

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: FÍSICA

CARLOS EDUARDO KRASSINSKI SOARES

MÉTODO DAS ESCALAS MÚLTIPLAS NA
CONVERSÃO E AMPLIFICAÇÃO PARAMÉTRICA DE
DOIS MODOS

PONTA GROSSA - PR

2010

CARLOS EDUARDO KRASSINSKI SOARES

MÉTODO DAS ESCALAS MÚLTIPLAS NA
CONVERSÃO E AMPLIFICAÇÃO PARAMÉTRICA DE
DOIS MODOS

Dissertação submetida ao programa de Pós-Graduação em Ciências da Universidade Estadual de Ponta Grossa como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências, Área de concentração: Física

Orientador: Prof. Dr. Antonio Sérgio Magalhães de Castro.

PONTA GROSSA - PR

2010

Ficha Catalográfica Elaborada pelo Setor Tratamento da Informação BICEN/UEPG

S676m Soares, Carlos Eduardo Krassinski
Métodos das escalas múltiplas na conversão e amplificação
paramétrica de dois modos / Carlos Eduardo Krassinski Soares.
Ponta Grossa, 2010.
107f.

Dissertação (Mestrado em Ciências) – Universidade Estadual
de Ponta Grossa .

Orientadora: Prof. Dr. Antonio Sérgio Magalhães de Castro

1. Equações diferenciais. 2. Método das escalas múltiplas. 3.
Emaranhamento. 4. Compressão. I .Castro, Antonio Sérgio
Magalhães de. II. T

CDD: 530

TERMO DE APROVAÇÃO

CARLOS EDUARDO KRASSINSKI SOARES

“MÉTODO DAS ESCALAS MÚLTIPLAS NA CONVERSÃO E AMPLIFICAÇÃO PARAMÉTRICA DE DOIS MODOS”

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Ciências - Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador:



Prof. Dr. Antonio Sérgio Magalhães de Castro
Departamento Física, UEPG/ PR



Prof. Dr. Fernando Luis Semião da Silva
Departamento Física, UEPG/ PR



Prof. Dr. Marcos Cesar de Oliveira
Departamento de Física da Matéria Condensada, UNICAMP/SP

Ponta Grossa, 17 de dezembro de 2010

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus.

A meu pai, Carlos e minha irmã Fernanda.

A minha mãe, pelo amor incondicional, pela sua dedicação, conselhos e por sempre estar do meu lado.

Ao meu orientador, professor Dr. Antonio Sérgio pela paciência e compreensão, pelo apoio fornecido nesses últimos anos.

Aos professores do departamento de Física.

Ao pessoal do GIQ, João, Jader, Pablo e o professor Fernando.

A Cris, pela paciência, companhia, risadas, conversas, conselhos e por acreditar em mim (*"Confidence Cohen"*).

Aos amigos pra toda hora, Raphael, Eliane, Izumi, Marco, que sempre estiveram ao meu lado. Pelos bons momentos vividos juntos.

A secretária Josecler, pelo excelente trabalho realizado ao longo desses anos.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao suporte financeiro da Fundação Araucária.

"YOU CAN'T BELIEVE EVERYTHING
YOU HEAR, YOU KNOW. . ."

Schroeder



Resumo

Nesta dissertação, estudam-se propriedades físicas de um sistema aberto, composto por dois modos bosônicos interagentes (osciladores harmônicos quânticos) de frequências distintas, com o acoplamento explicitamente dependente do tempo. Assume-se cada um dos modos bosônicos sob efeito de reservatórios térmicos e analisa-se a dinâmica de suas propriedades quânticas. Em se tratando de sistemas quadráticos e estados iniciais Gaussianos, determina-se a evolução temporal das propriedades dos modos acoplados a partir da evolução temporal dos momentos de segunda ordem não simetrizados na formulação de sistemas quadráticos de evolução não unitária. As propriedades dinâmicas são determinadas solucionando-se sistemas de equações diferenciais para os segundos momentos não simetrizados. Sendo sistemas de equações diferenciais com coeficientes dependentes do tempo, no limite do acoplamento fraco, aplica-se o Método das Escalas Múltiplas para a construção e a resolução das equações diferenciais, determinando-se suas soluções em séries perturbativas em um parâmetro adequado, associado às ordens de grandeza dos acoplamentos. Dessa maneira, analisa-se a dinâmica da medida de compressão e da pureza para os casos da amplificação e conversão paramétrica para diferentes valores de parâmetros de estados iniciais. Neste contexto, considera-se também o problema da medida quantitativa do emaranhamento, analisando seu comportamento para diferentes conjuntos de parâmetros do sistema e configurações de estados iniciais Gaussianos.

Palavras-chave: Emaranhamento, dissipação, compressão, equações diferenciais, método das escalas múltiplas.

Abstract

In this dissertation, we study the physical properties of an open system, composed of two interacting bosonic modes (quantum harmonic oscillators) of different frequencies, with an explicitly time-dependent coupling. It is assumed that each of the bosonic modes is under the effect of a thermal reservoir and the dynamics of their quantum properties is studied. In the case of quadratic systems and Gaussian initial states, the quantum properties of the coupled modes evolve in time according to the time evolution of the non-symmetrized second order moment which is described in the framework of the non-unitary evolution of quantum quadratic systems. The dynamical properties are determined by solving systems of differential equations for the second moments. These systems of differential equations have time-dependent coefficients and in the limit of weak coupling, the Method of Multiple Scales for constructing and solving differential equations is applied. This approach determines the differential equations solutions in a perturbative series of an appropriate parameter associated with orders of magnitude of the couplings. In this way it is obtained a description of the temporal behavior of the squeezing and the purity for each mode in the particular cases of parametric amplification and conversion. In this context, it is also considered the problem of the quantitative measure of entanglement, analyzing its dynamical behavior for different values of the system parameters and Gaussian initial states configurations.

Keywords: Entanglement, dissipation, squeezing, differential equations, method of multiple scales.

Índice

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Figuras	xiii
1 Introdução	1
2 Oscilador Harmônico	4
2.1 Oscilador Harmônico	4
2.2 Estados do Campo Quantizado	6
3 Tratamento Analítico em Sistemas Quânticos Dissipativos	17
3.1 Osciladores Acoplados Dissipativos	17
3.2 Equação Mestra de Sistemas Dissipativos	20
3.3 Evolução Temporal dos Segundos Momentos	24
3.4 Sistema de Equações na Conversão e Amplificação Paramétrica	28
4 Método das Escalas Múltiplas	32
4.1 O método das Escalas Múltiplas	33
4.2 Aplicação do Método	39
5 Conversão e Amplificação Paramétrica sob Efeito de Dissipação	46
5.1 Transferência de Compressão	47
5.1.1 Conversão Paramétrica Dissipativa	48
5.1.2 Amplificação Paramétrica Dissipativa	55

5.2	Pureza dos Modos	58
5.2.1	Conversão Paramétrica	60
5.2.2	Amplificação Paramétrica	64
6	Efeito da Dissipação nas Propriedades das Correlações Quânticas	68
6.1	Definição de Emaranhamento	69
6.2	Emaranhamento na Conversão e Amplificação Paramétrica	71
7	Conclusões e Perspectivas Futuras	84
	Bibliografia	87
A	Simplificações da Equação Mestra	90

Lista de Figuras

- 4.1 Comparação da solução exata (ponto) da equação de Duffing, com soluções aproximadas; método das escalas múltiplas (curva vermelha), série de potência (verde) e solução para o caso $\alpha = 0$ (azul). As condições iniciais são $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$ 39
- 5.1 Comportamento do coeficiente de compressão $S_k(\tau, \beta)$ na ausência de reservatório ($\beta=0$). A curva azul representa o modo um ($S_1(0, 0) > 1$) enquanto a linha vermelha o modo dois ($S_2(0, 0) < 1$), com as condições iniciais sendo $\phi = 0$, $r_1 = 0,45$, $r_2 = 1,2$, $\vartheta_1 = 1,4$, $\vartheta_2 = 0,7$. Os pontos representam as soluções numéricas. A linha preta representa o estado coerente. 51
- 5.2 Comportamento do coeficiente de compressão $S_k(\tau, \beta)$ na ausência de reservatório ($\beta=0$). A curva azul representa o modo um ($S_1(0, 0) > 1$) enquanto a linha vermelha o modo dois ($S_2(0, 0) < 1$), com as condições iniciais sendo $\phi = 0$, $r_1 = 0,45$, $r_2 = 1,2$, $\vartheta_1 = 1,4$, $\vartheta_2 = 0,7$. Os pontos representam as soluções numéricas. A linha preta representa o estado coerente. 52
- 5.3 Comportamento do coeficiente de compressão $S_k(\tau, \beta)$. As curvas verde e azul representam o modo um ($S_1(0, 0) > 1$) enquanto as linhas vermelha e laranja o modo dois ($S_2(0, 0) < 1$). Os pontos representam as soluções numéricas. Com as condições iniciais sendo $\beta = 0,02$, $\phi = 0$, $r_1 = 0,6$, $r_2 = 0,7$, $\vartheta_1 = 2$, $\vartheta_2 = 0,5$ e $\nu = 1$. A linha preta representa o estado coerente. 53
- 5.4 Comportamento do coeficiente de compressão $S_k(\tau, \beta)$ para diferentes valores de ν . As curvas verde, vermelha e azul representam o modo um, ($S_1(0, 0) < 1$). Para a curva verde, $\nu = 0$ enquanto para curva vermelha, $\nu = 1$ e para a curva azul $\nu = 2$. Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\beta = 0,02$, $\phi = 0$, $r_1 = 1,2$, $r_2 = 0,5$, $\vartheta_1 = 0,5$, $\vartheta_2 = 1,3$. A linha preta representa o estado coerente. 54

- 5.5 Comportamento do coeficiente $\mathcal{Y}_k(z) = \mathcal{S}_k(0)/\mathcal{S}_k(\tau)$. As curvas azul e vermelha representam o modo um e dois respectivamente na ausência de reservatório ($\beta = 0$). As curvas verde e laranja representam o modo um e dois respectivamente ($\beta = 0, 2$). Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\phi = 0, r_1 = 0,95, r_2 = 0,45, \vartheta_1 = 0,5, \vartheta_2 = 1,4$ e $\nu = 2$ 57
- 5.6 Comportamento do coeficiente $\mathcal{Y}_1(z) = \mathcal{S}_1(0)/\mathcal{S}_1(\tau)$ para diferentes valores de r_1 . A curva azul representa o caso de $r_1 = 1,9$, para a curva vermelha, $r_1 = 1$ e para a curva verde, $r_1 = 0,5$. Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\beta = 0,1, \phi = 0, r_2 = 0,45, \vartheta_1 = 0,5, \vartheta_2 = 1,4$ e $\nu = 2$ 58
- 5.7 Comportamento da pureza $\mathcal{P}_k(\tau)$. A curva azul representa o modo um ($\mathcal{P}_1(0)=0,29$) enquanto a curva verde o modo dois ($\mathcal{P}_2(0)=0,55$). Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\beta = 0, \phi = 0, r_1 = 0,35, r_2 = 1,1, \vartheta_1 = 1,7, \vartheta_2 = 0,9$ e $\nu = 0$ 62
- 5.8 Comportamento da pureza $\mathcal{P}_1(\tau)$ para diferentes valores de β . A curva azul representa o caso de $\beta = 0$, para a curva laranja, $\beta = 0,02$ e para a curva vermelha, $\beta = 0,04$. Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\phi = 0, r_1 = 0,35, r_2 = 1,1, \vartheta_1 = 1,4, \vartheta_2 = 0,9$ e $\nu = 2$ 63
- 5.9 Comportamento da pureza $\mathcal{P}_k(\tau)$. As curvas verde e azul representam o modo 1 ($\mathcal{P}_1(0)=0,5$) enquanto as linhas vermelha e laranja o modo 2 ($\mathcal{P}_2(0)=0,67$). Os pontos representam as soluções numéricas. Com as condições iniciais sendo $\beta = 0,01, \phi = 0, r_1 = 0, r_2 = 1,5, \vartheta_1 = 1, \vartheta_2 = 0,75$ e $\nu = 1$ 64
- 5.10 Comportamento da pureza $\mathcal{P}_k(\tau)$. A curva azul representa o modo 1 ($\mathcal{P}_1(0)=0,33$) enquanto a linha vermelha o modo 2 ($\mathcal{P}_2(0)=0,55$). Os pontos representam as soluções numéricas. Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\beta = 0, \phi = 0, r_1 = 0, r_2 = 1,1, \vartheta_1 = 1,5, \vartheta_2 = 0,9$. 66
- 5.11 Comportamento da pureza $\mathcal{P}_1(\tau)$ para diferentes valores de β . A curva azul representa o caso de $\beta = 0$, para a curva verde, $\beta = 0,1$ e para a curva vermelha, $\beta = 0,2$. Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\phi = 0, r_1 = 1, r_2 = 0,2, \vartheta_1 = 0,75, \vartheta_2 = 1,5$ e $\nu = 2$ 67
- 6.1 Comportamento da negatividade logarítmica $E_{\mathcal{N}}(\tau)$ na ausência de dissipação ($\beta = 0$). A curva azul representa a conversão paramétrica enquanto a linha vermelha representa o caso ressonante com acoplamento constante entre os modos. Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\phi = 0, r_1 = 0, r_2 = 1,5, \vartheta_1 = 1, \vartheta_2 = 0,75$ 75
- 6.2 Comportamento da negatividade logarítmica $E_{\mathcal{N}}(\tau)$ na presença de dissipação ($\beta \neq 0$). A curva azul representa a conversão paramétrica enquanto a linha vermelha representa o caso ressonante com acoplamento constante entre os modos. Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\beta = 0,01, \nu = 2, \phi = 0, r_1 = 0, r_2 = 1,5, \vartheta_1 = 0,5, \vartheta_2 = 1,5$ 76

- 6.3 Comportamento da negatividade logarítmica $E_{\mathcal{N}}(\tau)$ para diferentes valores de r_1 . A curva verde representa $r_1 = 1,5$, enquanto a curva azul $r_1 = 1,0$, a curva vermelha $r_1 = 0,5$ e a curva laranja $r_1 = 0$. Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\beta = 0,02$, $\nu = 1$, $\phi = 0$, $r_2 = 1,5$, $\vartheta_1 = 0,5$, $\vartheta_2 = 1,3$ 78
- 6.4 Comportamento da negatividade logarítmica $E_{\mathcal{N}}(\tau)$ para diferentes valores de ν . A curva verde representa $\nu = 0$, enquanto a curva azul $\nu = 1$ e a curva vermelha $\nu = 2$. Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\beta = 0,02$, $\phi = 0$, $r_1 = 1,2$, $r_2 = 1,5$, $\vartheta_1 = 0,5$, $\vartheta_2 = 1,3$ 79
- 6.5 Comportamento da negatividade logarítmica $E_{\mathcal{N}}(\tau)$ para diferentes valores de r_1 . A curva verde representa $r_1 = 1,5$, enquanto a curva azul $r_1 = 1,0$, a curva laranja $r_1 = 0,5$ e a curva vermelha $r_1 = 0$. Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\beta = 0,02$, $\nu = 1$, $\phi = 0$, $r_2 = 1,5$, $\vartheta_1 = 0,5$, $\vartheta_2 = 1,3$ 81
- 6.6 Comportamento da negatividade logarítmica $E_{\mathcal{N}}(\tau)$ para diferentes valores de ν . A curva verde representa $\nu = 0$, enquanto a curva azul $\nu = 1$, a curva laranja $\nu = 2$ e a curva vermelha $\nu = 3$. Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\beta = 0,02$, $\phi = 0$, $r_1 = 1,2$, $r_2 = 1,5$, $\vartheta_1 = 0,5$, $\vartheta_2 = 1,3$ 82
- 6.7 Comportamento da negatividade logarítmica $E_{\mathcal{N}}(\tau)$ para diferentes valores de β . A curva verde representa $\beta = 0$, enquanto a curva azul $\beta = 0,01$, a curva laranja $\beta = 0,02$ e a curva vermelha $\beta = 0,04$. Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\nu = 2$, $\phi = 0$, $r_1 = 1,5$, $r_2 = 0,5$, $\vartheta_1 = 0,5$, $\vartheta_2 = 0,5$ 83

Capítulo 1

Introdução

A teoria quântica teve origem pela descoberta de Planck sobre a lei de radiação de corpo negro. Com o surgimento da mecânica quântica, dentre os postulados estabelecidos, Schrödinger foi quem primeiramente descreveu, devido ao princípio da superposição de sistemas físicos compostos, uma nova propriedade quântica, denominada emaranhamento, do inglês *entanglement*. Esta propriedade, que não possui análogo clássico, abriu novas possibilidades de pesquisa com sistemas físicos originando novos avanços científicos. Nas duas últimas décadas do século XX deu-se início a um novo campo de trabalho da física quântica, denominado teoria de informação e computação quântica [1]. Inclui o desenvolvimento de processos pertinentes à computação e à comunicação quânticas necessárias para a implementação de protocolos de transmissão. Alguns tópicos de grande importância dizem respeito aos problemas do chamado teletransporte de estados quânticos [2], do controle coerente de um sub-sistema individualmente e da medida quantitativa do emaranhamento ou correlações quânticas [3], como recursos para manipulação de informação quântica. Nestes sistemas, é interessante entender os processos de controle de transferência de propriedades de um dado sistema quântico para outro, para diferentes configurações de parâmetros do sistema e condições iniciais.

Nos últimos anos, o desenvolvimento e aprimoramento para a possibilidade de implementação física de computadores quânticos, despertaram um grande interesse nos problemas associados a este tema. Dessa forma, a grande expectativa é que os computadores quânticos, ainda num estágio inicial de desenvolvimento, venham a contribuir para um novo desenvolvimento tecnológico. No entanto, uma das barreiras para a construção do computador quântico é a ação do meio ambiente que produz perdas, não somente no aspecto energético, mas também no aspecto informacional, produzindo a deterioração da informação nas etapas de processamento e transmissão. Por traz

disso tudo está o efeito denominado decoerência [4] e, portanto, o estudo sistemático do controle da decoerência em sistemas quânticos passa a ser um tema fundamental e decisivo no avanço do desenvolvimento tecnológico.

Surge então a questão de como podemos controlar os parâmetros de um sistema quântico no sentido de minimizar os efeitos do ambiente sobre o sistema, ou considerando diferentes tipos de reservatórios no processo de troca ou transferência de informação, e nas propriedades associadas as correlações de natureza quântica em diferentes configurações de acoplamento. Recentemente, foi abordado este problema para dois modos bosônicos idênticos [5] considerando acoplamento bi-linear do tipo RWA (aproximação de onda girante). Neste caso foram analisados efeitos de reservatórios térmicos distintos, de características idênticas, considerando diferentes valores de temperatura, onde foi possível resolver as equações diferenciais envolvidas no problema de forma exata. No sentido de generalizar os resultados obtidos em trabalhos anteriores, pretende-se neste trabalho considerar um sistema de dois modos não idênticos (frequências distintas) interagentes por meio de acoplamento explicitamente dependente do tempo (funções do tipo senoidais) e ambos os modos sob ação de reservatórios idênticos, mas distintos entre si.

Com o aprimoramento e utilização de métodos matemáticos assintóticos e com o auxílio de processos computacionais nos últimos anos, novos avanços em pesquisas científicas foram aprimoradas, sendo na Física, amplamente empregada os recursos computacionais. Em muitos casos, no processo de resolução de problemas físicos, a solução desejada se deve a resoluções de equações diferenciais. Porém, em alguns casos, nem sempre é possível obter soluções exatas. Nesse sentido, pode-se fazer uso de métodos matemáticos para se obter soluções muito próximas das soluções exatas, de forma que essas soluções aproximadas dispõem de uma grande riqueza de informações, auxiliando na compreensão física do problema. Ainda que aproximadas, tais soluções analíticas já são capazes de fornecer grande parte das características do problema envolvido, muitas vezes não perceptíveis em resultados numéricos obtidos.

Neste trabalho, aborda-se o método das escalas múltiplas para tratar de equações diferenciais, que inicialmente foram introduzidas em problemas na mecânica clássica. Neste tratamento matemático, onde os modelos físicos são descritos por equações diferenciais não lineares ou lineares, o método das escalas múltiplas é aplicado como um processo matemático perturbativo para se obter uma solução aproximada. Este método, não é apenas restrito na mecânica clássica, mas pode-se estender sua utilização para tratar de problemas em sistemas perturbativos na mecânica quântica [6] como será tratado nesta dissertação.

A dissertação está organizada como segue. No capítulo 2 são revisadas algumas propriedades físicas importantes para a realização desta dissertação. Considera-se, no capítulo 3, o tratamento matemático para o sistema físico dos modos bosônicos acoplados via acoplamento dependente do tempo sob efeitos de reservatórios distintos, permitindo a determinação da equação mestra e dos elementos da matriz dos segundos momentos para este sistema. No capítulo 4, apresenta-se o método das escalas múltiplas para tratar de equações diferenciais. Como aplicação do método, ilustra-se uma equação diferencial não linear presente na física clássica e em seguida descreve-se o procedimento do método para o tratamento dos sistemas de equações diferenciais com coeficientes dependentes do tempo a fim de se obter as soluções em correção de ordem zero. No capítulo 5, analisa-se a dinâmica do coeficiente de compressão e também da pureza dos modos acoplados para diferentes condições iniciais de estados Gaussianos e diferentes parâmetros dos reservatórios nos casos da conversão e amplificação paramétrica. No capítulo 6, foi considerado a medida de emaranhamento via negatividade logarítmica para os modos acoplados na presença de reservatórios térmicos, cujas soluções analíticas obtidas até correção de ordem zero são comparadas com as soluções numéricas. No capítulo 6, são apresentadas as conclusões e as perspectivas futuras para este trabalho.

Capítulo 2

Oscilador Harmônico

O oscilador harmônico, descrito sob o ponto de vista clássico e quântico, é um modelo importante no desenvolvimento para tratar de diversos sistemas físicos na área de Física da Matéria Condensada. Além disso, no campo da Física Matemática, sistemas compostos por osciladores harmônicos ou modos bosônicos assumem a posição de protótipos para o estudo e desenvolvimento de métodos matemáticos assintóticos, aplicados no contexto da Teoria de Perturbação, em especial, nos sistemas descritos por equações diferenciais ordinárias acopladas. Os métodos da Média Temporal e das Escalas Múltiplas são exemplos de técnicas no contexto da teoria de perturbação e podem ser aplicados a diferentes sistemas clássicos ou quânticos, e em especial, na Teoria de Informação Quântica para sistemas de variáveis contínuas no campo de sistemas interagentes no limite do acoplamento fraco. Neste capítulo, revisa-se alguns conceitos básicos, relevantes para o desenvolvimento desta dissertação, descrevendo aspectos físicos e matemáticos que serão aplicados nos capítulos posteriores. Analisa-se um modelo simples e bastante utilizado em diversas áreas da física: o oscilador harmônico clássico e posteriormente, no contexto da Mecânica Quântica, o correspondente oscilador harmônico quântico com alguns de seus estados quânticos particulares, amplamente empregados no contexto da óptica quântica.

2.1 Oscilador Harmônico

Um dos sistemas de grande simplicidade e muito utilizado em diversas áreas de estudo da física é o modelo do oscilador harmônico simples. Este modelo pode ser aplicado no estudo das vibrações de átomos de uma molécula, em torno de uma dada posição de equilíbrio e o modelo didaticamente simples constituído do sistema massa-mola. Também é aplicado no estudo do campo

eletromagnético e suas propriedades. Quando se trata por exemplo de uma cavidade, existe um número infinito de modos estacionários, e o campo resultante no interior da cavidade, pode ser expandido em uma composição linear das soluções correspondentes a cada um desses modos [7]. A partir das equações de Maxwell, deduz-se que cada coeficiente da expansão obedece uma equação diferencial idêntica a do oscilador harmônico. Dessa forma, pode-se concluir que o campo eletromagnético é formado por um conjunto infinito de osciladores harmônicos independentes e no processo de quantização do campo eletromagnético obtém-se osciladores harmônicos quânticos como resultado da quantização do campo eletromagnético [8].

O oscilador harmônico clássico unidimensional corresponde a um sistema Lagrangeano com $N = 1$ grau de liberdade. O movimento do mesmo evolui no tempo sob a ação de um potencial dependente de x na forma

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2, \quad (2.1)$$

onde k é uma constante característica do sistema. Sob essas condições, de acordo com a formulação lagrangeana, a equação que governa o movimento desse sistema é dada por

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{dV}{dx} = -kx, \\ m \frac{d^2x}{dt^2} + kx &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

cuja solução geral pode ser escrita na forma [9]

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad (2.3)$$

com $\omega = \sqrt{k/m}$ sendo a frequência de oscilação do sistema, A a amplitude de oscilação e ϕ uma fase arbitrária. Tanto A quanto ϕ dependem da condição inicial do sistema, definida pelos valores da posição e velocidade no instante inicial, $x(0)$ e $\dot{x}(0)$, respectivamente. O oscilador harmônico clássico, na ausência de forças dissipativas, é um sistema conservativo, cuja energia mecânica se mantém constante no tempo e é dada por

$$E = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2. \quad (2.4)$$

Associada a essa equação da energia do oscilador harmônico, é possível escrevê-la de forma similar a equação diferencial obtida em (2.2), de modo que o valor da energia do sistema está determinado pelas condições iniciais dos valores de $x(0)$ e $\dot{x}(0)$.

Considerando este sistema no contexto da Mecânica Quântica, o processo de quantização canônica do oscilador harmônico implica as coordenadas x e p serem substituídas pelos observáveis \hat{X} e \hat{P} , que satisfazem a relação de comutação [10]

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar\mathbb{1}, \quad (2.5)$$

onde $\mathbb{1}$ é o operador identidade. Neste sentido, a hamiltoniana clássica é substituída pelo operador Hamiltoniano do oscilador quantizado, escrito na forma

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2, \quad (2.6)$$

entendido agora como uma entidade que atua em um espaço de estados quânticos. Pode-se, neste sentido, introduzir operadores que permitem uma descrição alternativa para a dinâmica do oscilador harmônico e a adição desses operadores permite facilitar a busca pelos autovalores e autovetores de \hat{H} . Esses operadores recebem o nome de operador de criação (\hat{a}^\dagger) e operador de aniquilação (\hat{a}) e são definidos pela transformação de coordenadas

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{X} + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\hat{P}, \quad (2.7)$$

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{X} - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\hat{P}. \quad (2.8)$$

Além disso, de acordo com (2.5), os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger satisfazem a relação

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \mathbb{1}, \quad (2.9)$$

característica da estatística de partículas bosônicas. Nas novas coordenadas \hat{a} e \hat{a}^\dagger o operador hamiltoniano (2.6) se escreve na forma

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\mathbb{1} \right). \quad (2.10)$$

O problema básico da descrição das propriedades do oscilador harmônico quântico reduz-se a solução do problema de autovalores de \hat{H} associado diretamente aos autovalores e autovetores de $\hat{a}^\dagger\hat{a}$. Este aspecto do problema é o ponto de partida para considerar-se a classe de estados pertinentes ao oscilador harmônico simples.

2.2 Estados do Campo Quantizado

Dentre os vários tipos de estados para o campo eletromagnético de radiação, alguns são importantes para a óptica quântica e propriedades físicas distintas podem ser associadas a cada um

deles. Nesta seção, aborda-se alguns desses estados, considerando uma breve análise de suas propriedades necessárias ao desenvolvimento do trabalho da dissertação.

Os autoestados do oscilador harmônico quântico, descrito pelo operador Hamiltoniano \hat{H} em (2.10) são escritos como $|n\rangle$ e são chamados de estados de número ou de Fock. Esses vetores de estados são definidos para valores de n inteiros positivos ($n \geq 0$) [10] e formam uma base ortonormal satisfazendo a relação de completeza

$$\langle m | n \rangle = \delta_{m,n}, \quad (2.11)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = \mathbb{1}, \quad (2.12)$$

A atuação dos operadores \hat{a}^\dagger e \hat{a} no vetor de estado $|n\rangle$ é definida de acordo com as relações [10]

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad (2.13)$$

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad (2.14)$$

e o operador $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ é definido como o operador número, denotado por \hat{n} , e os estados de Fock são seus autoestados, uma vez que, a partir da relações (2.13) e (2.14) tem-se

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle. \quad (2.15)$$

Desta forma, os autovalores de \hat{H} são determinados como

$$E_n = \hbar\omega(1/2 + n).$$

A partir do estado de vácuo $|0\rangle$ com $n = 0$, sujeito à condição $\hat{a}|0\rangle = 0$, o vetor $|n\rangle$ pode ser obtido por n aplicações sucessivas do operador de criação \hat{a}^\dagger no estado de vácuo $|0\rangle$, de acordo com a equação

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad (2.16)$$

onde o termo $\sqrt{n!}$, no denominador em (2.16) é igual ao fator de normalização do estado $|n\rangle$.

Dentre os tipos de estados existentes, há um tipo de estado do oscilador cujas propriedades podem ser consideradas próximas a de um estado que admite uma descrição clássica, no sentido que suas propriedades são consistentes com as soluções das equações do eletromagnetismo, como por exemplo o campo elétrico dado por $\vec{E}_{\vec{k},\alpha}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \text{sen}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)$. Considerando a quantização do campo eletromagnético [7], o vetor potencial $\vec{A}(\vec{r}, t)$ pode ser escrito na forma

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1}^2 \vec{e}_\alpha(\vec{k}) c \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_k}} \left[\hat{a}_\alpha(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} + \hat{a}^\dagger_\alpha(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega t} \right], \quad (2.17)$$

onde o campo em (2.17), está confinado em um cubo de volume V , com $\vec{\epsilon}_\alpha(\vec{k})$ sendo o vetor de polarização da onda, um vetor unitário dependente da direção de propagação \vec{k} . Deste modo, quando se determina o campo eletromagnético pela expressão $\vec{E}(\vec{r}, t) = -(1/c)\partial\vec{A}(\vec{r}, t)/\partial t$, utilizando (2.17), pode-se determinar o valor esperado de $\vec{E}(\vec{r}, t)$ para os estados de Fock inicialmente, $\langle n|\vec{E}_{\vec{k},\alpha}(\vec{r}, t)|n\rangle$, obtendo-se um valor igual a zero devido as relações (2.13) e (2.14). Porém nos estados coerentes, esse valor é não nulo e possui um valor igual do campo elétrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ descrito classicamente, $\langle\alpha|\vec{E}_{\vec{k},\alpha}(\vec{r}, t)|\alpha\rangle = \vec{E}_0\text{sen}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)$. Esses estados são denominados estados coerentes. Esses estados são definidos como sendo autoestados do operador de aniquilação \hat{a} do oscilador harmônico,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (2.18)$$

onde α é um número complexo. Note que \hat{a} não é hermitiano e \hat{a} e \hat{a}^\dagger não comutam de forma que ao escrever o adjunto de (2.18), tem-se $\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \alpha^*\langle\alpha|$. Sendo os estados de Fock $\{|n\rangle\}$ uma base do espaço de estados do oscilador harmônico quântico, os estados coerentes $|\alpha\rangle$ podem serem expandidos nessa base de acordo com

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad (2.19)$$

cujos coeficientes c_n são obtidos a partir da expressão (2.18) combinada com (2.19). Assim, o estado $|\alpha\rangle$, normalizado assume a forma

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.20)$$

Através da relação (2.16), o estado $|\alpha\rangle$ pode ainda ser escrito na forma

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} |0\rangle. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Notando que $e^{-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle = |0\rangle$, a equação (2.21) pode ser reescrita como

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle, \quad (2.22)$$

onde $\hat{D}(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}}$ é chamado de operador de deslocamento ou operador de Glauber [8]. Através da relação de Baker-Campbell-Hausdorff [11],

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{-1/2[\hat{A},\hat{B}]} e^{\hat{A}} e^{\hat{B}}, \quad (2.23)$$

se $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$, o operador $\hat{D}(\alpha)$ é então reescrito na forma $\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$. Esse operador $\hat{D}(\alpha)$ é um operador unitário e possui as seguintes propriedades:

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}(-\alpha) = \hat{D}^{-1}(\alpha), \quad (2.24)$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{D}(\alpha) = \mathbf{1}. \quad (2.25)$$

Além dessas relações obtidas, ao considerar dois operadores quaisquer \hat{A} e \hat{B} que não comutam, uma outra propriedade do operador deslocamento $\hat{D}(\alpha)$ pode ser obtida através da relação a seguir [11],

$$e^{\varepsilon\hat{A}}\hat{B}e^{-\varepsilon\hat{A}} = B + \varepsilon[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{\varepsilon^2}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots, \quad (2.26)$$

onde ε é uma constante. Dessa forma, ao utilizar a relação (2.26), tem-se relações algébricas para a ação do operador $\hat{D}(\alpha)$ sobre os operadores bosônicos \hat{a} e \hat{a}^\dagger , dadas por

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha, \quad (2.27)$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*. \quad (2.28)$$

Observe, que diferentemente dos estados da base de Fock, os estados coerentes distintos não são ortogonais, uma vez que

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \beta \rangle &= e^{-1/2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \sum_{n,m} \frac{\alpha^{*n} \beta^m}{\sqrt{n!m!}} \langle n | m \rangle \\ &= e^{(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \alpha^*\beta - \frac{1}{2}|\beta|^2)}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Para o caso $|\alpha - \beta| \gg 1$, então esses estados podem ser tratados como estados aproximadamente ortogonais. Esses estados coerentes $|\alpha\rangle$ possuem uma base chamada super completa, definindo esta relação de completude na forma

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = \mathbf{1}, \quad (2.30)$$

onde $d^2\alpha = d\Re(\alpha)d\Im(\alpha)$.

