + \frac{\mu}{r^{-a}}g \in \mathcal{L}^2(0, \infty), \quad (2.19)$$

deve satisfazer a seguinte condição de contorno

$$\eta g_{0,l} = g_{1,l}, \quad (2.20)$$

tais que

$$g_{0,l} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{g(r)}{G_l^{(0)}(r)}, \quad (2.21)$$

e

$$g_{1,l} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \left[ g(r) - g_{0,l} G_l^{(B)}(r) \right] \frac{1}{F_l^{(0)}(r)}, \quad (2.22)$$

As constantes mencionadas na presente seção podem assumir os valores:

$$-\infty < \eta \leq \infty \quad , \quad \frac{1}{2} \leq l < \frac{3}{2}, \quad (2.23)$$

assim como  $\mu, \gamma \in \mathbb{R}$  com  $0 < \mu < 2$ .

As funções  $F_l^{(0)}(r)$  e  $G_l^{(0)}(r)$  presentes em (2.21) e (2.22) são escritas na forma:

$$F_l^{(0)}(r) = r^l \quad (2.24)$$

e

$$G_l^{(0)}(r) = \left\{ \begin{array}{l} -r^{1/2} \ln(r), l = \frac{1}{2} \\ \frac{r^{1-l}}{(2l-1)}, \frac{1}{2} < l < \frac{3}{2} \end{array} \right\}. \quad (2.25)$$

Na equação (2.22), o termo  $G_l^{(B)}(r)$  representa a expansão assintótica de  $G_l(r)$  quando  $r \rightarrow 0^+$  a  $r^t$ , tal que  $t \leq 2l - 1$ . O método de Bulla-Gesztesy será útil adiante, ao abordarmos as extensões auto-adjuntas relativas ao fenômeno Aharonov-Bohm.

## 2.5 Partículas de Spin 1/2

Com os subsequentes desdobramentos da física moderna no século XX, a pesquisa da estrutura atômica exigiu descrições mais detalhadas. Em fevereiro e março de 1925, Pauli (70) <sup>1</sup> publicou dois trabalhos abordando o espectro de multipletos de átomos alcalis e alcalinos terrosos, nos quais sugeriu a hipótese de que quatro “números quânticos” seriam necessários à caracterização do elétron. A princípio, estes números foram denominados: número quântico principal bohriano  $n$ , que representa a energia do elétron; o número quântico azimutal sommerfeldiano  $k$  (atualmente,  $l$ ), representando a quantização da órbita eletrônica; o número quântico magnético sommerfeldiano-landeriano  $m_l$  (atualmente  $m$ ), como o representante da quantização do plano da órbita eletrônica, e um quarto número quântico magnético  $m_2$ , o qual Pauli conectou a uma propriedade eletrônica “quanto-teórica”, denominando a mesma de “uma duplicidade não-descritível classicamente”(71).

Em novembro de 1925, Uhlenbeck e Goudsmit <sup>2</sup> preconizaram a associação do quarto número quântico de Pauli à uma “rotação intrínseca do elétron” (*spin*) (72). Baseado no então conhecido experimento de Stern-Gerlach <sup>3</sup> (73), Uhlenbeck e Goudsmit sugeriram que o *spin* do elétron poderia assumir um entre dois valores:  $\pm \frac{\hbar}{2}$ , intitulados *spin up* (cima) e *spin down* (baixo).

Em 1927, Pauli e Darwin <sup>4</sup>, em distintas publicações apresentaram uma versão modificada da equação de Schrödinger (74, 71), ao incluírem na mesma de forma *ad hoc* o *spin* do elétron (46). Darwin interpretou a função de onda de Schrödinger como um vetor de onda do elétron, enquanto Pauli considerou a mesma como dependente das coordenadas

<sup>1</sup>Wolfgang Pauli (1900-1958). Físico teórico austríaco, ganhador do prêmio Nobel pela descoberta do princípio da exclusão.

<sup>2</sup>George Eugene Uhlenbeck (1900-1988) e Samuel Abraham Goudsmit (1902-1978).

<sup>3</sup>Otto Stern (1888-1969) e Walther Gerlach (1889-1979).

<sup>4</sup>Sir Charles Galton Darwin (1887-1962).



esaciais e de *spin*, denotado pelo operador  $\hat{S}$ :

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}, \quad (2.26)$$

em que  $\hat{\sigma}$  são matrizes (2x2), denominadas matrizes de Pauli:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

$$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

### 2.5.1 A Equação de Pauli-Darwin

Uma vez confrontado à necessidade de estudar o movimento do elétron em um campo eletromagnético, Pauli postulou em 1927 (71) que este férmion deveria obedecer à então conhecida equação de Schrödinger:

$$\hat{H}\Psi(\vec{r}, t) = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r}, t), \quad (2.30)$$

cujos Hamiltoniano é escrito na forma:

$$\hat{H} = \frac{1}{2M}[\hat{\sigma} \cdot (\hat{p} - e\hat{A})]^2 + e\phi. \quad (2.31)$$

Desde que as matrizes de Pauli descritas anteriormente atuam sobre a função de onda, esta deve ser representada por uma matriz-coluna (2x1), denominada *spinor* de Pauli:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{r}, t) \\ \psi_2(\vec{r}, t) \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

No *spinor* de Pauli,  $\psi_1(\vec{r}, t)$  denota a amplitude de probabilidade de observar o valor  $(+1/2)$ , i.e., o *spin up* do elétron (46); a segunda componente no *spinor*,  $\psi_2(\vec{r}, t)$ , representa a amplitude de probabilidade do valor  $(-1/2)$  ser observado, convencionalmente chamado *spin down*. Ainda assim, a completude das funções de onda devem permanecer válidas de maneira que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2) d^3\vec{r} = \mathbf{1}. \quad (2.33)$$

Então, uma vez que o *momentum* canônico  $\hat{\pi} \equiv \vec{p} - e\hat{A}$  satisfaz a relação:

$$[\hat{\pi}_j, \hat{\pi}_k]_- = ie\epsilon_{jkl}\hat{B}_l. \quad (2.34)$$

Mediante a utilização da expressão operacional do *momentum*  $\hat{p}$ , além das equação (2.34) e das relações de comutação usuais, concluimos a forma geral do Hamiltoniano para uma partícula de *spin* 1/2 sujeita à ação de um campo eletromagnético:

$$\hat{H} = \frac{1}{2M}[(-i\nabla - e\hat{A})^2 - e\hat{\sigma}\cdot\hat{B}] + e\phi. \quad (2.35)$$

O momento magnético orbital  $\vec{\mu}$  é classicamente apresentado como

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2M}\vec{L} \equiv \frac{e}{2M}\vec{r} \times \vec{p}. \quad (2.36)$$

Na representação de matrizes de Pauli ele adquire a forma (para  $\hbar = c = 1$ )

$$\hat{\mu} = \frac{e}{2M}\hat{\sigma} \equiv \mu_0\hat{\sigma}, \quad (2.37)$$

e é denotado como **momento magnético spinorial**, e o termo do acoplamento *spin*-órbita, dado por:

$$-\frac{e}{2M}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B} = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}, \quad (2.38)$$

representa a interação do *spin* do elétron com o campo magnético.

Portanto, a equação (2.35) adquire a seguinte forma:

$$\hat{H} = \frac{1}{2M}(-i\nabla - e\vec{A})^2 - \hat{\mu}\cdot\vec{B} + e\phi. \quad (2.39)$$

É necessário ressaltar que no contexto do Efeito AB magnético na equação (2.35) o termo  $e\phi$  não aparece, uma vez que não há campo elétrico atuando sobre o elétron. Conforme assevera Bassalo (46), Darwin chegou a uma expressão análoga à equação (2.35) ainda em 1927, motivo pelo qual a mesma foi denominada **equação de Pauli-Darwin**.

Através do desenvolvimento de Pauli e Darwin na adaptação da equação de Schrödinger para partículas com *spin*, foi possível explicar a razão de existência do fator giromagnético do elétron ( $g$ ), definido como a relação entre os módulos do momento magnético ( $\vec{\mu}$ ) e o momento angular ( $\vec{L}$ ). Esta razão é expressa classicamente como:

$$g = \frac{|\vec{\mu}|}{|\vec{L}|} = \frac{e}{2M}. \quad (2.40)$$

Entretanto, em 1915, Einstein e Haas<sup>5</sup> obtiveram o seguinte valor para  $g$

$$g = \frac{e}{M}, \quad (2.41)$$

---

<sup>5</sup>Albert Einstein (1879-1955) e Wander Joahannes de Haas (1878-1960)

a qual pode ser obtida caso o momento angular **intrínseco** ( $\hat{S}$ ) do elétron for tomado em consideração no lugar do momento angular **orbital**  $\vec{L}$  na equação (2.40).

Concomitantemente, Dirac<sup>6</sup> concluiu que o fator  $g$  do elétron seria igual a 2 (75) através da equação que levou o próprio nome do mesmo. Todavia, conforme apresenta a literatura (76), desde 1947 o fator  $g$  do elétron é comprovadamente ligeiramente diferente de 2. O fator  $g$  do elétron atualmente é medido em 2,00231930436182(52).

A denominada **anomalia do momento magnético**( $a$ ) será definida como:

$$a = \frac{g - 2}{2}. \quad (2.42)$$

Devido à anomalia presente no momento magnético, o acoplamento mínimo do momento canônico ( $\hat{\pi} \equiv \vec{p} - e\hat{A}$ ) utilizado para considerar os efeitos provocados pelo campo eletromagnético sobre o férmion não é suficiente, exigindo um termo de origem fenomenológica acrescido ao Hamiltoniano do sistema(47):

$$- a \frac{\mu_B}{2c\hbar} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (2.43)$$

em que  $F_{\mu\nu}$  representa o tensor eletromagnético (46); Na equação (2.43),  $\sigma^{\mu\nu}$  é definido em termos das matrizes  $\gamma^{\mu\nu}$  de Dirac:

$$\sigma^{\mu\nu} := \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (2.44)$$

No intuito de obter a versão relativista da equação de Schrödinger para uma partícula sem spin na presença de um campo eletromagnético, partindo da expressão relativista para a energia (46) (77),

$$E^2 = p^2 + M^2, \quad (2.45)$$

e utilizando as seguintes substituições:

$$E \rightarrow \hat{\pi}^0 = \hat{E} - e\hat{\phi}, \quad (2.46)$$

$$p \rightarrow \hat{\vec{\pi}} = \hat{\vec{p}} - e\hat{\vec{A}}, \quad (2.47)$$

é possível obter facilmente

$$[\hat{\vec{\pi}} + m^2]\Phi(x) = [\hat{\vec{\pi}}^0]^2\Phi(x); \quad (2.48)$$

A expressão (2.48) é conhecida como equação de Klein-Fock-Gordon<sup>7</sup> para uma partí-

<sup>6</sup>Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984), físico inglês com importantes contribuições à teoria da MQ.

<sup>7</sup>Oskar Benjamin Klein (1894-1977), Vladimir Aleksandrovich Fock (1898-1974) e Walter Gordon (1893-1939).

cula relativista de *spin* 0 imersa em um campo eletromagnético; no contexto do fenômeno Aharonov-Bohm magnético, teríamos  $\phi = 0$ , de modo que (2.48) tornar-se-ia apenas

$$[\hat{\pi} + M^2]\Phi(x) = E^2\Phi(x). \quad (2.49)$$

## 2.5.2 A Equação de Dirac

Conforme visto anteriormente, a equação de Pauli-Darwin (1927) possibilitou um razoável entendimento acerca da interpretação quanto-mecânica do *spin*, todavia falhou ao procurar uma combinação do momento angular intrínseco do elétron com a Relatividade Restrita. Em contrapartida, a equação de Klein-Fock-Gordon (1926) trata de partículas relativistas sem *spin* apenas. Em 1928 Dirac (78) encontrou uma equação para o caso do elétron relativístico em interação com um campo eletromagnético.