Os estados comprimidos¹ pertencem a uma classe de estados de mínima incerteza [12]. Suponha dois operadores hermitianos \hat{A} e \hat{B} de tal forma que satisfaçam a relação de comutação

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}, \quad (2.31)$$

¹do inglês *squeezed states*.

de acordo com a relação de incerteza de Heisenberg, o produto das incertezas dos operadores \hat{A} e \hat{B} é dado por

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \geq \frac{1}{2}|\langle\hat{C}\rangle|, \quad (2.32)$$

onde os termos $\Delta\hat{A}$ e $\Delta\hat{B}$ são definidos por

$$\Delta\hat{A} = \sqrt{\langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2}, \quad (2.33)$$

$$\Delta\hat{B} = \sqrt{\langle\hat{B}^2\rangle - \langle\hat{B}\rangle^2}. \quad (2.34)$$

O estado do sistema é chamado de estado comprimido se a incerteza em \hat{A} ou \hat{B} , satisfazem a relação

$$(\Delta\hat{A})^2 < \frac{1}{2}|\langle\hat{C}\rangle|, \quad \text{ou} \quad (\Delta\hat{B})^2 < \frac{1}{2}|\langle\hat{C}\rangle|. \quad (2.35)$$

Além disso, pode ocorrer o caso de $\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} = |\langle\hat{C}\rangle|/2$. Como exemplo, utilizando as relações (2.7) e (2.8) do oscilador harmônico, pode-se escrever

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (2.36)$$

$$\hat{P} = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}), \quad (2.37)$$

e calcular, para estados coerentes $|\alpha\rangle$ as incertezas, obtendo

$$\Delta\hat{X}\Delta\hat{P} = \frac{\hbar}{2}, \quad (2.38)$$

que é a incerteza mínima permitida pelo princípio de Heisenberg. Considere agora o operador aniquilação, escrito como parte real e imaginária da forma

$$\hat{a} = \frac{\hat{X}_1 + i\hat{X}_2}{2}, \quad (2.39)$$

onde \hat{X}_1 e \hat{X}_2 são chamados de operadores de quadratura, posição e momento adimensionais respectivamente. Com o resultado (2.9) podemos encontrar $[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = 2i$ e portanto

$$\Delta\hat{X}_1\Delta\hat{X}_2 \geq 1. \quad (2.40)$$

O sinal de igual define a família de mínima incerteza. Para este caso, note que há uma infinidade de estados que satisfazem $\Delta\hat{X}_1\Delta\hat{X}_2 = 1$, um caso particular é quando $\Delta\hat{X}_1 = \Delta\hat{X}_2 = 1$, que são os estados coerentes. No caso onde $\Delta\hat{X}_1 < 1$ ou $\Delta\hat{X}_2 < 1$ de forma que $\Delta\hat{X}_1\Delta\hat{X}_2 = 1$ seja mantido,

dizemos que esses são estados comprimidos de mínima incerteza. De maneira similar ao que foi ilustrado nas propriedades dos estados coerentes, algumas propriedades dos estados comprimidos são apresentadas a seguir. Esses estados podem ser gerados pelo operador unitário de compressão $\hat{S}(r)$ [8,12], definido na forma

$$\hat{S}(r) = e^{\left(\frac{1}{2}r^*\hat{a}^2 - \frac{1}{2}r\hat{a}^{\dagger 2}\right)}, \quad (2.41)$$

cuja atuação no estado de vácuo $|0\rangle$ resulta no chamado estado vácuo comprimido,

$$|r\rangle = \hat{S}(r)|0\rangle, \quad (2.42)$$

sendo o parâmetro $r = re^{i\theta}$ um número complexo arbitrário com $r \geq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$. Além desse estado comprimido, há também o estado vácuo comprimido deslocado, resultado da ação dos operadores $\hat{S}(r)$ e $\hat{D}(\alpha)$ no estado de vácuo $|0\rangle$, determinado segundo a equação

$$|\alpha, r\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(r)|0\rangle. \quad (2.43)$$

Através da relação de (2.26), as seguintes relações são obtidas ao utilizar o operador $\hat{S}(r)$ combinadas com os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger ,

$$\hat{S}^\dagger(r)\hat{a}\hat{S}(r) = \hat{a} \cosh(r) - \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \sinh(r), \quad (2.44)$$

$$\hat{S}^\dagger(r)\hat{a}^\dagger\hat{S}(r) = \hat{a}^\dagger \cosh(r) - \hat{a} e^{-i\theta} \sinh(r). \quad (2.45)$$

Quando se estuda mecânica quântica, muitas vezes depara-se com duas situações para os estados do sistema: os estados puros e os estados mistos. Estados puros implicam um conhecimento exato sobre o estado $|\Psi\rangle$ do sistema. Mas em alguns casos, isso nem sempre ocorre, e temos então o chamado estado misto, onde não se conhece exatamente o estado do sistema, mas sim uma composição de estados de acordo com uma distribuição de probabilidade p_i associada com os estados $|\psi_i\rangle$ possíveis. Um exemplo desse estado misto é o estado térmico, onde pode-se considerar um corpo negro modelado por uma cavidade contendo radiação térmica em equilíbrio térmico com as paredes da cavidade. No equilíbrio térmico a uma temperatura T , a probabilidade P_n de que um modo do campo esteja excitado com n fótons é dado pelo fator de Boltzmann [13],

$$P_n = \frac{e^{-(E_n/k_B T)}}{\sum_n e^{-(E_n/k_B T)}}. \quad (2.46)$$

Essa distribuição, na mecânica quântica, está associada ao operador densidade $\hat{\rho}_{th}$ dado na forma

$$\hat{\rho}_{th} = \frac{e^{-(\hat{H}/k_B T)}}{\text{Tr}\{e^{-(\hat{H}/k_B T)}\}}, \quad (2.47)$$

O operador $\hat{H} = \hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \mathbb{1})$ diagonalizável na base $\{|n\rangle\}$ implica, para o traço na equação de $\hat{\rho}_{th}$, a forma

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{e^{-(\hat{H}/k_B T)}\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-(\hat{H}/k_B T)} | n \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(E_n/k_B T)} \equiv Z, \end{aligned} \quad (2.48)$$

que define Z como a função partição do sistema com $E_n = \hbar\omega (n + 1/2)$, que são os autovalores do operador \hat{H} . A partir do estado $\hat{\rho}_{th}$, o número médio de fótons pode ser obtido através da relação

$$\begin{aligned} \bar{n} = \langle \hat{n} \rangle &= \text{Tr}\{\hat{n} \hat{\rho}_{th}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \hat{n} \frac{e^{-(\hat{H}/k_B T)}}{Z} | n \rangle \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (n e^{-(E_n/k_B T)})}{Z} \\ &= \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Note que o valor de \bar{n} depende explicitamente da temperatura T da cavidade e uma mudança na temperatura T implica a alteração do seu valor; há uma correspondência unívoca entre o número médio de fótons do estado da cavidade e a temperatura das paredes da cavidade. O operador densidade $\hat{\rho}_{th}$ pode ainda ser escrito na base de Fock $\{|n\rangle\}$. Pela relação de completeza na base de Fock, $\sum |n\rangle\langle n| = \mathbb{1}$, pode-se reescrever $\hat{\rho}_{th}$ na forma

$$\hat{\rho}_{th} = \frac{1}{\bar{n} + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right]^n |n\rangle\langle n|, \quad (2.50)$$

onde \bar{n} é expresso em (2.49). Pela propriedade do operador densidade, o traço de $\hat{\rho}_{th}$ deve ser igual a 1. Dessa forma, tem-se que

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_{th}) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle m | \left(\frac{1}{\bar{n} + 1} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right]^n |n\rangle\langle n|m \rangle. \quad (2.51)$$

De acordo com a relação $\langle n|m \rangle = \delta_{n,m}$, o traço de $\hat{\rho}_{th}$ torna-se

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_{th}) = \left(\frac{1}{\bar{n} + 1} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right]^n, \quad (2.52)$$

com o auxílio da equação (2.49), obtém-se que

$$e^{-\hbar\omega/k_B T} = \frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}}. \quad (2.53)$$

Deste modo, o traço de $\hat{\rho}_{th}$ é então reescrito na forma

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\rho}_{th}) &= \left(\frac{1}{\bar{n} + 1} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right]^n = (1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\hbar\omega/k_B T} \\ &= (1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}) \left(\frac{1}{1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}} \right) \\ &= 1. \end{aligned} \quad (2.54)$$

No contexto da troca de informação quântica em sistemas de variáveis contínuas os estados Gaussianos são de grande importância prática para o estudo da dinâmica em sistemas descritos por operadores Hamiltonianos quadráticos. Estados iniciais Gaussianos evoluem sob a ação de operadores Hamiltonianos quadráticos como um estado Gaussiano. Desse modo, todas as suas propriedades podem ser determinadas a partir dos primeiros e segundos momentos associados as variáveis do sistema.

No caso de estados iniciais Gaussianos devemos considerar uma parametrização inicial de acordo com as propriedades de interesse no estudo da dinâmica do sistema. Neste trabalho, considera-se o caso de dois modos do campo eletromagnético quantizados, de forma que o estado inicial de cada modo é um estado térmico comprimido. Pode se denotar para o modo um um estado inicial térmico denotado por $\hat{\rho}_{th}^{(1)}$, de acordo com (2.50) e descrito na forma

$$\hat{\rho}_{th}^{(1)} = \frac{1}{\bar{n}_1 + 1} \sum_{n_1=0}^{\infty} \left[\frac{\bar{n}_1}{1 + \bar{n}_1} \right]^{n_1} |n_1\rangle\langle n_1|. \quad (2.55)$$

Atribuindo valores de compressão para o estado do modo bosônico um , tornando-o um estado térmico comprimido, o operador densidade inicial do correspondente modo é determinado a partir da operação

$$\hat{\rho}^{(1)} = \hat{S}(r_1) \hat{\rho}_{th}^{(1)} \hat{S}^\dagger(r_1), \quad (2.56)$$

onde $\hat{S}(r_1)$ é dado em (2.41). A conjugação hermitiana $\hat{S}^\dagger(r_1)$ é obtida ao fazer $\hat{S}(-r_1)$ [8], e este operador possui a propriedade $\hat{S}^\dagger(r_1) \hat{S}(r_1) = \hat{S}^{-1}(r_1) \hat{S}(r_1) = \hat{S}(-r_1) \hat{S}(r_1) = \mathbb{1}$. No interesse de determinar os segundos momentos dos estados iniciais Gaussianos dos modos um e *dois*, considera-

se inicialmente para o modo um o seguinte termo

$$\begin{aligned}
\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle &= \text{Tr} \left[\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{\rho}^{(1)} \right] \\
&= \sum_{m_1=0}^{\infty} \langle m_1 | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{\rho}^{(1)} | m_1 \rangle, \\
&= \sum_{m_1=0}^{\infty} \langle m_1 | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{S}(r_1) \hat{\rho}_{th}^{(1)} \hat{S}^\dagger(r_1) | m_1 \rangle \\
&= \sum_{m_1=0}^{\infty} \langle m_1 | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{S}(r_1) \left[\left(\frac{1}{\bar{n}_1 + 1} \right) \sum_{n_1=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}_1}{1 + \bar{n}_1} \right)^{n_1} |n_1\rangle \langle n_1| \right] \hat{S}^\dagger(r_1) | m_1 \rangle \\
&= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\bar{n}_1 + 1} \right) \left(\frac{\bar{n}_1}{1 + \bar{n}_1} \right)^{n_1} \langle m_1 | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{S}(r_1) | n_1 \rangle \langle n_1 | \hat{S}^\dagger(r_1) | m_1 \rangle \\
&= \sum_{n_1=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\bar{n}_1 + 1} \right) \left(\frac{\bar{n}_1}{1 + \bar{n}_1} \right)^{n_1} \langle n_1 | \hat{S}^\dagger(r_1) \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} |m_1\rangle \langle m_1| \right) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{S}(r_1) | n_1 \rangle \\
&= \sum_{n_1=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\bar{n}_1 + 1} \right) \left(\frac{\bar{n}_1}{1 + \bar{n}_1} \right)^{n_1} \langle n_1 | \hat{S}^\dagger(r_1) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{S}(r_1) | n_1 \rangle. \tag{2.57}
\end{aligned}$$

Pelas relações do operador $\hat{S}(r_1)$ e $\hat{S}^\dagger(r_1)$, obtidas em (2.44) e (2.45), respectivamente, tem-se que

$$\begin{aligned}
\langle n_1 | \hat{S}^\dagger(r_1) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{S}(r_1) | n_1 \rangle &= \langle n_1 | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 | n_1 \rangle \cosh^2 r_1 - \langle n_1 | \hat{a}_1^{\dagger 2} | n_1 \rangle e^{i\theta} \cosh r_1 \sinh r_1 \\
&\quad - \langle n_1 | \hat{a}_1^2 | n_1 \rangle e^{-i\theta} \sinh r_1 \cosh r_1 + \langle n_1 | \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger | n_1 \rangle \sinh^2 r_1. \tag{2.58}
\end{aligned}$$

A partir das relações do operador \hat{a}_1^\dagger e \hat{a}_1 obtidas em (2.13) (2.14), obtém-se

$$\langle n_1 | \hat{S}^\dagger(r_1) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{S}(r_1) | n_1 \rangle = n_1 (\cosh^2 r_1 + \sinh^2 r_1) + \sinh^2 r_1, \tag{2.59}$$

e aplicando as identidades hiperbólicas

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2} \cosh 2x - \frac{1}{2}, \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2} \cosh 2x + \frac{1}{2},$$

o valor de $\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle$ dado em (2.57) assume a forma

$$\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle = \sum_{n_1=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\bar{n}_1 + 1} \right) \left(\frac{\bar{n}_1}{1 + \bar{n}_1} \right)^{n_1} \left[\left(\frac{2n_1 + 1}{2} \right) \cosh 2r_1 - \frac{1}{2} \right]. \tag{2.60}$$

Como $\sum_{n_1=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\bar{n}_1 + 1} \right) \left(\frac{\bar{n}_1}{1 + \bar{n}_1} \right)^{n_1} = 1$ de acordo com o resultado em (2.54), o valor do somatório em (2.60) determina o valor médio da função nos colchetes da mesma maneira que foi determinado em (2.49), porém, determinado na representação na base de Fock $\{|n_1\rangle\}$. Portanto,

$$\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle = \left(\frac{2\bar{n}_1 + 1}{2} \right) \cosh 2r_1 - \frac{1}{2}. \tag{2.61}$$

De maneira similar ao procedimento para se obter $\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle$, outro termo que pode ser obtido é $\langle \hat{a}_1^2 \rangle$. Esse termo, é facilmente determinado, a partir do operador densidade inicial do modo um dado em (2.56) e das relações em (2.44)-(2.45). Dessa forma, tem-se

$$\langle \hat{a}_1^2 \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}^{(1)} \hat{a}_1^2] = - \sum_{n_1=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\bar{n}_1 + 1} \right) \left(\frac{\bar{n}_1}{1 + \bar{n}_1} \right)^{n_1} \langle n_1 | \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 | n_1 \rangle e^{i\theta} \sinh r_1 \cosh r_1, \quad (2.62)$$

pelos relações (2.13) e (2.14). A identidade hiperbólica $2 \sinh x \cosh x = \sinh(2x)$ implica, então, que

$$\langle \hat{a}_1^2 \rangle = - \sum_{n_1=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\bar{n}_1 + 1} \right) \left(\frac{\bar{n}_1}{1 + \bar{n}_1} \right)^{n_1} \left[\left(\frac{2n_1 + 1}{2} \right) e^{i\theta} \sinh 2r_1 \right] = - \left(\frac{2\bar{n}_1 + 1}{2} \right) \sinh 2r_1 e^{i\theta}. \quad (2.63)$$

Definindo o seguinte termo,

$$\vartheta_1 = \frac{2\bar{n}_1 + 1}{2}, \quad (2.64)$$

os estados iniciais para o primeiro modo um , com $\theta = 0$, podem então ser parametrizados na forma,

$$\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle = \vartheta_1 \cosh(2r_1) - \frac{1}{2}, \quad (2.65)$$

$$\langle \hat{a}_1^2 \rangle = -\vartheta_1 \sinh(2r_1), \quad (2.66)$$

com os parâmetro r_1 e ϑ_1 associados às propriedades de compressão da quadratura e pureza do sistema, respectivamente. Para outros termos ainda do modo um , $\langle \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger \rangle$ e $\langle \hat{a}_1^{\dagger 2} \rangle$, são calculados da mesma maneira e são escritos por

$$\langle \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger \rangle = \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle + 1 = \vartheta_1 \cosh(2r_1) + \frac{1}{2}, \quad (2.67)$$

$$\langle \hat{a}_1^{\dagger 2} \rangle = -\vartheta_1 \sinh(2r_1). \quad (2.68)$$

Para o sistema composto por dois modos do campo eletromagnético quantizados, inicialmente sem interação, os cálculos envolvidos para a determinação dos estados iniciais se faz de maneira similar ao ilustrado para o modo bosônico 1. Como estado inicial para o sistema de dois modos, considera-se o operador densidade inicial térmico na forma

$$\hat{\rho}_{th} = \left(\frac{1}{\bar{n}_1 + 1} \sum_{n_1=0}^{\infty} \left[\frac{\bar{n}_1}{1 + \bar{n}_1} \right]^{n_1} |n_1\rangle \langle n_1| \right) \otimes \left(\frac{1}{\bar{n}_2 + 1} \sum_{n_2=0}^{\infty} \left[\frac{\bar{n}_2}{1 + \bar{n}_2} \right]^{n_2} |n_2\rangle \langle n_2| \right), \quad (2.69)$$

de modo compacto, pode-se reescrever a expressão acima na forma

$$\hat{\rho}_{th} = \bigotimes_{i=1}^2 \left(\frac{1}{\bar{n}_i + 1} \sum_{n_i=0}^{\infty} \left[\frac{\bar{n}_i}{1 + \bar{n}_i} \right]^{n_i} |n_i\rangle \langle n_i| \right). \quad (2.70)$$

Ao considerar agora o estado comprimido térmico, o operador densidade inicial dos dois osciladores é escrito então por

$$\hat{\rho}_s = \hat{S}(r_2)\hat{S}(r_1)\hat{\rho}_{th}\hat{S}^\dagger(r_1)\hat{S}^\dagger(r_2), \quad (2.71)$$

onde $\hat{S}(r_k)$ é dado em (2.41). Efetuando cálculos similares aos apresentados para o modo bosônico *um* apenas, os estados iniciais para os dois modos bosônicos interagentes em $t = 0$, estão determinados por $\langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle$, $\langle \hat{a}_k^2 \rangle$, $\langle \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \rangle$ e $\langle \hat{a}_k^{\dagger 2} \rangle$, onde $k = 1, 2$. Desta forma pode-se então parametrizar os estados iniciais Gaussianos, conforme apresentado em [14, 15], na forma

$$\langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle = \vartheta_k \cosh(2r_k) - \frac{1}{2}, \quad \langle \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \rangle = \vartheta_k \cosh(2r_k) + \frac{1}{2}, \quad (2.72)$$

$$\langle \hat{a}_k^2 \rangle = \langle \hat{a}_k^{\dagger 2} \rangle = -\vartheta_k \sinh(2r_k), \quad (2.73)$$

onde os parâmetros ϑ_k determinam a pureza inicial de cada modo k dado por $\mathcal{P}_k = (2\vartheta_k)^{-1}$, observada a condição $\vartheta_k \geq 1/2$. Os parâmetros r_k fornecem o grau de compressão de quadratura inicial de cada um dos modos $k = 1, 2$.

Dessa forma, para funções Gaussianas, mediante transformações de coordenadas apropriadas, pode-se fazer com que os primeiros momentos sejam nulos, e com isso, resta obter apenas os segundos momentos. O interesse está então, em obter os segundos momentos, uma vez que ele contém todas as informações para calcular propriedades estatísticas e físicas do problema em interesse deste trabalho. Com as condições iniciais determinadas pelas parametrizações dos estados Gaussianos, e com diferentes valores que podem ser atribuídos nos estados iniciais, caracterizando diferentes estados quânticos discutidos neste capítulo, resta então determinar a equação diferencial da dinâmica do sistema físico, o qual será tratado no próximo capítulo.

Capítulo 3

Tratamento Analítico em Sistemas Quânticos Dissipativos

Sistemas constituídos por osciladores harmônicos quânticos interagentes por meio de potenciais quadráticos, nos quais se observa ausência de interações quânticas com as suas vizinhanças, são sistemas fechados com evolução unitária. As propriedades associadas à descrição da dinâmica quântica podem ser desenvolvidas na formulação dos invariantes quânticos ou integrais do movimento [16]. Além disso, quando se considera a dinâmica de sistemas representados por operadores Hamiltonianos quadráticos, para o caso de estados iniciais Gaussianos, todas as propriedades de interesse desse sistema podem ser descritas a partir da evolução temporal dos primeiros e segundos momentos associados às variáveis dinâmicas. Porém, quando adiciona-se nesses sistemas efeitos dissipativos, como reservatórios térmicos por exemplo, a evolução não se faz mais de forma unitária e deve-se então abrir mão dos métodos dos invariantes quânticos ou integrais do movimento. Então, é preciso considerar a dinâmica do sistema sob o ponto de vista da formulação da equação mestra. Neste capítulo, considera-se o estudo da equação mestra para o sistema quântico representado por dois modos do campo eletromagnético, modelados por osciladores harmônicos quânticos, com frequências distintas ω_1 e ω_2 , sob efeito de processos dissipativos onde os osciladores interagem entre si por meio de um acoplamento dependente do tempo.

3.1 Osciladores Acoplados Dissipativos

Nesta seção, inicia-se com o tratamento matemático para descrever o problema da dinâmica de osciladores quânticos sob efeitos de processos dissipativos. Por meio deste tratamento matemático

no contexto da teoria quântica, obtém-se a equação diferencial para a descrição da dinâmica do sistema a partir da equação de Liouville: determina-se a equação diferencial para o operador densidade reduzido do sistema de interesse, tomando-se o traço sob as variáveis dos graus de liberdade das vizinhanças do sistema. No interesse de analisar efeitos de reservatórios (vizinhanças do sistema) sobre os osciladores harmônicos, o sistema proposto neste trabalho consiste de modos bosônicos com frequências distintas ω_1 e ω_2 , interagindo por meio de um acoplamento dependente do tempo. Cada um dos k -ésimos modos está acoplado a seu respectivo reservatório térmico de temperatura T_k e os reservatórios não interagem entre si - distintos e independentes. A análise das propriedades físicas de modos bosônicos acoplados para o caso de acoplamento independente do tempo na aproximação de onda girante (RWA), está discutido em [5]. A proposta deste trabalho é uma extensão simplificada daquele estudo, considerando os casos particulares de acoplamento dependente do tempo do tipo considerado em [17]. Na ausência de reservatórios, com dois modos acoplados por meio do acoplamento bilinear dependente do tempo geral nas componentes de quadratura, é descrito pelo operador Hamiltoniano na forma [17]

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_1}{2}(\hat{p}_1^2 + \hat{x}_1^2) + \frac{\hbar\omega_2}{2}(\hat{p}_2^2 + \hat{x}_2^2) + \hbar\tilde{\omega}(\Upsilon_1(t)\hat{p}_1\hat{p}_2 + \Upsilon_2(t)\hat{p}_1\hat{x}_2 + \Upsilon_3(t)\hat{x}_1\hat{p}_2 + \Upsilon_4(t)\hat{x}_1\hat{x}_2), \quad (3.1)$$

onde os operadores \hat{x}_k e \hat{p}_k são os operadores correspondentes às variáveis das componentes de quadratura adimensionais, os parâmetros de acoplamentos $\Upsilon_j(t)$ podem ser funções arbitrárias no tempo e a constante $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_1\omega_2}$. Estes operadores podem ser expressos em termos dos operadores de criação \hat{a}_k^\dagger e aniquilação \hat{a}_k (operadores bosônicos) de acordo com as relações

$$\hat{a}_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}_k + i\hat{p}_k), \quad \hat{a}_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}_k - i\hat{p}_k). \quad (3.2)$$

Reescrevendo o operador Hamiltoniano (3.1) em termos dos operadores \hat{a}_k^\dagger e \hat{a}_k , implica em

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hbar\tilde{\omega}}{2} \left[(\Upsilon_4(t) - \Upsilon_1(t) + i\Upsilon_2(t) + i\Upsilon_3(t)) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger + (\Upsilon_4(t) + \Upsilon_1(t) + i\Upsilon_2(t) - i\Upsilon_3(t)) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right. \\ &+ \left. (\Upsilon_4(t) + \Upsilon_1(t) - i\Upsilon_2(t) + i\Upsilon_3(t)) \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + (\Upsilon_4(t) - \Upsilon_1(t) - i\Upsilon_2(t) - i\Upsilon_3(t)) \hat{a}_1 \hat{a}_2 \right] \\ &+ \hbar\omega_1 \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \frac{\mathbb{1}}{2} \right) + \hbar\omega_2 \left(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \frac{\mathbb{1}}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

que a partir das definições para os parâmetros $\Upsilon_\pm(t)$ e $\Gamma_\pm(t)$, nas formas

$$\Upsilon_4(t) \pm \Upsilon_1(t) = \Upsilon_\pm(t), \quad (3.4)$$

$$\Upsilon_3(t) \pm \Upsilon_2(t) = \Gamma_\pm(t), \quad (3.5)$$

resulta o operador Hamiltoniano reescrito em termos dos operadores de modos bosônicos na forma

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \hbar\omega_1 \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \frac{\mathbb{1}}{2} \right) + \hbar\omega_2 \left(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \frac{\mathbb{1}}{2} \right) + \left[(\Upsilon_+(t) - i\Gamma_-(t)) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + (\Upsilon_+(t) + i\Gamma_-(t)) \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right. \\ & \left. + (\Upsilon_-(t) + i\Gamma_+(t)) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger + (\Upsilon_-(t) - i\Gamma_+(t)) \hat{a}_1 \hat{a}_2 \right], \end{aligned} \quad (3.6)$$

que, em termos das funções $\mu(t)$ e $\zeta(t)$ dadas por

$$\mu(t) = \Upsilon_+(t) + i\Gamma_-(t) \quad (3.7)$$

$$\zeta(t) = \Upsilon_-(t) - i\Gamma_+(t), \quad (3.8)$$

resulta o operador Hamiltoniano na forma

$$\hat{H} = \hbar\omega_1 \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \frac{\mathbb{1}}{2} \right) + \hbar\omega_2 \left(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \frac{\mathbb{1}}{2} \right) + \left[\mu^*(t) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \mu(t) \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + \zeta^*(t) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger + \zeta(t) \hat{a}_1 \hat{a}_2 \right]. \quad (3.9)$$

Como o objetivo deste trabalho consiste em uma extensão dos resultados discutidos em [17], levando-se agora em conta os efeitos da dissipação, os acoplamentos a serem considerados são funções periódicas no tempo da forma

$$\zeta(t) = \mu(t) = \lambda e^{i\phi} \cos(\eta t), \quad (3.10)$$

onde λ e ϕ são constantes e $\eta = \omega_1 \pm \omega_2$. O operador Hamiltoniano para a descrição deste sistema físico, composto pelos dois osciladores harmônicos (modos bosônicos) de frequências distintas acoplados entre si por meio de um acoplamento depende e periódico no tempo, com cada oscilador acoplado ao seu respectivo reservatório R_j de temperatura T_j é escrito na forma (com $\hbar = 1$),

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) = & \sum_{k=1}^2 \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \sum_{k,j}^{2,\infty} \tilde{\omega}_{k,j} \hat{b}_{k,j}^\dagger \hat{b}_{k,j} + \sum_{k,j}^{2,\infty} g_{k,j} \left(\hat{a}_k \hat{b}_{k,j}^\dagger + \hat{a}_k^\dagger \hat{b}_{k,j} \right) \\ & + \zeta(t) \hat{a}_1 \hat{a}_2 + \zeta^*(t) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger + \mu(t) \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + \mu^*(t) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

O primeiro termo de \hat{H} descreve os dois osciladores harmônicos independentes, com frequências ω_1 e ω_2 . O segundo termo em \hat{H} se refere aos reservatórios térmicos, representados por um conjunto infinito de osciladores harmônicos quânticos independentes entre si de frequência $\tilde{\omega}_{k,j}$. Esses operadores bosônicos $\hat{b}_{k,j}$ e $\hat{b}_{k,j}^\dagger$ são os operadores de aniquilação e criação respectivamente dos modos dos reservatórios e satisfazem a relação de comutação,

$$[\hat{b}_{k',j'}, \hat{b}_{k,j}^\dagger] = \delta_{k',k} \delta_{j',j}. \quad (3.12)$$

O terceiro termo do operador Hamiltoniano total descreve a interação do tipo RWA de cada um dos modos bosônicos quânticos com seu respectivo reservatório, denotado por \hat{H}_{RS} ,

$$\hat{H}_{RS} = \sum_{k,j}^{2,\infty} g_{k,j} \left(\hat{a}_k \hat{b}_{k,j}^\dagger + \hat{a}_k^\dagger \hat{b}_{k,j} \right), \quad (3.13)$$

onde $g_{k,j}$ é uma constante de acoplamento entre o oscilador harmônico k com o j -ésimo oscilador do reservatório R_j . Note ainda que $[\hat{a}_k, \hat{b}_{k,j}^\dagger] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{b}_{k,j}^\dagger] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{b}_{k,j}] = [\hat{a}_k, \hat{b}_{k,j}] = 0$. O termo restante de \hat{H} é o Hamiltoniano descrevendo a interação entre os modos bosônicos, denotado por $\hat{H}_{12}(t)$:

$$\hat{H}_{12}(t) = \zeta(t) \hat{a}_1 \hat{a}_2 + \zeta^*(t) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger + \mu(t) \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + \mu^*(t) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2, \quad (3.14)$$

com $\zeta(t)$ e $\mu(t)$ dadas em (3.10) sendo funções periódicas no tempo. Dessa forma, o hamiltoniano pode ser expresso na forma

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_{RS} + \hat{H}_{12}(t). \quad (3.15)$$

com \hat{H}_0 , representando a parte livre de interação, dado por

$$\hat{H}_0 = \sum_{k=1}^2 \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \sum_{k,j}^{2,\infty} \tilde{\omega}_{k,j} \hat{b}_{k,j}^\dagger \hat{b}_{k,j}. \quad (3.16)$$

Uma vez descrito a forma do operador Hamiltoniano do sistema físico total, composto pelos modos acoplados e reservatórios, na seção seguinte estuda-se o formalismo da equação mestra, que permite a descrição da dinâmica quântica dos modos acoplados sob o efeito do reservatório.

3.2 Equação Mestra de Sistemas Dissipativos

Em problemas de mecânica quântica, a evolução do vetor de estado $|\Psi(t)\rangle$ que representa um sistema físico se dá pela equação de Schrödinger [10], embora, em muitas situações este tipo de tratamento matemático via equação de Schrödinger não se faz de maneira simples, principalmente considerando-se o operador do tipo dado em (3.15) com infinitos graus de liberdade. A alternativa para se tratar este problema, é então considerar a formulação da equação de Liouville [11] para o operador densidade $\hat{\rho}(t)$. Através do Hamiltoniano dado em (3.11), pode-se então encontrar uma equação de evolução temporal, chamada de equação mestra, considerando somente o operador densidade reduzido para o sistema de interesse $\hat{\rho}_s$, ou seja, o operador que descreve a evolução temporal dos modos bosônicos acoplados, 1 e 2. O objetivo deste trabalho é analisar os efeitos

dos reservatórios sobre a dinâmica dos modos acoplados, considerando algumas aproximações no limite dos acoplamentos fracos.

O operador densidade, contém todas as informações estatísticas do sistema e para a obtenção da dinâmica do sistema, aplica-se a formulação da equação de Liouville [11] dada por

$$i \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = [\hat{H}(t), \rho(t)], \quad (3.17)$$

onde $\hat{H}(t)$ é dado em (3.11) e $\hat{\rho}(t)$ é o operador densidade do sistema total. Para os cálculos envolvidos na dinâmica do sistema, pode-se construir do operador densidade e o hamiltoniano $\hat{H}(t)$ na representação de interação [7]. Nessa representação o operador densidade é descrito por

$$\hat{\sigma}(t) = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{\rho}(t) e^{-i\hat{H}_0 t}, \quad (3.18)$$

onde \hat{H}_0 é dado em (3.16). Derivando a expressão (3.18) em relação a t ,

$$\begin{aligned} i \frac{d\hat{\sigma}(t)}{dt} &= i \frac{d}{dt} \left(e^{i\hat{H}_0 t} \hat{\rho}(t) e^{-i\hat{H}_0 t} \right) \\ &= -\hat{H}_0 e^{i\hat{H}_0 t} \hat{\rho}(t) e^{-i\hat{H}_0 t} + e^{i\hat{H}_0 t} \hat{\rho}(t) e^{-i\hat{H}_0 t} \hat{H}_0 + e^{i\hat{H}_0 t} i \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} e^{-i\hat{H}_0 t} \\ &= [\hat{\sigma}(t), \hat{H}_0] + e^{i\hat{H}_0 t} [\hat{H}(t), \rho(t)] e^{-i\hat{H}_0 t} \\ &= [\hat{H}^{(I)}(t), \hat{\sigma}(t)], \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde $\hat{H}^{(I)}(t)$ representa o hamiltoniano total na representação de interação [18] e pode ser escrito na forma

$$\hat{H}^{(I)}(t) = \hat{H}_{RS}^{(I)}(t) + \hat{H}_{12}^{(I)}(t). \quad (3.20)$$

Para o hamiltoniano $\hat{H}_{RS}^{(I)}(t)$, que contém tanto operadores dos modos bosônicos quanto dos reservatórios na representação de interação, define-se um novo operador chamado $\hat{G}_k(t)$, contendo apenas variáveis dos reservatórios, e escreve-se em uma forma mais compacta

$$\hat{H}_{RS}^{(I)}(t) = \sum_{k=1}^2 \hat{a}_k^\dagger \hat{G}_k(t) + \hat{a}_k \hat{G}_k^\dagger(t), \quad (3.21)$$

onde $\hat{G}_k(t)$ é definido por

$$\hat{G}_k(t) = \sum_{j=1}^{\infty} g_{k,j} \hat{b}_{k,j} e^{i(\omega_k - \tilde{\omega}_{k,j})t}, \quad (3.22)$$

e atua apenas no espaço de estados dos reservatórios. O operador Hamiltoniano que representa o acoplamento entre os modos bosônicos na representação de interação é escrito como

$$\hat{H}_{12}^{(I)}(t) = \zeta(t) \hat{a}_1 \hat{a}_2 e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} + \zeta^*(t) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} + \mu(t) \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} + \mu^*(t) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t}.$$

Com os termos do hamiltoniano (3.20) escritos na representação de interação, ao substituir (3.20) em (3.19), tem-se a seguinte expressão

$$i \frac{d\hat{\sigma}(t)}{dt} = \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t) + \hat{H}_{12}^{(I)}(t), \hat{\sigma}(t) \right], \quad (3.23)$$

integrando esta equação com a finalidade de obter o operador densidade $\hat{\sigma}(t)$, resulta em

$$\hat{\sigma}(t) = \hat{\sigma}(0) + \frac{1}{i} \int_0^t \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t') + \hat{H}_{12}^{(I)}(t'), \hat{\sigma}(t') \right] dt'. \quad (3.24)$$

Através da expressão do operador densidade obtido na integração, ao se substituir (3.24) no comutador do lado direito de (3.23), encontra-se a seguinte equação diferencial para o operador densidade

$$\frac{d\hat{\sigma}(t)}{dt} = -i \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t) + \hat{H}_{12}^{(I)}(t), \hat{\sigma}(0) \right] - \int_0^t \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t) + \hat{H}_{12}^{(I)}(t), \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t') + \hat{H}_{12}^{(I)}(t'), \hat{\sigma}(t') \right] \right] dt'.$$

Desde que as propriedades de interesse referem-se as propriedades estatísticas do sistema composto pelos modos acoplados, toma-se o traço sobre as variáveis dos reservatórios de modo a obter $\hat{\sigma}_s(t)$.