Uma vez que a energia na relatividade restrita é escrita da forma (considerando  $c=1$ ):

$$E = M(1 - v^2)^{-1/2} \quad (2.50)$$

$$\vec{p} = M(1 - v^2)^{-1/2}\vec{v} = E\vec{v} \quad (2.51)$$

Então, com o auxílio da equação (2.51), sem embargo obteremos

$$E(1 - v^2) = \frac{M}{(1 - v^2)^{-1/2}} \rightarrow E = Ev^2 + \frac{M}{(1 - v^2)^{-1/2}}, \quad (2.52)$$

cuja expressão final será:

$$E = \vec{p} \cdot \vec{v} + \sqrt{1 - v^2}M. \quad (2.53)$$

Segundo a equação (2.53) Dirac considerou os operadores  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$

$$\vec{v} = \hat{\alpha} \quad (2.54)$$

e

$$\sqrt{1 - v^2} = \hat{\beta}, \quad (2.55)$$

por razões históricas denominados operadores de Dirac, na forma matricial são apresentados como (79), (80):

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma} \\ \hat{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{I} & 0 \\ 0 & -\hat{I} \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

as quais são escritas em termos de componentes cartesianas como:

$$\hat{\alpha}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\alpha}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\alpha}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

E, para a matriz  $\hat{\beta}$

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Assim, em 1928 Dirac apresentou a equação que representa a dinâmica do elétron livre

$$\hat{H}\Psi(\vec{r}, t) = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r}, t), \quad (2.59)$$

onde  $\Psi(\vec{r}, t)$  fora cunhado como *spinor* de Dirac por Ehrenfest<sup>8</sup> em 1929, e é definido como

$$\Psi(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{r}, t) \\ \psi_2(\vec{r}, t) \\ \psi_3(\vec{r}, t) \\ \psi_4(\vec{r}, t) \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Para o caso de uma partícula sujeita à ação de um campo eletromagnético teremos:

$$\hat{p} \rightarrow \hat{\pi} = \hat{p} - e\hat{A}, \quad (2.61)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \hat{\pi} - e\hat{A}; \quad (2.62)$$

isto é,

$$(\hat{\alpha}\hat{\pi} + M\hat{\beta})\Psi = \hat{\pi}^0\Psi, \quad (2.63)$$

o que naturalmente leva à expressão:

$$(\hat{\alpha}\hat{\pi} + M\hat{\beta} + e\hat{\phi})\Psi \equiv \hat{H}_D\Psi = E\Psi, \quad (2.64)$$

ressaltando que  $\hat{H}_D$  representa a Hamiltoniana de Dirac para o elétron em um campo

---

<sup>8</sup>Paul Ehrenfest (1880-1933).

eletromagnético. Ao multiplicar a expressão (2.63) à esquerda pelo operador  $\hat{\beta}$ , devemos obter

$$(\hat{\beta}\hat{\alpha}\cdot\hat{\vec{\pi}} + M\hat{\beta}^2)\Psi = \hat{\beta}\hat{\pi}^0\Psi, \quad (2.65)$$

e, considerando as matrizes (2.57) e (2.58), assim como as relações

$$\hat{\beta}\hat{\alpha} = \hat{\gamma}; \hat{\beta}^2 = \hat{I} \quad (2.66)$$

teremos, então:

$$(\hat{\gamma}^0\hat{\pi}^0 - \hat{\vec{\gamma}}\cdot\hat{\vec{\pi}} - M)\Psi = 0. \quad (2.67)$$

Além disso, deve-se levar em estima as seguintes relações para o momento canônico e para a matriz  $\hat{\gamma}$  de Dirac:

$$\hat{\pi}^\mu = (\hat{\pi}^0, \hat{\vec{\pi}}), \quad (2.68)$$

$$\hat{\pi}_\mu = (\hat{\pi}^0, -\hat{\vec{\pi}}), \quad (2.69)$$

$$\hat{\gamma}^\mu = (\hat{\gamma}^0, \hat{\vec{\gamma}}). \quad (2.70)$$

Portanto, a forma covariante da equação de Dirac para o elétron em um campo eletromagnético é da forma

$$(\hat{\gamma}^\mu\hat{\pi}_\mu - M)\Psi = 0.; \quad (2.71)$$

ou ainda, mediante a utilização do **operador quadrigradiente**  $\partial_\mu$ :

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \nabla); \quad (2.72)$$

Além do quadrivetor  $\hat{A}^\mu$ :

$$\hat{A}^\mu = (\hat{\phi}, \hat{\vec{A}}), \quad (2.73)$$

$$\hat{A}_\mu = (\hat{\phi}, -\hat{\vec{A}}), \quad (2.74)$$

em que  $\hat{\phi}$  é o termo para o potencial eletromagnético (nulo, para o presente trabalho). Logo, a equação de Dirac (2.71) tornar-se-á:

$$[\hat{\gamma}^\mu(i\partial_\mu - e\hat{A}_\mu) - M]\Psi = 0, \quad (2.75)$$

que é a equação de Dirac do elétron em um campo eletromagnético. A versão adjunta dessa equação é dada por

$$(\hat{\gamma}^\mu \hat{\pi}_\mu + M)\bar{\Psi} = 0. \quad (2.76)$$

Ou, em termos dos operadores quadrigradiente e quadrivetor, teremos:

$$[\hat{\gamma}^\mu (i\partial_\mu - e\hat{A}_\mu) + M]\bar{\Psi} = 0. \quad (2.77)$$

## Capítulo 3

# O Efeito AB Em Partículas de Spin 1/2

### 3.1 As distintas abordagens na literatura para o cálculo da função de onda

Conforme já foi amplamente exposto na presente dissertação, o efeito AB é considerado um dos fenômenos mais intrigantes da mecânica quântica. Porém, alguns aspectos matemáticos deste fenômeno têm despertado o interesse de físicos teóricos especializados na área. Um importante problema envolve a consideração de uma partícula com *spin* sujeita ao potencial do tipo Aharonov-Bohm; uma questão pertinente é se a inclusão de *spin* no problema modificaria os resultados obtidos por Aharonov e Bohm (1).

Consideremos um limite no qual o fluxo de campo magnético  $\phi^1$  esteja confinado no interior de um filamento extremamente fino (por exemplo, os cristais “*whiskers*” mencionados anteriormente), de tal modo que o raio deste cilindro possa ser desconsiderado; Então o campo  $\vec{B}$  atuante ao longo do eixo  $\mathbf{z}$  deve ser tomado na forma:

$$eB(r) = -\frac{\phi}{r}\delta(r). \quad (3.1)$$

Se a condição acima for negligenciada, então a estrutura do campo magnético torna-se relevante e um cálculo mais sofisticado nos será exigido.

O fato está ligado à introdução de uma estrutura altamente singular no Hamiltoniano do sistema. Desde que na literatura há poucas ocorrências de interesse em resultados para campos diferentes de (3.1), tentativas preliminares de lidar com pontos singulares como este fez com que se buscassem combinações lineares apropriadas de soluções regulares e irregulares, adotando distintas abordagens ao problema.

---

<sup>1</sup>Embora no primeiro capítulo deste trabalho o potencial elétrico tenha sido denotado por  $\phi$ , aqui deve-se sempre considerar  $\phi$  como o fluxo magnético, a menos que alguma ressalva seja feita.



Por exemplo, ao estudar a interação de cordas cósmicas com a matéria, Alford e Wilczek (11) impuseram a condição de que a componente superior da função de onda permanece regular na origem, concluindo seguidamente que a amplitude de espalhamento não é afetada pela inclusão do *spin* no problema.

Por outro lado, Hagen (81) procurou solucionar o problema inferindo o comportamento da função de onda na origem em termos da física concernente. O autor prefere considerar que o problema pode ser resolvido mediante a redefinição da equação (3.1) como o limite de um campo fisicamente realizável, pois (conforme Hagen argumenta) uma vez que um campo ideal não pode ser realmente obtido em laboratório (i.e., para um solenoide de raio nulo), é apropriado permitir que o mesmo esteja confinado em um cilindro finito de raio  $R$  para então associar a correta função de onda como aquela obtida no limite em que  $R = 0$ . Ainda segundo o mesmo autor, a regra utilizada de forma *ad hoc* por Alford e Wilczek é demasiadamente específica, influenciando o resultado final.

Todavia, um método mais rigoroso matematicamente, adotado por Gerbert *et. al.* (14), Andrade *et. al.* (4, 82, 83), Park *et. al.* (84) e Bonneau *et. al.* (57), engloba situações físicas mais específicas, além de apresentar resultados plausíveis com a realidade. Este método, apresentado no capítulo 2 e aplicado nos capítulos 3 e 4, é o método da extensão auto-adjunta de operadores e é mais geral do que as opções adotadas pelos autores anteriormente citados, uma vez que dependendo do valor adotado para o parâmetro de extensão, permitindo obter o espectro de possíveis combinações lineares que representem certa situação física. Convém citar o fato de que Gerbert (14), ao utilizar o método da extensão auto-adjunta de operadores com o parâmetro de extensão  $\theta = \pi/2$ , obtêm o mesmo resultado de Hagen (81).

A formulação do problema conforme desenvolvido por Hagen *et. al.* consiste primeiramente em escrever a equação de Dirac para uma partícula de massa  $M$ , para um sistema com simetria cilíndrica,

$$E\psi = \left[ M\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\gamma}_i\hat{\pi} \right] \Psi, \quad (3.2)$$

onde, conforme apresentados no capítulo 2,  $\beta$  e  $\beta\gamma_i$  são matrizes definidas em termos das matrizes de Pauli  $\sigma_i$ :

$$\hat{\beta} = \sigma_3, \hat{\beta}\hat{\gamma}_i = (\sigma_1, s\sigma_2), \quad (3.3)$$

e  $s$  é por conveniência definido como o dobro do *spin* do elétron ( $s = +1$ , no caso de *spin up* e  $s = -1$ , para *spin down*). Neste caso,  $\Psi$  representa o *spinor* para uma partícula de *spin*  $s$ .

Da equação (3.2), baseado na proposta de regularização, Hagen (13) propõe a equação do seguinte tipo, com a delta de Dirac deslocada:

$$(E^2 - M^2)\psi = -\hat{\gamma}\hat{\pi}\hat{\gamma}\hat{\pi}\psi = \left[ \hat{\pi}^2 + \phi s \sigma_3 \left( \frac{1}{R} \right) \delta(r - R) \right] \Psi. \quad (3.4)$$

No presente caso, o campo magnético  $B$  é considerado perpendicular ao plano, e confinado a um filamento cujo raio tende a zero, de tal modo que o fluxo  $\phi$  é escrito da seguinte maneira (com  $\hbar = c = 1$ ):

$$\phi = -e \int_0^\infty B(r) r dr \quad (3.5)$$

Tomando  $k^2 \equiv E^2 - M^2$ , a equação (3.4) adquirirá a forma:

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} + i\phi \right)^2 + k^2 - \phi s \sigma_3 \left( \frac{1}{R} \right) \delta(r - R) \right] \Psi = 0. \quad (3.6)$$

A utilização da equação de Dirac torna-se necessária a partir do momento em que assumimos uma cinemática relativística e incluímos a interação Zeeman do *spin* com o campo magnético. Decompondo  $\psi_1$  (a componente superior de  $\psi$ ) em sua componente radial e angular, teremos:

$$\psi_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_m e^{im\varphi}, \quad (3.7)$$

em que  $m$  representará o número quântico de *momentum* angular. A equação anterior, uma vez aplicada na equação (3.6), gerará:

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(m + \phi)^2}{r^2} + k^2 - \phi s \left( \frac{1}{R} \right) \delta(r - R) \right] f_m = 0. \quad (3.8)$$

Problemas envolvendo singularidades de potenciais do tipo delta têm sido constantemente estudados na literatura, no intuito de eliminar divergências que impeçam as soluções de equações diferenciais (54); Na abordagem adotada por Hagen, é utilizada uma substituição da *função* delta por uma condição de contorno sobre a função de onda na origem, i.e., para  $r = 0$ .

Contudo, esta condição demasiadamente apriorística tende a restringir as possibilidades físicas do problema, conforme será demonstrado a seguir; entretanto, a partir daqui serão reproduzidos os resultados obtidos por Hagen (13) e comparados com a solução do mesmo problema através do método da extensão auto-adjunta de operadores, a qual será desenvolvida de forma mais geral no capítulo 4.

No caso das condições de contorno para a delta, partimos da condição de continuidade das funções a fim de obter:

$$f_m(R - \epsilon) = f_m(R + \epsilon), \quad (3.9)$$

$$R \left[ \frac{df_m}{dr} \right]_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} = \phi s f_m(R) \quad (3.10)$$

A solução para  $f_m(r)$  quando  $r < R$  é a padrão desde que a normalizabilidade implica em

$$f_m(r) = C_m J_{|m|}(kr), \quad r < R \quad (3.11)$$

noutro caso, para  $r > R$ ,  $f_m(r)$  assumirá a seguinte forma

$$f_m(r) = A_m J_{|m+\phi|}(kr) + B_m J_{-|m+\phi|}(kr), \quad (3.12)$$

onde  $A_m$ ,  $B_m$  e  $C_m$  são constantes e as funções  $J$  são as usuais funções de Bessel.