Dessa maneira, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}_s(t)}{dt} = & -i \text{Tr}_{R_1 R_2} \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t) + \hat{H}_{12}^{(I)}(t), \hat{\sigma}(0) \right] - \\ & \text{Tr}_{R_1 R_2} \int_0^t \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t) + \hat{H}_{12}^{(I)}(t), \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t') + \hat{H}_{12}^{(I)}(t'), \hat{\sigma}(t') \right] \right] dt' \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde $\hat{\sigma}_s(t) \equiv \text{Tr}_{R_1 R_2} (\hat{\sigma}(t))$. Para o instante inicial, $t = 0$, considera-se que não há correlações entre sistema e reservatórios de modo que ao realizar o traço sob as variáveis dos reservatórios esse termo se anula,

$$\text{Tr}_{R_1 R_2} \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t), \hat{\sigma}(0) \right] = 0. \quad (3.26)$$

Além disso, $\hat{H}_{12}^{(I)}(t)$ não contém variáveis dos reservatórios e para o instante inicial $t = 0$, o operador densidade total do sistema $\hat{\sigma}$ pode ser escrito da forma $\hat{\sigma}(0) = \hat{\sigma}_s(0) \otimes \hat{\sigma}_R(0) = \hat{\sigma}_s(0) \otimes \hat{\sigma}_{R_1}(0) \otimes \hat{\sigma}_{R_2}(0)$, de modo que o traço sobre o comutador se reduz a

$$\text{Tr}_{R_1 R_2} \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t), \hat{\sigma}(0) \right] = \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t), \hat{\sigma}_s(0) \right]. \quad (3.27)$$

Após estas considerações e detalhes operacionais descritos no apêndice A, obtém-se a equação mestra na forma padrão na representação de interação, dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}_s(t)}{dt} = & -i \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t), \hat{\sigma}_s(t) \right] - \sum_{k=1}^2 \left\{ \gamma_k (1 + \bar{n}_k) \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{\sigma}_s(t) + \hat{\sigma}_s(t) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - 2 \hat{a}_k \hat{\sigma}_s(t) \hat{a}_k^\dagger \right) + \right. \\ & \left. \gamma_k \bar{n}_k \left(\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_s(t) + \hat{\sigma}_s(t) \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger - 2 \hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_s(t) \hat{a}_k \right) + i \Delta \omega_k \left[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k, \hat{\sigma}_s(t) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Note que esta equação é apropriada para uma descrição aproximada dos efeitos do reservatório sobre a dinâmica dos modos bosônicos. É válida no limite dos acoplamentos fracos e para reservatórios Markovianos, de forma que os resultados descritos por esta equação só tem validade sob estas considerações. Faz-se agora o procedimento da transição da representação de interação para a representação de Schrödinger. O operador densidade do sistema reduzido na representação de Schrödinger denotado por $\hat{\rho}_s$, o qual é definido por $\hat{\rho}_s = \text{Tr}_{R_1 R_2}(\hat{\rho})$, pode então ser obtido através da relação (3.18), de forma que

$$\hat{\rho}_s(t) = e^{-i\hat{H}_0 t} \hat{\sigma}_s(t) e^{i\hat{H}_0 t}, \quad (3.29)$$

derivando ainda a equação (3.29) em relação a t ,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_s(t)}{dt} &= -i\hat{H}_0 e^{-i\hat{H}_0 t} \hat{\sigma}_s(t) e^{i\hat{H}_0 t} + i e^{-i\hat{H}_0 t} \hat{\sigma}_s(t) e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}_0 + e^{-i\hat{H}_0 t} \frac{d\hat{\sigma}_s(t)}{dt} e^{i\hat{H}_0 t} \\ &= -i[\hat{H}_0, \hat{\rho}_s] + e^{-i\hat{H}_0 t} \frac{d\hat{\sigma}_s(t)}{dt} e^{i\hat{H}_0 t}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

O último termo de (3.30) pode ser calculado através da expressão obtida explicitamente em (3.28), com a utilização da relação (2.26) e da propriedade $(\exp(i\hat{H}_0 t) \exp(-i\hat{H}_0 t) = \mathbf{1})$. Portanto, a equação para $\rho_s(t)$ se torna

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_s(t)}{dt} &= -i[\hat{H}_0, \hat{\rho}_s] - i[\hat{H}_{12}(t), \hat{\rho}_s(t)] - \sum_{k=1}^2 \left\{ \gamma_k (1 + \bar{n}_k) \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{\rho}_s(t) + \hat{\rho}_s(t) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - 2\hat{a}_k \hat{\rho}_s(t) \hat{a}_k^\dagger \right) + \right. \\ &\quad \left. \gamma_k \bar{n}_k \left(\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \hat{\rho}_s(t) + \hat{\rho}_s(t) \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger - 2\hat{a}_k^\dagger \hat{\rho}_s(t) \hat{a}_k \right) + i\Delta\omega_k \left[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k, \hat{\rho}_s(t) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

para os hamiltonianos \hat{H}_0 e $\hat{H}_{12}(t)$, suas expressões são dadas em (3.16) e (3.14), respectivamente, de forma que a equação pode ser reescrita

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_s(t)}{dt} &= -i \left[\zeta(t) \hat{a}_1 \hat{a}_2 + \zeta^*(t) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger + \mu(t) \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + \mu^*(t) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2, \hat{\rho}_s(t) \right] - \sum_{k=1}^2 \left\{ i(\omega_k + \Delta\omega_k) \left[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k, \hat{\rho}_s(t) \right] + \right. \\ &\quad \left. \gamma_k (1 + \bar{n}_k) \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{\rho}_s(t) + \hat{\rho}_s(t) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - 2\hat{a}_k \hat{\rho}_s(t) \hat{a}_k^\dagger \right) + \gamma_k \bar{n}_k \left(\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \hat{\rho}_s(t) + \hat{\rho}_s(t) \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. 2\hat{a}_k^\dagger \hat{\rho}_s(t) \hat{a}_k \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

O termo $\Delta\omega_k$ em nosso estudo não é relevante, uma vez que ele apenas desloca a frequência ω_k do modo, podendo assim ser incorporada a frequência ω_k e renomeamos essa soma de tal forma que escrevemos então nossa equação mestra da forma

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_s(t)}{dt} &= -i \left[\zeta(t) \hat{a}_1 \hat{a}_2 + \zeta^*(t) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger + \mu(t) \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + \mu^*(t) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2, \hat{\rho}_s(t) \right] - \sum_{k=1}^2 \left\{ i\omega_k \left[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k, \hat{\rho}_s(t) \right] + \right. \\ &\quad \left. \gamma_k (1 + \bar{n}_k) \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{\rho}_s(t) + \hat{\rho}_s(t) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - 2\hat{a}_k \hat{\rho}_s(t) \hat{a}_k^\dagger \right) + \gamma_k \bar{n}_k \left(\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \hat{\rho}_s(t) + \hat{\rho}_s(t) \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. 2\hat{a}_k^\dagger \hat{\rho}_s(t) \hat{a}_k \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

na representação de Schrödinger, com \bar{n}_k e γ_k o número médio de fótons e constante de acoplamento, respectivamente, associada ao k -ésimo reservatório R_k . Salientamos que o número médio de fótons depende da temperatura do reservatório, conforme demonstrado no apêndice A. Então, a partir desta equação pode-se resolvê-la considerando os acoplamentos periódicos no tempo ou mesmo casos mais gerais de acoplamentos arbitrários, desde que respeitando o limite de acoplamento fraco. Note que esta equação é aplicável para qualquer consideração de estado inicial do sistema. No entanto, este primeiro estudo do problema limitou-se a estados iniciais Gaussianos para os modos bosônicos em situações especiais de parâmetros de acoplamento e reservatório, que permitiu uma considerável simplificação no procedimento de solução. Este aspecto será considerado na seções seguintes onde discute-se os método matemáticos aplicados na construção das soluções analíticas aproximadas para o problema de interesse.

3.3 Evolução Temporal dos Segundos Momentos

É conhecido que os estados Gaussianos são caracterizados completamente pelos seus primeiros e segundos momentos dos operadores bosônicos. Nesta seção, apresenta-se o método para determinar a evolução temporal dos segundos momentos associados a evolução temporal de estados Gaussianos. Considerando o operador Hamiltoniano quadrático em (3.11), na situação de estados iniciais Gaussianos para os modos acoplados, pode-se de modo alternativo a resolução do operador densidade, determinar a evolução temporal das propriedades dos modos acoplados a partir da evolução temporal dos momentos de segunda ordem, evitando-se resolver a equação mestra obtida em (3.33), uma equação para operadores. Porém, nesta formulação, para a construção dos segundos momentos, tem-se como ponto de partida, a equação mestra, a partir da qual se estabelece um sistema de equações diferenciais para os segundos momentos, definidos como funções escalares do tempo. Para encontrar, então, os segundos momentos consistindo de combinações dos operadores \hat{a}_k^\dagger e \hat{a}_k , representa-se esses momentos na forma de uma matriz $M(t)$. Essa matriz contém todas as informações estatísticas necessárias para a descrição física das propriedades do sistema, e as equações diferenciais envolvidas para obter os elementos da matriz $M(t)$, são equações diferenciais envolvendo apenas funções a números reais e não mais operadores conforme em (3.33).

Para o caso considerado pelo hamiltoniano (3.11), introduz-se as variáveis de operadores bosônicos na notação compacta $\hat{z}_1 = \hat{a}_1$, $\hat{z}_2 = \hat{a}_2$, $\hat{z}_3 = \hat{a}_1^\dagger$ e $\hat{z}_4 = \hat{a}_2^\dagger$, de tal forma que os componentes deste

vetor $\hat{\mathbf{z}} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger)$, satisfaçam a relação de comutação

$$[\hat{z}_m, \hat{z}_n] = \Xi_{mn} = -\Xi_{nm}. \quad (3.34)$$

Esses elementos Ξ_{mn} , formam uma matriz Ξ de ordem $2N$ representada por

$$\Xi = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

para o caso em que com $N=2$, as matrizes $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ são as matrizes nulas e identidade, respectivamente de ordem 2. É possível também obter as relações de transformação sobre conjugação hermitiana sobre o vetor $\hat{\mathbf{z}}$ a partir da matriz S definida por

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{z}}^\dagger = S\hat{\mathbf{z}}, \quad S^*S = \mathbf{1}, \quad \Xi^\dagger = S\Xi S^T, \quad (3.36)$$

onde S^T representa a matriz transposta de S . A equação mestra (3.33) envolvendo combinações quadráticas de \hat{a}_k^\dagger e \hat{a}_k é uma caso particular da forma geral [16]

$$\frac{d\hat{\rho}_s(t)}{dt} = \hat{\mathbf{z}}L\hat{\mathbf{z}}\hat{\rho}_s + \hat{\rho}_s\hat{\mathbf{z}}R\hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{z}}K\hat{\rho}_s\hat{\mathbf{z}}. \quad (3.37)$$

O operador densidade, representando um estado físico do sistema é um operador Hermitiano, $\hat{\rho}_s = \hat{\rho}_s^\dagger$, e esta propriedade implica as seguintes relações para matrizes L , R e K :

$$L = S^T R^\dagger S, \quad R = S^T L^\dagger S, \quad K = S^T K^\dagger S. \quad (3.38)$$

Em adição, a propriedade $\text{Tr}(\hat{\rho}_s) = 1$ implica em

$$L + R + K^T = 0. \quad (3.39)$$

As propriedades do operador densidade estão então bem definidas para as matrizes L , R e K por meio das relações acima. Estas matrizes encerram em si a informação contida na equação mestra do sistema de interesse. Comparando a forma da equação mestra padrão em (3.33) com a forma geral em (3.37), obtém-se a forma explícita para as matrizes L e R , dadas por

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{i}{2}\zeta(t)^* & -\frac{i\omega_1}{2} - \gamma_1\nu_1 & -\frac{i}{2}\mu(t)^* \\ -\frac{i}{2}\zeta(t)^* & 0 & -\frac{i}{2}\mu(t) & -\frac{i\omega_2}{2} - \gamma_2\nu_2 \\ -\frac{i\omega_1}{2} - \gamma_1(\nu_1 + 1) & -\frac{i}{2}\mu(t) & 0 & -\frac{i}{2}\zeta(t) \\ -\frac{i}{2}\mu(t)^* & -\frac{i\omega_2}{2} - \gamma_2(\nu_2 + 2) & -\frac{i}{2}\zeta(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{i}{2}\zeta(t)^* & \frac{i\omega_1}{2} - \gamma_1\nu_1 & \frac{i}{2}\mu(t)^* \\ \frac{i}{2}\zeta(t)^* & 0 & \frac{i}{2}\mu(t) & \frac{i\omega_2}{2} - \gamma_2\nu_2 \\ \frac{i\omega_1}{2} - \gamma_1(\nu_1 + 1) & \frac{i}{2}\mu(t) & 0 & \frac{i}{2}\zeta(t) \\ \frac{i}{2}\mu(t)^* & \frac{i\omega_2}{2} - \gamma_2(\nu_2 + 2) & \frac{i}{2}\zeta(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

cujos elementos contêm os parâmetros associados a propriedades de cada um dos modos, do acoplamento entre eles e de seus respectivos reservatórios. A matriz \mathbf{K} está dada por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\gamma_1(\nu_1 + 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\gamma_2(\nu_2 + 1) \\ 2\gamma_1\nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\gamma_2\nu_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

e seus elementos contêm parâmetros referentes à dissipação somente. Note que adotou-se para o número médio de fótons de cada um dos reservatórios R_k o símbolo ν_k ,

$$\bar{n}_k = \nu_k. \quad (3.43)$$

A matriz $\mathbf{M}(t)$ constituída por elementos de segundos momentos está definida segundo a equação $M_{mn} = \text{Tr}(\hat{\rho}_s \hat{z}_m \hat{z}_n)$ cuja forma explícita é dada por

$$\mathbf{M}(t) = \begin{bmatrix} \langle \hat{a}_1 \hat{a}_1 \rangle & \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle & \langle \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger \rangle & \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rangle \\ \langle \hat{a}_2 \hat{a}_1 \rangle & \langle \hat{a}_2 \hat{a}_2 \rangle & \langle \hat{a}_2 \hat{a}_1^\dagger \rangle & \langle \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger \rangle \\ \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle & \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \rangle & \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1^\dagger \rangle & \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rangle \\ \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \rangle & \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle & \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1^\dagger \rangle & \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

A partir deste ponto considera-se a formulação desenvolvida em [16] para tratar sistema descritos por operadores Hamiltonianos quadráticos sujeitos a dissipação, isto é, cuja evolução é não unitária. Para sistemas com equações mestra na forma (3.37), os elementos da matriz $\mathbf{M}(t)$ satisfazem um conjunto de equações diferenciais ordinárias. Utilizando a relação $M_{mn} = \text{Tr}(\hat{\rho}_s \hat{z}_m \hat{z}_n)$, e a

equação (3.37),

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{mn} &= \text{Tr} \left(\dot{\hat{\rho}}_s \hat{z}_m \hat{z}_n \right), \\
&= \sum_{k,l} \text{Tr} \left(\hat{z}_k L_{kl} \hat{z}_l \hat{\rho}_s \hat{z}_m \hat{z}_n \right) + \sum_{k,l} \text{Tr} \left(\hat{\rho}_s \hat{z}_k R_{kl} \hat{z}_l \hat{z}_m \hat{z}_n \right) + \sum_{k,l} \text{Tr} \left(\hat{z}_k K_{kl} \hat{\rho}_s \hat{z}_l \hat{z}_m \hat{z}_n \right), \\
&= \sum_{k,l} L_{kl} \text{Tr} \left(\hat{\rho}_s \hat{z}_m \hat{z}_n \hat{z}_k \hat{z}_l \right) + \sum_{k,l} R_{kl} \text{Tr} \left(\hat{\rho}_s \hat{z}_k \hat{z}_l \hat{z}_m \hat{z}_n \right) + \sum_{k,l} K_{kl} \text{Tr} \left(\hat{\rho}_s \hat{z}_l \hat{z}_m \hat{z}_n \hat{z}_k \right), \tag{3.45}
\end{aligned}$$

pela relação (3.34), pode-se determinar a seguinte expressão,

$$\begin{aligned}
\hat{z}_k \hat{z}_l \hat{z}_m \hat{z}_n &= \hat{z}_k \Xi_{lm} \hat{z}_n + \hat{z}_k \hat{z}_m \hat{z}_l \hat{z}_n \\
&= \Xi_{lm} \hat{z}_k \hat{z}_n + \Xi_{ln} \hat{z}_k \hat{z}_m + \Xi_{km} \hat{z}_n \hat{z}_l + \hat{z}_m \hat{z}_k \hat{z}_n \hat{z}_l \\
&= \Xi_{lm} \hat{z}_k \hat{z}_n + \Xi_{ln} \hat{z}_k \hat{z}_m + \Xi_{km} \hat{z}_n \hat{z}_l + \Xi_{kn} \hat{z}_m \hat{z}_l + \hat{z}_m \hat{z}_n \hat{z}_k \hat{z}_l, \tag{3.46}
\end{aligned}$$

e também para o termo

$$\begin{aligned}
\hat{z}_l \hat{z}_m \hat{z}_n \hat{z}_k &= \Xi_{lm} \hat{z}_n \hat{z}_k + \hat{z}_m \hat{z}_l \hat{z}_n \hat{z}_k \\
&= \Xi_{lm} \hat{z}_n \hat{z}_k + \Xi_{ln} \hat{z}_m \hat{z}_k + \Xi_{lk} \hat{z}_m \hat{z}_n + \hat{z}_m \hat{z}_n \hat{z}_k \hat{z}_l. \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Dessa forma, com essas duas relações acima determinadas, retornando para a equação (3.45), após algumas simplificações, têm-se a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{mn} &= \sum_{k,l} R_{kl} \Xi_{lm} M_{kn} + \sum_{k,l} R_{kl} \Xi_{ln} M_{km} + \sum_{k,l} R_{kl} \Xi_{km} M_{nl} + \\
&\quad \sum_{k,l} R_{kl} \Xi_{kn} M_{ml} + \sum_{k,l} K_{kl} \Xi_{lm} M_{nk} + \sum_{k,l} K_{kl} \Xi_{ln} M_{mk}, \tag{3.48}
\end{aligned}$$

pela relação $M_{nk} = \Xi_{nk} + M_{kn}$,

$$\begin{aligned}
K_{kl} \Xi_{lm} M_{nk} &= K_{kl} \Xi_{lm} \Xi_{nk} + K_{kl} \Xi_{lm} M_{kn} \\
&= \Xi_{ml} K_{lk}^T \Xi_{kn} - \Xi_{ml} K_{lk}^T M_{kn}, \tag{3.49}
\end{aligned}$$

sendo $K_{lk}^T = K_{kl}$. Desse modo, substituindo $M_{km} = \Xi_{km} + M_{mk}$ e $M_{nl} = \Xi_{nl} + M_{ln}$, a equação (3.48) para \dot{M}_{mn} se torna

$$\dot{M}_{mn} = \sum_{k,l} -\Xi_{mk} (R_{kl} + R_{kl}^T + K_{kl}^T) M_{ln} + \sum_{k,l} M_{mk} (R_{kl} + R_{kl}^T + K_{kl}^T) \Xi_{ln} + \sum_{k,l} \Xi_{ml} K_{lk}^T \Xi_{kn}. \tag{3.50}$$

Portanto, definindo a relação $A_{ml} = -\sum_k \Xi_{mk} (R_{kl} + R_{kl}^T + K_{kl}^T) = \sum_k \Xi_{mk} (L_{kl} - R_{kl}^T)$ e sendo $A_{ml}^T = A_{lm}$, a equação de \dot{M}_{mn} se torna

$$\dot{M}_{mn} = \sum_l A_{ml} M_{ln} + \sum_l M_{ml} A_{ln}^T + \sum_{k,l} \Xi_{ml} K_{lk}^T \Xi_{kn}. \tag{3.51}$$

Desse modo, pode-se escrever a equação na forma matricial, dada por [16]

$$\frac{dM}{dt} = AM + MA^T + \Xi K^T \Xi, \quad (3.52)$$

onde a matriz A é obtida por $A = \Xi(L - R^T)$. A condição inicial para os elementos de $M(t)$ estabelece-se supondo não haver interação entre os modos bosônicos, ou seja, não há nenhuma correlação entre os operadores \hat{a}_1 (\hat{a}_1^\dagger) com os operadores \hat{a}_2 (\hat{a}_2^\dagger). Isto implica para $M(0)$ a forma

$$M(0) = \begin{bmatrix} \langle a_1^2 \rangle & 0 & \langle a_1 a_1^\dagger \rangle & 0 \\ 0 & \langle a_2^2 \rangle & 0 & \langle a_2 a_2^\dagger \rangle \\ \langle a_1^\dagger a_1 \rangle & 0 & \langle a_1^{\dagger 2} \rangle & 0 \\ 0 & \langle a_2^\dagger a_2 \rangle & 0 & \langle a_2^{\dagger 2} \rangle \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

onde os elementos de (3.53) foram determinadas no capítulo 2 utilizando como condição inicial cada modo sendo térmico comprimido.

Neste trabalho, trata-se do caso da conversão e amplificação paramétrica, assumindo um tênue efeito dos mecanismos de dissipação presentes em cada um dos modos do sistema. Em processos ópticos envolvendo amplificação e conversão paramétrica, no contexto de sistemas dissipativos [18], as propriedades quânticas de duas microcavidades acopladas interagindo com o ambiente podem ser estudadas com o auxílio do operador Hamiltoniano descrito anteriormente (3.11). Processos paramétricos foram estudadas inicialmente por Faraday e Lord Rayleigh no século 19 [19–22]. O estudo da dinâmica do modelo no qual atua uma amplificação e conversão paramétricas como em [19], considera dois modos do campo eletromagnético como entidades físicas independentes, modelados por osciladores hármonicos quânticos ou modos bosônicos associados aos operadores bosônicos \hat{a}_k e \hat{a}_k^\dagger . Esses modos podem interagir por meio de um acoplamento, realizado via um meio dielétrico, cujo valor de $|\zeta|$ e $|\mu|$, é proporcional a amplitude de modulação da constante dielétrica; modulada classicamente e sua intensidade oscila harmonicamente no tempo com frequência η igual a soma ou diferença das frequências naturais ω_1 e ω_2 de cada um dos modos separadamente, $\eta = \omega_1 \pm \omega_2$ [23]. O caso da conversão paramétrica é considerar $\eta = \omega_1 - \omega_2$, enquanto que na amplificação paramétrica representa considerar $\eta = \omega_1 + \omega_2$.

3.4 Sistema de Equações na Conversão e Amplificação Paramétrica

Nesta seção, determinam-se os sistemas de equações diferenciais para os segundos momentos dados em (3.44), associados aos processos de conversão e amplificação paramétrica. Na conversão

paramétrica, caso em que $\eta = \omega_2 - \omega_1$, as equações diferenciais para os elementos $M_{ij}(t)$ são construídas através da equação (3.52), cujas formas estão dadas no que se segue. A princípio o sistema poderia ser composto de um sistema de dezesseis equações diferenciais acopladas com coeficientes dependentes do tempo. Porém, as formas particulares das matrizes R, L e K, dadas em (3.41), (3.40) e (3.42), respectivamente, associadas aos operadores Hamiltoniano e Liouvilliano na equação mestra, implicam que as equações estão agrupadas em quatro tipos de blocos, cada um constituído de quatro equações diferenciais acopladas.

Consequentemente, no processo de solução dessas equações, cada bloco pode ser tratado separadamente para se obter os elementos de $M(t)$, alterando de bloco para bloco as condições iniciais somente e os correspondentes elementos de matrizes, implicando em uma considerável simplificação na solução do sistema de equações diferenciais. Portanto, o sistema de equações diferenciais com coeficientes dependentes do tempo para o primeiro bloco tem a forma

$$\frac{dM_{11}(t)}{dt} + iM_{12}(t)\mu(t) + iM_{21}(t)\mu(t) + 2(i\omega_1 + \gamma_1)M_{11}(t) = 0, \quad (3.54)$$

$$\frac{dM_{12}(t)}{dt} + [i(\omega_1 + \omega_2) + (\gamma_1 + \gamma_2)]M_{12}(t) + iM_{22}(t)\mu(t) + iM_{11}(t)\mu(t)^* = 0, \quad (3.55)$$

$$\frac{dM_{21}(t)}{dt} + [i(\omega_1 + \omega_2) + (\gamma_1 + \gamma_2)]M_{21}(t) + iM_{11}(t)\mu(t)^* + iM_{22}(t)\mu(t) = 0, \quad (3.56)$$

$$\frac{dM_{22}(t)}{dt} + iM_{21}(t)\mu(t)^* + iM_{12}(t)\mu(t)^* + 2(i\omega_2 + \gamma_2)M_{22}(t) = 0. \quad (3.57)$$

Para o segundo bloco, tem-se o seguinte sistema de equações

$$\frac{dM_{13}(t)}{dt} + 2\gamma_1 M_{13}(t) + iM_{23}(t)\mu(t) - iM_{14}(t)\mu(t)^* - 2\gamma_1(\nu_1 + 1) = 0, \quad (3.58)$$

$$\frac{dM_{14}(t)}{dt} + [i(\omega_1 - \omega_2) + (\gamma_1 + \gamma_2)]M_{14}(t) - iM_{13}(t)\mu(t) + iM_{24}(t)\mu(t) = 0, \quad (3.59)$$

$$\frac{dM_{23}(t)}{dt} + [i(\omega_2 - \omega_1) + (\gamma_1 + \gamma_2)]M_{23}(t) + iM_{13}(t)\mu(t)^* - iM_{24}(t)\mu(t)^* = 0, \quad (3.60)$$

$$\frac{dM_{24}(t)}{dt} + 2\gamma_2 M_{24}(t) - iM_{23}(t)\mu(t) + iM_{14}(t)\mu(t)^* - 2\gamma_2(\nu_2 + 1) = 0. \quad (3.61)$$

Como uma simplificação adicional, obtida as soluções do primeiro e segundo blocos, as soluções dos seguintes podem ser determinadas diretamente das soluções dos anteriores com o auxílio das seguintes relações, válidas para $t \geq 0$,

$$M_{ij}(t) - M_{ji}(t) = \begin{cases} 0, & i + j \text{ ímpar,} \\ 1, & i + j \text{ par } (i < j) \end{cases} \quad (3.62)$$

e a partir da igualdades

$$M_{11}(t) = M_{33}^*(t), \quad (3.63)$$

$$M_{12}(t) = M_{34}^*(t), \quad (3.64)$$

$$M_{14}(t) = M_{23}^*(t), \quad (3.65)$$

$$M_{22}(t) = M_{44}^*(t), \quad (3.66)$$

obtidas de acordo com as definições dos elementos $M_{i,j}(t)$ dadas em (3.44).

No caso da amplificação paramétrica, caso onde $\eta = \omega_2 + \omega_1$ em (3.11) de modo similar ao desenvolvido para o caso da conversão paramétrica, da equação (3.52) é possível construir o sistema de equações diferenciais para os elementos da matriz $M(t)$, e assim, como no caso da conversão paramétrica, as equações são agrupadas em quatro blocos de equações diferenciais acopladas. Os blocos construídos na conversão paramétrica são diferentes dos blocos construídos na conversão paramétrica. Porém, o procedimento de resolução é similar. As condições iniciais são as mesmas aplicadas à conversão paramétrica, segundo as equações (2.72) e (2.73) para a matriz $M(0)$ dada em (3.53). O primeiro bloco de equações diferenciais assume a forma

$$\frac{dM_{11}(t)}{dt} + iM_{41}(t)\zeta(t) + iM_{14}(t)\zeta(t) + 2(i\omega_1 + \gamma_1)M_{11}(t) = 0, \quad (3.67)$$

$$\frac{dM_{14}(t)}{dt} + [i(\omega_1 - \omega_2) + (\gamma_1 + \gamma_2)]M_{14}(t) + iM_{44}(t)\zeta(t) - iM_{11}(t)\zeta(t)^* = 0, \quad (3.68)$$

$$\frac{dM_{41}(t)}{dt} + [i(\omega_1 - \omega_2) + (\gamma_1 + \gamma_2)]M_{41}(t) + iM_{44}(t)\zeta(t) - iM_{11}(t)\zeta(t)^* = 0, \quad (3.69)$$

$$\frac{dM_{44}(t)}{dt} - iM_{41}(t)\zeta(t)^* - iM_{14}\zeta(t)^* - 2(i\omega_2 - \gamma_2)M_{44}(t) = 0, \quad (3.70)$$

enquanto o segundo se escreve como

$$\frac{dM_{12}(t)}{dt} + [i(\omega_1 + \omega_2) + (\gamma_1 + \gamma_2)]M_{12}(t) + iM_{13}(t)\zeta(t) + iM_{42}(t)\zeta(t) = 0, \quad (3.71)$$

$$\frac{dM_{13}(t)}{dt} + 2\gamma_1 M_{13}(t) + iM_{43}(t)\zeta(t) - iM_{12}(t)\zeta(t)^* - 2\gamma_1(\nu_1 + 1) = 0, \quad (3.72)$$

$$\frac{dM_{42}(t)}{dt} + 2\gamma_2 M_{42}(t) + iM_{43}(t)\zeta(t) - iM_{12}(t)\zeta(t)^* - 2\gamma_2\nu_2 = 0, \quad (3.73)$$

$$\frac{dM_{43}(t)}{dt} - [i(\omega_1 + \omega_2) - (\gamma_1 + \gamma_2)]M_{43}(t) - iM_{13}(t)\zeta(t)^* - iM_{42}(t)\zeta(t)^* = 0. \quad (3.74)$$

Os blocos seguintes podem ser obtidos pela relação, para $t \geq 0$

$$M_{ij}(t) - M_{ji}(t) = \begin{cases} 0, & i + j \text{ for impar} \\ 1, & i + j \text{ for par } (i < j) \end{cases} \quad (3.75)$$

e pelas relações

$$M_{11}(t) = M_{33}^*(t), \quad (3.76)$$

$$M_{12}(t) = M_{34}^*(t), \quad (3.77)$$

$$M_{14}(t) = M_{23}^*(t), \quad (3.78)$$

$$M_{22}(t) = M_{44}^*(t). \quad (3.79)$$

Observando as equações diferenciais obtidas, tratam-se de um sistema de primeira ordem com coeficientes dependentes do tempo. Tal situação é abordada de acordo com os métodos assintóticos, em particular o método das escalas múltiplas [24], onde as soluções são obtidos por meio de uma série perturbativa sobre um parâmetro $\epsilon \ll 1$, convenientemente estabelecido de acordo com as condições físicas correspondente ao sistema. Para resolver essas equações diferenciais e obter as soluções aproximadas, aborda-se no próximo capítulo o método utilizado para resolver estes sistemas de equações diferenciais na conversão e amplificação paramétrica.

Capítulo 4

Método das Escalas Múltiplas

A construção de soluções para a descrição exata da dinâmica de sistemas clássicos e quânticos em física teórica é de extrema importância para uma análise completa e precisa das propriedades físicas destes sistemas. As equações diferenciais associadas a estes sistemas, exceto em algumas situações particulares, não possuem soluções exatas que possam ser obtidas por métodos diretos. Isto, em geral, deve-se ao fato destas equações apresentarem coeficientes não constantes no tempo ou ainda fatores não lineares nas funções a serem determinadas, dificultando a construção de uma solução exata na forma analítica. Neste contexto, os métodos computacionais desempenham um papel importante e crescente no desenvolvimento da pesquisa científica, especialmente em física, para tratar de equações diferenciais nas quais não há solução exata. Um fato importante sobre métodos aproximativos é que eles podem reforçar e aprimorar a nossa intuição, levando a uma melhor compreensão do problema físico considerado. Muitas vezes, o papel de métodos aproximativos é ainda maior, no sentido de fornecer uma melhor visualização dos diferentes comportamentos do sistema físico tratado.

Neste sentido, em algumas situações onde os termos não lineares ou coeficientes não constantes no tempo estão presentes de forma perturbativa, pode-se aplicar alguns métodos assintóticos para se obter uma solução das equações diferenciais, resultando em soluções em séries de potência em um parâmetro adequadamente estabelecido, chamado aqui ϵ . Existem diversos métodos assintóticos, mas os de grande aplicabilidade em problemas no contexto dos osciladores harmônicos clássico e quântico são os métodos das escalas múltiplas e o método da média temporal [24]. Neste trabalho, concentra-se em aplicações do método específico, chamado de método das escalas múltiplas, desenvolvido na mecânica clássica para tratar de equações não-lineares, considerando o termo não linear de pequena intensidade. Este método, porém não é restrito ao universo clássico, podendo ser

aplicado também em outros problemas, como as equações de Heisenberg, bem como na equação de Schrödinger. Uma razão pela qual o método de escalas múltiplas pode ser eficiente no contexto da mecânica quântica é que muitas vezes, os hamiltonianos, compostos por diferentes termos, contém termos que os fatores numéricos de energia ou de frequência são muito menores do que comparado a outros fatores do hamiltoniano, como no caso da mecânica clássica, onde há termos que são proporcionais a um parâmetro de pequeno valor, sendo possível a aplicação do método. Portanto, a evolução do sistema pode ser distinguida por diversas escalas de tempo por diferentes termos presentes no hamiltoniano.

O método das escalas múltiplas é um poderoso e importante método perturbativo, desenvolvido para tratar de sistemas físicos nos quais se estabelece um parâmetro ϵ , de intensidade pequena ($\epsilon \ll 1$), de modo que as interações (lineares ou não lineares) podem ser tratadas nos domínios da teoria de perturbação [24, 25]. A idéia central do método das escalas múltiplas é exibir as características físicas das interações entre os diferentes graus de liberdade do sistema, em diferentes escalas de tempo - o tempo t é substituído pelas escalas de tempo $T_n = \epsilon^n t$ de modo que para $\epsilon \ll 1$, podem ser tratadas como variáveis independentes. Nesse método as equações diferenciais originais do sistema, compondo sistemas de equações acopladas, são mapeadas em equações diferenciais para cada uma das ordens do parâmetro ϵ , de modo que as soluções de ordens anteriores são os termos não homogêneos nas equações diferenciais das ordens posteriores. As soluções são obtidas por meio da eliminação dos termos seculares em cada uma das ordens - soluções que divergem rapidamente no tempo, não são em geral de interesse físico. Este aspecto é importante para fixar as “constantes arbitrárias” em cada uma das ordens do parâmetro ϵ .

4.1 O método das Escalas Múltiplas

O método das escalas múltiplas consiste em reescrever as soluções das equações diferenciais como funções das variáveis independentes T_n (escalas múltiplas) e não mais em termos de apenas uma única variável t . Dessa forma, escreve-se as derivadas de primeira e segunda ordem em relação a t em séries de potências de ϵ na forma

$$\frac{d}{dt} = \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial T_n}{dt} \frac{\partial}{\partial T_n} = D_0 + \epsilon D_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (4.1)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \epsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (4.2)$$

onde para as novas escalas de tempo T_n , foi utilizado a seguinte notação para as derivadas:

$$D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}.$$

A generalização para ordens superiores d^n/dt^n é um processo direto. Deste modo, a solução proposta no método das escalas múltiplas é construir uma solução, por exemplo $x(t)$, da seguinte forma

$$x(t) = \epsilon^0 x_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \epsilon^1 x_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \epsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots \quad (4.3)$$

Para ilustrar como se aplica este método para o tratamento matemático das equações diferenciais, utiliza-se inicialmente um caso de equação diferencial não linear presente na mecânica clássica, a equação conhecida como equação de Duffing [26]:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x + \epsilon \alpha x^3 = 0. \quad (4.4)$$

Esta equação sendo não-linear devido ao termo x^3 , com α sendo uma constante e ϵ um parâmetro perturbativo. Para obter a solução $x(t)$ pelo método das escalas múltiplas, primeiramente utilizamos a solução proposta pelo método dado em (4.3) e juntamente com o auxílio das derivadas de primeira e segunda ordem dadas em (4.1) e (4.2) a equação diferencial (4.4) é agora reescrita para diferentes ordens de ϵ , obtendo-se equações diferenciais para essas diversas ordens. Desta maneira, as equações são reescritas nas formas

$$\epsilon^0 \quad D_0^2 x_0 + x_0 = 0, \quad (4.5)$$

$$\epsilon^1 \quad D_0^2 x_1 + x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - \alpha x_0^3, \quad (4.6)$$

$$\epsilon^2 \quad D_0^2 x_2 + x_2 = -2D_0 D_1 x_1 - D_1^2 x_0 - 2D_0 D_2 x_0 - 3\alpha x_0^2 x_1, \quad (4.7)$$

e assim por diante para ordens superiores. Dessa forma, para a primeira equação diferencial na escala de tempo T_0 dada em (4.5), determina-se a solução x_0 :

$$x_0(T_0, T_1, T_2, \dots) = A(T_1, T_2, \dots) \cos(T_0) + B(T_1, T_2, \dots) \text{sen}(T_0), \quad (4.8)$$

onde os coeficientes A e B dependem das outras escalas de tempo (T_1, T_2, \dots) . Esta dependência nas escalas de tempo dos coeficientes deve ser mantida até a ordem desejada na solução para o parâmetro ϵ . Uma característica do método das escalas múltiplas, é que ao fixar a ordem desejada, ϵ^m , sempre será necessário, considerar escalas de tempo $\{T_1, T_2, \dots, T_{m+1}\}$. Dessa forma, neste exemplo considerado, vamos fixar a solução $x(t)$ até a ordem ϵ^0 . Com isso, as escalas de tempo serão consideradas até T_1 como foi dito anteriormente. Portanto, os coeficientes A e B dados em

(4.8) serão considerados como dependentes apenas da escala de tempo T_1 ; $A(T_1, T_2, \dots) \rightarrow A(T_1)$ e $B(T_1, T_2, \dots) \rightarrow B(T_1)$. Assim, pela solução obtida em ordem zero dada em (4.8), substituindo em (4.6), temos a seguinte expressão

$$D_0^2 x_1 + x_1 = -2D_0 D_1 \left[A(T_1) \cos(T_0) + B(T_1) \text{sen}(T_0) \right] - \alpha \left[A(T_1) \cos(T_0) + B(T_1) \text{sen}(T_0) \right]^3,$$

simplificando os termos dessa equação diferencial, de maneira a se obter a seguinte expressão

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + x_1 = & \frac{3}{4} \alpha A(T_1) B^2(T_1) \cos(3T_0) - \frac{1}{4} \alpha A^3(T_1) \cos(3T_0) + \frac{1}{4} \alpha B^3(T_1) \text{sen}(3T_0) \\ & - \frac{3}{4} \alpha A^2(T_1) B(T_1) \text{sen}(3T_0) - \left[\frac{3}{4} \alpha A^3(T_1) + \frac{3}{4} \alpha A(T_1) B^2(T_1) + 2D_1 B(T_1) \right] \cos(T_0) \\ & - \left[\frac{3}{4} \alpha A^2(T_1) B(T_1) + \frac{3}{4} \alpha B^3(T_1) - 2D_1 A(T_1) \right] \text{sen}(T_0). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Para a resolução desta equação diferencial, primeiramente deve-se notar a presença de dois termos interessantes presentes nela, que são os termos contidos nos colchetes. Neste exemplo considerado e para outros sistemas físicos similares, a equação diferencial (4.4) é do tipo que não há agentes externos atuando no sistema físico considerado. O caso onde há forças externas atuando no sistema pode ser incluído nas equações diferenciais, mas não é o caso deste exemplo em questão. Contudo, pela equação diferencial em (4.9), os termos em colchetes são ditos termos “*seculares*”, são termos para $t \geq 0$, geram soluções que divergem no tempo; seria similar ao caso conhecido como ressonância na física clássica, situação encontrada em um oscilador harmônico simples de frequência ω_0 sob ação de uma força externa do tipo $\mathcal{F} \text{sen}(\omega_1 t)$ de modo que a frequência aplicada ω_1 possui frequência igual a frequência natural do oscilador harmônico ($\omega_1 = \omega_0$). para este caso simples, a equação diferencial do movimento para a posição $y(t)$ é dada por

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y = \mathcal{F} \cos(\omega_1 t), \quad (4.10)$$

em que a solução da equação homogênea de (4.10) é dada por

$$y_h(t) = a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \text{sen}(\omega_0 t), \quad (4.11)$$

sendo a_1 e a_2 constantes arbitrárias. Para a solução particular de (4.10), e considerando o caso ($\omega_1 = \omega_0$), a solução $y_p(t)$ pode ser escrita a forma

$$y_p(t) = a_3 t \cos(\omega_0 t) + a_4 t \text{sen}(\omega_0 t), \quad (4.12)$$

com a_3 e a_4 constantes e pode-se ainda rescrever essa solução particular na forma

$$y_p(t) = \frac{\mathcal{F}}{2\omega_0} t \text{sen}(\omega_0 t). \quad (4.13)$$

Pela solução obtida em (4.13), nota-se que a medida que o tempo aumenta, a posição $y(t)$ aumenta também proporcionalmente a t ; as amplitudes de oscilações (caso sem dissipação) crescem rapidamente no tempo, produzindo soluções não limitadas que podem divergir rapidamente no tempo. Este tipo de situação não deve ocorrer no caso considerado da equação de Duffing (4.4), pois não a ação de uma força externa no sistema. Neste sentido, não havendo a presença desse termo ilustrado em (4.10), ao aplicar o método das escalas múltiplas, esses termos, ditos “seculares”, devem ser eliminados para se obter soluções regulares, em qualquer escala de tempo T_n considerada. Esses termos “seculares” aparecem no método das escalas múltiplas apenas no sentido matemático. Portanto na equação (4.9), os termos em colchetes são os termos seculares, pois o fator multiplicativo $\cos(T_0)$ e $\sin(T_0)$ possuem a mesma frequência de oscilação da equação homogênea para equação de x_1 de modo que esses termos devem ser eliminados. Assim, igualando-se a zero os termos, temos as seguintes expressões

$$2D_1B(T_1) + \frac{3}{4}\alpha A^3(T_1) + \frac{3}{4}\alpha A(T_1)B^2(T_1) = 0, \quad (4.14)$$

$$2D_1A(T_1) - \frac{3}{4}\alpha B^3(T_1) - \frac{3}{4}\alpha B(T_1)A^2(T_1) = 0, \quad (4.15)$$

que podem ainda serem reescritas nas formas

$$2D_1B(T_1) = -\frac{3}{4}\alpha A(T_1) (A^2(T_1) + B^2(T_1)), \quad (4.16)$$

$$2D_1A(T_1) = +\frac{3}{4}\alpha B(T_1) (B^2(T_1) + A^2(T_1)). \quad (4.17)$$

Essas duas equações podem ser combinadas de modo a se obter

$$2B(T_1)D_1B(T_1) + 2A(T_1)D_1A(T_1) = 0. \quad (4.18)$$

Nesta equação, é possível identificar que

$$D_1 (B^2(T_1) + A^2(T_1)) = 0, \quad (4.19)$$

ou seja, a soma $B^2(T_1) + A^2(T_1)$ não depende da escala de tempo T_1 , de forma que é possível escrever a seguinte relação

$$B^2(T_1) + A^2(T_1) = K, \quad (4.20)$$

onde K é uma constante que depende das condições iniciais do sistema. Assim, as equações (4.18) e (4.19) são reescritas nas formas

$$2D_1A(T_1) - \frac{3}{4}B(T_1)K^2\alpha = 0, \quad (4.21)$$

$$2D_1B(T_1) + \frac{3}{4}A(T_1)K^2\alpha = 0. \quad (4.22)$$

Dessa forma, as soluções de (4.21) e (4.22) são dadas por

$$A(T_1) = b_1 \cos\left(\frac{3}{8}K\alpha T_1\right) + b_2 \text{sen}\left(\frac{3}{8}K\alpha T_1\right), \quad (4.23)$$

$$B(T_1) = -b_1 \text{sen}\left(\frac{3}{8}K\alpha T_1\right) + b_2 \cos\left(\frac{3}{8}K\alpha T_1\right), \quad (4.24)$$

em que b_1 e b_2 dependem das condições iniciais. Como ilustração deste exemplo, vamos supor que as condições iniciais sejam $x(0) = a_0$, a_0 sendo a amplitude de oscilação e considerar a velocidade inicial sendo zero, $\dot{x}(0) = 0$. Desta maneira, utilizando as condições iniciais, é possível determinar a solução até correção de ordem ϵ^0 . A solução obtida é dada por

$$x(t) = a_0 \cos\left(t + \frac{3\alpha a_0^2 \epsilon t}{8}\right). \quad (4.25)$$

Como comparação ainda com o método das escalas múltiplas neste exemplo, vamos considerar uma outra maneira de se obter a solução $x(t)$ pela solução em série de potência em ϵ da forma

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k x_k(t), \quad (4.26)$$

utilizando as mesmas condições iniciais impostas no método das escalas múltiplas, $x(0) = a_0$ e $\dot{x}(0) = 0$, substituindo a solução (4.26) na equação de Duffing (4.4), coleta-se para cada ordem do parâmetro ϵ , as equações diferenciais associadas a cada ordem de ϵ , dadas por

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} + x_0 = 0, \quad (4.27)$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = -\alpha x_0^3, \quad (4.28)$$

e assim por diante para ordens superiores. Pela equação (4.27), a sua solução, utilizando já as condições iniciais, é dada na forma

$$x_0(t) = a_0 \cos(t). \quad (4.29)$$

Para a equação (4.28), substituindo a solução obtida em (4.29) na equação (4.28), temos a seguinte equação

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = -\alpha a_0^3 \left(\frac{1}{4} \cos(3t) + \frac{3}{4} \cos(t) \right), \quad (4.30)$$

cuja solução, já utilizando as condições iniciais neste exemplo, é dada por

$$x_1(t) = -\frac{1}{32} \alpha a_0^3 \cos(t) - \frac{3}{8} \alpha a_0^3 \left(-\frac{1}{12} \cos(3t) + t \operatorname{sen}(t) \right). \quad (4.31)$$

Note que nesta solução obtida em $x_1(t)$, há um termo que é proporcional a t dado por $t \operatorname{sen}(t)$. Portanto a solução solução $x(t)$ é dada por

$$x(t) = a_0 \cos(t) + \epsilon \left[-\frac{1}{32} \alpha a_0^3 \cos(t) - \frac{3}{8} \alpha a_0^3 \left(-\frac{1}{12} \cos(3t) + t \operatorname{sen}(t) \right) \right]. \quad (4.32)$$

Nessas condições, considerando $a_0 = 1$, $\epsilon = 0,1$ e $\alpha = 4$ é construído o gráfico das soluções do método das escalas múltiplas até correção de ordem zero dada em (4.25) e a solução em série de potência em ϵ dada em (4.32), juntamente com a solução numérica da equação de Duffing (4.4) e também com a solução $\cos(t)$, pois para $\alpha = 0$, seria o caso sem termos não lineares, com solução exata $x = \cos(t)$ utilizando as condições iniciais deste exemplo. Esta comparação é feita na figura (4.1), onde a solução obtida no método das escalas múltiplas, indicada pela curva vermelha, fica muito próxima da solução numérica (ponto) da equação de Duffing. Já a solução obtida em série de potência de ϵ , indicada pela curva verde, devido ao termo proporcional a $t \operatorname{sen}(t)$, faz com que sua amplitude de oscilação aumente no tempo, como foi dito anteriormente para o caso em que há uma força externa com frequência próxima da frequência natural de oscilação, sendo que esta solução diverge rapidamente da solução numérica. Outro fato ainda sobre o fator ϵ , é que a medida que ϵ decresce, maior será o tempo t em que a solução do método das escalas múltiplas ficará próxima da solução numérica.

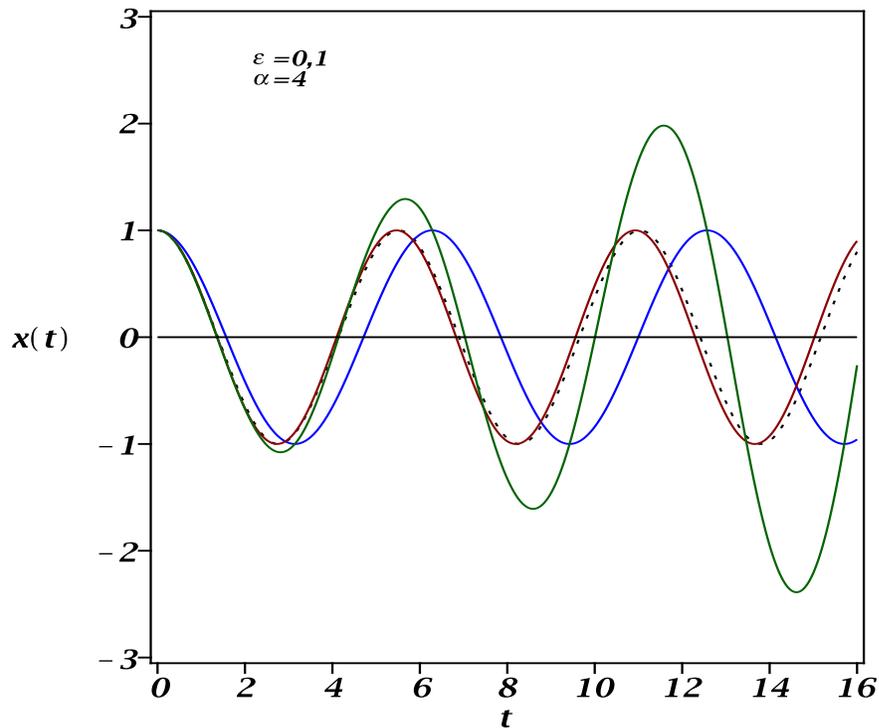


Figura 4.1: Comparação da solução exata (ponto) da equação de Duffing, com soluções aproximadas; método das escalas múltiplas (curva vermelha), série de potência (verde) e solução para o caso $\alpha = 0$ (azul). As condições iniciais são $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$.

4.2 Aplicação do Método

Neste primeiro estudo da conversão e amplificação paramétrica, no intuito de simplificar as soluções dos sistemas de equações diferenciais, considera-se o caso mais simétrico no qual a dissipação pode acontecer, admitindo para os parâmetros de reservatórios as igualdades $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ e $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Obviamente, poderia-se considerar situações mais gerais, onde as temperaturas dos reservatórios T_k e as constantes de acoplamento γ_k são tomadas distintas. No entanto, esta arbitrariedade nos parâmetros dos reservatórios implicam em uma complexidade maior no processo de solução das equações diferenciais pelo método das escalas múltiplas, e como o objetivo deste trabalho, no que diz respeito a soluções da dinâmica do sistema, é a construção de soluções na sua forma analítica para a descrição das propriedades do mesmo, fez-se a opção para a construção das soluções na suas formas mais simples. Casos mais gerais estão sendo considerados e a construção de soluções analíticas com um maior grau de arbitrariedade estão em andamento.

Associadas aos processos da conversão e amplificação paramétrica, para ilustrar a aplicação do

método das escalas múltiplas neste trabalho, considera-se o primeiro bloco de equações diferenciais na conversão paramétrica. No sistema de equações da conversão paramétrica, dado pelas equações (3.54)-(3.57), as soluções $M_{ij}(t)$ são escritas em potências do parâmetro ϵ de acordo com

$$M_{ij}(t) = \epsilon^0 M_{ij}^{(0)}(T_0, T_1, T_2, \dots) + \epsilon^1 M_{ij}^{(1)}(T_0, T_1, T_2, \dots) + \epsilon^2 M_{ij}^{(2)}(T_0, T_1, T_2, \dots) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (4.33)$$

onde $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ são termos de ordem igual ou superior a ϵ^3 . Este tipo de solução escrita em (4.33) pode ser aplicada em qualquer um dos blocos contendo as equações diferenciais, para ambos os problemas da conversão e amplificação paramétricas. Nas equações diferenciais, a amplitude de acoplamento entre os osciladores λ e as constantes de amortecimento γ_k agem no sistema em mesma ordem de grandeza, o que equivale a mesma potência do parâmetro ϵ ; $\gamma_k \rightarrow \epsilon \gamma_k$ e $\lambda \rightarrow \epsilon \lambda$, sujeita a condição $\gamma_k < \rho$. Situações distintas podem ser consideradas, onde as intensidades de acoplamentos podem ser tratadas em ordens diferentes ($\gamma_k \rightarrow \epsilon^m \gamma_k$, $\lambda \rightarrow \epsilon^n \lambda$, $m \neq n$), mas que não está nos propósitos desta dissertação.

Para o primeiro bloco, descrito pelas equações diferenciais (3.54)-(3.57) para o caso da conversão paramétrica, as equações diferenciais assumem a forma

$$\frac{dM_{11}(t)}{dt} + i\epsilon\lambda e^{i\phi} [M_{12}(t) + M_{21}(t)] \cos[(\omega_2 - \omega_1)t] + 2(i\omega_1 + \epsilon\gamma_1)M_{11}(t) = 0, \quad (4.34)$$

$$\frac{dM_{12}(t)}{dt} + [i(\omega_1 + \omega_2) + \epsilon(\gamma_1 + \gamma_2)]M_{12}(t) + i\epsilon\lambda e^{i\phi} [M_{22}(t) + M_{11}(t)] \cos[(\omega_2 - \omega_1)t] = 0, \quad (4.35)$$

$$\frac{dM_{21}(t)}{dt} + [i(\omega_1 + \omega_2) + \epsilon(\gamma_1 + \gamma_2)]M_{21}(t) + i\epsilon\lambda e^{i\phi} [M_{11}(t) + M_{22}(t)] \cos[(\omega_2 - \omega_1)t] = 0, \quad (4.36)$$

$$\frac{dM_{22}(t)}{dt} + i\epsilon\lambda e^{i\phi} [M_{21}(t) + M_{12}(t)] \cos[(\omega_2 - \omega_1)t] + 2(i\omega_2 + \epsilon\gamma_2)M_{22}(t) = 0. \quad (4.37)$$

Substituindo as relações (4.1) e (4.33) nas equações diferenciais que compõem o primeiro bloco, agrupa-se, em cada uma das equações acima, os termos proporcionais às diferentes potências de ϵ , isto é, os termos proporcionais a ϵ^0 , ϵ^1 e assim por diante. Até primeira ordem em ϵ^1 , os sistemas de equações diferenciais são dados por:

Para ϵ^0 tem-se:

$$\frac{\partial M_{11}^{(0)}(T_0, T_1, T_2)}{\partial T_0} + 2i\omega_1 M_{11}^{(0)}(T_0, T_1, T_2) = 0, \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial M_{12}^{(0)}(T_0, T_1, T_2)}{\partial T_0} + i(\omega_1 + \omega_2)M_{12}^{(0)}(T_0, T_1, T_2) = 0, \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial M_{21}^{(0)}(T_0, T_1, T_2)}{\partial T_0} + i(\omega_1 + \omega_2)M_{21}^{(0)}(T_0, T_1, T_2) = 0, \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial M_{22}^{(0)}(T_0, T_1, T_2)}{\partial T_0} + 2i\omega_2 M_{22}^{(0)}(T_0, T_1, T_2) = 0. \quad (4.41)$$

Para ϵ^1 tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M_{11}^{(1)}(T_0, T_1, T_2)}{\partial T_0} + 2i\omega_1 M_{11}^{(1)}(T_0, T_1, T_2) + \frac{\partial M_{11}^{(0)}(T_0, T_1, T_2)}{\partial T_1} + 2\beta_1 \lambda M_{11}^{(0)}(T_0, T_1, T_2) + \\ & i\varphi \frac{1}{2} \cos[(\omega_2 - \omega_1)t] \left(M_{21}^{(0)}(T_0, T_1, T_2) + M_{12}^{(0)}(T_0, T_1, T_2) \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M_{12}^{(1)}(T_0, T_1, T_2)}{\partial T_0} + i(\omega_1 + \omega_2) M_{12}^{(1)}(T_0, T_1, T_2) + \frac{\partial M_{12}^{(0)}(T_0, T_1, T_2)}{\partial T_1} + \lambda(\beta_1 + \beta_2) \times \\ & M_{12}^{(0)}(T_0, T_1, T_2) + i\frac{1}{2} \cos[(\omega_2 - \omega_1)t] \left(\varphi M_{22}^{(0)}(T_0, T_1, T_2) + \varphi^* M_{11}^{(0)}(T_0, T_1, T_2) \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M_{21}^{(1)}(T_0, T_1, T_2)}{\partial T_0} + i(\omega_1 + \omega_2) M_{21}^{(1)}(T_0, T_1, T_2) + \frac{\partial M_{21}^{(0)}(T_0, T_1, T_2)}{\partial T_1} + \lambda(\beta_1 + \beta_2) \times \\ & M_{12}^{(0)}(T_0, T_1, T_2) + i\frac{1}{2} \cos[(\omega_2 - \omega_1)t] \left(\varphi M_{22}^{(0)}(T_0, T_1, T_2) + \varphi^* M_{11}^{(0)}(T_0, T_1, T_2) \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M_{22}^{(1)}(T_0, T_1, T_2)}{\partial T_0} + 2i\omega_2 M_{22}^{(1)}(T_0, T_1, T_2) + \frac{\partial M_{22}^{(0)}(T_0, T_1, T_2)}{\partial T_1} + 2\beta_2 \lambda M_{22}^{(0)}(T_0, T_1, T_2) + \\ & i\varphi^* \frac{1}{2} \cos[(\omega_2 - \omega_1)t] \left(M_{21}^{(0)}(T_0, T_1, T_2) + M_{12}^{(0)}(T_0, T_1, T_2) \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.45)$$

onde foram utilizados as seguintes definições

$$\varphi = e^{i\phi}, \quad (4.46)$$

$$\gamma_k = \beta_k \lambda, \quad (4.47)$$

de modo que β_k é a razão da constante de acoplamento do oscilador com seu respectivo reservatório pela amplitude de acoplamento entre os osciladores. Inicialmente, para a resolução das equações diferenciais em ordem zero ϵ^0 , dadas em (4.38)-(4.41), verifica-se que as equações diferenciais estão desacopladas na escala de tempo T_0 , simplificando de forma considerável os cálculos. Com isso, cada equação pode ser resolvida isoladamente e suas soluções são dadas na forma

$$M_{11}^{(0)}(T_0, T_1, T_2) = A(T_1, T_2) e^{-2i\omega_1 T_0}, \quad (4.48)$$

$$M_{12}^{(0)}(T_0, T_1, T_2) = B(T_1, T_2) e^{-i(\omega_1 + \omega_2) T_0}, \quad (4.49)$$

$$M_{21}^{(0)}(T_0, T_1, T_2) = C(T_1, T_2) e^{-i(\omega_1 + \omega_2) T_0}, \quad (4.50)$$

$$M_{22}^{(0)}(T_0, T_1, T_2) = D(T_1, T_2) e^{-2i\omega_2 T_0}. \quad (4.51)$$

Note que as funções $A(T_1, T_2)$, $B(T_1, T_2)$, $C(T_1, T_2)$ e $D(T_1, T_2)$ podem depender de quantas escalas de tempos $\{T_n, n \geq 1\}$ forem necessárias, limitada pela precisão de interesse na solução a ser

determinada. Isto é, para as soluções em série de potências até uma dada ordem m no parâmetro ϵ , são consideradas as escalas de tempo $\{T_1, T_2, \dots, T_{m+1}\}$. Além disso, embora a solução de ordem zero em ϵ defina as equações diferenciais desacopladas na escala de tempo T_0 , as outras escalas de tempo $\{T_n, n \geq 1\}$ incluem o acoplamento entre os diferentes graus de liberdade do problema original na escala de tempo t . O método das escalas múltiplas “fatora” a dinâmica do sistema - interação entre os diferentes graus de liberdade - em diferentes escalas de tempo T_n . Neste sentido, as soluções de ordem zero, contêm as escalas de tempo T_0 , o chamado *tempo livre* ou de “oscilações rápidas”, e a escala de tempo T_1 , chamada de escala de *tempo lento*, sendo esta, a que contém as propriedades relativas ao acoplamento, pelo menos em primeira ordem de ϵ . Para se determinar as dependências das funções para a solução de ordem zero em ϵ , considera-se então as seguintes dependências $A(T_1, T_2) \rightarrow A(T_1)$, $B(T_1, T_2) \rightarrow B(T_1)$, $C(T_1, T_2) \rightarrow C(T_1)$ e $D(T_1, T_2) \rightarrow D(T_1)$, adequadas a ordem considerada. Considera-se agora as equações diferenciais na variável T_0 , em correção em ordem ϵ^1 . Aplica-se as soluções de ordem zero ao termo não homogêneo presente nestas equações, de modo as equações diferenciais para $M_{ij}^{(1)}$, assumem as formas

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M_{11}^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0} + 2i\omega_1 M_{11}^{(1)}(T_0, T_1) + \left[\frac{dA(T_1)}{dT_1} + \frac{i\varphi}{2}(B(T_1) + C(T_1)) + 2\beta_1 \lambda A(T_1) \right] e^{-2i\omega_1 T_0} + \\ & \left(\frac{i\varphi}{2}(B(T_1) + C(T_1)) \right) e^{-2i\omega_2 T_0} = 0, \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M_{12}^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0} + i(\omega_1 + \omega_2) M_{12}^{(1)}(T_0, T_1) + \frac{i\varphi^*}{2} A(T_1) e^{i(\omega_2 - 3\omega_1)T_0} + \frac{i\varphi}{2} D(T_1) e^{i(\omega_1 - 3\omega_2)T_0} + \\ & \left[\frac{dB(T_1)}{dT_1} + \frac{i}{2}(\varphi D(T_1) + \varphi^* A(T_1)) + \lambda B(T_1)(\beta_1 + \beta_2) \right] e^{-i(\omega_1 + \omega_2)T_0} = 0, \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M_{21}^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0} + i(\omega_1 + \omega_2) M_{21}^{(1)}(T_0, T_1) + \frac{i\varphi^*}{2} A(T_1) e^{i(\omega_2 - 3\omega_1)T_0} + \frac{i\varphi}{2} D(T_1) e^{i(\omega_1 - 3\omega_2)T_0} + \\ & \left[\frac{dC(T_1)}{dT_1} + \frac{i}{2}(\varphi D(T_1) + \varphi^* A(T_1)) + \lambda C(T_1)(\beta_1 + \beta_2) \right] e^{-i(\omega_1 + \omega_2)T_0} = 0, \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M_{22}^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0} + 2i\omega_2 M_{22}^{(1)}(T_0, T_1) + \left[\frac{dD(T_1)}{dT_1} + \frac{i\varphi^*}{2}(B(T_1) + C(T_1)) + 2\beta_2 \lambda D(T_1) \right] e^{-2i\omega_2 T_0} + \\ & \left(\frac{i\varphi^*}{2}(B(T_1) + C(T_1)) \right) e^{-2i\omega_1 T_0} = 0. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Estudando a forma destas equações, que permitem determinar as correções de primeira ordem para a solução $M_{i,j}^{(1)}(T_0, T_1)$, observa-se nas equações a presença de termos “ressonantes”. Na equação (4.52), o termo em colchete se comporta como um *agente externo* sobre a função $M_{11}^{(1)}(T_0, T_1)$ oscilante na escala de tempo T_0 , cuja frequência se iguala àquela multiplicando o termo linear em $M_{i,j}^{(1)}$,

em (4.52). Esta situação é análoga àquela encontrada em um oscilador harmônico simples sob ação de uma força senoidal de mesma frequência do oscilador harmônico, conhecida como condição de ressonância, ilustrado anteriormente. As amplitudes de oscilações crescem rapidamente no tempo, produzindo solução não limitadas que podem divergir rapidamente no tempo. Obviamente neste problema, sendo tratado do ponto de vista físico, não há tal agente externo atuando. Esse termo em colchete em (4.52), representa o termo *secular* na equação para $M_{11}^{(1)}$. Restringindo-se a classe de soluções oscilantes e regulares, na escala de tempo T_0 , torna-se necessário eliminar os termos seculares para se obterem as soluções adequadas ao problema. De acordo com as expressões identificadas entre colchetes, nota-se que há apenas as funções $\{A(T_1), B(T_1), C(T_1), D(T_1)\}$ e derivadas destas funções nas variáveis T_1 . De maneira análoga, procedendo o mesmo raciocínio para as outras equações diferenciais (4.53), (4.54) e (4.55) eliminam-se os termos seculares e obtém-se um sistema de equações constituídas pelos coeficientes das soluções de ordem zero $\{A(T_1), B(T_1), C(T_1), D(T_1)\}$, dados na forma

$$\frac{dA(T_1)}{dT_1} + \frac{i\varphi}{2}(B(T_1) + C(T_1)) + 2\beta_1\lambda A(T_1) = 0, \quad (4.56)$$

$$\frac{dB(T_1)}{dT_1} + \frac{i}{2}(\varphi D(T_1) + \varphi^* A(T_1)) + \lambda B(T_1)(\beta_1 + \beta_2) = 0, \quad (4.57)$$

$$\frac{dC(T_1)}{dT_1} + \frac{i}{2}(\varphi D(T_1) + \varphi^* A(T_1)) + \lambda C(T_1)(\beta_1 + \beta_2) = 0, \quad (4.58)$$

$$\frac{dD(T_1)}{dT_1} + \frac{i\varphi^*}{2}(B(T_1) + C(T_1)) + 2\beta_2\lambda D(T_1) = 0. \quad (4.59)$$

Aplicando-se os métodos matemáticos usuais, resolve-se esse sistema de equações diferenciais para as condições iniciais consideradas em (2.72) e (2.73). Assim pode-se construir as soluções $M_{ij}^{(0)}(T_0, T_1)$, lembrando que $T_0 = t$ e $T_1 = \epsilon t$ de tal forma que se denota as soluções simplesmente por $M_{ij}(t, \tau)$, onde $\tau = \lambda T_1$. Para o caso particular onde $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, as soluções para o primeiro bloco são portanto, escritas na forma

$$M_{11}(t) = e^{-2\beta\tau} \left[V_1 \cos^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) - V_2 \sin^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) e^{-2i\phi} \right] e^{-2i\omega_1 t}, \quad (4.60)$$

$$M_{12}(t) = -ie^{-2\beta\tau} \left[(V_1 e^{i\phi} + V_2 e^{-i\phi}) \sin \left(\frac{\tau}{2} \right) \cos \left(\frac{\tau}{2} \right) \right] e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t}, \quad (4.61)$$

$$M_{21}(t) = -ie^{-2\beta\tau} \left[(V_1 e^{i\phi} + V_2 e^{-i\phi}) \sin \left(\frac{\tau}{2} \right) \cos \left(\frac{\tau}{2} \right) \right] e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t}, \quad (4.62)$$

$$M_{22}(t) = e^{-2\beta\tau} \left[V_2 \cos^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) - V_1 \sin^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) e^{2i\phi} \right] e^{-2i\omega_2 t}, \quad (4.63)$$

onde $V_k = -\vartheta_k \sinh(2r_k)$ e $\tau = \epsilon \lambda t$. Para a resolução blocos restantes na conversão paramétrica e também para a resolução das equações dos blocos na amplificação paramétrica, realiza-se de forma similar ao procedimento aplicado nesta seção. O procedimento de se obter a correção de ordem zero é a mesma, o que muda são as formas das equações diferenciais, associadas a cada bloco de equações.

Portanto, na condição de dissipação simétrica, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ e $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, as soluções $M_{ij}(t)$ na conversão paramétrica, são então escritas na seguinte forma

$$M_{11}(t, \tau) = M_{33}^*(t, \tau) = e^{-2\beta\tau} \left[V_1 \cos^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) - V_2 \sin^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) e^{-2i\phi} \right] e^{-2i\omega_1 t}, \quad (4.64)$$

$$M_{12}(t, \tau) = M_{34}^*(t, \tau) = -ie^{-2\beta\tau} \left[(V_1 e^{i\phi} + V_2 e^{-i\phi}) \sin \left(\frac{\tau}{2} \right) \cos \left(\frac{\tau}{2} \right) \right] e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t}, \quad (4.65)$$

$$M_{13}(t, \tau) = e^{-2\beta\tau} \left[R_1 \cos^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) + R_2 \sin^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{2} (2\nu + 1) (e^{2\beta\tau} - 1) \right] + \frac{1}{2}, \quad (4.66)$$

$$M_{24}(t, \tau) = e^{-2\beta\tau} \left[R_1 \sin^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) + R_2 \cos^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{2} (2\nu + 1) (e^{2\beta\tau} - 1) \right] + \frac{1}{2}, \quad (4.67)$$

$$M_{14}(t, \tau) = M_{23}^*(t, \tau) = ie^{-2\beta\tau} \left[(R_1 - R_2) e^{-i\phi} \sin \left(\frac{\tau}{2} \right) \cos \left(\frac{\tau}{2} \right) \right] e^{i(\omega_2 - \omega_1)t}, \quad (4.68)$$

$$M_{22}(t, \tau) = M_{44}^*(t, \tau) = e^{-2\beta\tau} \left[V_2 \cos^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) - V_1 \sin^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) e^{2i\phi} \right] e^{-2i\omega_2 t}, \quad (4.69)$$

onde os parâmetros de estados iniciais V_k e R_k são definidos na forma

$$V_k = -\vartheta_k \sinh 2r_k, \quad R_k = \vartheta_k \cosh 2r_k, \quad (4.70)$$

com duas escalas de tempo: t relativa as oscilações livres do sistema e $\tau = \lambda \epsilon t \equiv \lambda T_1$, correspondente a escala de tempo lento, proporcional a intensidade de acoplamento entre os modos. Note que no limite do acoplamento fraco, quando $\epsilon \lambda \ll 1$, as escalas de tempo t e τ podem ser aproximadamente tratadas como variáveis independentes, em acordo com os requisitos do método das escalas múltiplas. O parâmetro de acoplamento com reservatório é descrito nas soluções pelo parâmetro $\beta = \gamma/\lambda$, razão entre as intensidades de acoplamento do reservatório γ e constante de acoplamento entre os modos.

Da mesma maneira, na amplificação paramétrica, as soluções analíticas para os elementos da

matriz $M_{ij}(t, \tau)$, são dadas pelas expressões

$$M_{11}(t, \tau) = M_{33}^*(t, \tau) = e^{-2\beta\tau} \left[V_1 \cosh^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) - V_2 \sinh^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) e^{2i\phi} \right] e^{-2i\omega_1 t}, \quad (4.71)$$

$$M_{12}(t, \tau) = M_{34}^*(t, \tau) = \left[i \frac{[\mathcal{F}_+(\tau)e^{-2\beta\tau} - 1] (1 + 2\nu)\beta}{4\beta^2 - 1} e^{i\phi} - \frac{1}{2} i \sinh(\tau) e^{-2\beta\tau} (R_1 + R_2) e^{i\phi} \right] e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t}, \quad (4.72)$$

$$M_{13}(t, \tau) = -\frac{1}{2} \frac{2\beta(1 + 2\nu)\mathcal{F}_+(\tau)e^{-2\beta\tau} + 1 - 8\beta^2(1 + 2\nu)}{4\beta^2 - 1} + \left[R_1 \cosh^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) + R_2 \sinh^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) \right] e^{-2\beta\tau}, \quad (4.73)$$

$$M_{24}(t, \tau) = -\frac{1}{2} \frac{2\beta(1 + 2\nu)\mathcal{F}_+(\tau)e^{-2\beta\tau} + 1 - 8\beta^2(1 + 2\nu)}{4\beta^2 - 1} + \left[R_1 \sinh^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) + R_2 \cosh^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) \right] e^{-2\beta\tau}, \quad (4.74)$$

$$M_{14}(t, \tau) = M_{23}^*(t, \tau) = \frac{1}{2} i e^{-2\beta\tau} [V_1 e^{-i\phi} - V_2 e^{i\phi}] \sinh(\tau) e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t}, \quad (4.75)$$

$$M_{22}(t, \tau) = M_{44}^*(t, \tau) = e^{-2\beta\tau} \left[-V_1 \sinh^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) e^{2i\phi} + V_2 \cosh^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) \right] e^{-2i\omega_2 t}, \quad (4.76)$$

com os parâmetros definidos na forma

$$V_k = -\vartheta_k \sinh 2r_k, \quad \tau = \lambda T_1 \equiv \lambda \epsilon t, \quad \beta = \gamma/\lambda, \quad R_k = \vartheta_k \cosh 2r_k, \quad \mathcal{F}_+(\tau) = 2\beta \cosh(\tau) + \sinh(\tau). \quad (4.77)$$

Note que as soluções analíticas $M_{ij}(t, \tau)$ para ambos os casos de conversão e amplificação paramétrica, são soluções obtidas na aproximação de ordem zero do parâmetro de acoplamento fraco ϵ . Isto é, as soluções obtidas são da forma $M_{ij}(t, \tau) = M_{ij}^{(0)}(t, \tau) + \mathcal{O}(\epsilon)$ com as funções $M_{ij}^{(0)}(t, \tau)$ determinadas pelos procedimentos definidos no método das escalas múltiplas. Soluções analíticas deste tipo não são adequadas para a descrição da dinâmica do sistema a tempos infinitos. Porém, nos limites físicos considerados, onde tantos os modos quanto os reservatórios estão sujeito a acoplamentos fracos, e quanto menor o valor de ϵ atribuído, maior será a precisão das soluções, para descrever as propriedades físicas envolvidas. Uma descrição dinâmica mais exata exige a construção das soluções em ordens maiores do parâmetro ϵ , uma tarefa que exige trabalho considerável e está além dos objetivos deste trabalho. Aqui se estuda apenas os efeitos tênues dos reservatórios na dinâmica do sistema. Além disso, uma segunda tarefa na tentativa de averiguar o grau de precisão das soluções obtidas, consiste na construção de soluções em primeira ordem do parâmetro ϵ , gerando as soluções da forma $M_{ij}(t, \tau) = M_{ij}^{(0)}(t, \tau) + M_{ij}^{(1)}(t, \tau)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$, a ser considerada em estudos futuros.