Seguindo o procedimento conforme exposto em (13) e (81), a aplicação das equações (3.9) e (3.10) às expressões anteriores levarão ao termo:

$$f_m(r) = (kR)^{|m|} \left[ (kR)^{-|m+\phi|} \left( \frac{1}{2} + \frac{|m| + \phi s}{2|m + \phi|} \right) J_{|m+\phi|}(kr) \right] + (kR)^{|m|} \left[ (kR)^{|m+\phi|} \left( \frac{1}{2} - \frac{|m| + \phi s}{2|m + \phi|} \right) J_{-|m+\phi|}(kr) \right]. \quad (3.13)$$

No limite  $R \rightarrow 0$ , a parte irregular da função de Bessel  $J_{-|m+\phi|}(kr)$  será descartada a menos que a condição seguinte permaneça válida:

$$|m + \phi| = -|m| - \phi s; \quad (3.14)$$

Através desta análise, deve-se incluir a próxima maior potência de  $J_{-|m+\phi|}(kR)$  em (3.13), de modo a obter

$$f_m(r) = (kR)^{|m|} \left[ D_m (kR)^{|m|+\phi s+2} J_{|m+\phi|}(kr) + (kR)^{-|m|-\phi s} J_{-|m+\phi|} \right], \quad (3.15)$$

onde  $D_m$  é uma constante não-nula. Então, no limite  $R \rightarrow 0$ , desde que

$$|m| + \phi s + 1 > 0, \quad (3.16)$$

teremos

$$f_m(kr) \rightarrow J_{-|m+\phi|}(kr), \quad (3.17)$$

ou ainda, a partir de (3.14), nota-se:

$$|m + \phi| < 1. \quad (3.18)$$

A partir dessa argumentação, Hagen (13) estabelece que a solução admissível para a equação de Dirac é sempre a solução regular  $J_{|m+\phi|}(kr)$ , exceto quando os casos (3.14) e (3.16) forem simultaneamente satisfeitos, quando então apenas a solução irregular seria aceita. Então, decompõe-se o fluxo magnético em uma parte inteira e outra fracionada na forma:

$$\phi = N + \beta, \quad (3.19)$$

com  $0 \leq \beta < 1$  a fim de obter os dois peculiares valores para  $m$ , correspondentes aos dois valores possíveis de *spin*:

$$m = -N, N \geq 0, \quad (3.20)$$

para o caso de *spindown* ( $s = -1$ ), e

$$m = -N - 1, N + 1 \leq 0, \quad (3.21)$$

para o *spin up* ( $s=+1$ ), com a exigência (feita a partir da eq. 3.14) de que  $\phi s < 0$  (para somente este caso da solução irregular sendo considerada, pois teria uma delta atrativa).

Contudo, ao adotar essa forma de proceder, Hagen ignora a possibilidade de que ambas as soluções ocorram simultaneamente, impossibilitando um cancelamento entre os termos do tipo  $e^{-ikr}$  nas expansões assintóticas das soluções da equação de Bessel. Todavia, essa atitude traz importantes consequências nos resultados, pois ao descartar uma combinação linear de soluções regulares e irregulares também nega a existência de estados ligados nesse sistema. Conforme afirmado em (13), o *spin* da partícula impõe um limite através dos números quânticos contidos nas equações (3.20) e (3.21) de modo a limitar o potencial a um valor insuficiente para que este proporcione estados ligados.

Entretanto, através do método da extensão auto-adjunta de operadores, autores como Gerbert (14), Andrade *et. al.* (82), Bordag (17, 85) e Voropaev *et. al.* (86) têm obtido resultados mais abrangentes.

Em (14), Gerbert utiliza o método de extensão auto-adjunta para resolver o caso relativístico do Efeito AB para um elétron. No referido trabalho, o autor utiliza  $\theta$  como o parâmetro de extensão, o qual, quando igualado a  $\pi/2$ , reproduz o resultado obtido por Hagen em (13). O valor para  $(\theta = \pm\pi/2)$  é equivalente a insistir que a componente inferior ou superior permaneçam regulares na origem, respectivamente.

Estes seriam valores extremos em que apenas a solução regular seria válida ou apenas a irregular, casos limites específicos que impossibilitam o surgimento de estados ligados

no sistema. Estados ligados são obtidos para valores intermediários do parâmetro de extensão, quando contribuições das soluções regulares e irregulares influenciam a função de onda total. Os valores limites admissíveis ao parâmetro  $\theta$  que estão relacionados a uma delta atrativa (ou seja, capaz de gerar estados ligados) são:

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}. \quad (3.22)$$

Gerbert (14) desenvolveu uma expressão que permite associar o parâmetro de extensão a física do problema, a saber:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = (-1)^n \left(\frac{E+M}{E-M}\right)^{1/2} \left(\frac{k}{2M}\right)^{2\nu+1} \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu+1)} \tan \mu, \quad (3.23)$$

onde  $\mu$  é um parâmetro associado a  $\theta$ . Se  $\theta = \pi/2$ , a equação anterior tenderá ao infinito, fazendo com que apenas a solução para o *spinor* inferior da função de onda seja válida na origem, enquanto o valor  $\theta = 3\pi/2$  é equivalente a inserir o valor  $\theta = -\pi/2$  na mesma equação referida e apresentada em (14). Nesta segunda ocasião, a equação é igualada a zero e apenas a componente superior permanece aceitável.

Logo, nota-se claramente que o caso estudado em (13) trata-se de uma situação particular, englobada pelo método de extensão. O valor utilizado por Alford e Wilczek em (11) foi de ( $\theta = -\pi/2$ ), ou seja, apenas a componente regular foi considerada válida.

O resultado apresentado por Gerbert para o caso relativístico também deve ser válido para o caso não-relativístico – os cálculos referentes aos estados ligados e espalhamento para uma partícula de *spin* 1/2 podem ser encontrados em detalhes em (87). Outros autores como Hagen (88), Romia *et.al.* (89) e Manuel *et.al.* (90) chegaram a resultados semelhantes mediante o método de aproximação de Born.

No capítulo seguinte, o fenômeno Aharonov-Bohm será investigado em maiores detalhes com a adição de uma métrica cônica, bem como a anomalia do momento magnético, a fim de considerarmos possíveis influências do efeito de  $g > 2$  sobre os resultados finais.

## Capítulo 4

# O Efeito AB com Momento Anômalo em Espaço Cônico

Neste capítulo, analisaremos a solução da Equação de Dirac para o Efeito Aharonov-Bohm com momento anômalo na métrica cônica, a fim de determinarmos os estados ligados e amplitude de espalhamento.

### 4.1 A Equação de Dirac Para o Sistema Aharonov-Bohm em Espaço Cônico.

Conforme apresentado no capítulo 2, a equação de Dirac pode ser escrita na forma usual (com  $\hbar = c = 1$ )

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\Psi = 0, \quad (4.1)$$

e, mediante as equações (2.42) e (2.43), que representam a anomalia do momento magnético e o termo fenomenológico contenedor do tensor eletromagnético, respectivamente,

$$\left[ i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - M - a \frac{\mu_B}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] \Psi = 0, \quad (4.2)$$

neste caso, o acoplamento é denominado não-mínimo. Na equação (4.2), a derivada convencional foi substituída pela derivada covariante de *gauge*, isto é,

$$\partial_\mu \mapsto \partial_\mu + ieA_\mu. \quad (4.3)$$

que é a equação de Dirac considerando o momento anômalo do elétron na presença de um campo magnético. A geometria nesse caso seria trivial, i.e., o campo magnético é perpendicular a um plano. Todavia, esse é um caso particular da geometria cônica, cuja métrica é escrita na forma (91)

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + \alpha^2 r^2 d\phi^2 + dz^2, \quad (4.4)$$

com tensor métrico  $R_{12}^{12}$

$$R_{12}^{12} = R_1^1 = R_2^2 = 2\pi \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \delta^2(r), \quad (4.5)$$

onde o caso específico da geometria planar é obtido quando  $\alpha = 1$ . Logo, para o espaço-tempo cônico, a conexão do spin é apresentada conforme (4, 91),

$$\gamma^\mu \Gamma_\mu = -\frac{1-\alpha}{2\alpha r} \gamma^r \quad (4.6)$$

Portanto, a equação de Dirac adquire a forma final (91):

$$\left[ i\gamma^\mu (\partial_\mu + \Gamma_\mu) - e\gamma^\mu A_\mu - a \frac{\mu_B}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - M \right] \Psi = 0. \quad (4.7)$$

Desenvolvendo os índices das matrizes de Dirac, teremos:

$$\left[ i(\gamma^0 \partial_0 + \gamma^i \partial_i) - e\gamma^i A_i + i\gamma^i \Gamma_i - a \frac{\mu_B}{2} (\sigma^{0\nu} F_{0\nu} + \sigma^{\mu 0} F_{\mu 0} + \sigma^{ij} F_{ij}) - M \right] \Psi = 0. \quad (4.8)$$

O tensor eletromagnético é apresentado, em coordenadas cilíndricas como

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \text{sen}\theta E_y + \text{cos}\theta E_x & \frac{\text{cos}\theta E_y + \text{sen}\theta E_x}{r} & E_z \\ -\text{sen}\theta E_y - \text{cos}\theta E_x & 0 & -\frac{B_z}{r} & \text{cos}\theta B_y + \text{sen}\theta B_x \\ -\text{cos}\theta E_y - \text{sen}\theta E_x & \frac{B_z}{r} & 0 & \frac{-\text{sen}\theta B_y + \text{cos}\theta B_x}{r} \\ -E_z & -\text{cos}\theta B_y - \text{sen}\theta B_x & \frac{\text{sen}\theta B_y - \text{cos}\theta B_x}{r} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Porém, uma vez que  $E = 0$ ,  $F^{0\nu} = F^{\mu 0} = -F_{0\nu} = -F_{\mu 0} = 0$ , deveremos obter:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{B_z}{r} & \text{cos}\theta B_y + \text{sen}\theta B_x \\ 0 & \frac{B_z}{r} & 0 & \frac{-\text{sen}\theta B_y + \text{cos}\theta B_x}{r} \\ 0 & -\text{cos}\theta B_y - \text{sen}\theta B_x & \frac{\text{sen}\theta B_y - \text{cos}\theta B_x}{r} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Além disso, em (4.8)  $A_0 = 0$  pois o potencial elétrico é nulo. Conforme exposto em (91) e (4),  $\gamma^i \Gamma^i = -\frac{1-\alpha}{2\alpha r} \gamma^r$ , com

$$\gamma^r = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^r \\ -\sigma^r & 0 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

tais que  $\sigma^i = \sigma^r, \sigma^\phi, \sigma^z$ , que são as matrizes de Pauli em coordenadas cilíndricas (92),

$$\sigma^r = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} \\ e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}, \sigma^\phi = \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\phi} \\ ie^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}, \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Até então, a equação de Dirac assume a seguinte forma:

$$\left[ i(\gamma^0 \partial_0 + \gamma^i \partial_i) - e\gamma^i A_i + i\gamma^i \Gamma_i + ia \frac{\mu_B}{2} \frac{B_z}{r} [\gamma^1, \gamma^2] - M \right] \Psi = 0, \quad (4.13)$$

a qual pode ser multiplicada por  $(-\gamma^0)$  de modo a gerar

$$\left[ -i\gamma^0 \gamma^i \partial_i + e\gamma^0 \gamma^i A_i - i\gamma^0 \gamma^i \Gamma_i - ia \frac{\mu_B}{2} \frac{B_z}{r} \gamma^0 [\gamma^1, \gamma^2] + \gamma^0 M \right] \Psi = i\partial_0 \Psi, \quad (4.14)$$

onde

$$\frac{i}{2} [\gamma^i, \gamma^j] := \sigma^{ij}. \quad (4.15)$$

E, conforme já ressaltado, a direção do campo magnético coincide com o eixo  $z$  para um filamento de raio ínfimo, o que leva à conclusão de que

$$\sigma^{ij} F_{ij} = \sigma^{12} F_{12} + \sigma^{21} F_{21} = \frac{i}{2} ([\gamma^1, \gamma^2] F_{12} + [\gamma^2, \gamma^1] F_{21}). \quad (4.16)$$

Resolvendo a equação acima, não é difícil obter:

$$\sigma^{ij} F_{ij} = -i \frac{B_z}{r} \quad (4.17)$$

Então, retornando à equação (4.14), associando o termo  $i\partial_0$  à mesma e notando que  $\gamma^0 = \beta$ ,

$$\left\{ \beta \gamma^i (-i\partial_i - i\Gamma_i + eA_i) - ia \frac{\mu_B}{2} \frac{B_z}{r} \beta [\gamma^1, \gamma^2] + \beta M \right\} \Psi = E\Psi. \quad (4.18)$$

O momento canônico  $\Pi_i$  nesta ocasião torna-se  $(-i\partial_i - i\Gamma_i + eA_i)$  de tal maneira que:

$$\left\{ \beta \gamma^i \Pi_i + \beta M - ia \frac{\mu_B}{2} \frac{B_z}{r} \beta (\gamma^1 \gamma^2 - \gamma^2 \gamma^1) \right\} \Psi = E\Psi \quad (4.19)$$

Logo, sabendo que

$$i\gamma^0 [\gamma^1, \gamma^2] = 2 \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

a equação de Dirac adquire então a forma simplificada



$$\left\{ \beta\gamma^i\Pi_i + \beta m - a\mu_B \frac{B_z}{r} \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \right\} \Psi = E\Psi. \quad (4.21)$$

Tal como presente na literatura (91), utilizamos  $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$ , com  $i = 1, 2, 3$ .