Capítulo 5

Conversão e Amplificação Paramétrica sob Efeito de Dissipação

Neste capítulo, considera-se o estudo da ação da dissipação sobre a dinâmica dos modos acoplados na conversão e amplificação paramétrica, para uma descrição qualitativa dos efeitos de dissipação nas propriedades de cada um dos modos. Trata-se de uma extensão dos resultados anteriores [17] obtidos para o caso de um sistema ideal (ausência de reservatórios) na qual foi analisado as propriedades físicas dos modos acoplados e propriedades associadas às correlações quânticas, para o caso mais geral de um acoplamento bilinear ressonante no limite do acoplamento fraco. Neste estudo foram considerados acoplamentos dependentes do tempo correspondentes aos processos de amplificação e conversão paramétricas. No caso de conversão paramétrica, observou-se que estados iniciais coerentes permaneceram descorrelacionados todo o tempo da interação para quaisquer valores arbitrários das amplitudes das constantes de acoplamento. Além disso, na situação de amplificação paramétrica, observou-se não existir, para qualquer acoplamento bilinear, a possibilidade de comprimir um estado inicial coerente de qualquer um dos modos do sistema ou, ainda, produzir um aumento na compressão de um estado inicial comprimido. Outro resultado anterior [5] considerado, foi a presença de reservatórios mas sob o acoplamento constante entre os modos do campo eletromagnético. Neste caso, verificou-se que há possibilidade de transferência de compressão entre os modos, sujeita a dependência dos parâmetros dos estados iniciais dos modos e dos reservatórios. De modo geral, não só na análise de transferência de compressão como na medida de pureza, a adição de reservatórios faz com que essa possibilidade de troca seja diminuída, quanto maior for o valor da temperatura dos reservatórios. Neste sentido, a motivação neste

capítulo é considerar os efeitos da dissipação para este modelo de modos acoplados na condição de amplificação e conversão paramétrica, ilustrando as modificações que ocorrem na dinâmica do sistema devido a presença de reservatórios.

5.1 Transferência de Compressão

Para se definir uma medida da compressão dos modos em um sistema de variáveis contínuas, considera-se procedimentos envolvendo os valores relativos de variâncias das componentes de quadratura \hat{x} e \hat{p} . Sendo o valor da energia de flutuação do vácuo quântica \mathcal{E} e do invariante de incerteza dados em termos de σ_x e σ_p pelas equações

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_p), \quad (5.1)$$

$$\mathcal{D} = \sigma_x \sigma_p - \sigma_{xp}^2, \quad (5.2)$$

com σ_{xp} definido por

$$\sigma_{xp} = \frac{1}{2}\langle xp + px \rangle + \langle x \rangle \langle p \rangle,$$

e

$$\sigma_{\pm} = \mathcal{E} \pm \sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathcal{D}} = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{E} \mp \sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathcal{D}}}.$$

Portanto, define-se o coeficiente invariante de compressão \mathcal{S} como a razão entre o valor mínimo σ_- e o valor da variância adimensional do vácuo igual a $1/2$. Desta forma, para o sistema de dois modos bosônicos, cada qual acoplado ao seu respectivo reservatório, pode-se analisar os efeitos dos reservatórios sobre a transferência compressão¹ entre os modos através do *coeficientes invariantes de compressão*. Em termos das variáveis bosônicas, os invariantes de compressão, são determinados de acordo com [5]

$$\mathcal{S}_k(\tau) = 1 + 2\langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle(\tau) - 2|\langle \hat{a}_k^2 \rangle(\tau)|, \quad (5.3)$$

diretamente a partir dos elementos da matriz $M(t)$. Esse coeficiente, nos fornece por exemplo que para $\mathcal{S}_k(t) = 1$ o estado do oscilador k se encontra num estado coerente enquanto para $\mathcal{S}_k(t) < 1$ o estado está comprimido. Para o instante inicial $t = 0$, combinando (2.72), (2.73) em (5.3), o coeficiente inicial $\mathcal{S}_k(0)$ é escrito por

$$\mathcal{S}_k(0) = 2\vartheta_k e^{(-2r_k)}. \quad (5.4)$$

¹do inglês *squeezing*.

com $\vartheta_k \geq 1/2$ e $r_k \geq 0$. Por exemplo, no caso de um estado puro onde tem-se $\vartheta_k = 1/2$, o valor do coeficiente de compressão do correspondente modo, $S_k = \exp(-2r_k)$, depende exclusivamente do valor de r_k como uma função monótona decrescente em r_k . Valores grandes de r_k implicam em valores de S_k menores que 1, valor limite separando um estado puro comprimido de um estado puro coerente. No entanto, um estado inicial misto com $\vartheta_k > 1/2$ implica em um valor maior de S_k em relação ao valor correspondente para um o estado puro fixando o valor de r_k . Note que os valores limites (ϑ_k, r_k) definindo um estado inicial Gaussiano com propriedades não clássicas estão estabelecidos pela equação $2\vartheta_k e^{(-2r_k)} = 1$.

5.1.1 Conversão Paramétrica Dissipativa

De acordo com as soluções dadas por (4.64)-(4.69), o coeficiente de compressão é obtido substituindo-se as soluções dos elementos da matriz $M(t)$ na equação (5.3). Assim, a forma funcional dos coeficientes de compressão para o primeiro e segundo modos na conversão paramétrica são expressas por

$$\mathcal{S}_1(\tau, \beta) = e^{-2\beta\tau} \left[\mathcal{S}_1(\tau) + (2\nu + 1) (e^{2\beta\tau} - 1) \right], \quad (5.5)$$

$$\mathcal{S}_2(\tau, \beta) = e^{-2\beta\tau} \left[\mathcal{S}_2(\tau) + (2\nu + 1) (e^{2\beta\tau} - 1) \right], \quad (5.6)$$

onde $S_k(\tau)$, $k = 1, 2$, corresponde ao coeficiente de compressão na ausência das variáveis dos reservatórios, dadas por

$$S_1(\tau) = 2 \left[R_1 \cos^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) + R_2 \sin^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) - \left| V_1 \cos^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) - V_2 \sin^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) e^{-2i\phi} \right| \right], \quad (5.7)$$

$$S_2(\tau) = 2 \left[R_1 \sin^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) + R_2 \cos^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) - \left| V_2 \cos^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) - V_1 \sin^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) e^{2i\phi} \right| \right]. \quad (5.8)$$

No interesse de analisar a condição de transferência de compressão entre os modos, considera-se inicialmente o caso em que o modo *um* se encontra em um estado não comprimido com $S_1(0, \beta) > 1$, enquanto o modo *dois* em um estado comprimido com $S_2(0, \beta) < 1$. Isto implica que

$$S_1(0, \beta) = S_1(0) = 2\vartheta_1 e^{-2r_1} > 1, \quad (5.9)$$

$$S_2(0, \beta) = S_2(0) = 2\vartheta_2 e^{-2r_2} < 1. \quad (5.10)$$

Na ausência de reservatórios, quando $\beta = 0$, as expressões de $S_k(\tau, 0)$ são escritas por

$$S_1(\tau, 0) = 2R_1 \cos^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) + R_2 \sin^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) - 2 \left| V_1 \cos^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) - V_2 \sin^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) e^{-2i\phi} \right| \quad (5.11)$$

$$S_2(\tau, 0) = 2R_1 \sin^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) + R_2 \cos^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) - 2 \left| V_2 \cos^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) - V_1 \sin^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) e^{2i\phi} \right|. \quad (5.12)$$

Neste caso, nota-se que a troca de compressão entre os modos ocorre em um determinado tempo, denominado $\tau = \tau_t$. Nesse instante de tempo o modo *um*, inicialmente não comprimido, assume o valor da compressão do modo *dois*:

$$\mathcal{S}_1(\tau_t, 0) = \mathcal{S}_2(0, 0), \quad (5.13)$$

Por outro lado, no mesmo instante de tempo τ_t , o modo *dois* assume o valor de compressão inicial do modo *um*, conforme

$$\mathcal{S}_2(\tau_t, 0) = \mathcal{S}_1(0, 0). \quad (5.14)$$

De acordo com as expressões de $\mathcal{S}_1(\tau, 0)$ e $\mathcal{S}_2(\tau, 0)$, determina-se que o modo *dois* assume valores iniciais de compressão nos instantes de tempo

$$\tau_t = 2 \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.15)$$

com fidelidade máxima. Quando adicionam-se os efeitos dos reservatórios $\beta \neq 0$, as expressões (5.5) e (5.6) em $\tau = \tau_t$ são reescritas nas formas

$$\mathcal{S}_1(\tau_t, \beta) = e^{-2\beta\tau_t} \left[\mathcal{S}_1(\tau_t) + (2\nu + 1) (e^{2\beta\tau_t} - 1) \right], \quad (5.16)$$

$$\mathcal{S}_2(\tau_t, \beta) = e^{-2\beta\tau_t} \left[\mathcal{S}_2(\tau_t) + (2\nu + 1) (e^{2\beta\tau_t} - 1) \right]. \quad (5.17)$$

Desde que $\mathcal{S}_1(\tau_t) = \mathcal{S}_2(0)$ e $\mathcal{S}_2(\tau_t) = \mathcal{S}_1(0)$, pode-se escrever os valores dos coeficientes $\mathcal{S}_k(t, \tau)$ como

$$\mathcal{S}_1(\tau_t, \beta) = e^{-2\beta\tau_t} \left[\mathcal{S}_2(0) + (2\nu + 1) (e^{2\beta\tau_t} - 1) \right], \quad (5.18)$$

$$\mathcal{S}_2(\tau_t, \beta) = e^{-2\beta\tau_t} \left[\mathcal{S}_1(0) + (2\nu + 1) (e^{2\beta\tau_t} - 1) \right], \quad (5.19)$$

que em termos dos parâmetros dos estados iniciais para as definições de $\mathcal{S}_1(0)$ e $\mathcal{S}_2(0)$, implicam em

$$\mathcal{S}_1(\tau_t, \beta) = e^{-2\beta\tau_t} \left[2\vartheta_2 e^{-2r_2} + (2\nu + 1) (e^{2\beta\tau_t} - 1) \right], \quad (5.20)$$

$$\mathcal{S}_2(\tau_t, \beta) = e^{-2\beta\tau_t} \left[2\vartheta_1 e^{-2r_1} + (2\nu + 1) (e^{2\beta\tau_t} - 1) \right]. \quad (5.21)$$

Como no instante τ_t tem-se $\mathcal{S}_1(\tau_t) = \mathcal{S}_2(0)$ e $\mathcal{S}_2(\tau_t) = \mathcal{S}_1(0)$, a equação (5.20) mostra que pode haver ou não transferência de compressão do modo *dois* para o modo *um*, a depender do valor de ν e β . Impondo que haja transferência de compressão a partir do modo *dois*, isto é, que num dado instante τ_t ocorra $\mathcal{S}_1(\tau_t, \beta) < 1$, obtém-se a desigualdade

$$2\vartheta_2 e^{-2(r_2 + \beta\tau_t)} + (2\nu + 1) (1 - e^{-2\beta\tau_t}) < 1, \quad (5.22)$$

que implica na relação que define um limite superior para τ_t em termos de parâmetros de estados iniciais e reservatório, na forma

$$\tau_t < \frac{1}{2\beta} \ln \left(\frac{2\nu + 1 - S_2(0)}{2\nu} \right). \quad (5.23)$$

Combinando as equações (5.15) e (5.23) define-se o valor limite superior do parâmetro n de acordo com

$$n < \frac{1}{4\pi\beta} \ln \left(\frac{2\nu + 1 - S_2(0)}{2\nu} \right) - \frac{1}{2}, \quad (5.24)$$

associado ao número de vezes em que o sistema pode transferir compressão do modo *dois* para o modo *um*. No caso de $\beta \rightarrow 0$ (ausência da dissipação), $n < \infty$, ou seja, o modo *dois* transfere compressão para o modo *um* infinitas vezes. Portanto, para o valor de n encontrado que satisfaça a inequação (5.24), pode-se determinar o número de vezes que ocorre transferência de compressão entre os modos. Note que para $n = 0$, já ocorre uma transferência, pois $\tau_t = 2(0 + 1/2)\pi = \pi$. Em termos de n define-se um número $l = (n + 1)$. Como a solução para n na inequação (5.24) pode resultar em um número não inteiro, para o valor do número de vezes em que há transferência de compressão do modo *dois* para o modo *um*, define-se o menor inteiro correspondente a l , representado por $[l]$.

Uma situação com a ausência de dissipação, $\beta = 0$, é ilustrado na figura (5.1). Assume-se o modo *um* e o modo *dois* em estados iniciais Gaussianos não-comprimido e comprimido, respectivamente, com $\mathcal{S}_1(0, 0) > 1$ e $\mathcal{S}_2(0, 0) < 1$. Nesta situação, a compressão do modo *um* assume o valor $\mathcal{S}_1(\tau, 0) < 1$ infinitas vezes, confirmado pela relação (5.24), que implica $l = n + 1 < \infty$. Nesta figura, foi incluído a solução numérica, indicada por pontos em ambos os modos *um* e *dois*. Nota-se que a solução obtida pelo método das escalas múltiplas em correção de ordem zero já fornece soluções muito próximas das soluções numéricas. Para realizar essa comparação das soluções analíticas com as soluções numéricas, optou-se por construir todos os gráficos na escala de tempo $\tau = \epsilon\lambda t$ e não em t . Uma vez que as soluções analíticas já estão escritas nas escala de tempo τ , fez-se uma mudança de escala de tempo ($t \rightarrow \tau$) nas equações diferenciais da conversão paramétrica para se obter as soluções numéricas na escala de tempo τ .

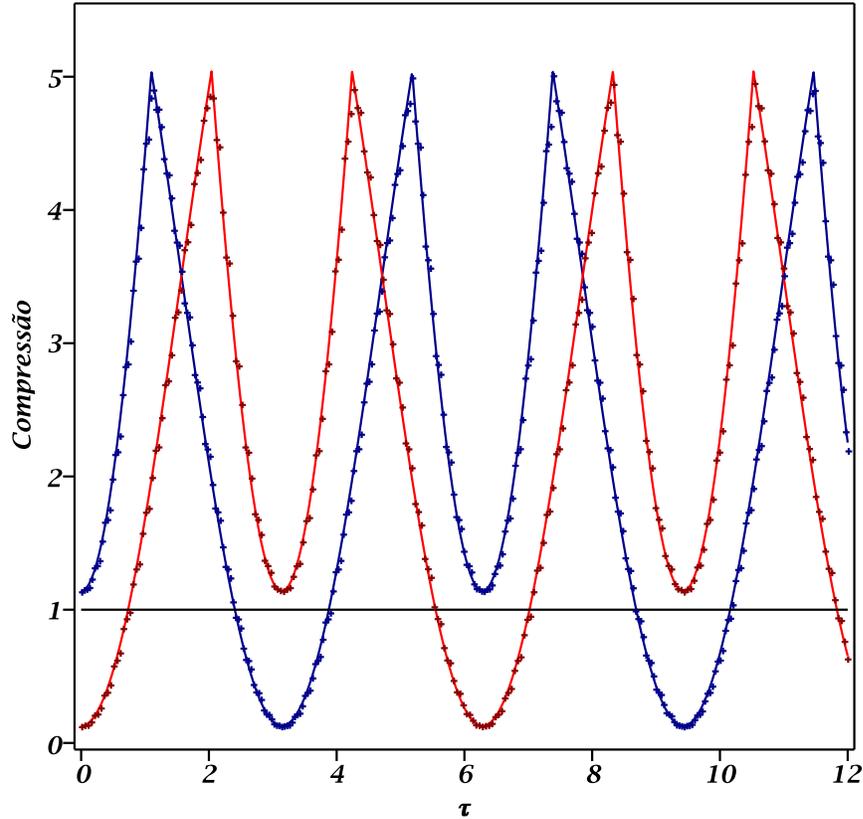


Figura 5.1: Comportamento do coeficiente de compressão $S_k(\tau, \beta)$ na ausência de reservatório ($\beta=0$). A curva azul representa o modo um ($S_1(0, 0) > 1$) enquanto a linha vermelha o modo dois ($S_2(0, 0) < 1$), com as condições iniciais sendo $\phi = 0$, $r_1 = 0,45$, $r_2 = 1,2$, $\vartheta_1 = 1,4$, $\vartheta_2 = 0,7$. Os pontos representam as soluções numéricas. A linha preta representa o estado coerente.

Ainda se tratando na ausência de reservatórios, mas no caso em que o acoplamento entre os modos (λ) não é pequeno e passa a ter valores maiores, a solução numérica se torna bem diferente quando comparada com a solução analítica obtida pelo método das escalas múltiplas, como mostra a figura (5.2). Neste caso, a solução analítica falha em representar o sistema físico, uma vez que o método é restrito para casos onde os valores de acoplamentos atribuídos são de pequenas intensidades, quando comparado com o acoplamento do modo com seu respectivo reservatório (γ). Esta condição para o método das escalas múltiplas ser utilizado e possuir resultados em acordo com a solução numérica não é restrito apenas o coeficiente de compressão na conversão paramétrica, mas é válido no coeficiente de compressão na amplificação paramétrica e também na medida de pureza e emaranhamento na conversão e amplificação paramétrica.

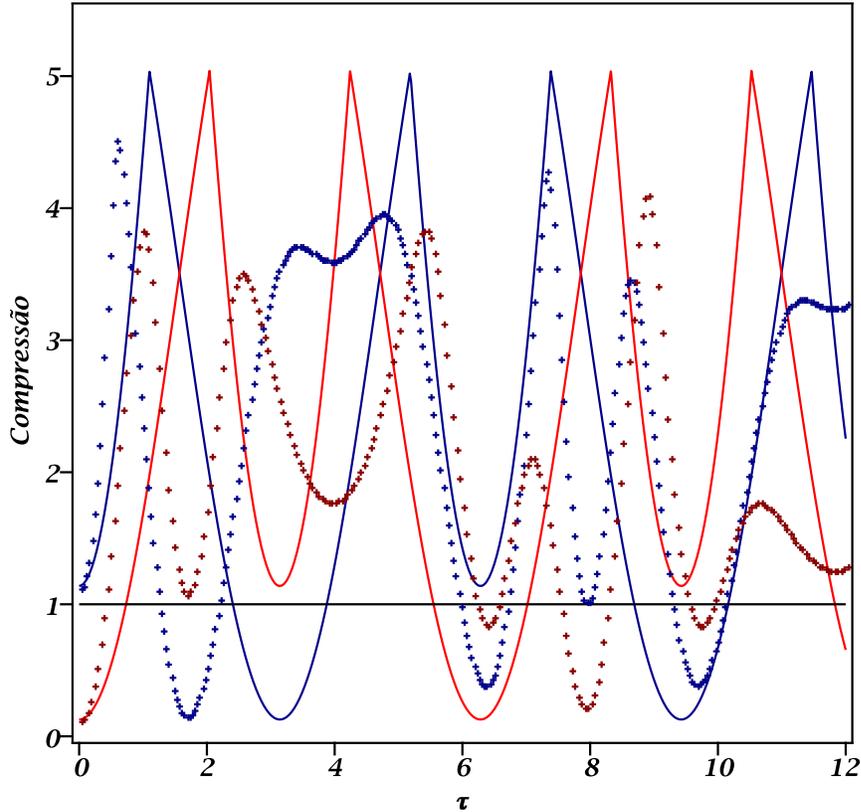


Figura 5.2: Comportamento do coeficiente de compressão $S_k(\tau, \beta)$ na ausência de reservatório ($\beta=0$). A curva azul representa o modo um ($S_1(0, 0) > 1$) enquanto a linha vermelha o modo dois ($S_2(0, 0) < 1$), com as condições iniciais sendo $\phi = 0$, $r_1 = 0,45$, $r_2 = 1,2$, $\vartheta_1 = 1,4$, $\vartheta_2 = 0,7$. Os pontos representam as soluções numéricas. A linha preta representa o estado coerente.

Considerando os efeitos dos reservatórios ($\beta \neq 0$), de acordo com a expressão (5.24) e para o sistema em estados iniciais nos quais um dos modos esteja em estado comprimido e outro não, haverá um número finito de vezes em que o modo comprimido irá transferir compressão. Este caso está ilustrado na figura (5.3). Tomando estados iniciais com $S_1(0, 0) > 1$ e $S_2(0, 0) < 1$, vê-se pela curva verde que o modo *um* recebe compressão do modo *dois* (curva laranja) em $\tau = \tau_t$. Além disso, o número de vezes que ocorre a transferência de compressão é verificado pela expressão (5.24), onde $n < 0,772$ implicando em $l < 1,772$; número inteiro $[l] = 1$ determina o valor do número de vezes da transferência de compressão.

Na figura (5.3) compara-se a dinâmica de transferência de compressão do caso da conversão paramétrica (linhas verde e laranja), com aquela para o caso das soluções obtidas quando se tem os modos estritamente ressonantes, $\omega_1 = \omega_2$, e acoplamento constante no tempo, que corresponde as

curvas azul e vermelha. Os resultados obtidos para o caso do acoplamento independente do tempo permite soluções analíticas exatas para as matrizes $M(t)$ e estão discutidas em [5]. Na presença dos reservatórios com temperaturas não nulas, $\nu \neq 0$, ambos com mesmo número médio de fótons, o número de vezes que há transferência de compressão é o dobro comparado com o número correspondente a conversão paramétrica. Enquanto sob acoplamento constante, há duas transferências do modo *dois* para o modo *um*, nos instantes $\tau_t = \pi/2$ e $\tau_t = 3\pi/2$, na conversão paramétrica houve somente uma transferência. Para tempos posteriores a $\tau = 3\pi/2$, não há mais a possibilidade de transferência de compressão entre os modos, tanto para o acoplamento constante quanto para a conversão paramétrica. Os pontos indicados na figura, representam as soluções numéricas para ambos os casos analisados; caso de frequências idênticas e acoplamento constante [5], que possui solução exata do problema e o caso da conversão paramétrica.

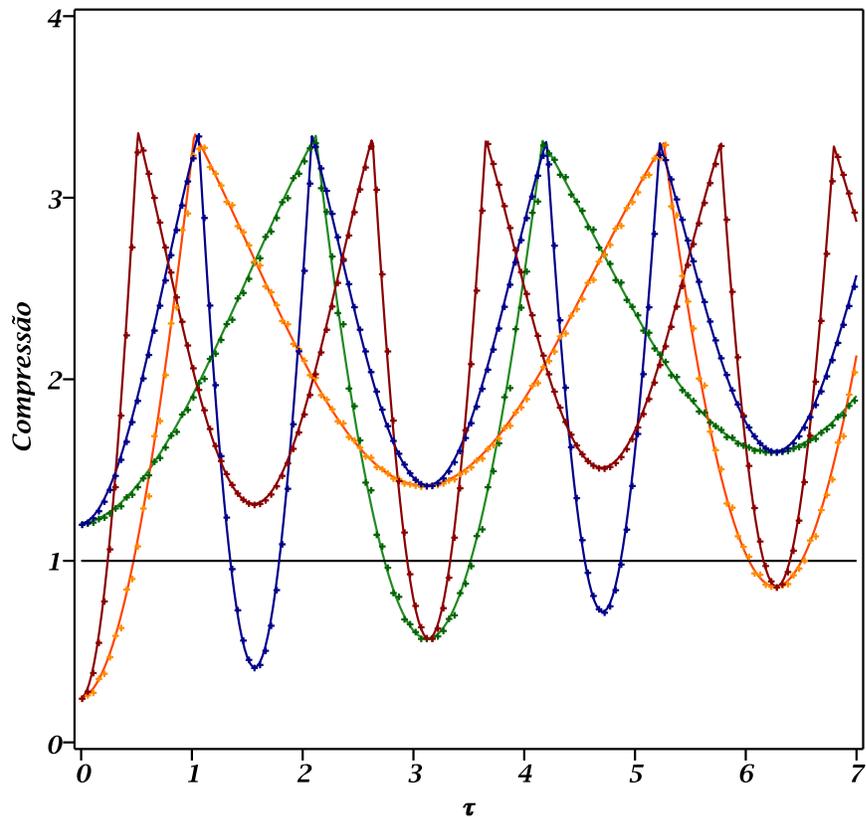


Figura 5.3: Comportamento do coeficiente de compressão $\mathcal{S}_k(\tau, \beta)$. As curvas verde e azul representam o modo *um* ($S_1(0,0) > 1$) enquanto as linhas vermelha e laranja o modo *dois* ($S_2(0,0) < 1$). Os pontos representam as soluções numéricas. Com as condições iniciais sendo $\beta = 0,02$, $\phi = 0$, $r_1 = 0,6$, $r_2 = 0,7$, $\vartheta_1 = 2$, $\vartheta_2 = 0,5$ e $\nu = 1$. A linha preta representa o estado coerente.

A figura (5.4) ilustra o comportamento do coeficiente de compressão do modo um , para diferentes valores de temperatura dos reservatórios, correspondentes a diferentes valores de ν . A medida que aumentamos ν , o que corresponde ao aumento das temperaturas dos reservatórios, o modo um inicialmente comprimido, transfere compressão para o modo $dois$, não comprimido inicialmente, um número finito de vezes, e esse número diminui com o aumento de ν , similar ao que ocorre para o caso de acoplamento constante, conforme discutido em [5].

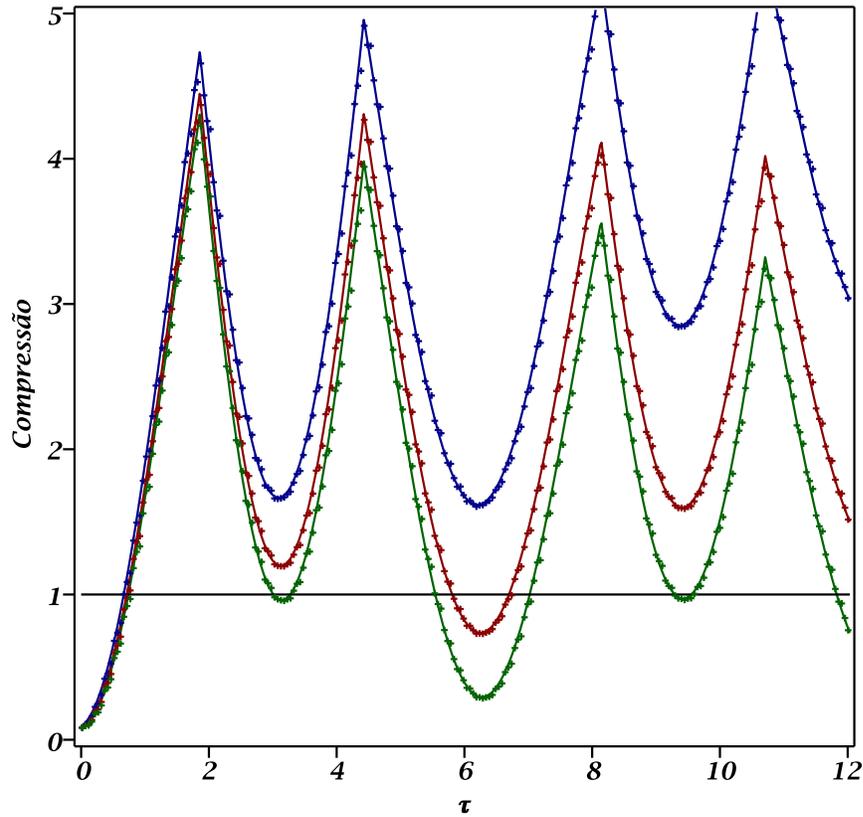


Figura 5.4: Comportamento do coeficiente de compressão $S_k(\tau, \beta)$ para diferentes valores de ν . As curvas verde, vermelha e azul representam o modo um , ($S_1(0, 0) < 1$). Para a curva verde, $\nu = 0$ enquanto para curva vermelha, $\nu = 1$ e para a curva azul $\nu = 2$. Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\beta = 0,02$, $\phi = 0$, $r_1 = 1,2$, $r_2 = 0,5$, $\vartheta_1 = 0,5$, $\vartheta_2 = 1,3$. A linha preta representa o estado coerente.

Quando os osciladores são acoplados aos reservatórios com temperaturas diferentes de zero, $\nu \neq 0$, os reservatórios agem de tal forma que, o número de vezes que ocorre transferência de compressão entre os modos seja reduzido, de forma mais pronunciada, quanto maior foi o valor de ν considerado. Esta análise preliminar do caso mais simples com mesmo número médio de fótons em ambos reservatórios, que acarreta considerável simplificação no método matemático considerado,

pode ser estendida em considerar um estudo mais completo do problema na conversão paramétrica. O caso de maior interesse físico, é quando $\beta_1 \neq \beta_2$. As soluções das matrizes $M(t)$ nos casos de conversão e amplificação paramétrica ficam mais trabalhosas de serem simplificadas. Porém, com estas soluções, é possível obter uma descrição mais geral dos aspectos da dinâmica de transferência da compressão, considerando valores arbitrários da temperatura dos reservatórios e diferentes tipos de estados iniciais Gaussianos. Em todas as curvas analisadas, as soluções analítica em correção de ordem zero ficam muito próximas das soluções numéricas, indicadas pelos pontos. As soluções obtidas na conversão paramétrica são válidas para pequenos instantes iniciais de tempo, dependentes do fator de acoplamento λ utilizado e de β .

5.1.2 Amplificação Paramétrica Dissipativa

Nesta seção ilustra-se e discute-se, de forma qualitativa, a evolução temporal do valor da compressão de cada um dos modos interagentes sob a ação dos reservatórios, para diferentes classes de valores de estados iniciais Gaussianos. No caso da amplificação paramétrica, as soluções dos elementos de matriz $M_{ij}(t)$, obtidos em (4.71)-(4.76), implicam para o coeficiente de compressão para ambos os modos as seguintes formas

$$\begin{aligned} S_1(\tau) = 1 - \frac{2\beta(1+2\nu)\mathcal{F}_+(\tau)e^{-2\beta\tau} - 1 - 8\beta^2\nu}{4\beta^2 - 1} + 2 \left[R_1 \cosh^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) + R_2 \sinh^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) \right] e^{-2\beta\tau} \\ - e^{-2\beta\tau} \left[4V_1^2 \cosh^4 \left(\frac{\tau}{2} \right) - 2V_1V_2 \cos(2\phi) \sinh^2(\tau) + 4V_2^2 \sinh^4 \left(\frac{\tau}{2} \right) \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} S_2(\tau) = 1 - \frac{2\beta(1+2\nu)\mathcal{F}_+ e^{-2\beta\tau} - 1 - 8\beta^2\nu}{4\beta^2 - 1} + 2 \left[R_2 \cosh^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) + R_1 \sinh^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) \right] e^{-2\beta\tau} \\ - e^{-2\beta\tau} \left[4V_1^2 \sinh^4 \left(\frac{\tau}{2} \right) - 2V_1V_2 \cos(2\phi) \sinh^2(\tau) + 4V_2^2 \cosh^4 \left(\frac{\tau}{2} \right) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

que são funções regulares para o valor de $\beta = 1/2$. As formas funcionais dos coeficientes de compressão na amplificação paramétrica indicam claramente a impossibilidade de ocorrência da transferência de compressão de um modo para outro, conforme foi observado no processo da conversão paramétrica. No processo de amplificação paramétrica os valores dos coeficientes de compressão $S_k(\tau)$ aumentam no decorrer do tempo para o caso de sistema isolado (ausência de reservatório), de forma a não haver possibilidade de se aprimorar a compressão dos modos interagentes. A amplificação paramétrica por si só deteriora a natureza não clássica dos estados iniciais de cada um dos modos do sistema, em oposição ao caso da conversão paramétrica. Neste sentido, o mesmo efeito presente na amplificação paramétrica deve ser esperado no caso um sistema aberto, com a

ação dos reservatórios térmicos, porém de forma mais acentuada. É útil definir um coeficiente a partir da razão entre o valor inicial do coeficiente $\mathcal{S}_k(0)$ e valor do coeficiente no instante de tempo τ , denotado por $\mathcal{Y}_k(\tau) = \mathcal{S}_k(0)/\mathcal{S}_k(\tau)$, $k = 1, 2$. Este coeficiente permite comparar valores das compressões associadas a um dado modo, para diferentes classes de valores de parâmetros de estados iniciais. A figura (5.5) ilustra o comportamento do coeficiente $\mathcal{Y}_k(\tau)$ para diferentes valores do parâmetro β . O valor $\beta = 0$ implica na ausência dos reservatórios, enquanto $\beta = 0, 2$ corresponde a presença dos reservatórios, atuando de forma fraca, à temperatura diferente de zero com um número médio de fótons $\nu = 2$. Nesta figura o modo *dois* encontra-se inicialmente em um estado misto não comprimido $S_2(\beta, 0) > 1$, enquanto o modo *um* em um estado puro comprimido $S_1(\beta, 0) < 1$. Levando em conta que os modos estão interagindo e observando as curvas verde e azul, conclui-se que, nos primeiros instantes da interação, o modo mais comprimido ($S(\tau) < 1$) “evolui em uma taxa temporal maior” para um estado de menor compressão ($S(\tau) > 1$) - o coeficiente $\mathcal{S}_1(\tau)$ cresce rapidamente no tempo - comparado ao modo *dois*. Isto é válido para os dois casos de $\beta = 0$ e $\beta = 0, 2$, mas frisando que a presença do reservatório implica em uma perda de compressão mais acentuada no tempo. Para realizar a comparação das soluções analíticas com as soluções numéricas na amplificação paramétrica, optou-se da mesma forma que na conversão paramétrica, em construir todos os gráficos na escala de tempo $\tau = \epsilon\lambda t$. Dessa forma, fazendo a transformação de escala ($t \rightarrow \tau$) nas equações diferenciais, foi possível obter as soluções numéricas na escala de tempo τ como indicado na figura (5.5).

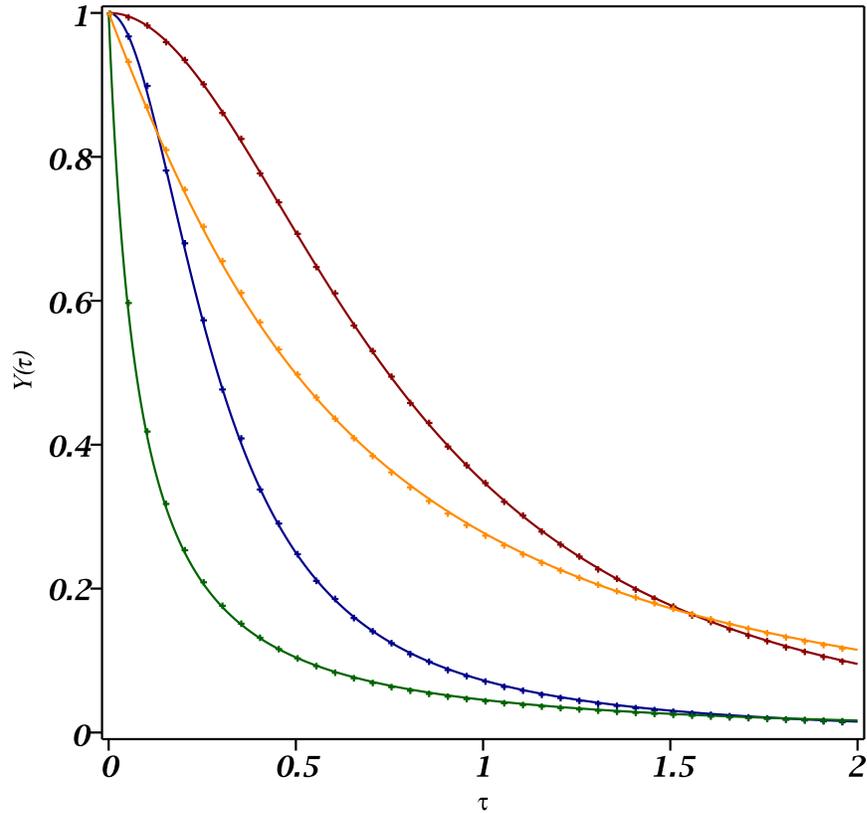


Figura 5.5: Comportamento do coeficiente $\mathcal{Y}_k(z) = \mathcal{S}_k(0)/\mathcal{S}_k(\tau)$. As curvas azul e vermelha representam o modo um e dois respectivamente na ausência de reservatório ($\beta = 0$). As curvas verde e laranja representam o modo um e dois respectivamente ($\beta = 0,2$). Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\phi = 0$, $r_1 = 0,95$, $r_2 = 0,45$, $\vartheta_1 = 0,5$, $\vartheta_2 = 1,4$ e $\nu = 2$.

Na figura (5.6) compara-se o valor de $\mathcal{Y}_1(\tau)$ para diferentes valores do coeficiente de compressão de quadratura r_1 do estado inicial do modo *um*, mantendo-se os outros parâmetros fixos. Assume-se para o estado inicial do modo *dois* um estado misto não comprimido e leva-se em conta o efeito dos reservatórios R_k com o mesmo número médio de fótons, diferente de zero. Nessas condições, foi observado que o aumento do coeficiente r_1 faz com que o coeficiente de compressão $\mathcal{S}_1(\tau, \beta)$ cresça mais rapidamente comparado as curvas com coeficientes r_1 menores - note a curva azul; o coeficiente \mathcal{Y}_1 diminui a uma taxa maior no decorrer do tempo, o que implica um crescimento mais rápido para \mathcal{S}_1 .

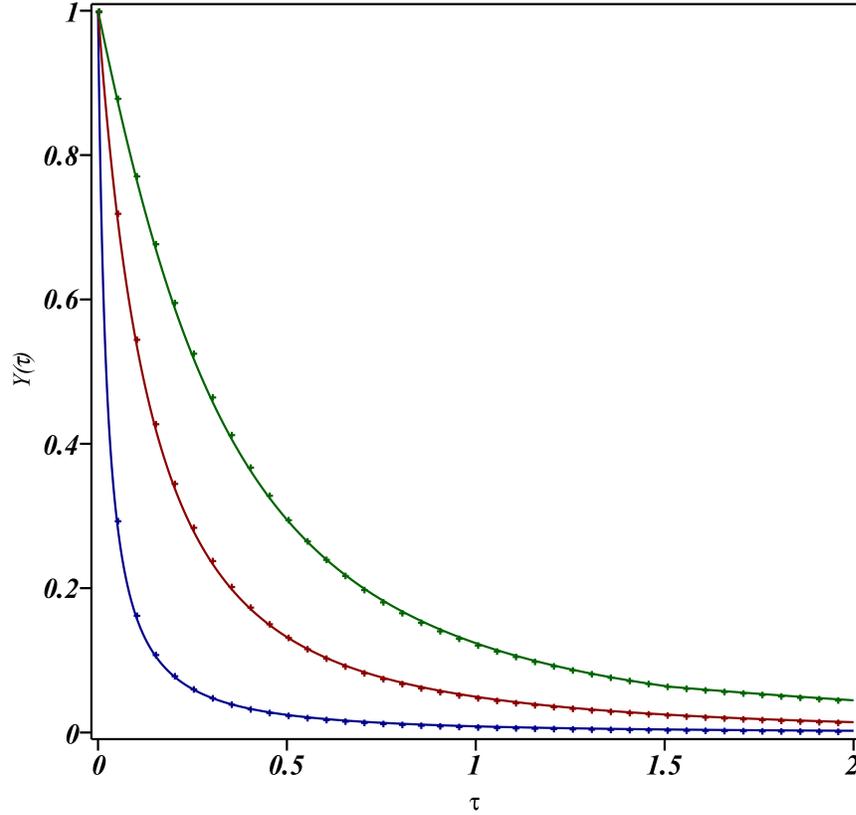


Figura 5.6: Comportamento do coeficiente $\mathcal{Y}_1(z) = \mathcal{S}_1(0)/\mathcal{S}_1(\tau)$ para diferentes valores de r_1 . A curva azul representa o caso de $r_1 = 1,9$, para a curva vermelha, $r_1 = 1$ e para a curva verde, $r_1 = 0,5$. Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\beta = 0,1$, $\phi = 0$, $r_2 = 0,45$, $\vartheta_1 = 0,5$, $\vartheta_2 = 1,4$ e $\nu = 2$.

De forma similar ao estudo do efeito dos reservatórios na transferência de compressão entre modos na conversão paramétrica e do aumento do coeficiente de compressão na amplificação paramétrica, não possibilitando a transferência de compressão de um modo para outro, fez-se uma análise qualitativa do efeito dos reservatórios sobre o valor da pureza de cada um dos modos, conforme descrito na próxima seção.

5.2 Pureza dos Modos

Os estados iniciais Gaussianos para cada um dos modos do sistema interagente podem ser preparados nos chamados “estados puros ou mistos” de maneira que a pureza do estado é uma propriedade inerente ao estado quântico do sistema como um todo e também de cada um dos modos em separados. O valor de $\mathcal{P}_{12} = \text{Tr} \hat{\rho}_{12}^2$ determina o valor da pureza total do sistema e de modo si-

milar $\mathcal{P}_k = \text{Tr}(\hat{\rho}_k)^2$, $k = 1, 2$ (traço do quadrado do operador densidade reduzido) determinam os valores da pureza de cada um dos modos. No processo de interação entre os modos e da interação dos modos com seus respectivos reservatórios tem-se os valores da pureza alterados no decorrer do tempo. Esta dinâmica da pureza de cada um dos modos depende da natureza das interações consideradas. Neste sentido, a partir das soluções analíticas $M_{ij}(t, \tau)$ obtidas para cada um dos processos de conversão e amplificação paramétrica é possível realizar uma descrição qualitativa do comportamento dinâmico da pureza no sistema.

O chamado estado misto, também denominado mistura estatística é caracterizado por haver uma probabilidade clássica p_i de que o estado seja $\hat{\rho}_i(t)$, de forma que o operador densidade correspondente $\hat{\rho}(t)$ é descrito por uma soma na forma $\hat{\rho}(t) = \sum_i p_i \hat{\rho}_i(t)$. Outra possibilidade é quando se tem o chamado estado puro, onde tem-se total conhecimento sobre a forma do estado do sistema (ou subsistema), perfeitamente definido por um vetor no espaço de Hilbert, $|\Psi(t)\rangle$; o correspondente operador densidade tem sua forma dada por $\hat{\rho}(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$.

Caso $\hat{\rho}_k^2 = \hat{\rho}_k$, pela propriedade do operador densidade de que $\text{Tr}(\hat{\rho}_k) = 1$, tem-se seu o valor $\mathcal{P}_k = 1$, tratando-se de uma valor que caracteriza um estado puro, ao passo $\mathcal{P}_k < 1$ caracteriza um estado misto para o k -ésimo sistema.

Em se tratando do caso de estados iniciais Gaussianos em sistemas Hamiltonianos quadráticos, os valores das purezas do sistema como um todo ou de cada uma das partes do sistema são obtidos a partir de formas funcionais nas soluções da matriz $M(t)$ ou nas formas simetrizadas das covariâncias definidas pela relação

$$q_{ij} \equiv \frac{1}{2} \langle \hat{q}_i \hat{q}_j + \hat{q}_j \hat{q}_i \rangle. \quad (5.27)$$

Nesta notação a forma \hat{q}_i é uma componente do vetor $\mathbf{q} = (\hat{x}_1, \hat{p}_1, \hat{x}_2, \hat{p}_2)$ e a escolha da ordem dos termos desse vetor \mathbf{q} é facultativa, podendo-se trabalhar com $\mathbf{q}' = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{p}_1, \hat{p}_2)$. Note apenas que uma vez escolhida, deve-se sempre mantê-la. Os operadores \hat{x}_i e \hat{p}_i são definidos como operadores adimensionais, uma vez que \hat{X}_i e \hat{P}_i escritos em (2.36) e (2.37) possuem dimensão, pode-se escrever então

$$\hat{x}_i = \sqrt{\frac{m\omega_i}{\hbar}} \hat{X}_i, \quad (5.28)$$

$$\hat{p}_i = \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega_i}} \hat{P}_i, \quad (5.29)$$

ou na forma dos operadores \hat{a}_i e \hat{a}_i^\dagger ,

$$\hat{x}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger), \quad (5.30)$$

$$\hat{p}_i = \frac{1}{\sqrt{2}i} (\hat{a}_i - \hat{a}_i^\dagger). \quad (5.31)$$

A matriz de covariância simetrizada é representada na forma matricial por

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{bmatrix}, \quad (5.32)$$

cujos elementos podem ser facilmente obtidos a partir dos elementos da matriz $M(t)$. Essa matriz \mathcal{Q} pode ser escrita na forma bloco de matrizes como

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{11} & \mathcal{Q}_{12} \\ \mathcal{Q}_{21} & \mathcal{Q}_{22} \end{bmatrix}. \quad (5.33)$$

Nesta notação simetrizada, o valor da pureza de cada um dos modos é determinada diretamente a partir dos determinantes dos blocos \mathcal{Q}_{kk} , $k = 1, 2$ de acordo com a equação [14]

$$\mathcal{P}_k(t) = \frac{1}{\sqrt{4 \det \mathcal{Q}_{kk}}} \quad (5.34)$$

Note que no instante inicial $t = 0$, quando os modos estão desacoplados o valor da pureza é dado por $\mathcal{P}_k(0) = (2\vartheta_k)^{-1}$ em acordo com a parametrização definida anteriormente para o estado inicial Gaussiano.

5.2.1 Conversão Paramétrica

No caso de conversão paramétrica, considera-se os elementos da matriz de covariância \mathcal{Q} determinados a partir das soluções da matriz $M(t)$ dadas em (4.64)-(4.69) para se obter a descrição da evolução temporal da pureza \mathcal{P}_k de cada um dos modos. A matriz \mathcal{Q} é escrita em termos dos blocos de matrizes (5.33), cujas formas funcionais de seus elementos determinam as funções nas variáveis temporais t e τ para os coeficientes $\mathcal{P}_1(t, \tau)$ e $\mathcal{P}_2(t, \tau)$. Esta tarefa implica no cálculo dos determinantes de \mathcal{Q}_{11} e \mathcal{Q}_{22} respectivamente. Após as operações algébricas adequadas, para a conversão paramétrica, tem-se os determinantes de \mathcal{Q}_{11} e \mathcal{Q}_{22} dados na forma

$$\det(Q_{11}) = e^{-4\beta\tau} \left(\vartheta_1^2 \cos^4 \left(\frac{\tau}{2} \right) + \vartheta_2^2 \sin^4 \left(\frac{\tau}{2} \right) \right) + \frac{1}{2} e^{-4\beta\tau} \sin^2(\tau) (\cos(2\phi) V_1 V_2 + R_1 R_2) - e^{-4\beta\tau} \left(\sin^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) R_2 + \cos^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) R_1 \right) (1 - e^{2\beta\tau})(1 + 2\nu) + \frac{(1 + 2\nu)^2 (e^{-2\beta\tau} - 1)^2}{4}, \quad (5.35)$$

$$\det(Q_{22}) = e^{-4\beta\tau} \left(\vartheta_1^2 \sin^4 \left(\frac{\tau}{2} \right) + \vartheta_2^2 \cos^4 \left(\frac{\tau}{2} \right) \right) + \frac{1}{2} e^{-4\beta\tau} \sin^2(\tau) (\cos(2\phi) V_1 V_2 + R_1 R_2) - e^{-4\beta\tau} \left(\sin^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) R_1 + \cos^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) R_2 \right) (1 - e^{2\beta\tau})(1 + 2\nu) + \frac{(1 + 2\nu)^2 (e^{-2\beta\tau} - 1)^2}{4}. \quad (5.36)$$

Nas formas funcionais (5.35) e (5.36) dos determinantes, a partir dos quais se obtém a pureza de cada um dos modos, a dependência no tempo das oscilações livres t não é dada explicitamente. No entanto, ela está implícita na dependência em $\beta\tau = \gamma t$; desligando-se a interação entre os modos, a pureza de cada um deles passa a ser alterada unicamente devido ao acoplamento com o seu respectivo reservatório. Somente se $\beta = 0$ a pureza de cada um dos modos, na ausência de interação entre eles, torna-se um invariante do sistema, no sentido de

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P}_k(t, \tau) = D_0 \mathcal{P}_k(t, \tau) + \epsilon D_1 \mathcal{P}_k(t, \tau) = 0. \quad (5.37)$$

A partir dos coeficientes $\mathcal{P}_1(\tau)$ e $\mathcal{P}_2(\tau)$, pode-se ilustrar graficamente a situação de transferência de pureza entre os modos na ausência de reservatórios. Na figura (5.7), considera-se o caso da troca de pureza entre os modos com $\beta = 0$. Pode-se observar uma troca periódica na transferência de pureza entre $\mathcal{P}_1(\tau)$ e $\mathcal{P}_2(\tau)$ para tempos $\tau_t = 2(n + 1/2)\pi$, com $n = 0, 1, 2, \dots$. Na ausência de reservatórios, o valor inicial atribuído a cada modo $\mathcal{P}_k(0)$ se repete periodicamente nos instantes de troca e recorrência.

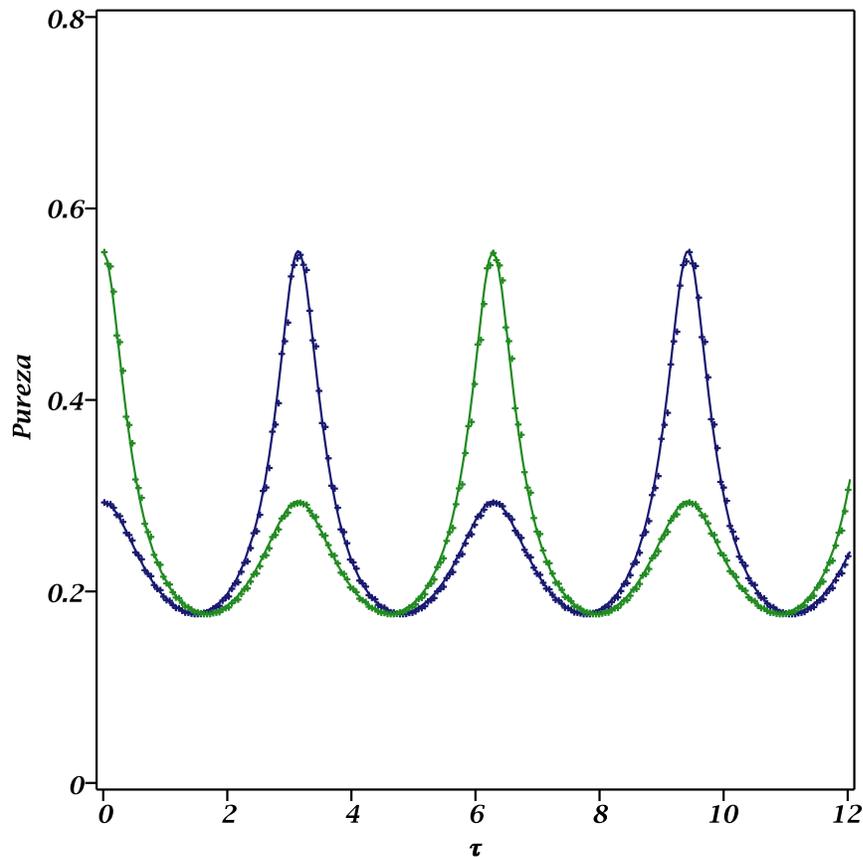


Figura 5.7: Comportamento da pureza $\mathcal{P}_k(\tau)$. A curva azul representa o modo um ($\mathcal{P}_1(0)=0,29$) enquanto a curva verde o modo dois ($\mathcal{P}_2(0)=0,55$). Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\beta = 0$, $\phi = 0$, $r_1 = 0,35$, $r_2 = 1,1$, $\vartheta_1 = 1,7$, $\vartheta_2 = 0,9$ e $\nu = 0$.

Na figura (5.8) ilustra-se o comportamento da pureza no primeiro modo para diferentes valores de β . Nessas condições, considera-se ambos os modos com valores de pureza distintos para os seus estados iniciais mistos caracterizados por $\mathcal{P}_k(\tau) < 1$. A curva azul indica a ausência de reservatório, e ela assume exatamente o valor da pureza do modo *dois* no tempo $\tau = \pi$. Ao considerar agora os reservatórios à mesma temperatura, os valores máximos das amplitudes da pureza diminuem no decorrer do tempo (observe em $\tau = \pi$). A curva laranja indica o valor da pureza do modo *um*, porém com uma amplitude menor quando comparada com a curva azul. Na curva vermelha, o valor do parâmetro β é maior ainda comparado ao da curva amarela; isto implica em um valor de amplitude menor decorrido o mesmo intervalo de tempo.

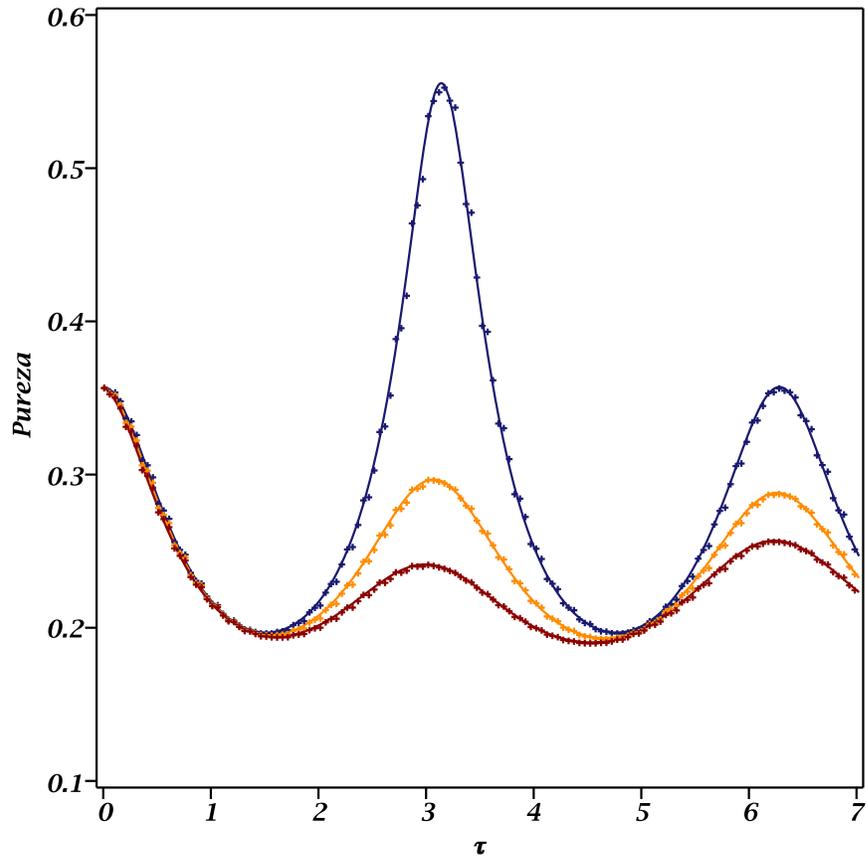


Figura 5.8: Comportamento da pureza $\mathcal{P}_1(\tau)$ para diferentes valores de β . A curva azul representa o caso de $\beta = 0$, para a curva laranja, $\beta = 0,02$ e para a curva vermelha, $\beta = 0,04$. Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\phi = 0$, $r_1 = 0,35$, $r_2 = 1,1$, $\vartheta_1 = 1,4$, $\vartheta_2 = 0,9$ e $\nu = 2$.

Na figura (5.9) foi construído o gráfico da pureza de ambos os modos, resultado comparado ao já obtido em [5]. As curvas verde e vermelha representam a pureza do modo um e dois, respectivamente, conforme consideradas em [5]. Já as curvas azul e laranja representam a pureza dos modos um e dois, respectivamente, determinadas a partir das relações (5.35) e (5.36). Nota-se que na conversão paramétrica, o processo de transferência de pureza entre os modos ocorre num tempo maior comparado ao caso onde há um acoplamento constante no tempo (curvas verde e laranja). No caso de acoplamento constante a transferência ocorre na metade do tempo necessário para o mesmo ocorrer na conversão paramétrica. Este resultado é similar ao que ocorre na transferência de compressão. Em ambos os casos de acoplamento constante e conversão paramétrica, transfere-se compressão e pureza. Porém, no período de transferência obtido para o caso de conversão paramétrica, cuja intensidade de acoplamento varia segundo uma forma trigonométrica no tempo, o valor médio da intensidade do acoplamento é a metade do valor daquele obtido no caso de indepen-

dente do tempo, fazendo o valor efeito menor e dobrando o tempo necessário para a transferência de propriedades dos modos. Na ausência de reservatório, o custo de transferência na conversão paramétrica é apenas no aumento do intervalo de transferência. No entanto, considerando-se a presença dos reservatórios, o custo é maior; quanto mais se demora para transferir mais pronunciado será o efeito do reservatório nos valores das propriedades quânticas de cada um dos modos no processo de transferência.

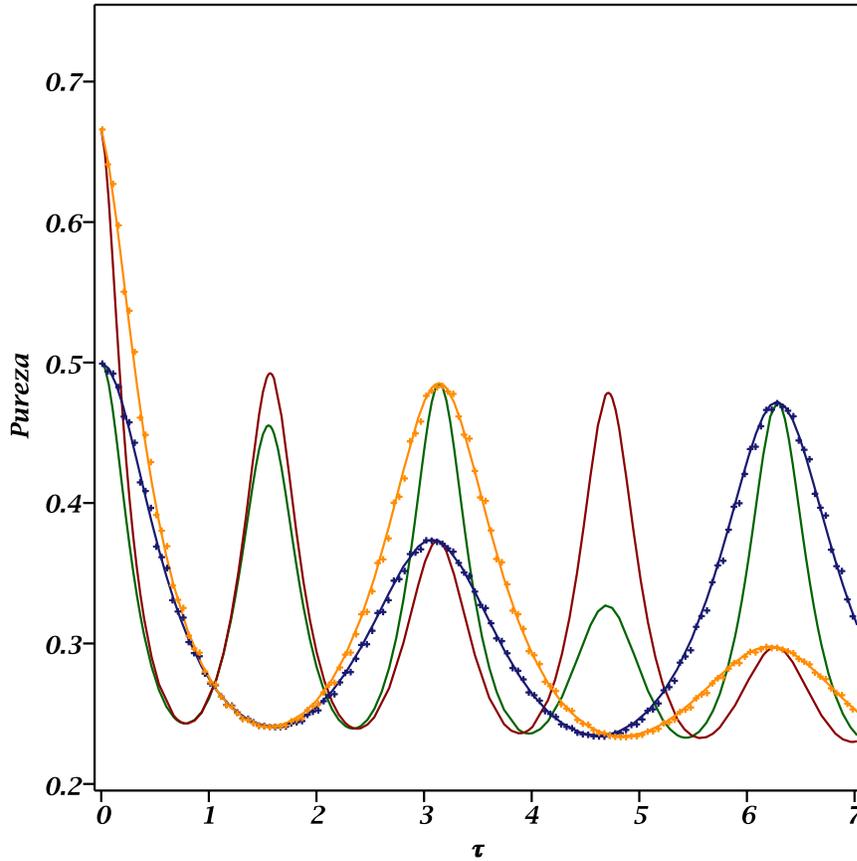


Figura 5.9: Comportamento da pureza $\mathcal{P}_k(\tau)$. As curvas verde e azul representam o modo 1 ($\mathcal{P}_1(0)=0,5$) enquanto as linhas vermelha e laranja o modo 2 ($\mathcal{P}_2(0)=0,67$). Os pontos representam as soluções numéricas. Com as condições iniciais sendo $\beta = 0,01$, $\phi = 0$, $r_1 = 0$, $r_2 = 1,5$, $\vartheta_1 = 1$, $\vartheta_2 = 0,75$ e $\nu = 1$.

5.2.2 Amplificação Paramétrica

No caso da amplificação paramétrica a evolução temporal da pureza $\mathcal{P}_k(t)$ para cada um dos modos é determinada a partir dos elementos da matriz de covariâncias \mathcal{Q} , obtidos de forma similar ao caso da conversão paramétrica, porém considerando as soluções da matriz $M(t)$ dadas em (4.71)-(4.76). Então a partir dos elementos matriz \mathcal{Q} na forma de blocos (5.33), determina-se as

formas funcionais de $\mathcal{P}_1(t)$ e $\mathcal{P}_2(t)$, a partir dos determinantes de \mathcal{Q}_{11} e \mathcal{Q}_{22} respectivamente. Na amplificação paramétrica, as formas funcionais dos determinantes de \mathcal{Q}_{11} e \mathcal{Q}_{22} são dadas por

$$\det(Q_{11}) = \frac{1}{2}e^{-4\beta\tau} \sinh^2(\tau) (\cos(2\phi)V_1V_2 + R_1R_2) + e^{-4\beta\tau} \left(\sinh^4\left(\frac{\tau}{2}\right) \vartheta_2^2 + \cosh^4\left(\frac{\tau}{2}\right) \vartheta_1^2 \right) - \frac{(\mathcal{F}_+(\tau)e^{-2\beta\tau} - 2\beta)(R_1 \cosh^2\left(\frac{\tau}{2}\right) + R_2 \sinh^2\left(\frac{\tau}{2}\right))(1 + 2\nu)\beta e^{-2\beta\tau}}{4\beta^2 - 1} + \frac{\beta^2(1 + 2\nu)^2(\mathcal{F}_+(\tau)e^{-2\beta\tau} - 2\beta)^2}{(4\beta^2 - 1)^2}, \quad (5.38)$$

$$\det(Q_{22}) = \frac{1}{2}e^{-4\beta\tau} \sinh^2(\tau) (\cos(2\phi)V_1V_2 + R_1R_2) + e^{-4\beta\tau} \left(\cosh^4\left(\frac{\tau}{2}\right) \vartheta_2^2 + \sinh^4\left(\frac{\tau}{2}\right) \vartheta_1^2 \right) - \frac{(\mathcal{F}_+(\tau)e^{-2\beta\tau} - 2\beta)(R_1 \sinh^2\left(\frac{\tau}{2}\right) + R_2 \cosh^2\left(\frac{\tau}{2}\right))(1 + 2\nu)\beta e^{-2\beta\tau}}{4\beta^2 - 1} + \frac{\beta^2(1 + 2\nu)^2(\mathcal{F}_+(\tau)e^{-2\beta\tau} - 2\beta)^2}{(4\beta^2 - 1)^2}, \quad (5.39)$$

com

$$V_k = -\vartheta_k \sinh(2r_k), \quad \tau = \epsilon \rho t, \quad \beta = \gamma/\lambda, \quad R_k = \vartheta_k \cosh(2r_k), \\ \mathcal{F}_\pm(\tau) = 2\beta \cosh(\tau) \pm \sinh(\tau), \quad \mathcal{G}_\pm(\tau) = 2\beta \sinh(\tau) \pm \sinh(\tau). \quad (5.40)$$

Esses determinantes são funções regulares do parâmetro β não sendo o valor $\beta = 1/2$ um ponto singular nas expressões (5.38)-(5.39). A partir destes resultados pode-se ilustrar a dinâmica da pureza de cada um dos modos acoplados sob efeito de reservatório. Na figura (5.10) é ilustrado a pureza $\mathcal{P}_1(\tau)$ e $\mathcal{P}_2(\tau)$ na ausência de reservatórios ($\beta = 0$), em ambos os modos considerando inicialmente estados mistos com $\mathcal{P}_k(\tau) < 1$. No caso da amplificação paramétrica nota-se a ausência do processo de transferência de pureza entre os modos tanto na evolução unitária quanto na não unitária (presença dos reservatórios). Isto está explícito na natureza da dependência temporal em τ nos determinantes (5.38)-(5.39) devido a presença de funções hiperbólicas que não são funções periódicas em τ . Estas não são funções periódicas no tempo, diferentemente do que se observa no processo de conversão paramétrica, e independente de β ser nulo ou não, respeitando $\beta < 1/2$, a pureza em ambos os modo tem seu valor sempre decrescido no decorrer do tempo. Este resultado pode ser obtido analiticamente considerando a série de potências dos coeficientes \mathcal{P}_k . A derivada primeira é um valor negativo no instante $t = 0$ e $\tau = 0$, produzindo um decréscimo do valor inicial da pureza dos modos. Este valor é acentuado com a presença do reservatório, independente que quanto se possa intensificar os valores dos parâmetro de compressão r_k dos estados iniciais. Nas figuras (5.10) e (5.11) ilustra-se brevemente o comportamento de casos particulares para a dinâmica

da pureza dos modos acoplados. Ambos os modos, inicialmente em estados Gaussianos mistos com $\mathcal{P}_1(0) > \mathcal{P}_2(0)$ evoluem para valores assintóticos de pureza pequenos; a amplificação paramétrica não protege, em correção de ordem zero, a pureza dos modos tanto na ausência [5] quanto na presença de reservatórios.

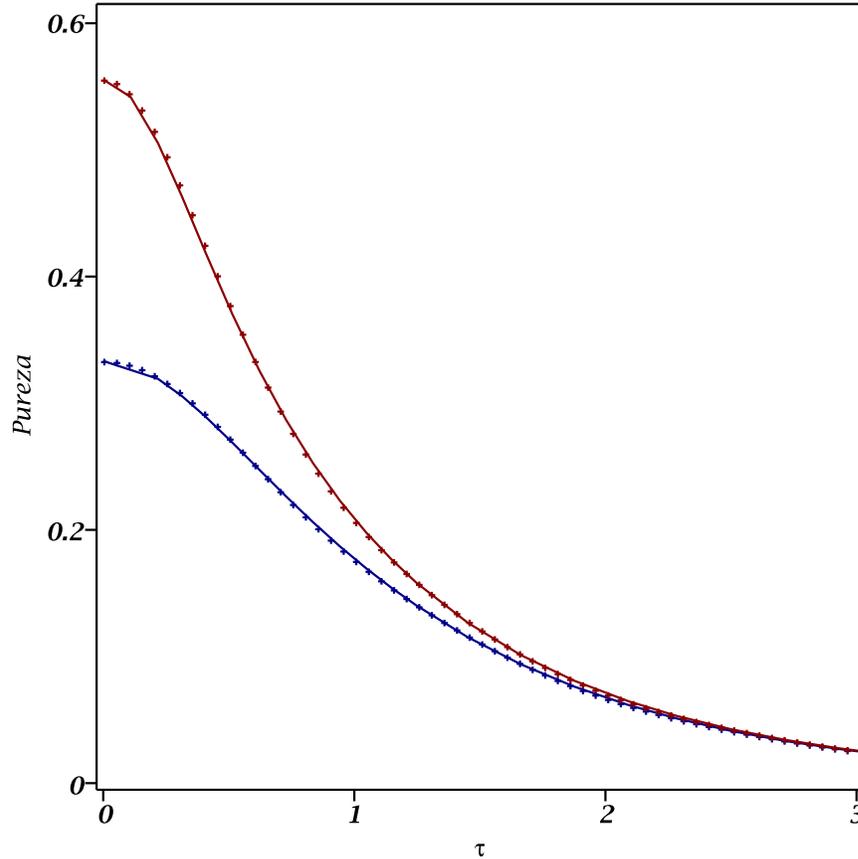


Figura 5.10: Comportamento da pureza $\mathcal{P}_k(\tau)$. A curva azul representa o modo 1 ($\mathcal{P}_1(0)=0,33$) enquanto a linha vermelha o modo 2 ($\mathcal{P}_2(0)=0,55$). Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\beta = 0$, $\phi = 0$, $r_1 = 0$, $r_2 = 1, 1$, $\vartheta_1 = 1, 5$, $\vartheta_2 = 0, 9$.

Na figura (5.11) é ilustrado o comportamento da pureza do modo um $\mathcal{P}_1(\tau)$ para diferentes valores atribuídos ao parâmetro β . As diferentes curvas ilustram comportamentos dinâmicos nos quais o estado do modo um evolui para um estado misto para diferentes valores de intensidade de acoplamento do modo com o reservatório. Quanto mais intenso o valor do parâmetro β mais rapidamente o estado evolui para um estado misto nos instantes imediatos após os modos serem acoplados.

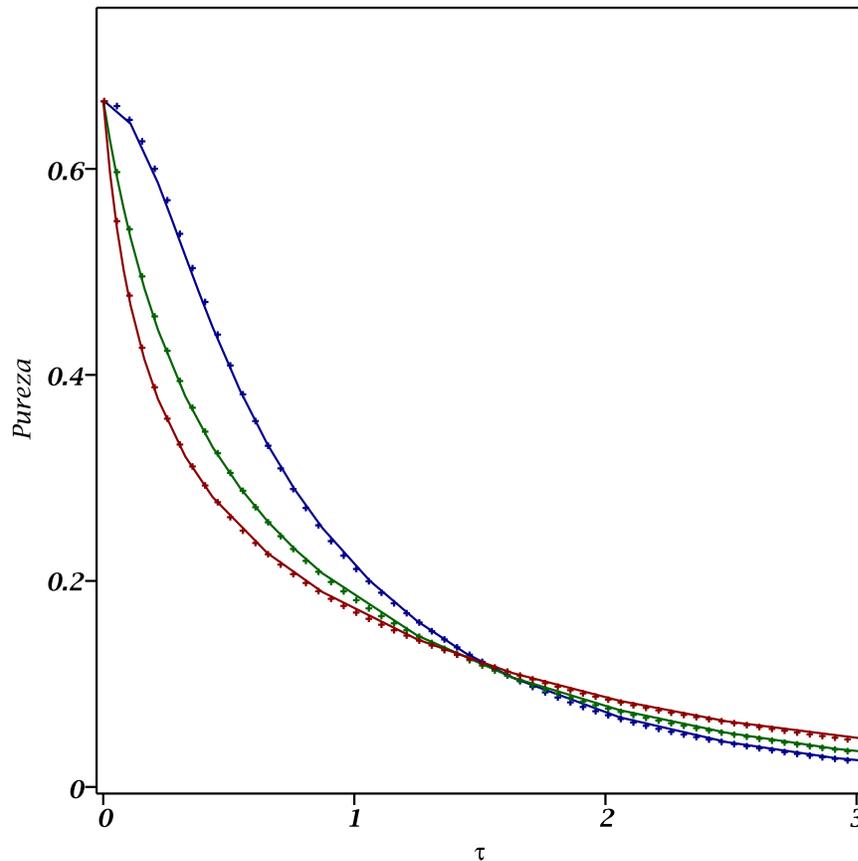


Figura 5.11: Comportamento da pureza $\mathcal{P}_1(\tau)$ para diferentes valores de β . A curva azul representa o caso de $\beta = 0$, para a curva verde, $\beta = 0,1$ e para a curva vermelha, $\beta = 0,2$. Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\phi = 0$, $r_1 = 1$, $r_2 = 0,2$, $\vartheta_1 = 0,75$, $\vartheta_2 = 1,5$ e $\nu = 2$.