O desenvolvimento dos índices das matrizes gama  $\gamma^i$  nos leva à equação:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \sigma_r\Pi_1 + \sigma_\phi\Pi_2 \\ \sigma_r\Pi_1 + \sigma_\phi\Pi_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_z M - E & 0 \\ 0 & -\sigma_z M - E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sigma_z a\mu_B B_z & 0 \\ 0 & -\sigma_z a\mu_B B_z \end{pmatrix} \right\}_{\Psi=0} \quad (4.22)$$

Ou, expandindo as matrizes anteriores e decompondo o *spinor* de Dirac, diretamente obteremos:

$$\begin{pmatrix} -a\mu_B B_z + M - E & 0 & 0 & e^{-i\phi}\Pi_1 - ie^{-i\phi}\Pi_2 \\ 0 & a\mu_B B_z - M - E & e^{i\phi}\Pi_1 + ie^{i\phi}\Pi_2 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi}\Pi_1 - ie^{-i\phi}\Pi_2 & -a\mu_B B_z - M - E & 0 \\ e^{i\phi}\Pi_1 + ie^{i\phi}\Pi_2 & 0 & 0 & a\mu_B B_z + M - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = 0, \quad (4.23)$$

que corresponde ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} (e^{-i\phi}\Pi_1 - ie^{-i\phi}\Pi_2)\psi_4 + (-a\mu_B B_z + M - E)\psi_1 = 0 \\ (e^{i\phi}\Pi_1 + ie^{i\phi}\Pi_2)\psi_3 + (a\mu_B B_z - M - E)\psi_2 = 0 \\ (e^{-i\phi}\Pi_1 - ie^{-i\phi}\Pi_2)\psi_2 + (-a\mu_B B_z - M - E)\psi_3 = 0 \\ (e^{i\phi}\Pi_1 + ie^{i\phi}\Pi_2)\psi_1 + (a\mu_B B_z + M - E)\psi_4 = 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

No momento, é conveniente adotarmos uma notação condensada para equação (4.24); se definirmos a notação

$$\psi_a = \begin{cases} \psi_1, & \text{se } s = 1 \\ \psi_2, & \text{se } s = -1 \end{cases} \quad (4.25)$$

e

$$\psi_b = \begin{cases} \psi_4, & \text{se } s = 1 \\ \psi_3, & \text{se } s = -1 \end{cases} \quad (4.26)$$

De modo a obter:

$$\begin{cases} (e^{-is\phi}\Pi_1 - ise^{-is\phi}\Pi_2)\psi_b + (-sa\mu_b B_z + M - E)\psi_a = 0 \\ (e^{is\phi}\Pi_1 + ise^{is\phi}\Pi_2)\psi_a + (-sa\mu_b B_z - M - E)\psi_b = 0, \end{cases} \quad (4.27)$$

a qual pode ser reescrita na sua forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} -sa\mu_b B_z + M - E & e^{-is\phi}\Pi_1 - ise^{-is\phi}\Pi_2 \\ e^{is\phi}\Pi_1 + ise^{is\phi}\Pi_2 & -sa\mu_b B_z - M - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = 0. \quad (4.28)$$

Alguns termos da expressão (4.28) podem ser reescritos se o limite não-relativístico for tomado. Admitindo que a energia da partícula é  $E = M + \varepsilon$ , neste limite têm-se  $\varepsilon \ll M$ . Então, uma vez que  $M - E = -\varepsilon$  e  $-sa\mu_b B_z \ll m$ , teremos:

$$-sa\mu_b B_z - M - E \approx -2M. \quad (4.29)$$

Portanto, a matriz (4.28) assumirá a forma abaixo:

$$\begin{pmatrix} -sa\mu_b B_z + M - E & e^{-is\phi}\Pi_1 - ise^{-is\phi}\Pi_2 \\ e^{is\phi}\Pi_1 + ise^{is\phi}\Pi_2 & -2M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = 0 \quad (4.30)$$

Cujo sistema de equações será dado por:

$$\begin{cases} (-sa\mu_b B_z + M - \varepsilon)\psi_a + (e^{-is\phi}\Pi_1 - ise^{-is\phi}\Pi_2)\psi_b = 0 \\ (e^{is\phi}\Pi_1 + ise^{is\phi}\Pi_2)\psi_a - 2M\psi_b = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

Facilmente constatamos que

$$\psi_b = \frac{e^{is\phi}\Pi_1 + ise^{is\phi}\Pi_2}{2M}\psi_a, \quad (4.32)$$

De maneira que, a substituição de  $\psi_b$  em (4.31) implicará em:

$$(-sa\mu_b B_z + m - \varepsilon)\psi_a + (e^{-is\phi}\Pi_1 - ise^{-is\phi}\Pi_2)\frac{e^{is\phi}\Pi_1 + ise^{is\phi}\Pi_2}{2M}\psi_a = 0, \quad (4.33)$$

a qual, após curta manipulação algébrica, nos levará à expressão

$$(-sa\mu_b B_z + M - \varepsilon)\psi_a + \frac{1}{2M}(\Pi_1^2 + i^2\Pi_1\Pi_2 - is\Pi_2\Pi_1 + \Pi_2^2)\psi_a = 0. \quad (4.34)$$

No segundo termo de (4.34) está presente o comutador  $[\Pi_1, \Pi_2]$ , o qual, uma vez solucionado, produzirá:

$$\left\{ \Pi_1^2 + \Pi_2^2 - seB_z - 2Msa\frac{e}{2M}B_z \right\} \psi_a = k^2\psi_a, \quad (4.35)$$

onde  $\mu_B = \frac{e}{2M}$  e  $2M\varepsilon = k^2$ ; Outrossim, expressamos o campo magnético em termos do potencial vetor  $\vec{A}$ :

$$eB_z = e\vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{e\Phi_0}{2\pi} \frac{\delta(r)}{r} = -\phi \frac{\delta(r)}{r}, \quad (4.36)$$

em que  $\Phi_0 = h/2e$ . Então, deve-se obter:

$$[\Pi_1^2 + \Pi_2^2 - (a+1)s e B_z] \psi_a = k^2 \psi_a, \quad (4.37)$$

tal que  $\Pi = \frac{1}{i}(\vec{\nabla} + \Gamma) - eA$  e  $a+1 = \left(\frac{g-2}{2}\right) + 1 = \frac{g}{2}$ . Logo,

$$\left\{ \left[ \frac{1}{i} \vec{\nabla}_\alpha + \left( \frac{1-\alpha}{2\alpha r} - e\vec{A} \right) \hat{\varphi} \right]^2 + \frac{g\phi s}{2\alpha} \frac{\delta(r)}{r} \right\} \psi_a = k^2 \psi_a, \quad (4.38)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo que estabelece o parâmetro de abertura do cone, e:

$$\vec{\nabla}_\alpha = \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\alpha^2 r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi^2}. \quad (4.39)$$

Para a componente  $\psi_b$ , basta realizar a troca  $s \rightarrow -s$ . Definindo  $\varsigma \equiv \frac{g\phi s}{2}$ , a expressão (4.38) ficará:

$$\left\{ \left[ \frac{1}{i} \vec{\nabla}_\alpha + \left( \frac{1-\alpha}{2\alpha r} - e\vec{A} \right) \hat{\varphi} \right]^2 + \frac{\varsigma}{\alpha} \frac{\delta(r)}{r} \right\} \psi_a = k^2 \psi_a. \quad (4.40)$$

É interessante notar que a equação (4.40) engloba casos mais particulares, como a situação de uma partícula com *spin* em uma métrica plana (caso  $\alpha = 1$ ) ou ainda o caso trivial para uma partícula sem *spin*, quando  $\varsigma = 0$  e a delta presente em (4.40) desaparece.

## 4.2 Decomposição da Função de Onda

A decomposição da função de onda  $\psi_a$  dar-se-á de acordo com a aplicação do operador  $\vec{\nabla}_\alpha$  presente na equação anterior:

$$k^2 \psi_a = \left\{ -\nabla^2 + \frac{1}{i} \nabla \cdot \left[ \left( \frac{1-\alpha}{2\alpha r} - e\vec{A} \right) \hat{\varphi} \right] + \frac{1}{i} \left( \frac{1-\alpha}{2\alpha r} - e\vec{A} \right) \hat{\varphi} \cdot \nabla + \left( \frac{1-\alpha}{2\alpha r} - e\vec{A} \right)^2 + \frac{\varsigma}{\alpha} \frac{\delta(r)}{r} \right\} \psi_a \quad (4.41)$$

uma vez que  $\vec{\nabla} \vec{A} = 0$  e  $e\vec{A} = -\frac{\phi}{\alpha r} \hat{\varphi}$ ,

$$k^2 \psi_a = \left\{ -\nabla^2 + \frac{1}{i} \left( \frac{1-\alpha}{2\alpha^2 r^2} \right) + \frac{1}{i} \left( \frac{1-\alpha}{2\alpha r} \right) \hat{\varphi} \cdot \vec{\nabla} + \frac{1}{i} \frac{\phi}{\alpha r} \hat{\varphi} \cdot \vec{\nabla} + \frac{[(1-\alpha)/2]^2}{\alpha^2 r^2} + \frac{(1-\alpha)}{\alpha r} \frac{\phi}{\alpha r} \hat{\varphi} + \frac{\phi^2}{\alpha^2 r^2} + \frac{\varsigma}{\alpha} \frac{\delta(r)}{r} \right\} \psi_a. \quad (4.42)$$

Então, o prosseguimento dos cálculos leva à equação:

$$k^2\psi_a = \left\{ -\nabla^2 + \frac{1}{i}\left(\frac{1-\alpha}{2\alpha r}\right)\hat{\varphi}\cdot\vec{\nabla} + \frac{1}{i}\frac{\phi}{\alpha r}\hat{\varphi}\cdot\vec{\nabla} + \frac{[(1-\alpha)/2]^2}{\alpha^2 r^2} + \frac{\phi}{\alpha^2 r^2}[(1-\alpha)\hat{\varphi} + \phi] + \frac{\varsigma}{\alpha}\frac{\delta(r)}{r} \right\} \psi_a, \quad (4.43)$$

onde  $\nabla\psi = \left\{ \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{\alpha r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\hat{\varphi} \right\}$ ; Então, fazendo a decomposição de  $\psi$  em auto-funções do momento angular da forma

$$\psi_a(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} f_m(r)e^{im\varphi}, \quad (4.44)$$

deste modo, obteremos

$$k^2 f_m(r)e^{im\varphi} = \left\{ -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{m^2}{\alpha^2 r^2} + \frac{1}{i}\left(\frac{1-\alpha}{2\alpha r}\right)\frac{1}{\alpha r}\hat{\varphi}\cdot\hat{\varphi} + \frac{1}{i}\frac{\phi}{\alpha r}\frac{im}{\alpha r}\hat{\varphi}\cdot\hat{\varphi} + \frac{[(1-\alpha)/2]^2}{\alpha^2 r^2} + \frac{\phi}{\alpha^2 r^2}[(1-\alpha)\hat{\varphi} + \phi] + \frac{\varsigma}{\alpha}\frac{\delta(r)}{r} \right\} f_m(r)e^{im\varphi}. \quad (4.45)$$