Deve-se ter em conta que estes resultados estão limitados às correções de ordem zero no parâmetro ϵ , onde somente termos de acoplamento do tipo contragirantes contribuem de forma efetiva na amplificação paramétrica. As correções de ordem superiores em ϵ levam em conta necessariamente todos os tipos de acoplamento e precisam ser consideradas para que se possa ter uma descrição mais precisa dos efeitos do acoplamento dependente do tempo, o que poderia, ainda no limite do acoplamento fraco, acarretar comportamentos diferentes dos observados na correção de ordem zero. Em ordens superiores de ϵ , as etapas do desenvolvimento do método das escalas múltiplas indicam que há necessariamente uma "ação efetiva" dos termos do tipo RWA e CRWA no Hamiltoniano de interação.

Capítulo 6

Efeito da Dissipação nas Propriedades das Correlações Quânticas

O emaranhamento é uma propriedade existente em sistemas quânticos que desempenha um papel de grande importância nas aplicações da computação quântica e no estudo da teoria da informação quântica [1]. O emaranhamento de sistemas quânticos que pode ser usado para implementar tarefas, as quais, na ausência de emaranhamento, seriam impossíveis de serem realizadas ou ainda de maneira a aumentar a performance de alguma tarefa realizada. Quando dois ou mais subsistemas quânticos interagem entre si durante um determinado intervalo de tempo, o estado final de um dos subsistemas pode depender dos estados finais dos outros subsistemas. Neste sentido, diz-se que os subsistemas estão em um estado total emaranhado. Nos últimos anos, um grande esforço científico foi desenvolvido na compreensão das propriedades físicas do emaranhamento. Um tipo muito importante com aplicações experimentais é o emaranhamento de sistemas de variáveis contínuas [27–29]. Embora ainda não exista uma teoria completa sobre o emaranhamento, muitos avanços têm sido feitos na compreensão dessa estranha propriedade da Mecânica Quântica. Neste capítulo, faz-se uma análise da dinâmica do emaranhamento entre dois modos acoplados sob efeitos da dissipação devido a presença de reservatórios térmicos. A dissipação em sistemas quânticos acoplados implica necessariamente na perda de coerência quântica, processo conhecido por decoerência. Esta perda de coerência afeta as correlações de natureza quântica presentes no sistema o que pode provocar a diminuição dos valores máximos alcançados nas medidas de emaranhamento bem como provocar alterações consideráveis na evolução da dinâmica do emaranhamento, em comparação ao caso livre dos mecanismos de dissipação. O modo como o valor

do emaranhamento entre as partes do sistema se deteriora depende da natureza do acoplamento presente no sistema, da natureza dos estados iniciais e dos parâmetros dos reservatórios atuando com os seus mecanismos dissipativos.

No estudo dos mecanismos envolvidos no processo de emaranhamento entre partes de um sistema quântico, desprovidos de um análogo clássico, surge então a seguinte questão: como identificar a presença de emaranhamento no sistema? Para esta questão pode-se então de forma simples definir o significado do conceito de emaranhamento.

6.1 Definição de Emaranhamento

Na análise da pureza \mathcal{P} dos modos acoplados, tanto na conversão quanto na amplificação paramétrica, há dois tipos de estados que foram abordados, os estados puros e estados mistos. Primeiramente tratando-se de estados puros, pode-se definir emaranhamento para esses estados da seguinte forma. Seja um sistema quântico composto de N subsistemas de maneira que o correspondente espaço de Hilbert é dado por $\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i$, onde \mathcal{H}_i é o espaço de Hilbert de cada subsistema. Se $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ é o estado quântico deste sistema, então ele não corresponde a um estado emaranhado se, e somente se, pode-se escrevê-lo como $|\Psi\rangle = \bigotimes_{i=1}^N |\psi\rangle_i$, onde $|\psi\rangle_i \in \mathcal{H}_i$. Exemplificando este caso, considere um sistema constituído por duas partes, chamado de bipartite, $|\psi\rangle = |\Phi\rangle_A \otimes |\Phi\rangle_B$. Alguns exemplos desses estados não emaranhados são dados na forma:

$$|\psi\rangle = |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B = |10\rangle, \quad (6.1)$$

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_A + |0\rangle_A) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_B - |1\rangle_B), \quad (6.2)$$

Para o caso em que os estados puros estão emaranhados e não podem ser descritos na forma fatorável $|\Psi\rangle = \bigotimes_{i=1}^N |\psi\rangle_i$ tem-se os seguintes exemplos [30]:

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle); \quad |\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle). \quad (6.3)$$

Por outro lado, existem outros tipos de estados, conhecidos como estados mistos e para tais estados a definição de emaranhamento aplicada a estados puros não pode ser considerada. Dessa forma, escreve-se de maneira mais ampla a definição de emaranhamento para o caso de estados mistos. Considere, por exemplo, um sistema quântico composto de dois subsistemas definido no espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, tal que \mathcal{H}_i é o espaço de Hilbert associado a cada subsistema de modo que o estado total do sistema está representado por um operador densidade $\hat{\rho}$. Diz-se que $\hat{\rho}$ corresponde

ao estado de um sistema desemaranhado se, e somente se, $\hat{\rho}$ pode ser escrito, como uma soma de produtos diretos da seguinte forma

$$\hat{\rho} = \sum_j p_j \hat{\rho}_j^A \otimes \hat{\rho}_j^B, \quad (6.4)$$

onde $p_j > 0$, $\sum_j p_j = 1$. Como exemplo de estado misto desemaranhado, tem-se

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|), \quad (6.5)$$

com a forma separável dada por

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0|)_A \otimes (|0\rangle\langle 0|)_B + \frac{1}{2} (|1\rangle\langle 1|)_A \otimes (|1\rangle\langle 1|)_B, \quad (6.6)$$

onde se identifica $p_1 = p_2 = 1/2$, $\hat{\rho}_1^A = \hat{\rho}_1^B = |0\rangle\langle 0|$ e $\hat{\rho}_2^A = \hat{\rho}_2^B = |1\rangle\langle 1|$. De maneira oposta, para o caso de um estado misto emaranhado tem-se como exemplo [31] a forma

$$\hat{\rho} = \frac{1}{3} |00\rangle\langle 00| + \frac{1}{3} |01\rangle\langle 01| + \frac{1}{3} |11\rangle\langle 11| + \frac{1}{4} |11\rangle\langle 00| + \frac{1}{4} |00\rangle\langle 11|. \quad (6.7)$$

Pela expressão (6.4), pode-se ainda estender essa definição para um sistema composto de N subsistemas, de forma a reescrever (6.4) da forma [32]

$$\hat{\rho} = \sum_j p_j \bigotimes_{i=1}^N \hat{\rho}_j^i = \sum_j p_j (\hat{\rho}_j^1 \otimes \hat{\rho}_j^2 \otimes \cdots \otimes \hat{\rho}_j^N), \quad (6.8)$$

onde $p_j > 0$, $\sum_j p_j = 1$.

O emaranhamento pode ser quantificado em sistemas de variáveis discreta e contínua. O sistema em estudo nesta dissertação envolve modos interagentes por meio de acoplamentos descritos pelos processos de conversão e amplificação paramétricas. Torna-se interessante, então, determinar a quantidade de emaranhamento presente em um dado sistema, e estudar de forma qualitativa ou quantitativa a sua evolução temporal para diferentes conjuntos de parâmetros de estados iniciais, considerando a presença ou ausência de reservatórios. Em se tratando de um sistema de variáveis contínuas, considera-se no estudo da dinâmica do emaranhamento a negatividade logarítmica como medida apropriada para este propósito. Outras considerações mais amplas a respeito de medidas de emaranhamento, suas definições e aplicações em sistemas de variáveis contínuas [27, 29] serão deixadas para estudos futuros onde pretende-se abordar a dinâmica de emaranhamento em sistemas de variáveis contínuas sujeitos a excitações paramétricas.

6.2 Emaranhamento na Conversão e Amplificação Paramétrica

O emaranhamento pode ser determinado pela matriz das covariâncias para um sistema bipartite. Entretanto, além da caracterização e quantificação de emaranhamento de variáveis contínuas em dois modos, multi-modos de estados Gaussianos são de grande assunto no campo de informação quântica e também como a quantidade de emaranhamento contido num certo estado, está diretamente ligada a quantidade para transmissão de informação e comunicação, como tarefas de teletransporte [29]. A medida de emaranhamento para estados Gaussianos considerados na amplificação e conversão paramétrica pode ser determinada por meio da negatividade logarítmica denotada por $E_{\mathcal{N}}$. É necessário então entender como se determina o valor da medida de emaranhamento por meio da negatividade para um sistema quântico bipartido. Representando $\mathcal{N}(\hat{\rho})$ como a negatividade de um estado quântico $\hat{\rho}$, suponha por exemplo um sistema geral constituído de duas partes (A e B) descrito por $\hat{\rho}$ pertencente ao espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Denota-se $\hat{\rho}^{\text{TA}}$ resultado da transposição parcial do operador $\hat{\rho}$ em relação ao subsistema A. Considerando $\{|i_A\rangle\}$ e $\{|j_B\rangle\}$ bases do espaço de Hilbert \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , respectivamente, pode-se escrever então que

$$\langle i_A, j_B | \hat{\rho}^{\text{TA}} | k_A, l_B \rangle = \langle k_A, j_B | \hat{\rho} | i_A, l_B \rangle, \quad (6.9)$$

onde adota-se a notação $|i_A, j_B\rangle = |i_A\rangle \otimes |j_B\rangle$. Uma vez que $\hat{\rho}$ representa um estado físico, isto é, $\hat{\rho}$ é positivo semi-definido, ou seja, seus autovalores são positivos, $\hat{\rho}$ deve ser hermitiano ($\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$), e o traço de $\hat{\rho}$ deve ser igual a 1 ($\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$). Considerando um operador \hat{A} qualquer definido no espaço de Hilbert, sua norma é definida por $\|\hat{A}\|_1 = \text{Tr}(\sqrt{\hat{A}^\dagger \hat{A}})$. Então, a norma de $\hat{\rho}$ torna-se $\|\hat{\rho}\|_1 = \text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$, que é a soma dos autovalores de $\hat{\rho}$; sendo $\hat{\rho}$ um estado físico normalizado de um sistema quântico, essa soma precisa valer 1. Quando efetua-se a transposição parcial no subsistema A, obtém-se o operador $\hat{\rho}^{\text{TA}}$ (ou sua correspondente matriz) e ao calcular seus autovalores, pode ocorrer de alguns autovalores assumirem valores negativos. Quando isso acontece é o indicativo de que o sistema encontra-se em um estado emaranhado [33]. Dessa forma a negatividade é definida por [34] como

$$\mathcal{N}(\hat{\rho}) = \frac{\|\hat{\rho}^{\text{TA}}\|_1 - 1}{2}. \quad (6.10)$$

Este resultado representa ao valor absoluto da soma dos autovalores negativos de $\hat{\rho}^{\text{TA}}$ ($|\sum_i \lambda_i^-|$). Para verificar se o sistema está ou não em um estado total emaranhado, basta checar se há autovalores negativos. Note que para estados separáveis, ou seja, desemaranhados, deve-se ter $\|\hat{\rho}^{\text{TA}}\|_1 = 1$

e, portanto, $\mathcal{N}(\hat{\rho}) = 0$. Desse modo, esta medida quantifica o emaranhamento pelo quanto o operador $\hat{\rho}^{\text{TA}}$ deixa de representar um sistema físico ao conter elementos negativos na matriz correspondente a $\hat{\rho}^{\text{TA}}$. Outro cálculo que pode ser realizado para quantificar emaranhamento é a negatividade logarítmica cuja medida é definida em [29], dada na forma

$$E_{\mathcal{N}} \equiv \log \|\hat{\rho}^{\text{TA}}\|_1. \quad (6.11)$$

Como as análises do sistema em estudo são realizadas para estados iniciais Gaussianos em um sistema de Hamiltoniano quadrático, pode-se tratar o problema da conversão e amplificação paramétricas, a partir de formas funcionais bem definidas sobre os elementos da matriz das covariâncias simetrizadas \mathcal{Q} . A relação dos elementos q_{ij} com os elementos da matriz $M = \text{Tr}(\hat{\rho}_s \hat{z}_m \hat{z}_n)$, obtidos em correção de ordem zero na conversão e amplificação paramétricas pode ser facilmente determinada pela relação (5.27). Com isto, pode-se determinar a negatividade logarítmica a partir dos elementos da matriz de covariâncias \mathcal{Q} . Sendo $\tilde{\mathcal{Q}}$ a matriz que representa a transposta parcial de \mathcal{Q} , a negatividade logarítmica é obtida por [35]

$$E_{\mathcal{N}}(\tau) = \sum_{i=1}^2 \max\{0, -\log_2(2\tilde{\nu}_i(\tau))\}, \quad (6.12)$$

onde $\tilde{\nu}_i(\tau)$ são os autovalores simpléticos da matriz $\tilde{\mathcal{Q}}$. A matriz das covariâncias carrega toda a informação a respeito da dinâmica do sistema e conseqüentemente a dinâmica do emaranhamento contido nos modos bosônicos acoplados. Para o sistema em estudo, a matriz \mathcal{Q} é de ordem 4, descrito por bloco de matrizes \mathcal{Q}_{ij} de ordem 2. Explicitamente, matriz \mathcal{Q} tem a sua forma geral dada por

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{11} & \mathcal{Q}_{12} \\ \mathcal{Q}_{21} & \mathcal{Q}_{22} \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

com $\mathcal{Q}_{12} = \mathcal{Q}_{21}^{\text{T}}$. Note que os elementos dos blocos fora da diagonal são os elementos que efetivamente contribuem para determinar a existência de correlações entre os modos interagentes. Os autovalores de \mathcal{Q} são escritos da forma [29, 36]

$$2\nu_{\pm}^2(\tau) = \Delta(\mathcal{Q}) \pm \sqrt{\Delta^2(\mathcal{Q}) - 4\det(\mathcal{Q})}, \quad (6.14)$$

onde $\Delta(\mathcal{Q}) = \det(\mathcal{Q}_{11}) + \det(\mathcal{Q}_{22}) + 2\det(\mathcal{Q}_{12})$. Quando se considera a operação de transposição parcial, os autovalores da matriz $\tilde{\mathcal{Q}}$ são encontrados trocando-se o sinal do $\det(\mathcal{Q}_{12})$, resultando em

$$\tilde{\nu}_{\pm}(\tau) = \sqrt{\frac{\Delta(\tilde{\mathcal{Q}}) \pm \sqrt{\Delta^2(\tilde{\mathcal{Q}}) - 4\det(\mathcal{Q})}}{2}}, \quad (6.15)$$

com $\Delta(\tilde{Q}) = \det(Q_{11}) + \det(Q_{22}) - 2 \det(Q_{12})$. Na conversão e amplificação paramétricas, os termos que constituem os autovalores dado em (6.15) são determinados a partir dos elementos da matriz das covariâncias simetrizadas $Q^{(c,a)}$. Na conversão paramétrica, os determinantes de $Q_{11}^{(c)}$ e $Q_{22}^{(c)}$ foram obtidos anteriormente em (5.35) e (5.36), respectivamente. Além deles, para se obter $\Delta(\tilde{Q}^{(c)})$, é preciso determinar $\det(Q_{12}^{(c)})$. Dessa modo, após operações algébricas adequadas não descritas de modo explícito nesta dissertação, as formas analíticas dos termos $\det(Q_{12}^{(c)})$ e $\Delta(\tilde{Q}^{(c)})$ são dadas por

$$\det(Q_{12}^{(c)}) = \frac{1}{4} \text{sen}^2(\tau) e^{-4\beta\tau} [(\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2) - 2(\cos(2\phi)V_1V_2 + R_1R_2)], \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \Delta(\tilde{Q}^{(c)}) = e^{-4\beta\tau} \left\{ \cos^2(\tau)(\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2) - (1 + 2\nu)(1 - e^{2\beta\tau})(R_1 + R_2) \right. \\ \left. + 2\text{sen}^2(\tau)(\cos(2\phi)V_1V_2 + R_1R_2) + \frac{(1 + 2\nu)^2(1 - e^{2\beta\tau})^2}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Note que no instante inicial $\tau = 0$ o termo (6.16) iguala-se a zero, devido ao fator multiplicativo $\text{sen}^2(\tau)$, o que corresponde a condição inicial na qual se considera o estado inicial Gaussiano separável. Além disso, a presença do fator multiplicativo $\exp(-4\beta\tau)$ indica explicitamente o enfraquecimento das correlações quânticas existentes entre os modos interagentes no decorrer do tempo, o que implica no decréscimo do valor da medida de emaranhamento entre os modos, que assintoticamente deve ir a zero. Na sequência, as formas analíticas para os autovalores $\tilde{\nu}_{\pm}(\tau)$ podem ser determinadas a partir dos resultados em (6.17) e do determinante $\det(Q^{(c)})$, obtido na forma

$$\begin{aligned} \det(Q^{(c)}) = e^{-8\beta\tau} \left\{ \vartheta_1^2\vartheta_2^2 - (1 - e^{2\beta\tau}) [\vartheta_1^2R_2 + R_1\vartheta_2^2] (1 + 2\nu) + \frac{(1 + 2\nu)^4(1 - e^{2\beta\tau})^4}{16} + \right. \\ \left. \frac{(1 + 2\nu)^2(1 - e^{2\beta\tau})^2(\vartheta_2^2 + 4R_1R_2 + \vartheta_1^2)}{4} - \frac{(1 + 2\nu)^3(1 - e^{2\beta\tau})^3(R_1 + R_2)}{4} \right\}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

De maneira similar, para a amplificação paramétrica, as expressões analíticas para os autovalores em (6.15) são determinados a partir de $\Delta(\tilde{Q}^{(a)})$ e $\det(Q^{(a)})$. Para o fator $\Delta(\tilde{Q}^{(a)})$, os determinantes de $Q_{11}^{(a)}$ e $Q_{22}^{(a)}$ são dados em (5.38) e (5.39), respectivamente, enquanto para $\det(Q_{12}^{(a)})$ tem-se

$$\begin{aligned} \det(Q_{12}^{(a)}) = -\frac{1}{4} \text{senh}^2(\tau) e^{-4\beta\tau} (\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + 2(\cos(2\phi)V_1V_2 + R_1R_2)) + (1 + 2\nu)(R_1 + R_2) \text{senh}(\tau) \times \\ \frac{(-1 + e^{-2\beta\tau}\mathcal{G}_+(\tau))\beta e^{-2\beta\tau}}{4\beta^2 - 1} - \frac{\beta^2(1 + 2\nu)^2(-1 + e^{-2\beta\tau}\mathcal{G}_+(\tau))^2}{(4\beta^2 - 1)^2}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Após simplificações adequadas, obtém-se o fator $\Delta(\tilde{Q}^{(a)})$ da amplificação paramétrica na forma

$$\begin{aligned} \Delta(\tilde{Q}^{(a)}) = e^{-4\beta\tau} \cosh^2(\tau) (\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2) + 2e^{-4\beta\tau} \text{senh}^2(\tau) (\cos(2\phi)V_1V_2 + R_1R_2) - 2\beta e^{-2\beta\tau} (1 + 2\nu) \times \\ \frac{[e^{-2\beta\tau} \text{senh}(\tau)\mathcal{G}_+(\tau) + \mathcal{F}_+(\tau) (e^{-2\beta\tau} \cosh(\tau) - 1)] (R_1 + R_2)}{4\beta^2 - 1} + 4\beta^2 e^{-2\beta\tau} (1 + 2\nu)^2 \times \\ \frac{(2\beta\mathcal{F}_+(\tau) + \mathcal{G}_+(\tau)) (e^{-2\beta\tau} \cosh(\tau) - 1)}{(4\beta^2 - 1)^2} + \frac{2\beta^2(4\beta^2 + 1)(1 - e^{-4\beta\tau})(1 + 2\nu)^2}{(4\beta^2 - 1)^2}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Portanto, as formas analíticas dos autovalores $\tilde{\nu}_{\pm}(\tau)$ são determinadas a partir de $\Delta(\tilde{Q}^{(a)})$ e da expressão para o determinante $\det(\mathcal{Q}^{(a)})$, dado por

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{Q}^{(a)}) = & e^{-8\beta\tau} \vartheta_1^2 \vartheta_2^2 + \frac{4(1+2\nu)^2 e^{-4\beta\tau} \beta^2 [(e^{-2\beta\tau} - \cosh(\tau))^2 - \sinh^2(\tau)] (\vartheta_1^2 + R_1 R_2 + \vartheta_2^2)}{(4\beta^2 - 1)} + \\ & \frac{2\beta e^{-6\beta\tau} (-2\beta e^{-2\beta\tau} + \mathcal{F}_-(\tau)) (1+2\nu) (\vartheta_1^2 R_2 + \vartheta_2^2 R_1)}{(4\beta^2 - 1)} + (1+2\nu)^2 e^{-4\beta\tau} \beta^2 (\mathcal{G}_-(\tau) + e^{-2\beta\tau})^2 \\ & \times \frac{(\vartheta_1^2 + 2R_1 R_2 + 2\cos(2\phi) V_1 V_2 + \vartheta_2^2)}{(4\beta^2 - 1)^2} - \frac{(1+2\nu)^4 [(e^{-2\beta\tau} - \cosh(\tau))^2 - \sinh^2(\tau)]^2 \beta^4}{(4\beta^2 - 1)^4} + \\ & \frac{2e^{-2\beta\tau} [(e^{-2\beta\tau} - \cosh(\tau))^2 - \sinh^2(\tau)] \beta^3 (-2e^{-2\beta\tau} \beta + \mathcal{F}_-(\tau)) (R_1 + R_2) (1+2\nu)^3}{(4\beta^2 - 1)^2}, \quad (6.21) \end{aligned}$$

onde para a amplificação paramétrica foram aplicadas as seguintes definições

$$\begin{aligned} V_k &= -\vartheta_k \sinh(2r_k), \quad \tau = \epsilon \rho t, \quad \beta = \gamma/\lambda, \quad R_k = \vartheta_k \cosh(2r_k), \\ \mathcal{F}_{\pm}(\tau) &= 2\beta \cosh(\tau) \pm \sinh(\tau), \quad \mathcal{G}_{\pm}(\tau) = 2\beta \sinh(\tau) \pm \cosh(\tau). \end{aligned} \quad (6.22)$$

A partir dos resultados analíticos anteriores pode-se descrever do ponto de vista qualitativo e quantitativo a dinâmica de emaranhamento de modos bosônicos acoplados na condição de conversão e amplificação paramétricas considerando diferentes configurações de estados iniciais Gaussianos (ϑ_k, r_k) e valores de parâmetros do reservatório β, ν . Em adição, no caso da conversão paramétrica pode-se comparar os resultados referentes a dinâmica de emaranhamento com os obtidos no limite dos modos acoplados ressonantes $\omega_1 \rightarrow \omega_2$ e $\tau \rightarrow 2\tau$ quando o acoplamento entre os modos independe do tempo. A figura (6.1) mostra o comportamento da dinâmica do emaranhamento para o caso da conversão paramétrica e acoplamento independente quando em ambos os casos há ausência de dissipação ($\beta = 0$). A curva azul corresponde ao emaranhamento da conversão paramétrica com o modo *um* inicialmente preparado em um estado misto $r_1 = 0$ e $\mathcal{S}_1(0) = 2$ e o modo *dois* em um estado misto comprimido $\mathcal{S}_2(0) = 0,074$. A curva vermelha refere-se ao mesmo conjunto de parâmetros iniciais, porém na condição ressonante ($\omega_1 = \omega_2$) com acoplamento independente do tempo. No caso de acoplamento constante, observa-se a ocorrência de dois instantes de valores máximos de emaranhamento no mesmo intervalo de tempo $\Delta\tau \approx \pi$ no qual o sistema permanece a maior parte do tempo em um estado emaranhado; os valores máximos da amplitude de emaranhamento para ambos os casos são iguais. Note que no intervalo de tempo $\Delta\tau \approx \pi$ (curva azul) o sistema permanece em um estado emaranhando; o valor do emaranhamento é zero nas vizinhanças do ponto $\tau = \pi$ e pode-se verificar numericamente que esta largura é maior quanto menor for o valor dos coeficientes r_k dos estados iniciais - a compressão do estado inicial favorece o emaranhamento na conversão paramétrica. No caso de estados coerentes o emaranhamento tem seu valor

zero em todo o intervalo $\Delta\tau = \pi$. Este comportamento é recorrente no decorrer da evolução temporal do sistema na situação de ausência dos reservatórios. Neste caso a evolução do sistema é unitária e além disso, a dinâmica de emaranhamento na conversão paramétrica é equivalente a de um sistema ressonante com acoplamento constante λ_0 com valor igual ao dobro do valor máximo de $\lambda(t) = \lambda \cos[(\omega_1 - \omega_2)t]$.

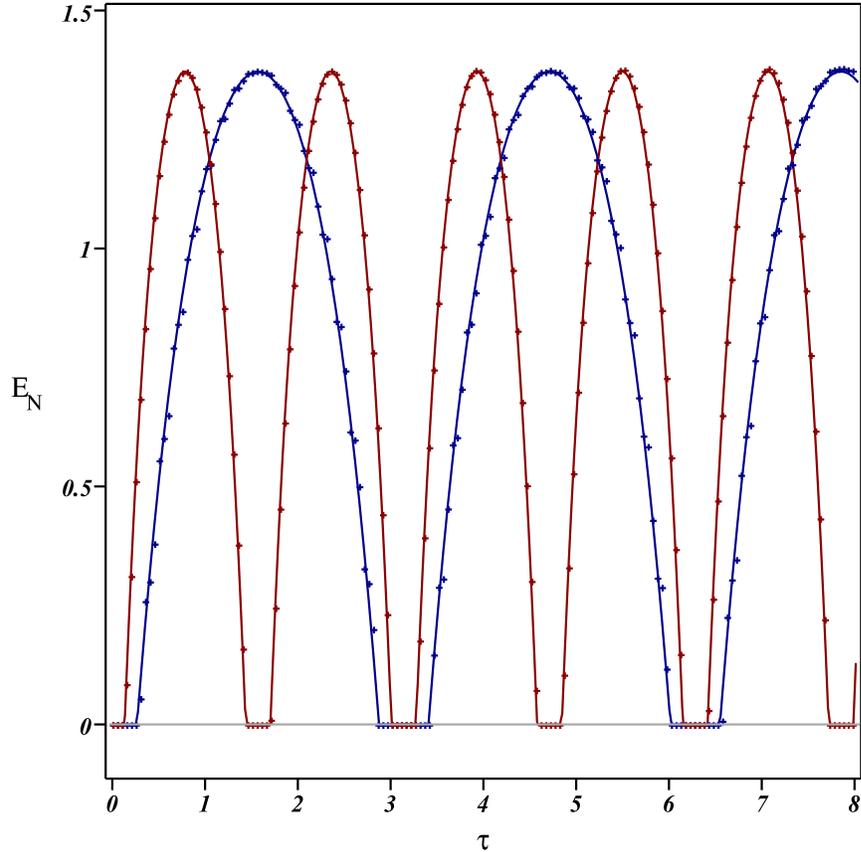


Figura 6.1: Comportamento da negatividade logarítmica $E_N(\tau)$ na ausência de dissipação ($\beta = 0$). A curva azul representa a conversão paramétrica enquanto a linha vermelha representa o caso ressonante com acoplamento constante entre os modos. Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\phi = 0$, $r_1 = 0$, $r_2 = 1, 5$, $\vartheta_1 = 1$, $\vartheta_2 = 0, 75$.

A figura (6.2) ilustra o gráfico da negatividade logarítmica para os casos da conversão paramétrica e acoplamento constante entre os modos. Considerou-se os efeitos de dissipação ($\beta \neq 0$) e com temperatura dos reservatórios sendo iguais e diferentes de zero determinada pelo número médio de fótons ν . Na presença dos reservatórios a amplitude máxima de valor de emaranhamento em ambos os casos diminui no decorrer da evolução temporal do sistema, ocorrendo um decréscimo monótono no decorrer do tempo. Quanto maiores os valores de β e da temperatura dos

reservatórios ν , mais rapidamente a amplitude do emaranhamento diminui tendendo ao valor zero. Além disso, no caso de acoplamento constante entre os modos, a condição de estados emaranhados ocorre duas vezes mais do que quando se considera a conversão paramétrica.

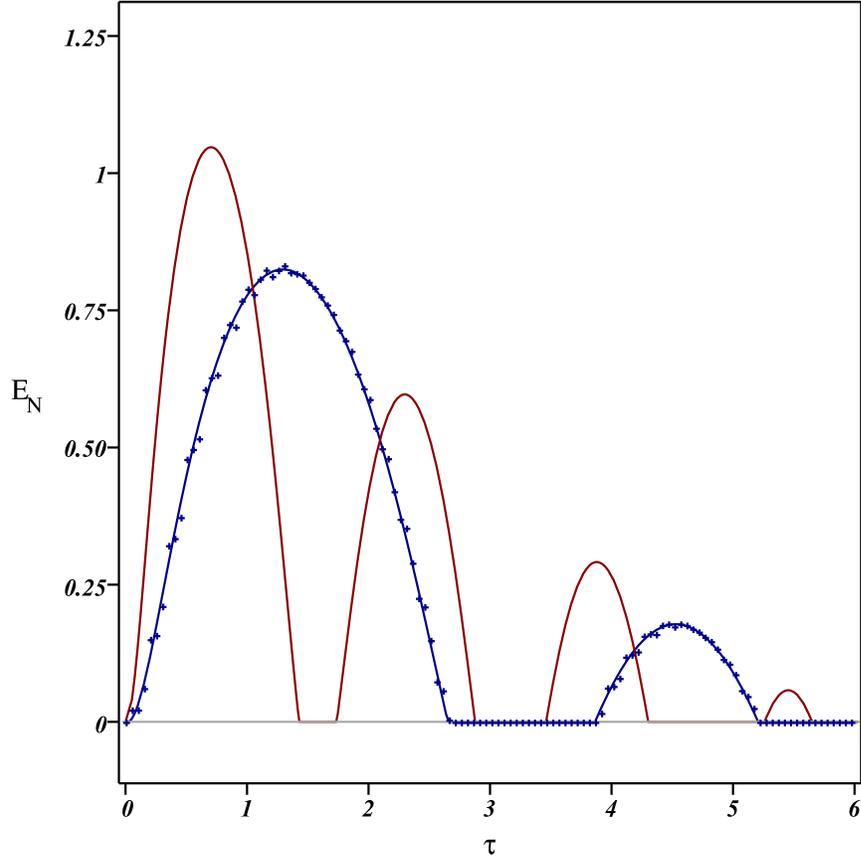


Figura 6.2: Comportamento da negatividade logarítmica $E_N(\tau)$ na presença de dissipação ($\beta \neq 0$). A curva azul representa a conversão paramétrica enquanto a linha vermelha representa o caso ressonante com acoplamento constante entre os modos. Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\beta = 0,01$, $\nu = 2$, $\phi = 0$, $r_1 = 0$, $r_2 = 1,5$, $\vartheta_1 = 0,5$, $\vartheta_2 = 1,5$.

Este fato tem uma implicação interessante nos resultados referentes a temperaturas críticas de emaranhamento descritos em [5] no caso de um acoplamento independente do tempo e com estados iniciais Gaussianos com $\vartheta_1 \approx \vartheta_2 \gg 1$. Naquele modelo determina-se um valor crítico da temperatura do reservatório T_c expressa em termos do número médio de fótons ν_c , acima da qual a transição para estado emaranhado no instante τ é impossível para qualquer valor dos parâmetros de compressão de quadratura r_k , fixos os valores de β : determina-se um *limite absoluto* dos valores admissíveis do número médio de fótons do reservatório térmico, que permite o emaranhamento pelo menos para algum estado inicial fatorado (altamente comprimido). O emaranhamento *nunca*

é possível (para estados iniciais fatorados) para o dado valor de β , se $\nu > \nu_0(\beta)$, com

$$\nu_0(\beta) = \frac{\sqrt{2 + \beta^2} - \beta}{4\beta} \simeq \frac{0,35}{\beta}. \quad (6.23)$$

Resultado similar também pode ser obtido no caso da conversão paramétrica, a partir de modificações nos valores obtidos em [5]. A temperatura crítica de emaranhamento da conversão paramétrica é determinada de forma imediata aplicando-se transformações de escala no parâmetro de acoplamento de reservatório β e na escala de tempo τ correspondentes ao sistema com acoplamento constante. Então, substituindo-se $\beta \rightarrow 2\beta$ e $\tau \rightarrow \tau/2$ resulta em uma temperatura crítica da conversão paramétrica na forma

$$\nu_0^{(c)}(\beta) = \frac{1}{2}\nu_0(\beta) \quad (6.24)$$

tendo seu valor sido reduzido a metade do valor anterior. Na figura (6.3), foi construído o gráfico da negatividade logarítmica para diferentes valores de compressão do modo um (r_1) na conversão paramétrica, fixando os valores de outros parâmetros do sistema. De acordo com curva verde ($r_1 = 1,5$) (maior valor de compressão dos mostrados na figura) o emaranhamento máximo alcançado assume um maior valor; quanto maior a compressão r_1 maior será o valor de emaranhamento máximo atingido. Porém, na presença de reservatório, esse máximo alcançado diminui com o passar do tempo τ . Além disso, para valores maiores de compressão r_1 , o emaranhamento dos modos ocorre em um intervalo de tempo maior do que comparado com a curva laranja por exemplo ($r_1 = 0$), que possui menor compressão do modo *um*.

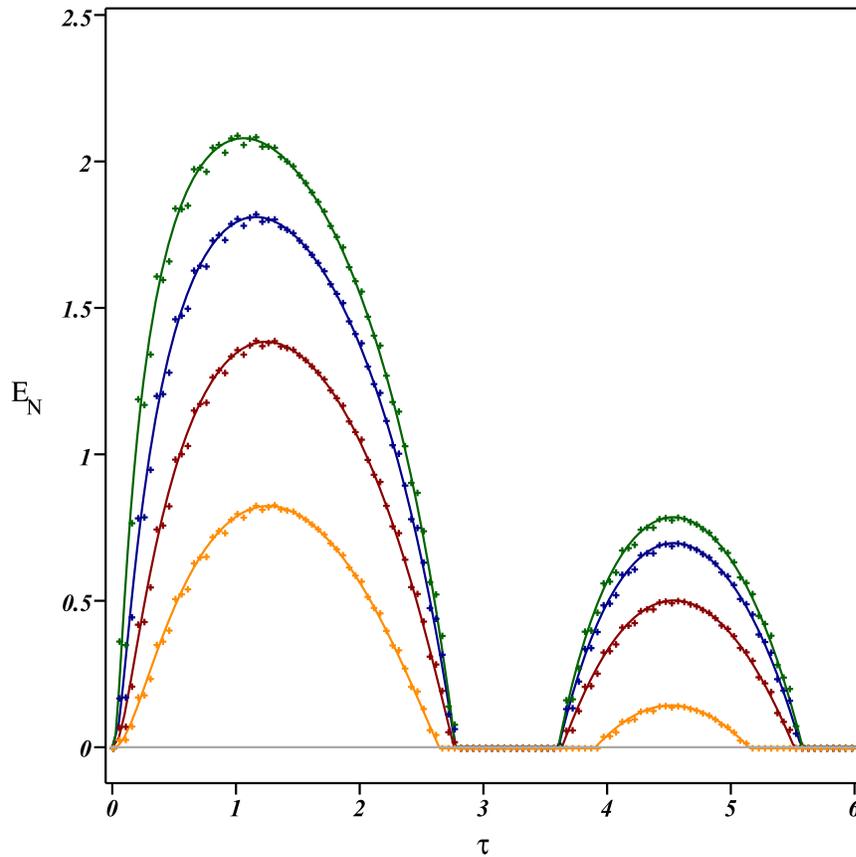


Figura 6.3: Comportamento da negatividade logarítmica $E_{\mathcal{N}}(\tau)$ para diferentes valores de r_1 . A curva verde representa $r_1 = 1,5$, enquanto a curva azul $r_1 = 1,0$, a curva vermelha $r_1 = 0,5$ e a curva laranja $r_1 = 0$. Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\beta = 0,02$, $\nu = 1$, $\phi = 0$, $r_2 = 1,5$, $\vartheta_1 = 0,5$, $\vartheta_2 = 1,3$.