A qual, uma vez colocado em evidência o termo referente à parte angular, tornar-se-á:

$$k^2 = \left\{ \left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{m^2}{\alpha^2 r^2} \right] + \frac{(1-\alpha)/2}{\alpha^2 r^2}m + \frac{\phi}{\alpha^2 r^2}m \right\} f_m + \left\{ \frac{[(1-\alpha)/2]^2}{\alpha^2 r^2}\hat{I} + \frac{\phi}{\alpha^2 r^2}[(1-\alpha)\hat{\varphi} + \phi] + \frac{\varsigma}{\alpha}\frac{\delta(r)}{r} \right\} f_m, \quad (4.46)$$

e a equação (4.46) assumirá a forma:

$$k^2 f_m = \left\{ \left( -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{m^2}{\alpha^2 r^2} \right) + \frac{1-\alpha}{2\alpha^2 r^2}m + \frac{\phi m}{\alpha^2 r^2} \right\} f_m + \left\{ \frac{[(1-\alpha)/2]^2}{\alpha^2 r^2} + \frac{\phi}{\alpha^2 r^2}(1-\alpha) + \frac{\phi^2}{\alpha^2 r^2} + \frac{\varsigma}{\alpha}\frac{\delta(r)}{r} \right\} f_m, \quad (4.47)$$

ou ainda, através da expressão (4.47) é possível atingir:

$$k^2 f_m = f_m \left\{ -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{m^2}{\alpha^2 r^2} + \frac{1-\alpha}{2\alpha^2 r^2}m + \frac{\phi m}{\alpha^2 r^2} \right\} + \left\{ \frac{[(1-\alpha)/2]^2}{\alpha^2 r^2} + \frac{\phi}{\alpha^2 r^2}(1-\alpha) + \frac{\phi^2}{\alpha^2 r^2} + \frac{\varsigma}{\alpha}\frac{\delta(r)}{r} \right\} f_m, \quad (4.48)$$

Então, uma vez que

$$\begin{aligned} \frac{[m + \phi + (1 - \alpha)/2]^2}{\alpha^2 r^2} &= \frac{1}{\alpha^2 r^2} \{m^2 + 2m[\phi + (1 - \alpha)/2] + [\phi + (1 - \alpha)/2]^2\} \\ &= \frac{m^2 + 2m[\phi + (1 - \alpha)/2] + \phi^2 + \phi(1 - \alpha) + [(1 - \alpha)/2]^2}{\alpha^2 r^2}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

Facilmente conclui-se que:

$$\left\{ -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{[m + \phi + (1 - \alpha)/2]^2}{\alpha^2 r^2} + \frac{\varsigma \delta(r)}{\alpha r} \right\} f_m = k^2 f_m. \quad (4.50)$$

Definindo o hamiltoniano efetivo  $h$  na forma

$$h := \left\{ -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{[m + \phi + (1 - \alpha)/2]^2}{\alpha^2 r^2} + \frac{\varsigma \delta(r)}{\alpha r} \right\}, \quad (4.51)$$

escrevemos a equação (4.50) como:

$$h f_m = k^2 f_m. \quad (4.52)$$

Contudo, deve-se ressaltar que o Hamiltoniano na forma de  $h$  não é um operador contínuo e nem limitado (12). O Hamiltoniano  $h_0$  já é conhecido na forma:

$$h_0 := \left\{ -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{[m + \phi + (1 - \alpha)/2]^2}{\alpha^2 r^2} \right\}. \quad (4.53)$$

Ora, uma vez que  $h$  não satisfaz as condições de limite e continuidade, é necessário adaptar o operador  $h_0$  na forma do operador  $h_\eta$  referente ao método de Bulla-Gesztesy.

### 4.3 Extensões auto-adjuntas pelo Método de Bulla-Gesztesy

Na atual seção,  $h$  será considerado uma extensão auto-adjunta de  $h_0$  (93), logo será necessária a utilização das condições de Bulla-Gesztesy à determinação do parâmetro da extensão auto-adjunta e da energia de estado ligado do respectivo sistema.

O hamiltoniano de Bulla-Gesztesy  $h_\eta$  é dado por

$$h_\eta := \left\{ -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l-1)}{r^2} + \frac{\gamma}{r} + \frac{\mu}{r^{-a}} + W \right\}. \quad (4.54)$$

A transformação  $U h_0 U^{-1}$  definirá  $\tilde{h}_0$ . Então,

$$U f(r) = r^{1/2} f(r) \quad (4.55)$$

O operador hamiltoniano  $h_0$  pode ser colocado em termos de  $h_\eta$  através da aplicação:

$$\tilde{h}_0 f(r) = U h_0 U^{-1} f(r) = r^{1/2} \left\{ -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{[m + \phi + (1 - \alpha)/2]^2}{\alpha^2 r^2} \right\} [r^{-1/2} f(r)] \quad (4.56)$$

A fim de obter o seguinte resultado:

$$\tilde{h}_0 f(r) = \left\{ -\frac{d^2}{dr^2} + \left[ \frac{[m + \phi + (1 - \alpha)/2]^2}{\alpha^2} - \frac{1}{4} \right] \frac{1}{r^2} \right\} f(r). \quad (4.57)$$

Ao comparar o resultado obtido em (4.57) com a equação (4.54), claramente perceberemos que se as constantes  $\gamma$ ,  $\alpha$  e  $W$  forem igualadas a zero, a expressão (4.57) será obtida, de modo que

$$l(l - 1) = \frac{[m + \phi + (1 - \alpha)/2]^2}{\alpha^2} - \frac{1}{4}. \quad (4.58)$$

Conforme mencionado no capítulo 2, o teorema de Bulla-Gesztesy é aplicável quando o Hamiltoniano  $h_\eta$  não é auto-adjunto. Então, conforme demonstram Reed e Simon (63),  $h$  **não** será um operador auto-adjunto quando a seguinte condição ocorrer:

$$l(l - 1) < \frac{3}{4}. \quad (4.59)$$

Neste caso, teremos

$$\frac{[m + \phi + (1 - \alpha)/2]^2}{\alpha^2} - \frac{1}{4} < \frac{3}{4}, \quad (4.60)$$

Ou seja,

$$\frac{[m + \phi + (1 - \alpha)/2]^2}{\alpha^2} < 1, \quad (4.61)$$

a qual pode assumir os valores abaixo descritos:

$$-1 < \frac{m + \phi + (1 - \alpha)/2}{\alpha} < 1, \quad (4.62)$$

Todavia, como explicitado na equação (2.23), conforme desenvolvido no método *BG* os valores aceitáveis para  $l$  variam entre  $1/2 \leq l < 3/2$ , logo o único valor aceitável para  $l$  será  $\frac{1}{2} + |m + \phi + (1 - \alpha)/2|/\alpha$ .

A utilização da opção acima, conforme desenvolvida por Bulla-Gesztesy<sup>1</sup> gerará:

$$f^{(0)} = \lambda_m f^{(1)}, \quad (4.63)$$

onde  $\lambda_m$  é o parâmetro de extensão,

---

<sup>1</sup>A análise do método de extensão de BG está além do escopo desta dissertação, a qual apenas aplicou o método ao estudo do Efeito AB. Os resultados apresentados aqui sem dedução podem ser encontrados em (12).

$$f^{(0)} := \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{g(r)}{r^{1/2}} r^{|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha} \quad (4.64)$$

e

$$f^{(1)} := \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^{|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha}} \left[ \frac{g(r)}{r^{1/2}} - f^{(0)} \frac{1}{r^{|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha}} \right]. \quad (4.65)$$

No presente trabalho,  $\lambda_m$  é denominado parâmetro de extensão auto-adjunta; segundo (4), este parâmetro possui uma interpretação física e representa a amplitude de espalhamento de  $h_{0,\lambda_0}$ . Para  $\lambda_0$ , têm-se o Hamiltoniano livre (a função  $\delta$  inexistente neste caso) com soluções regulares na origem e para  $\lambda_m \neq 0$  a condição de contorno (4.63) permite uma singularidade  $r^{-|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha}$  das funções de onda na origem.

## 4.4 Determinação das Energias de Estado Ligado

Agora, é necessário usar a abordagem de Bulla-Gesztasy para determinar os estados ligados do Hamiltoniano  $h$ , com o propósito de determinar a extensão auto-adjunta em termos de propriedades físicas do sistema.

É possível reescrever as soluções em forma alternativa. As soluções para a equação

$$h_0 f_m(r) = k^2 f_m(r), \quad (4.66)$$

cuja forma explícita da equação diferencial será:

$$\left\{ -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{[m + \phi + (1 - \alpha)/2]^2}{\alpha^2 r^2} - k^2 \right\} f_m(r) = 0, \quad (4.67)$$

com  $r \neq 0$ ; levando em consideração os valores apresentados em (4.62), podem ser escritas em termos da função hipergeométrica confluyente do primeiro tipo  $M(a, b, z)$  (para detalhes acerca de funções especiais, o leitor pode consultar as referências (94) e (95)).

A função hipergeométrica neste caso assume a seguinte forma: (4),

$$f_m(r) = a_m e^{-ikr} (2ikr)^{|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha} M\left(\frac{1}{2} + \frac{|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha}{\alpha}, 1 + 2\frac{|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha}{\alpha}, 2ikr\right) + b_m e^{-ikr} (2ikr)^{-|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha} M\left(\frac{1}{2} - \frac{|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha}{\alpha}, 1 - 2\frac{|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha}{\alpha}, 2ikr\right), \quad (4.68)$$

onde  $a_m$  e  $b_m$  são os coeficientes das soluções regulares e irregulares respectivamente.

Então, ao introduzirmos a equação (4.68) na condição de contorno (4.63), é possível obter uma relação entre os coeficientes em consideração tais que:

$$\lambda_m a_m = (2ik)^{-2|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha} b_m \left( 1 + \frac{\lambda_m k^2}{4(1 - |m + \phi + (1 - \alpha)/2|/\alpha)} \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{2-2|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha} \right). \quad (4.69)$$

Todavia, deve-se notar que na equação (4.69) o coeficiente  $b_m$  apresenta uma divergência com o limite  $\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{2-2|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha}$  caso  $|m + \phi + (1 - \alpha)/2|/\alpha \geq 1$ . Logo, para esses valores conclui-se que  $b_m$  deve ser igual a zero.

Por conseguinte, a presença da solução irregular deriva do fato que o operador não é auto-adjunto para o caso  $|m + \phi + (1 - \alpha)/2|/\alpha < 1$ ; outrossim, a solução irregular está associada com a extensão auto-adjunta do operador  $H_0$  (96)-(97).

Ou seja, a extensão auto-adjunta consiste basicamente na inclusão de soluções irregulares no domínio do operador  $H_0$  i.e.,  $D(H_0)$ ; o que nos permite solucionar a condição de contorno apropriada ao problema.

É possível obter a função de onda para o estado ligado através da substituição  $k \rightarrow ik$  na equação (4.69), o que gerará:

$$f_m^b(r) = a_m e^{kr} (-2kr)^{|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha} M\left(\frac{1}{2} + \frac{|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha}{\alpha}, 1 + 2\frac{|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha}{\alpha}, -2kr\right) + b_m e^{kr} (-2kr)^{-|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha} M\left(\frac{1}{2} - \frac{|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha}{\alpha}, 1 - 2\frac{|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha}{\alpha}, -2kr\right). \quad (4.70)$$

Logo, para que  $f_m^b(r)$  seja um estado ligado, o mesmo deve ser normalizável de tal modo que venha a desaparecer para valores grandes de  $r$ . Então, mediante a utilização da bem conhecida forma assintótica de  $M(a, b, z)$  para  $z \rightarrow \infty$ , teremos:

$$M(a, b, z) \sim \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b} + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} (-z)^{-a}. \quad (4.71)$$

onde  $\Gamma$  são as funções gama. Desse modo, a condição de normalizabilidade implica em:

$$\frac{b_m}{a_m} = -16^{|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha} \frac{\Gamma(+)}{\Gamma(-)}, \quad (4.72)$$

onde  $\Gamma(+)$  =  $\Gamma(1 + \nu)$  e  $\Gamma(-)$  =  $\Gamma(1 - \nu)$ , com  $\nu = |m + \phi + (1 - \alpha)/2|$

Então, pela equação (4.69), para a expressão  $|m + \phi + (1 - \alpha)/2|/\alpha$  pode-se obter a seguinte relação:

$$\frac{b_m}{a_m} = \lambda_m (-2k)^{2|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha}; \quad (4.73)$$

Logo, ao combinar ambas as equações anteriores, diretamente obtemos a energia de estado ligado  $E_b$ :

$$E_b = -\frac{2}{M} \left[ -\frac{1}{\lambda_m} \frac{\Gamma(1 + |m + \phi + (1 - \alpha)/2|/\alpha)}{\Gamma(1 - |m + \phi + (1 - \alpha)/2|/\alpha)} \right]^{\alpha/|m+\phi+(1-\alpha)/2|}. \quad (4.74)$$



Para  $\alpha = 1$ , têm-se o efeito AB no espaço plano, de modo que

$$E_b = -\frac{2}{M} \left[ -\frac{1}{\lambda_m} \frac{\Gamma(1 + |m + \phi|)}{\Gamma(1 - |m + \phi|)} \right]^{1/|m + \phi|}. \quad (4.75)$$

Além disso, mediante a utilização do método Kay-Studer (KS)<sup>2</sup> (98) (embora aqui citado *en passant*), Andrade *et. al.* (4) obteve o resultado para a energia de estado ligado através do método KS, sendo possível formular esta energia em termos dos parâmetros físicos intrínsecos ao problema, incluindo o fator  $g$  do elétron e o raio do solenoide (da ordem de  $75 \mu m$ ). Para o problema tratado no presente trabalho, i.e., o da partícula situada sujeita a uma métrica cônica mas também possuidora de momento anômalo, a equação (57) apresentada em (4) tornar-se-á:

$$E_b = -\frac{2}{Mr_0^2} \left[ \left( \frac{g\phi s/2 + |m + \phi + (1 - \alpha)/2|}{g\phi s/2 - |m + \phi + (1 - \alpha)/2|} \right) \frac{\Gamma(1 + |m + \phi + (1 - \alpha)/2|/\alpha)}{\Gamma(1 - |m + \phi + (1 - \alpha)/2|/\alpha)} \right]^{\alpha/|m + \phi + (1 - \alpha)/2|}, \quad (4.76)$$

nota-se que não há parâmetro arbitrário na equação (4.76). Para assegurar que energia é um número real, é necessário que:

$$\left( \frac{g\phi s/2 + |m + \phi + (1 - \alpha)/2|}{g\phi s/2 - |m + \phi + (1 - \alpha)/2|} \right) \frac{\Gamma(1 + |m + \phi + (1 - \alpha)/2|/\alpha)}{\Gamma(1 - |m + \phi + (1 - \alpha)/2|/\alpha)} > 0. \quad (4.77)$$

A desigualdade anterior é satisfeita para o caso  $|\frac{g\phi s}{2}| \geq |m + \phi + (1 - \alpha)/2|$ , e considerando que  $|m + \phi + (1 - \alpha)/2| < 1$ , é suficiente considerar  $|\frac{g\phi s}{2}| \geq 1$ .

Contudo, conforme ressaltado em (4) e (13), uma condição necessária para que a função delta gere um potencial atrativo é que a constante de acoplamento  $(\frac{g\phi s}{2\alpha})$  seja negativa; além disso, uma vez que  $\alpha \in (0, 1]$ , a existência dos estados ligados será reconhecida se:

$$\frac{g\phi s}{2} \leq -1, \quad (4.78)$$

de modo que  $\frac{g\phi s}{2} \leq 0$ , onde o fluxo magnético e o spin serão antiparalelos, com um valor mínimo para  $|\phi|$ . O fato do fator  $g$  para o elétron ser ligeiramente maior do que 2 (previsto teoricamente pela Eletrodinâmica Quântica) está relacionado ao fenômeno da auto-interação do elétron ao emitir fótons virtuais, o qual será discutido em maiores detalhes ao fim deste capítulo.

---

<sup>2</sup>Assim como o método BG, o método KS é baseado nas condições de contorno, porém o segundo consiste na escolha das soluções de derivadas logarítmicas das soluções de energia zero para a equação (4.66). Embora seja de certa maneira mais preciso do que o método BG, *e.g.*, ao fornecer a equação da energia diretamente em termos das constantes físicas do problema, esta abordagem não é útil para se calcular a matriz de espalhamento.

A comparação direta das equações (4.75) e (4.76) permite a importante obtenção de uma expressão para o parâmetro de extensão em termos dos parâmetros físicos relacionadas ao problema em questão, *e.g.* o raio do cilindro  $r_0$ . Assim, segue-se que:

$$\frac{1}{\lambda_m} = -\frac{1}{r_0^{2|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha}} \left( \frac{g\phi s/2 + |m + \phi + (1 - \alpha)/2|}{g\phi s/2 - |m + \phi + (1 - \alpha)/2|} \right), \quad (4.79)$$

ou ainda:

$$\lambda_m = -r_0^{2|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha} \left\{ \frac{g\phi s/2 - |m + \phi + (1 - \alpha)/2|}{g\phi s/2 + |m + \phi + (1 - \alpha)/2|} \right\}. \quad (4.80)$$

A equação (4.79) é um resultado deveras importante pois relaciona o parâmetro de extensão à física subjacente ao problema.

## 4.5 Determinação da Matriz de Espalhamento

Para o estudo do caso de espalhamento, é conveniente escrevermos a solução da equação (4.66) em termos das funções de Bessel na seguinte maneira:

$$f_m(r) = c_m J_\nu(kr) + d_m Y_\nu(kr), \quad (4.81)$$

onde  $c_m$  e  $d_m$  são constantes. Em um procedimento análogo ao realizado na seção anterior, é possível estabelecer uma relação entre as constantes  $c_m$ ,  $d_m$  e o parâmetro de extensão  $\lambda_m$ , de modo a obter:

$$\frac{c_m}{d_m} = \frac{\left[ Bk^{-\nu} - \lambda_m^s \left( Ck^\nu + BDk^{-\nu} \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{2-2\nu} \right) \right]}{\lambda_m^s \nu k^\nu}, \quad (4.82)$$

onde

$$A = \frac{1}{2^\nu \Gamma(+)}, \quad (4.83)$$

$$B = -\frac{2^\nu \Gamma(\nu)}{\pi}, \quad (4.84)$$

$$C = -\frac{\cos(\pi\nu)\Gamma(-\nu)}{\pi 2^\nu}, \quad (4.85)$$

e

$$D = \frac{k^2}{4(1 - \nu)}, \quad (4.86)$$

lembrando que  $\nu = |m + \phi + (1 - \alpha)/2| / \alpha$ .

Semelhantemente ao procedimento adotado no cálculo da energia de estados ligados, sempre que  $|m + \phi + (1 - \alpha)/2| / \alpha < 1$ , teremos  $d_m \neq 0$ , ou seja, na origem teremos a contribuição da solução irregular  $Y_\nu(z)$  quando o operador não é auto-adjunto. Desse modo, para  $|m + \phi + (1 - \alpha)/2| / \alpha < 1$ , obteremos:

$$\frac{c_m}{d_m} = \frac{Bk^{-\nu} - \lambda_m^s Ck^\nu}{\lambda_m^s A k^\nu} \quad (4.87)$$

A substituição das expressões (4.83) a (4.86) em (4.87) a fim de isolar  $d_m$  levará ao seguinte resultado:

$$d_m = -\mu_m^{\lambda^s}(k, \phi)c_m, \quad (4.88)$$

onde

$$\mu_m^{\lambda^s}(k, \phi) = \frac{\lambda_m^s k^{2\nu} \Gamma(-)}{\lambda_m^s k^{2\nu} \Gamma(-) \cos(\pi\nu) + 4^\nu \Gamma(+)} \quad (4.89)$$

Uma vez que  $\delta$  é um potencial de curto alcance, é possível utilizar a expansão assintótica para  $f_m(r)$  com  $\rightarrow \infty$  conforme assevera (99),

$$f_m(r) \sim \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} \cos\left(kr - \frac{|m|\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \delta_m^{\lambda^s}(k, \phi)\right), \quad (4.90)$$

e através das expansões contidas em Abramowitz (100) para  $J_\nu(z)$  e  $Y_\nu(z)$ ,

$$J_\nu(kr) \approx \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} \cos\left(kr - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (4.91)$$

e

$$Y_\nu(kr) \approx \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} \text{sen}\left(kr - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.92)$$

a função de onda tomará a forma seguinte:

$$f_m(r) \approx c_m \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} \left[ \cos\left(kr - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \mu_m^{\lambda^s} \text{sen}\left(kr - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad (4.93)$$

em que  $\delta_m^{\lambda^s}(k, \phi)$  representa o deslocamento de fase de espalhamento observada no efeito Aharonov-Bohm. Este deslocamento pode ser interpretado como uma medida da diferença no argumento do comportamento assintótico da solução  $J_{|m|}(kr)$  da equação radial que é regular na origem. Comparando a equação anterior com a expressão (4.90), é possível

notar que:

$$\cos \left( kr - \frac{\pi |m + \phi + (1 - \alpha)/2|/\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} + \theta_{\lambda_m^s} \right) = \cos \left( kr - \frac{|m|\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \delta_m^{\lambda_m^s}(k, \phi) \right), \quad (4.94)$$

onde  $\theta_{\lambda_m^s}$  é escrito como:

$$\begin{aligned} \cos \theta_{\lambda_m^s} &= c_m, \\ \text{sen } \theta_{\lambda_m^s} &= c_m \mu_m^{\lambda_m^s} \end{aligned} \quad (4.95)$$

de modo que a equação (4.90) será satisfeita caso:

$$c_m = \left[ 1 + (\mu_m^{\lambda_m^s})^2 \right]^{-1/2} \quad (4.96)$$

e a comparação dos argumentos dos cossenos apresentados em (4.94) levar-nos-á ao seguinte resultado para o deslocamento de fase:

$$\delta_m^{\lambda_m^s}(k, \phi) = \Delta_m^{AB}(\phi) + \theta_{\lambda_m^s}, \quad (4.97)$$

onde

$$\Delta_m^{AB} = \frac{\pi}{2} (|m| - |m + \phi|) \quad (4.98)$$

e

$$\theta_{\lambda_m^s} = \arctan (\mu_m^{\lambda_m^s}) \quad (4.99)$$

Logo, é possível calcular o operador espalhamento para o presente caso. A diferença de fase  $\delta_m^{\lambda_m^s}(k, \phi)$  pode ser utilizada para calcular a matriz de espalhamento  $S$ , a partir da definição

$$S_{\phi, m}^{\lambda_m} = e^{2i\delta_m^{\lambda_m^s}(k, \phi)} = e^{2i\Delta_m^{AB}} e^{2i\theta_{\lambda_m^s}}, \quad (4.100)$$

a qual pode ser escrita como:

$$S_{\phi, m}^{\lambda_m} = e^{2i\Delta_m^{AB}} \left[ \frac{1 + i\mu_m^{\lambda_m^s}(k, \phi)}{1 - i\mu_m^{\lambda_m^s}(k, \phi)} \right]. \quad (4.101)$$

Então, mediante a utilização da expressão (4.89), obtêm-se:

$$S_{\phi, m}^{\lambda_m} = e^{2i\Delta_m^{AB}} \left[ \frac{\lambda_m^s k^{2\nu} \Gamma^{(-)} e^{i\nu\pi} + 4\nu \Gamma^{(+)}}{\lambda_m^s k^{2\nu} \Gamma^{(-)} e^{-i\nu\pi} + 4\nu \Gamma^{(+)}} \right], \quad (4.102)$$

com  $\nu \equiv |m + \phi + (1 - \alpha)/2|/\alpha$ . Analisando a equação (4.102) nota-se que se  $\lambda_m^s = 0$  o espalhamento é reduzido simplesmente ao fenômeno AB usual, i.e., o evento do espalhamento de partículas sem *spin* em espaço plano, obtendo as condições de contorno de Dirichlet. Neste caso, a matriz de espalhamento seria dada por  $S_{\phi,m}^0 = e^{2i\Delta_m^{AB}}$ .

Para o caso em que  $\lambda_m^s = \infty$ , teremos  $S_{\phi,m}^0 = e^{2i\Delta_m^{AB} + 2i\nu\pi}$ . De acordo com a teoria geral do espalhamento, os polos da matriz  $S$  contidos na metade superior do plano complexo determinam as posições dos estados ligados de energia de tal modo que estes polos ocorrem quando o denominador presente na equação (4.102) é igual a zero com a substituição  $k \rightarrow ik$ .

Neste caso, teremos:

$$\lambda_m^s k^{2\nu} \Gamma^{(-)} e^{-i\nu\pi} + 4^\nu \Gamma^{(+)} = 0, \quad (4.103)$$

isto é,

$$\lambda_m^s k^{2|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha} \Gamma^{(-)} e^{-i\pi|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha} + 4^{|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha} \Gamma^{(+)} = 0. \quad (4.104)$$

A equação para a energia de estado ligado neste caso será

$$E_b = -\frac{2}{M} \left[ -\frac{1}{\lambda_m^s} \frac{\Gamma(1 + |m + \phi + (1 - \alpha)/2|/\alpha)}{\Gamma(1 - |m + \phi + (1 - \alpha)/2|/\alpha)} \right]^{1/|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha} \quad (4.105)$$

para  $\lambda_m^s < 0$ , de maneira que os polos da matriz de espalhamento apenas ocorrerão para valores negativos do parâmetro de extensão. Neste caso, o operador de espalhamento pode ser expresso em termos da energia de estado ligado,

$$S_{\phi,m}^{\lambda_m} = e^{2i\Delta_m^{AB}(\phi)} \left[ \frac{e^{2i\pi|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha} - (\kappa/k)^{2|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha}}{1 - (\kappa/k)^{2|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha}} \right] \quad (4.106)$$

Comparando a equação (4.105) com (4.74), conforme observado em (83), facilmente notamos que  $\lambda_m^s = \lambda_m$ , o qual por sua vez é expresso em (4.79) em termos das reais constantes físicas; Esta pertinente coincidência entre  $\lambda_m$  e  $\lambda_m^s$  reafirma a confiabilidade de  $\lambda$  como um parâmetro perfeitamente utilizável na determinação dos resultados físicos obtidos, tanto para a energia de estado ligado quanto ao espalhamento.

A amplitude de espalhamento  $f_\phi^\alpha(\kappa, \phi)$  pode ser obtida

$$f_\phi^\alpha(\kappa, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (S_m^{\lambda_m}(k, \phi) - 1) e^{im\phi}; \quad (4.107)$$

Ou ainda,

$$f_{\phi}^{\alpha}(\kappa, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} \left\{ \sum_{|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha \geq 1} \left( e^{2i\Delta_m^{AB}} - 1 \right) e^{im\phi} + \right. \quad (4.108)$$

$$\left. \sum_{|m+\phi+(1-\alpha)/2|/\alpha < 1} \left( e^{2i\Delta_m^{AB}} \left[ \frac{1 + i\mu_m^{\lambda_s}(k, \phi)}{1 - i\mu_m^{\lambda_s}(k, \phi)} \right] - 1 \right) e^{im\phi} \right\}. \quad (4.109)$$

Cabe ressaltar que para o caso  $f_0^1(\kappa, \phi)$ , do espaço plano, teremos  $\alpha = 1$ , e na ausência de fluxo magnético,  $\phi = 0$ . Da equação anterior, deve-se ressaltar que a mesma difere do resultado apresentado no fenômeno AB usual devido à dependência na energia.

No presente capítulo, foram calculadas as energias de estado ligado e a matriz de espalhamento para um elétron imerso em uma métrica cônica no efeito AB. Embora tal procedimento já houvesse sido efetuado anteriormente na literatura (83), o momento anômalo do elétron não havia sido considerado até então. É possível que esta propriedade, predita pela teoria de campos quântica, desempenhe papel fundamental na geração de estados ligados ao sistema. Neste fenômeno referente à anomalia no momento magnético, o elétron sofre um processo de auto-interação (geralmente denominado na literatura como *one-loop interaction*, que descreve o acoplamento entre um fóton e um elétron interagindo por uma possível ação efetiva sob influência do potencial vetor (101)). Futuramente, será interessante investigar de forma mais detalhada esta possível relação entre a ação efetiva que interage com o momento magnético anômalo do elétron e o potencial vetor presente no efeito AB.

## Conclusões

Primeiramente, conclui-se que o Efeito Aharonov-Bohm contribuiu de forma significativa para um melhor entendimento da teoria quântica, ao levantar novos questionamentos sobre a validade da até então majoritária concepção operacionalista da física em relação aos potenciais, especificamente no que concerne ao potencial vetor; embora a discussão ainda perdure na literatura, o Efeito AB tende a alçar o papel dos potenciais a um patamar mais elevado do que se acreditava no eletromagnetismo clássico, e a Eletrodinâmica Quântica parece comprovar esta afirmação, teoria esta que aloca notável posição aos potenciais, tornando-os até mesmo mais fundamentais do que os próprios campos, de acordo com alguns autores na literatura (40).

Outro resultado bastante interessante é o fato de que o método da extensão auto-adjunta vêm reproduzindo resultados confiáveis na literatura e reproduz situações físicas específicas que podem “passar despercebidas” em outras abordagens. Neste caso em particular, a escolha apropriada do parâmetro de extensão permitiu uma compreensão mais acurada no fenômeno AB pois mostrou de forma mais evidente a possibilidade de existência de estados ligados no respectivo sistema.

Não obstante, no capítulo 4 foi possível reproduzir interessantes resultados para o Efeito AB com a adição da métrica cônica ao introduzirmos o método de extensão através da abordagem de Bulla-Gesztesy. Os resultados obtidos para esta situação são de extremo interesse físico, inclusive no que diz respeito à possibilidade de existência de monopolos magnéticos, uma vez que a comprovação do espalhamento para o caso estudado, cujo defeito topológico representado pela métrica cônica representa a existência de uma corda cósmica interagindo com o elétron e espalhando o mesmo. Segundo (51), a comprovação da existência do monopolo de Dirac confirmaria essa possibilidade.

Também cabe ressaltar aqui a coincidência entre os parâmetros de extensão para o caso de espalhamento e estado ligado, outro fator que corrobora à confiabilidade de  $\lambda$  como um parâmetro confiável na determinação da física concernente ao problema. A consistência dos cálculos obtidos para a função de onda levam a crer que, para valores específicos do parâmetro de extensão, o potencial é capaz de gerar estados ligados. Cabe agora buscar possíveis implicações da anomalia do momento magnético em relação aos estados ligados, o que parece gerar pertinentes variações nos resultados para estado ligado, como

sugere Bordag em (85), ao fazer uma associação direta entre o parâmetro de extensão e a anomalia do momento magnético.



## Perspectivas Futuras

Ao longo da realização deste trabalho, novos horizontes de pesquisa surgiram e abriram perspectivas para objetivos bastante promissores, os quais serão abordados em maiores detalhes futuramente. Entre estes, destacam-se:

- Analisar de forma mais detalhada a discussão acerca dos potenciais, abordando principalmente o argumento contrário à tese de Bohm sobre a variância de *gauge* dos potenciais, e se isso de fato provaria a irrelevância dos mesmos no sentido de uma realidade física.
- Reproduzir, mediante o método da extensão auto-adjunta resultados específicos apresentados na literatura, encontrando assim o valor do parâmetro para as situações específicas.
- Especificar valores para o parâmetro de extensão a fim de determinar condições de contorno específicas que coincidam com resultados obtidos em outros trabalhos na literatura realizados através de outras abordagens mais específicas, comprovando a generalidade do método de extensão mediante um parâmetro confiável que relaciona condições variadas à física subjacente do respectivo problema.

## Referências Bibliográficas

- [1] AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Physical Review*, APS, v. 115, n. 3, p. 485, 1959.
- [2] PESHKIN, M.; TONOMURA, A. The aharonov-bohm effect. In: *The Aharonov-Bohm Effect*. [S.l.: s.n.], 1989. v. 340.
- [3] EHRENBERG, W.; SIDAY, R. The refractive index in electron optics and the principles of dynamics. *Proceedings of the Physical Society. Section B*, IOP Publishing, v. 62, n. 1, p. 8, 1949.
- [4] ANDRADE, F.; SILVA, E.; PEREIRA, M. Physical regularization for the spin-1/2 aharonov-bohm problem in conical space. *Physical Review D*, APS, v. 85, n. 4, p. 041701, 2012.
- [5] DUCA, L. et al. An aharonov-bohm interferometer for determining bloch band topology. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 347, n. 6219, p. 288–292, 2015.
- [6] FERREIRA, G. L. Como o potencial vetor deve ser interpretado para revelar analogias entre grandezas magnéticas e elétricas. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 26, n. 4, p. 359–363, 2004.
- [7] CHAMBERS, R. Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux. *Physical Review Letters*, APS, v. 5, n. 1, p. 3, 1960.
- [8] AHARONOV, Y.; BOHM, D. Further considerations on electromagnetic potentials in the quantum theory. *Physical Review*, APS, v. 123, n. 4, p. 1511, 1961.
- [9] BOERSCH, H. et al. Antiparallele weißsche bereiche als biprisma für elektroneninterferenzen. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, Springer, v. 159, n. 4, p. 397–404, 1960.
- [10] BOWICK, M. J. et al. Axionic black holes and an aharonov-bohm effect for strings. *Physical Review Letters*, APS, v. 61, n. 25, p. 2823, 1988.

- [11] ALFORD, M. G.; WILCZEK, F. Aharonov-bohm interaction of cosmic strings with matter. *Physical Review Letters*, APS, v. 62, n. 10, p. 1071, 1989.
- [12] BULLA, W.; GESZTESY, F. Deficiency indices and singular boundary conditions in quantum mechanics. *Journal of mathematical physics*, AIP Publishing, v. 26, n. 10, p. 2520–2528, 1985.
- [13] HAGEN, C. Aharonov-bohm scattering of particles with spin. *Physical review letters*, APS, v. 64, n. 5, p. 503, 1990.
- [14] GERBERT, P. de S. Fermions in an aharonov-bohm field and cosmic strings. *Physical Review D*, APS, v. 40, n. 4, p. 1346, 1989.
- [15] JR, R. S. V. D.; SCHWINBERG, P. B.; DEHMELT, H. G. New high-precision comparison of electron and positron g factors. *Physical Review Letters*, APS, v. 59, n. 1, p. 26, 1987.
- [16] ANDRADE, F. M.; FILGUEIRAS, C.; SILVA, E. O. Scattering and bound states of a spin-1/2 neutral particle in the cosmic string spacetime. *arXiv preprint arXiv:1604.05051*, 2016.
- [17] BORDAG, M.; VOROPAEV, S. Bound states of an electron in the field of the magnetic string. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 333, n. 1, p. 238–244, 1994.
- [18] FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *The Feynman lectures on physics, vol. 2: Mainly electromagnetism and matter*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1979.
- [19] BATELAAN, H.; TONOMURA, A. The aharonov-bohm effects: Variations on a subtle theme. 2009.
- [20] JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. [S.l.]: Wiley, 1999.
- [21] FERREIRA, G. L. Argumentando sobre a realidade dos potenciais. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 26, n. 1, p. 27–31, 2004.
- [22] DEMERY, M. E. New perspectives on the aharonov-bohm effect. *n/a*, n/a, 2013.
- [23] BOYER, T. H. Classical electromagnetic deflections and lag effects associated with quantum interference pattern shifts: Considerations related to the aharonov-bohm effect. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 8, p. 1679–1693, Sep 1973. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.8.1679>>.
- [24] OLARIU, S.; POPESCU, I. I. The quantum effects of electromagnetic fluxes. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 57, p. 339–436, Apr 1985. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.57.339>>.

- [25] TONOMURA, A. et al. Evidence for aharonov-bohm effect with magnetic field completely shielded from electron wave. *Physical Review Letters*, APS, v. 56, n. 8, p. 792, 1986.
- [26] GREENBERGER, D. M. Reality and significance of the aharonov-bohm effect. *Physical Review D*, APS, v. 23, n. 6, p. 1460, 1981.
- [27] GREENBERGER, D. A short note on the aharonov-bohm effect. *Foundations of physics*, Springer, v. 21, n. 2, p. 251–255, 1991.
- [28] BOYER, T. H. Proposed aharonov-casher effect: Another example of an aharonov-bohm effect arising from a classical lag. *Physical Review A*, APS, v. 36, n. 10, p. 5083, 1987.
- [29] AHARONOV, Y.; COHEN, E.; ROHRLICH, D. Nonlocality of the aharonov-bohm effect. *Physical Review A*, APS, v. 93, n. 4, p. 042110, 2016.
- [30] VAIDMAN, L. Role of potentials in the aharonov-bohm effect. *Physical Review A*, APS, v. 86, n. 4, p. 040101, 2012.
- [31] BOCCHIERI, P.; LOINGER, A. Nonexistence of the aharonov-bohm effect. *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, Springer, v. 47, n. 4, p. 475–482, 1978.
- [32] BREITENECKER, M.; GRÜMM, H.-R. Remarks on the paper by p. bocchieri and a. loinger: «nonexistence of the aharonov-bohm effect». *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, Springer, v. 55, n. 4, p. 453–455, 1980.
- [33] BOHM, D. *A totalidade e a ordem implicada. Trad. Mauro de Campos Silva*. [S.l.]: São Paulo: Pensamento-Cultrix, 1980.
- [34] HEALEY, R. On the reality of gauge potentials. *Philosophy of Science*, JSTOR, p. 432–455, 2001.
- [35] PHILIPPIDIS, C.; BOHM, D.; KAYE, R. D. The aharonov-bohm effect and the quantum potential. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, Springer, v. 71, n. 1, p. 75–88, 1982.
- [36] LEEDS, S. Gauges: Aharonov, bohm, yang, healey. *Philosophy of Science*, JSTOR, p. 606–627, 1999.
- [37] BUNGE, M. Does the aharonov-bohm effect occur? *Foundations of Science*, Springer, v. 20, n. 2, p. 129–133, 2015.
- [38] BUNGE, M.; GUINSBURG, G. K. *Física e filosofia*. [S.l.]: Perspectiva, 2007.

- [39] KONOPINSKI, E. What the electromagnetic vector potential describes. *Am. J. Phys.*, v. 46, 1978.
- [40] AHARONOV, Y.; BOHM, D. Remarks on the possibility of quantum electrodynamics without potentials. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 125, p. 2192–2193, Mar 1962. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.125.2192>>.
- [41] PHILIPPIDIS, C.; DEWDNEY, C.; HILEY, B. J. Quantum interference and the quantum potential. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, Springer, v. 52, n. 1, p. 15–28, 1979.
- [42] BOHM, D.; LINDSAY, R. Causality and chance in modern physics. *Physics Today*, AIP, v. 10, n. 11, p. 30–32, 1957.
- [43] BOHR, N. *Atomic theory and the description of nature*. [S.l.]: CUP Archive, 1934. v. 1.
- [44] BOHM, D.; HILEY, B. J.; KALOYEROU, P. N. An ontological basis for the quantum theory. *Physics Reports*, North-Holland, v. 144, n. 6, p. 321–375, 1987.
- [45] VOROPAEV, S.; GALTISOV, D.; SPASOV, D. Bound states for fermions in the gauge aharonov-bohm field. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 267, n. 1, p. 91–94, 1991.
- [46] BASSALO, J. M. F. *Eletrodinâmica Quântica*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2006.
- [47] SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Modern quantum mechanics*. [S.l.]: Addison-Wesley, 2011.
- [48] HEISENBERG, W. Die bewertung der modernen theoretischen physik. *Zeitschrift für die gesamte Naturwissenschaft*, v. 9, p. 201–212, 1943.
- [49] BEZERRA, V. B. Gravitational analogue of the aharonov-bohm effect in four and three dimensions. *Physical Review D*, APS, v. 35, n. 6, p. 2031, 1987.
- [50] BACHTOLD, A. et al. Aharonov–bohm oscillations in carbon nanotubes. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 397, n. 6721, p. 673–675, 1999.
- [51] PESHKIN, M. What did we learn from the aharonov-bohm effect? is spin 1/2 different? In: *Presented at the Workshop on the Quantum Systems: New Trends, Methods and Results, Minsk, Russia, 22 May-1 Jun. 1994*. [S.l.: s.n.], 1994. v. 1.
- [52] SILVA, E. O. et al. Quantum motion of a point particle in the presence of the aharonov–bohm potential in curved space. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 362, p. 739–751, 2015.

- [53] VILENKIN, A.; SHELLARD, E. P. S. *Cosmic strings and other topological defects*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000.
- [54] GOPALAKRISHNAN, S. *Self-adjointness and the renormalization of singular potentials*. 2006.
- [55] KLAUDER, J. R. Field structure through model studies: aspects of nonrenormalizable theories. In: *Recent Developments in Mathematical Physics*. [S.l.]: Springer, 1973. p. 341–387.
- [56] GITMAN, D. M.; TYUTIN, I.; VORONOV, B. L. *Self-adjoint extensions in quantum mechanics: general theory and applications to Schrödinger and Dirac equations with singular potentials*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 62.
- [57] BONNEAU, G.; FARAUT, J.; VALENT, G. Self-adjoint extensions of operators and the teaching of quantum mechanics. *American Journal of physics*, American Association of Physics Teachers, v. 69, n. 3, p. 322–331, 2001.
- [58] BALLENTINE, L. E. *Quantum mechanics: A modern development*. [S.l.]: World scientific, 1998.
- [59] COHEN-TANNOUJJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. *Quantum mechanics*. Wiley, 1977.
- [60] GASIOROWICZ, S. *Quantum physics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007.
- [61] SHANKAR, R. *Principles of quantum mechanics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- [62] HEATHCOTE, A. Unbounded operators and the incompleteness of quantum mechanics. *Philosophy of Science*, JSTOR, p. 523–534, 1990.
- [63] REED, M.; SIMON, B. *Methods of modern mathematical physics, Vol. II*. [S.l.]: Academic Press, New York, 1975.
- [64] POWELL, J. L. u. b. crasemann: *Quantum mechanics. Reading: Addison-Wesley*, 1961.
- [65] FILGUEIRAS, C.; MORAES, F. Extensões auto-adjuntas de operadores em mecânica quântica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 29, n. 1, p. 11–13, 2007.
- [66] AMARAL, E. et al. *Operadores lineares em espaços de hilbert e aplicações*. Florianópolis, SC, 2006.
- [67] NEUMANN, J. v. Zur allgemeinen theorie des masses. *Fundamenta Mathematicae*, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, v. 13, n. 1, p. 73–116, 1929.

- [68] NAIMARK, M. *Linear Differential Operators. Vol. Ii: Linear Differential Operators in Hilbert Space*. [S.l.]: George G. Harrap & Company Limited, 1968.
- [69] AKHIEZER, N. I.; GLAZMAN, I. M. *Theory of linear operators in Hilbert space*. [S.l.]: Courier Corporation, 2013.
- [70] PAULI, W. Über den zusammenhang des abschlusses der elektronengruppen im atom mit der komplexstruktur der spektren. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, Springer, v. 31, n. 1, p. 765–783, 1925.
- [71] JR, W. P. Über gasentartung und paramagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, Springer, v. 41, n. 2, p. 81–102, 1927.
- [72] UHLENBECK, G. E.; GOUDSMIT, S. Ersetzung der hypothese vom unmechanischen zwang durch eine forderung bezüglich des inneren verhaltens jedes einzelnen elektrons. *Naturwissenschaften*, Springer, v. 13, n. 47, p. 953–954, 1925.
- [73] GERLACH, W.; STERN, O. Der experimentelle nachweis der richtungsquantelung im magnetfeld. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, Springer, v. 9, n. 1, p. 349–352, 1922.
- [74] DARWIN, C. G. The electron as a vector wave. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, JSTOR, v. 116, n. 773, p. 227–253, 1927.
- [75] BJORKEN, J. D.; DRELL, S. D. *Relativistic quantum mechanics*. [S.l.]: Mcgraw-Hill College, 1964, p.241.
- [76] KUSCH, P.; FOLEY, H. Precision measurement of the ratio of the atomic values' in the  $p\ 3\ 2\ 2$  and  $p\ 1\ 2\ 2$  states of gallium. *Physical Review*, APS, v. 72, n. 12, p. 1256, 1947.
- [77] RESNICK, R.; EISBERG, R. Física quântica: átomos, moléculas, sólidos, núcleos e partículas. *Editora Campus*, 1979.
- [78] DIRAC, P. A. The quantum theory of the electron. In: THE ROYAL SOCIETY. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. [S.l.], 1928. v. 117, n. 778, p. 610–624.
- [79] SAKURAI, J. J. *Advanced quantum mechanics*. [S.l.]: Pearson Education India, 1967.
- [80] MAHON, J. R. P. Mecânica quântica. LTC, 2011.
- [81] HAGEN, C. Spin dependence of the aharonov-bohm effect. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 6, n. 18, p. 3119–3149, 1991.

- [82] ANDRADE, F.; SILVA, E. Effects of quantum deformation on the spin-1/2 aharonov-bohm problem. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 719, n. 4, p. 467–471, 2013.
- [83] ANDRADE, F.; SILVA, E.; PEREIRA, M. On the spin-1/2 aharonov-bohm problem in conical space: Bound states, scattering and helicity nonconservation. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 339, p. 510–530, 2013.
- [84] PARK, D.; OH, J. G. Self-adjoint extension approach to the spin-1/2 aharonov-bohm-coulomb problem. *Physical Review D*, APS, v. 50, n. 12, p. 7715, 1994.
- [85] BORDAG, M.; VOROPAEV, S. Charged particle with magnetic moment in the aharonov-bohm potential. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 26, n. 24, p. 7637, 1993.
- [86] VOROPAEV, S.; GALTISOV, D.; SPASOV, D. Bound states for fermions in the gauge aharonov-bohm field. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 267, n. 1, p. 91–94, 1991.
- [87] COSTA., R. F. *EXTENSÃO AUTOADJUNTA DO HAMILTONIANO DO SISTEMA DE AHARONOV-BOHM COM MOMENTO MAGNÉTICO ANÔMALO. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Ponta Grossa. 2016.* 2016.
- [88] HAGEN, C. Perturbation theory and the aharonov-bohm effect. *Physical Review D*, APS, v. 52, n. 4, p. 2466, 1995.
- [89] ROMIA, Y.; SHIKAKHWA, M. The born scattering amplitude of a non-relativistic spin one-half particle in an aharonov-bohm potentia. *Turkish Journal of Physics*, The Scientific and Technological Research Council of Turkey, v. 28, n. 2, p. 73–80, 2004.
- [90] MANUEL, C.; TARRACH, R. Perturbative renormalization in quantum mechanics. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 328, n. 1, p. 113–118, 1994.
- [91] MELLO, E. R. B. de. Effects of anomalous magnetic moment in the quantum motion of neutral particle in magnetic and electric fields produced by a linear source in a conical spacetime. *Journal of High Energy Physics*, IOP Publishing, v. 2004, n. 06, p. 016, 2004.
- [92] POSTMA, M.; HARTMANN, B. Zero modes on cosmic string loops. *arXiv preprint arXiv:0706.0416*, 2007.
- [93] GESZTESY, F. et al. Point interactions in two dimensions: Basic properties, approximations and applications to solid state physics. *J. Reine Angew. Math.*, De Gruyter, v. 380, n. 380, p. 87, jan. 1987. ISSN 0075-4102.
- [94] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. Física matemática. *Campus, 6a ed., Rio de Janeiro*, p. 650–658, 2007.



- [95] BUTKOV, E. Física matemática. *Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos*, 1988.
- [96] AUDRETSCH, J.; JASPER, U.; SKARZHINSKY, V. D. A pragmatic approach to the problem of the self-adjoint extension of hamilton operators with the aharonov-bohm potential. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 28, n. 8, p. 2359, 1995.
- [97] COUTINHO, F. et al. Self-adjoint extensions of the hamiltonian for a charged spin-1/2 particle in the aharonov-bohm field. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 27, n. 19, p. 6539, 1994.
- [98] KAY, B. S.; STUDER, U. M. Boundary conditions for quantum mechanics on cones and fields around cosmic strings. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 139, n. 1, p. 103–139, 1991.
- [99] OLIVEIRA, C. R. D.; PEREIRA, M. Scattering and self-adjoint extensions of the aharonov–bohm hamiltonian. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 43, n. 35, p. 354011, 2010.
- [100] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. [S.l.]: Courier Corporation, 1964. v. 55.
- [101] BAK, D.; BERGMAN, O. Perturbative analysis of non-abelian aharonov-bohm scattering. *Physical Review D*, APS, v. 51, n. 4, p. 1994, 1995.