Na figura (6.4), foi construído o gráfico da negatividade logarítmica para diferentes valores de temperatura dos reservatórios associados a variável ν . A medida que se aumenta a temperatura dos reservatórios, a amplitude máxima de emaranhamento diminui para os mesmos valores dos parâmetros iniciais aplicados. Pela curva verde, considera-se os reservatórios em temperatura nula, e o emaranhamento sobrevive de forma periódica por um tempo superior ao das demais curvas, como por exemplo ao da vermelha na qual $\nu = 2$.

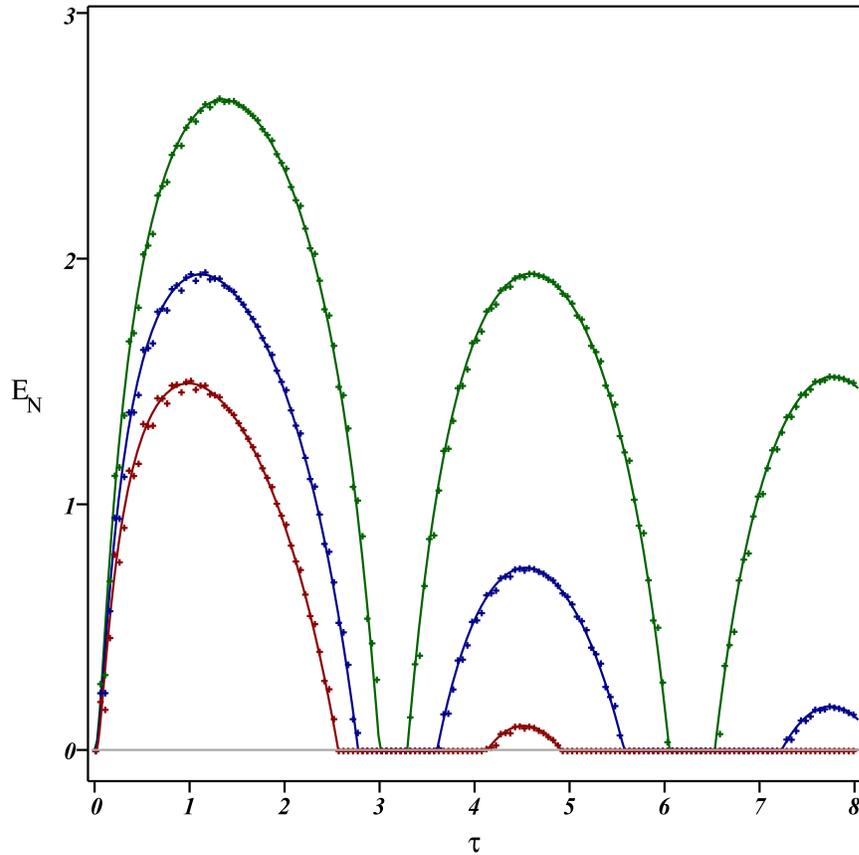


Figura 6.4: Comportamento da negatividade logarítmica $E_N(\tau)$ para diferentes valores de ν . A curva verde representa $\nu = 0$, enquanto a curva azul $\nu = 1$ e a curva vermelha $\nu = 2$. Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\beta = 0,02$, $\phi = 0$, $r_1 = 1,2$, $r_2 = 1,5$, $\vartheta_1 = 0,5$, $\vartheta_2 = 1,3$.

No caso da amplificação paramétrica nota-se uma considerável diferença na dinâmica de emaranhamento em relação aquela descrita na conversão paramétrica. Não há possibilidade alguma do sistema partindo de um estado inicialmente desemaranhado, depois de assumir estados com emaranhamento não nulo, vir a tornar-se em condição similar à descrita na conversão paramétrica (em correção de ordem zero). A ilustração deste fato pode ser vista na figura (6.5) onde tem-se o gráfico da negatividade logarítmica para diferentes valores de compressão r_1 do modo *um* em um estado inicial puro ($\vartheta_1 = 1/2$), considerando um estado inicial misto comprimido para o modo *dois* ($r_2 = 1,5$, $\vartheta_2 = 1,3 > 1/2$). Na conversão paramétrica o valor do emaranhamento varia no tempo de forma periódica, diminuindo o seu valor máximo devido a presença de reservatório ao passo que na amplificação paramétrica não se observa um comportamento periódico. Na ausência da dissipação o valor do emaranhamento não é limitado superiormente enquanto que na presença da dissipação tende a um valor assintótico, determinado apenas pelas propriedades dos reservatórios

β e ν , na forma

$$\tilde{\nu}_-(\tau \gg 1) \rightarrow \frac{2\beta(2\nu + 1)}{2\beta + 1} \quad (6.25)$$

que implicam para negatividade logarítmica o valor

$$E_{\mathcal{N}}(\tau \gg 1) = \max \left\{ 0, -\log_2 \left(\frac{2\beta(2\nu + 1)}{2\beta + 1} \right) \right\}. \quad (6.26)$$

É importante ressaltar que os resultados analíticos obtidos são limitados as correções de ordem zero, de modo que esses resultados são válidos com boa precisão somente no limite de acoplamentos fracos, tanto entre os modos como dos modos com seus respectivos reservatórios. A partir do resultado (6.26) observa-se que existe um valor crítico de temperatura de reservatório ν_c^a dado por

$$\nu_c^a(\beta) = \frac{1}{4\beta}. \quad (6.27)$$

Considerando um valor fixo de β , para valores de temperatura de reservatório ν maiores que $\nu_c^a(\beta)$ não há possibilidade de emaranhamento dos modos acoplados para quaisquer valores de parâmetros de estado iniciais. Para valores assintóticos de emaranhamento não nulos, quanto maiores os valores de r_k dos estados iniciais, o emaranhamento tende ao valor assintótico a uma taxa maior nos instantes iniciais da dinâmica do sistema. O sistema percorre estados de maior valor de emaranhamento, conforme a curva verde com $r_1 = 1,5$: antes de atingir o estado de emaranhamento assintótico o sistema “evoluiu” ocupando estados de maiores valor de emaranhamento.

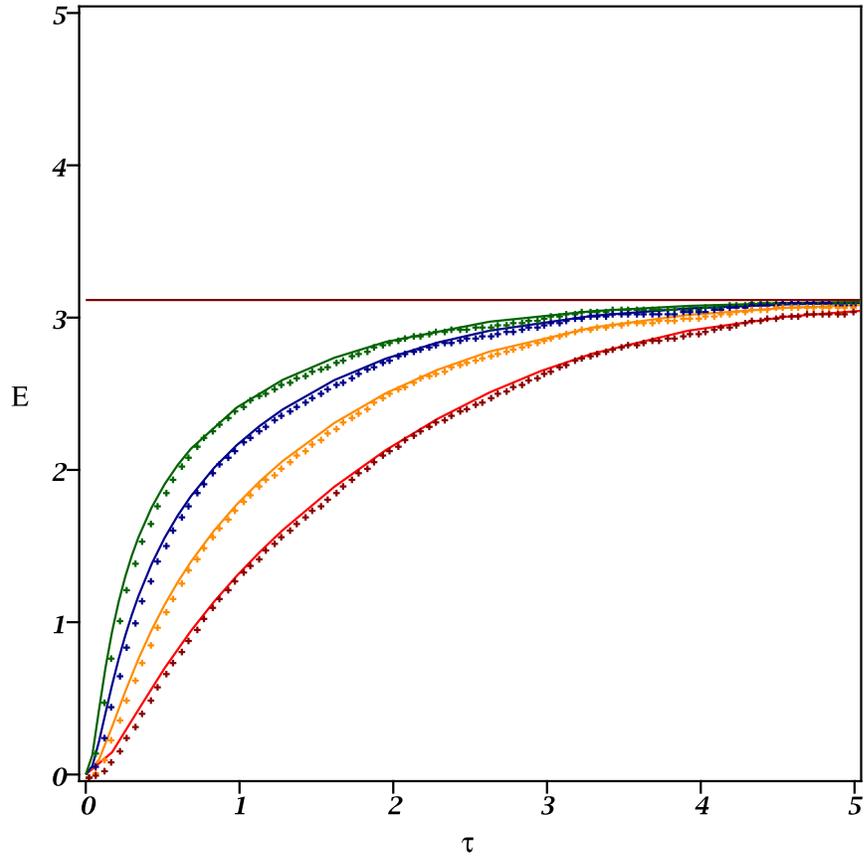


Figura 6.5: Comportamento da negatividade logarítmica $E_N(\tau)$ para diferentes valores de r_1 . A curva verde representa $r_1 = 1,5$, enquanto a curva azul $r_1 = 1,0$, a curva laranja $r_1 = 0,5$ e a curva vermelha $r_1 = 0$. Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\beta = 0,02$, $\nu = 1$, $\phi = 0$, $r_2 = 1,5$, $\vartheta_1 = 0,5$, $\vartheta_2 = 1,3$.

Isso é um fato esperado, uma vez que estados iniciais com grandes valores r_k favorecem os valores maiores para o emaranhamento, embora o valor assintótico seja o mesmo, independente do valor de parâmetros de estado inicial. Em correção de ordem zero para amplificação paramétrica, regula-se a quantidade de emaranhamento no sistema ajustando-se os valores de parâmetros de reservatório. Na figura (6.6) é construído o gráfico da negatividade logarítmica para diferentes valores de temperaturas dos reservatórios definidos pelo valor do número médio de fótons ν . Quanto maior o valor da temperatura do reservatório menor o valor da medida de emaranhamento assintótico presente no sistema conforme previsto pelo resultado da equação (6.26).

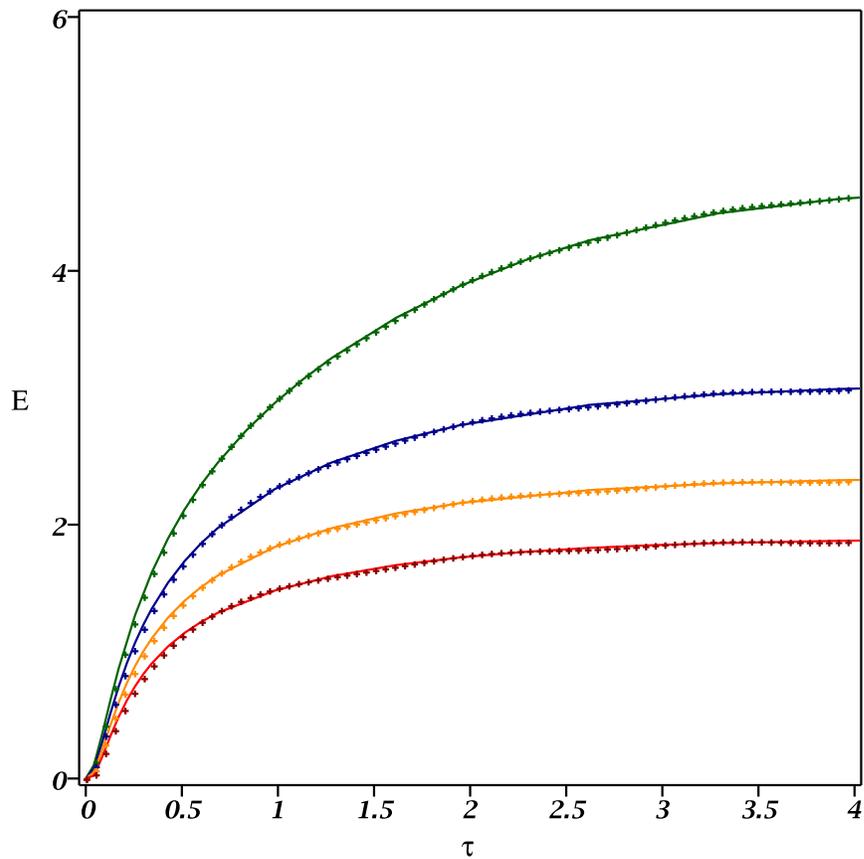


Figura 6.6: Comportamento da negatividade logarítmica $E_N(\tau)$ para diferentes valores de ν . A curva verde representa $\nu = 0$, enquanto a curva azul $\nu = 1$, a curva laranja $\nu = 2$ e a curva vermelha $\nu = 3$. Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\beta = 0,02$, $\phi = 0$, $r_1 = 1,2$, $r_2 = 1,5$, $\vartheta_1 = 0,5$, $\vartheta_2 = 1,3$.

Na figura (6.7) é construído o gráfico da negatividade logarítmica para valores distintos de β . Nota-se claramente que quanto menor o valor de β , menos pronunciado são os efeitos dos reservatórios em cada um dos modos, maior é o valor de emaranhamento “assintótico” atingido para um dado instante de tempo τ longo, porém finito.

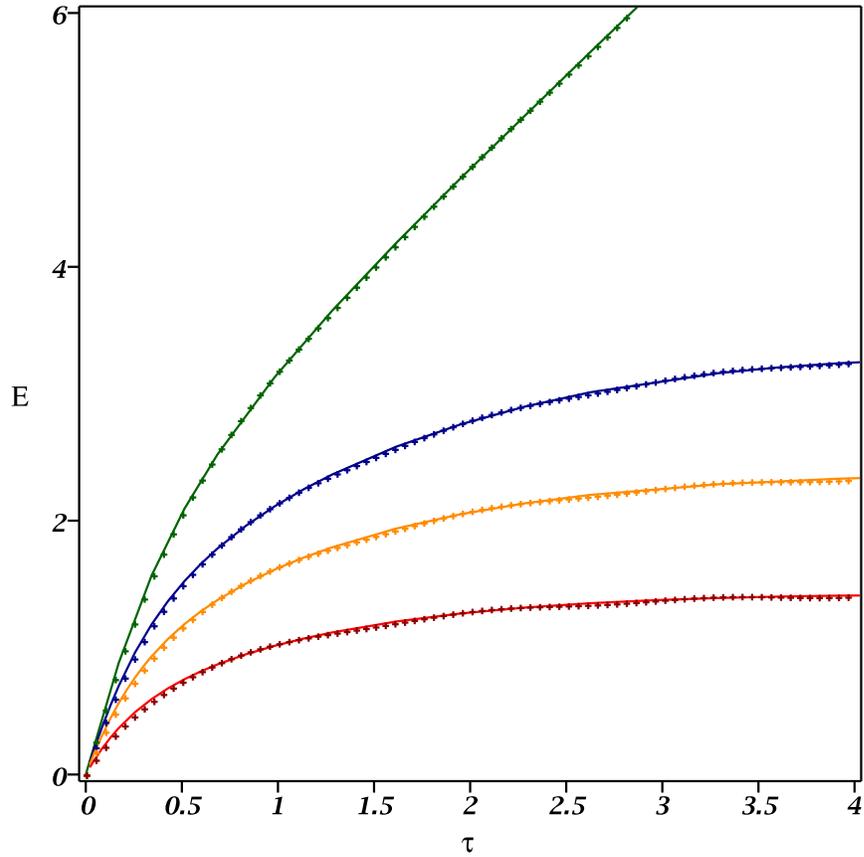


Figura 6.7: Comportamento da negatividade logarítmica $E_{\mathcal{N}}(\tau)$ para diferentes valores de β . A curva verde representa $\beta = 0$, enquanto a curva azul $\beta = 0,01$, a curva laranja $\beta = 0,02$ e a curva vermelha $\beta = 0,04$. Os pontos representam as soluções numéricas. As curvas são construídas com $\nu = 2$, $\phi = 0$, $r_1 = 1,5$, $r_2 = 0,5$, $\vartheta_1 = 0,5$, $\vartheta_2 = 0,5$.

Resultados mais gerais para a dinâmica de emaranhamento assintótico no caso da amplificação paramétrica poderiam ser obtidos considerando-se diferentes valores de intensidades de acoplamentos de cada um dos modos com seus respectivos reservatórios, $\beta_1 \neq \beta_2$. Resultados preliminares para as soluções de Matriz $M^{(a)}$ indicam a existência de um máximo local de emaranhamento antes de se atingir o valor assintótico que parece depender um balanço entre os valores de β_1 e β_2 . Estes resultados ainda não são conclusivos e desenvolvimentos analíticos estão sendo concluídos.

Capítulo 7

Conclusões e Perspectivas Futuras

Neste trabalho foi considerado um sistema composto por dois modos bosônicos do campo eletromagnético com frequências distintas, em contato com o ambiente, representado por reservatórios térmicos e modelados matematicamente por um conjunto de osciladores harmônicos a uma temperatura T . Neste sistema os modos do campo eletromagnético interagem entre si por meio de acoplamentos dependentes do tempo associados a dois processos: a amplificação e conversão paramétricas. Inicialmente, para a evolução temporal do sistema proposto, considerou-se o tratamento matemático via equação mestra, obtendo-se uma equação mestra aproximada de acordo com as considerações iniciais de limite do acoplamento fraco e aproximação de Born-Markov. Considerando os estados iniciais do sistema Gaussianos, descreveu-se a dinâmica do sistema em uma formulação alternativa. Ao invés de se resolver a equação mestra para o sistema de dois modos, determinou-se um sistema de equações diferenciais descrevendo a evolução temporal dos segundos momentos correspondentes aos operadores $\hat{\mathbf{z}} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger)$, representados na forma matricial $M_{mn}(t) = \text{Tr}(\hat{\rho}_s \hat{z}_m \hat{z}_n)$. As soluções dos elementos da matriz $M(t)$, foram obtidas aplicando-se o Método das Escalas Múltiplas, limitadas a correções de ordem zero. Essas soluções obtidas demonstraram estar em bom acordo com as soluções numéricas, para o estudo das propriedades físicas deste trabalho. Deve-se lembrar que estas soluções analíticas obtidas pelo método das escalas múltiplas, são limitadas a instantes iniciais de tempo, e sujeitas as condições de acoplamento fraco entre os reservatórios. A partir destas soluções, determinaram-se expressões analíticas para os coeficiente de compressão e pureza de ambos os modos na amplificação e conversão paramétrica. Assim foi possível analisar os efeitos dos reservatórios nestas propriedades quânticas dos modos bosônicos acoplados para diferentes parâmetros de estados iniciais (ϑ_k, r_k) e reservatórios (β, ν) com a restrição $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ e $\beta_1 = \beta_2 = \beta$.

No caso da conversão paramétrica, na ausência de reservatórios, verificou-se que há transferência de compressão entre os modos infinitas vezes mantendo-se constante o valor máximo atingido pelos coeficientes S_k , $k = 1, 2$. Além disso, o número de vezes em que há transferência de compressão entre os modos na conversão paramétrica é a metade do número correspondente ao caso de acoplamento constante em um dado intervalo de tempo $\Delta\tau$. Isto também se verificou na presença dos reservatórios ($\beta \neq 0$). Resultado similar foi observado no estudo da dinâmica da pureza dos modos \mathcal{P}_k , $k = 1, 2$. No caso da amplificação paramétrica as soluções $M(t)$, obtidas até correção de ordem zero, são funções analíticas do tipo hiperbólicas, não permitindo ocorrer troca de compressão entre os modos, independente dos parâmetros de estados iniciais considerados ou dos valores atribuídos aos parâmetros dos reservatórios (β, ν). Resultado similar foi observado na evolução temporal da pureza de ambos os modos, ou seja, a impossibilidade de troca de pureza.

Neste sistema, além do estudo da dinâmica da compressão S_k e da pureza \mathcal{P}_k , foi analisado os efeitos dos reservatórios nas propriedades de emaranhamento dos modos acoplados, descrito pela negatividade logarítmica. Na conversão paramétrica verificou-se que na ausência de dissipação ($\beta = 0$), ocorre uma periodicidade no valor do emaranhamento. Além disso, seu valor máximo atingido será maior quanto maior os valores atribuídos a compressão de quadratura r_k dos estados iniciais. Comparando a dinâmica de emaranhamento da conversão paramétrica e do caso ressonante com acoplamento constante, observou-se no mesmo intervalo de tempo $\Delta\tau = \pi$ ocorrer dois instantes de valores máximos de emaranhamento para o acoplamento constante enquanto apenas um na conversão paramétrica. Adicionando-se os efeitos dos reservatórios, observou-se que o valor máximo de emaranhamento diminui com a evolução temporal do sistema; quanto maior o valor de (β, ν), mais rapidamente a amplitude do emaranhamento diminui no decorrer do tempo, tendendo ao valor zero. Diferentemente dos resultados obtidos na conversão paramétrica, na amplificação paramétrica não se observa um comportamento periódico na dinâmica de emaranhamento. O valor do emaranhamento cresce monotonicamente tendendo a um valor assintótico constante, determinado pelos parâmetros de reservatório (β, ν). Quanto maior for o valor atribuídos aos parâmetros (β, ν), menor será o valor assintótico atingido pelo emaranhamento, para valores fixo de (ϑ_k, r_k). Além disso, ao fixar os parâmetros do reservatório (β, ν) e variar os valores de r_k dos estados iniciais, observou-se que para valores maiores de r_k , o emaranhamento tende ao valor assintótico a uma taxa maior do que para valores menores de r_k os instantes iniciais da dinâmica do sistema, percorrendo estados de maior valor de emaranhamento.

Como perspectivas futuras, pode-se estabelecer uma análise mais detalhada deste problema

considerando a construção da equação mestra fora do limite do acoplamento fraco. Outro aspecto do problema a ser abordado seria determinar as soluções para $M(t)$ considerando os reservatórios distintos sujeito as condições $\nu_1 \neq \nu_2$ e $\beta_1 \neq \beta_2$, isto é, temperaturas diferentes para cada reservatório e intensidades de acoplamento de modos com seu respectivo reservatório diferentes. Análises preliminares dessa situação foram realizadas, obtendo expressões matemáticas dos elementos de $M(t)$, ainda em processo de simplificação. Outras situações além dessas citadas podem ser consideradas, como o caso de haver três modos acoplados, onde o modo central não está acoplado a nenhum reservatório térmico e os modos nas extremidades estão acoplados a reservatórios independentes cada um a uma temperatura T_k .

Referências

- [1] M.A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, United Kingdom, (2000).
- [2] C. H. Bennett, et al. *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolski-Rosen*. Phys. Rev. Lett. **70**, 1985, (1993).
- [3] V. Vedral, *The role of relative Entropy in Quantum Information Theory*. Rev. Mod. Phys. **74**, 197, (2002).
- [4] W. H. Zurek, Rev. Mod. Phys. **75**, 715 (2003).
- [5] A. S. M. de Castro, R. A. N. Siqueira and V. V. Dodonov, Phys. Lett. A **372**, 367 (2008).
- [6] M. Janowicz, Phys. Rep. **375**, 327-410, (2003).
- [7] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, (Addison-Wesley), 1 ed., 1967.
- [8] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*. Cambridge University Press, United Kingdom, (1997).
- [9] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 7th ed. John Wiley & Sons, Inc. (2001).
- [10] B. Dui, C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloe, *Quantum Mechanics*, Vol.1 John Wiley, France, (1977).
- [11] M. Orzag, *Quantum Optics Including Noise Reduction, trapped Ions, Quantum Trajectories and Decoherence*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2000).
- [12] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1995).

- [13] C. Gerry and P. Knight, *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, United Kingdom, (2005).
- [14] A. S. M. de Castro and V. V. Dodonov, *Phys. Rev. A* **73**, 065801 (2006).
- [15] M. S. Kim, F. A. M. de Oliveira and P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **40**, 2494 (1989).
- [16] V. V. Dodonov, *Parametric excitation and generation of nonclassical states in linear media*. In: V. V. Dodonov, V. I. Man'ko. (Org). *Theory of Non-classical States of light*. London: Taylor & Francis, p. 153-218, (2003).
- [17] A. S. M. de Castro and V. V. Dodonov, *J. Russ. Laser Res.* **23**, 93 (2002).
- [18] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, New-York: Wiley (1973).
- [19] W. H. Louisell, A. Yariv and A. E. Siegman, *Phys. Rev.* **124**, 1646 (1961).
- [20] J. P. Gordon, W. H. Louisell, and L. P. Walker, *Phys. Rev.* **129**, 481 (1963).
- [21] B. R. Mollow and R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **160**, 1076 (1967).
- [22] E. Y. C. Lu, *Phys. Rev. A* **8**, 1053 (1973).
- [23] Hillery, M. *Acta Physica Slovaca*, Vol. 59 N° 1, 1-80, 2009.
- [24] A. H. Nayfeh and D. T. Mook, *Nonlinear oscillations*. New York: John Wiley and Sons, (1995).
- [25] C. M. Bender and M. A. Bittencourt, *Multiple-scale analysis of quantum systems*. *Phys. Rev. D* **54**, 12, (1996).
- [26] C. M. Bender and S. A. Orzag, *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*.
- [27] J. Eisert and M. B. Plenio, *International Journal of Quantum Information*, Vol. 1, 479-506 (2003).
- [28] G. Adesso and F. Illuminati, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 7821 (2007).
- [29] G. Adesso and F. Illuminati, *Phys. Rev. A* **72**, 032334 (2005).
- [30] P. Lambropoulos and D. Petrosyan, *Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2007).
- [31] J. Batle, M. Casas, A. Plastino, and A. R. Plastino, *Phys. Rev. A* **71**, 024301 (2005).

- [32] I. Bengtsson and K. Życzkowski, *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*. Cambridge University Press, (2006).
- [33] A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).
- [34] G. Vidal and R. F. Werner, Phys. Rev. A **65**, 032314 (2002).
- [35] A. Serafini, F. Illuminati, M. G. A. Paris and S. De Siena, Phys. Rev. A **69**, 022318 (2004).
- [36] A. Serafini, F. Illuminati and S. De Siena, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **37**, L2–L28 (2004).
- [37] C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise: A handbook of Markovian and Non-Markovian Quantum Stochastic Methods with Applications to Quantum Optics*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2000).
- [38] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for physicist*. Elsevier (2005).

Apêndice A

Simplificações da Equação Mestra

Considerando a equação para o operador $\hat{\sigma}_s(t)$ dada em (3.25) com as simplificações realizadas em (3.26) e (3.27), tem-se para a equação em $\hat{\sigma}_s(t)$ a forma

$$\frac{d\hat{\sigma}_s(t)}{dt} = -i \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t), \hat{\sigma}_s(0) \right] - \text{Tr}_{R_1 R_2} \int_0^t \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t) + \hat{H}_{12}^{(I)}(t), \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t') + \hat{H}_{12}^{(I)}(t'), \hat{\sigma}(t') \right] \right] dt'. \quad (\text{A.1})$$

De acordo com o resultado em (A.1), o termo contendo o cálculo do traço sobre o comutador duplo,

$$\text{Tr}_{R_1 R_2} \int_0^t \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t) + \hat{H}_{12}^{(I)}(t), \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t') + \hat{H}_{12}^{(I)}(t'), \hat{\sigma}(t') \right] \right] dt', \quad (\text{A.2})$$

pode ser reescrito na forma

$$\begin{aligned} & \text{Tr}_{R_1 R_2} \int_0^t \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t), \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t'), \hat{\sigma}(t') \right] \right] dt' + \text{Tr}_{R_1 R_2} \int_0^t \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t), \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t'), \hat{\sigma}(t') \right] \right] dt' + \\ & \text{Tr}_{R_1 R_2} \int_0^t \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t), \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t'), \hat{\sigma}(t') \right] \right] dt' + \text{Tr}_{R_1 R_2} \int_0^t \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t), \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t'), \hat{\sigma}(t') \right] \right] dt'. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Com o objetivo de simplificar essas expressões, considera-se que a intensidade do acoplamento entre os modos bosônicos (osciladores) e seus respectivos reservatórios, denotado por γ_k , seja suficientemente fraca quando comparada à intensidade do acoplamento entre os modos bosônico; isto é que se denomina o limite de acoplamento fraco [37]. Nesta aproximação, o operador densidade associado ao estado quântico dos reservatórios, $\hat{\sigma}_R(t)$, não é alterado de forma significativa na evolução temporal do sistema, de maneira a considerar $\hat{\sigma}_R(t) \approx \hat{\sigma}_R(0)$. Desse modo, o operador total do sistema $\hat{\sigma}(t)$ pode ser escrito na forma aproximada como

$$\hat{\sigma}(t) \approx \hat{\sigma}_s(t) \otimes \hat{\sigma}_R(0). \quad (\text{A.4})$$

O operador densidade, $\hat{\sigma}_R(0)$, correspondente aos reservatórios térmicos, pode ser escrito como $\hat{\sigma}_R(0) = \hat{\sigma}_{R_1}(0) \otimes \hat{\sigma}_{R_2}(0)$ uma vez que os reservatórios térmicos R_1 e R_2 são tratados como sendo

idênticos mas independentes entre si, atuando em espaços vetoriais distintos. Esses operadores densidades que descrevem os reservatórios, são estados associados à um conjunto infinito de osciladores harmônicos independentes entre si, sendo expressos [18] na forma

$$\hat{\sigma}_{R_k}(0) = \frac{\prod_j \exp\left(-\tilde{\omega}_{k,j} \hat{b}_{k,j}^\dagger \hat{b}_{k,j} / k_B T\right)}{\text{Tr}_{R_k} \left\{ \prod_j \exp\left(-\tilde{\omega}_{k,j} \hat{b}_{k,j}^\dagger \hat{b}_{k,j} / k_B T\right) \right\}}, \quad k = 1, 2. \quad (\text{A.5})$$

Antes das simplificações para o comutador duplo em (A.1), pode-se encontrar alguns resultados interessantes, úteis no processo de simplificação do comutador. Primeiramente para o termo

$\text{Tr}_{R_k} \left(\hat{b}_{k,j}^\dagger \hat{\sigma}_{r_k}(0) \right)$, com a definição de (A.5), tem-se

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{R_k} \left(\hat{b}_{k,j}^\dagger \hat{\sigma}_{r_k}(0) \right) &= \text{Tr}_{R_k} \left(\hat{b}_{k,j}^\dagger \frac{\prod_{j'} \exp\left(-\tilde{\omega}_{k',j'} \hat{b}_{k',j'}^\dagger \hat{b}_{k',j'} / k_B T\right)}{\text{Tr}_{R_{k'}} \left\{ \prod_{j'} \exp\left(-\tilde{\omega}_{k',j'} \hat{b}_{k',j'}^\dagger \hat{b}_{k',j'} / k_B T\right) \right\}} \right) \\ &= \frac{\sum_{\{n_{k',j'}\}} \langle \{n_{k',j'}\} | \hat{b}_{k,j}^\dagger \prod_{j'} \exp\left(-\tilde{\omega}_{k',j'} \hat{b}_{k',j'}^\dagger \hat{b}_{k',j'} / k_B T\right) | \{n_{k',j'}\} \rangle}{\text{Tr}_{R_{k'}} \left\{ \prod_{j'} \exp\left(-\tilde{\omega}_{k',j'} \hat{b}_{k',j'}^\dagger \hat{b}_{k',j'} / k_B T\right) \right\}}, \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

no qual se aplica a seguinte notação:

$$|\{n_{k',j'}\}\rangle = |n_{k',1}\rangle \otimes |n_{k',2}\rangle \otimes \cdots \otimes |n_{k',j'}\rangle \otimes \cdots = |n_{k',1}, n_{k',2}, \cdots, n_{k',j'}, \cdots\rangle, \quad (\text{A.7})$$

com

$$\sum_{\{n_{k',j'}\}} = \sum_{n_{k',1}} \sum_{n_{k',2}} \cdots \sum_{n_{k',j'}} \cdots \quad (\text{A.8})$$

Assim de (A.6) e após algumas operações de simplificação matemáticas, resulta o termo

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{R_k} \left(\hat{b}_{k,j}^\dagger \hat{\sigma}_{r_k}(0) \right) &= \sum_{\{n_{k',j'}\}} \prod_{j'} e^{(-\tilde{\omega}_{k',j'} n_{k',j'} / k_B T)} \times \\ &\quad \frac{\langle n_{k',1}, n_{k',2}, \cdots, n_{k',j'}, \cdots | \hat{b}_{k,j}^\dagger | n_{k',1}, n_{k',2}, \cdots, n_{k',j'}, \cdots \rangle}{\text{Tr}_{R_{k'}} \left\{ \prod_{j'} \exp\left(-\tilde{\omega}_{k',j'} \hat{b}_{k',j'}^\dagger \hat{b}_{k',j'} / k_B T\right) \right\}}. \end{aligned}$$

Porém, note que

$$\begin{aligned} \langle \{n_{k',j'}\} | \hat{b}_{k,j}^\dagger | \{n_{k',j'}\} \rangle &= \langle n_{k',1}, n_{k',2}, \cdots, n_{k',j}, \cdots | n_{k',1}, n_{k',2}, \cdots, n_{k',j} + 1, \cdots \rangle \sqrt{n_{k',j} + 1} \delta_{k',k} \\ &= 0. \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

Portanto

$$\text{Tr}_{R_k} \left(\hat{b}_{k,j}^\dagger \hat{\sigma}_{R_k}(0) \right) = 0. \quad (\text{A.10})$$

O cálculo para $\text{Tr}_{R_k} \left(\hat{b}_{k,j} \hat{\sigma}_{R_k}(0) \right)$ se dá de forma similiar e o resultado para o traço é

$$\text{Tr}_{R_k} \left(\hat{b}_{k,j} \hat{\sigma}_{R_k}(0) \right) = 0. \quad (\text{A.11})$$

Para o caso onde houver o traço de $\text{Tr}_{R_k} \left(\hat{b}_{k,j}^\dagger \hat{b}_{k,j} \hat{\sigma}_{R_k}(0) \right)$, tem-se

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{R_k} \left(\hat{b}_{k,j}^\dagger \hat{b}_{k,j} \hat{\sigma}_{R_k}(0) \right) &= \frac{\sum_{\{n_{k',j'}\}} \langle \{n_{k',j'}\} | \hat{b}_{k,j}^\dagger \hat{b}_{k,j} \prod_{j'} \exp \left(-\tilde{\omega}_{k',j'} \hat{b}_{k',j'}^\dagger \hat{b}_{k',j'} / k_B T \right) | \{n_{k',j'}\} \rangle}{\text{Tr}_{R_{k'}} \left\{ \prod_{j'} \exp \left(-\tilde{\omega}_{k',j'} \hat{b}_{k',j'}^\dagger \hat{b}_{k',j'} / k_B T \right) \right\}} \\ &= \frac{\sum_{\{n_{k',j'}\}} \prod_{j'} \exp \left(-\tilde{\omega}_{k',j'} n_{k',j'} / k_B T \right) \langle \{n_{k',j'}\} | \hat{b}_{k,j}^\dagger \hat{b}_{k,j} | \{n_{k',j'}\} \rangle}{\text{Tr}_{R_{k'}} \left\{ \prod_{j'} \exp \left(-\tilde{\omega}_{k',j'} \hat{b}_{k',j'}^\dagger \hat{b}_{k',j'} / k_B T \right) \right\}} \\ &= \frac{\sum_{\{n_{k',j'}\}} \prod_{j'} \left\{ \exp \left(-\tilde{\omega}_{k',j'} n_{k',j'} / k_B T \right) n_{k',j} \delta_{k',k} \right\}}{\text{Tr}_{R_{k'}} \left\{ \prod_{j'} \exp \left(-\tilde{\omega}_{k',j'} \hat{b}_{k',j'}^\dagger \hat{b}_{k',j'} / k_B T \right) \right\}} = \bar{n}(\tilde{\omega}_{k,j}, T), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

onde

$$\bar{n}(\tilde{\omega}_{k,j}, T) = \frac{1}{\exp(\tilde{\omega}_{k,j} / k_B T) - 1}. \quad (\text{A.13})$$

De maneira similar, para o traço de $\text{Tr}_{R_k} \left(\hat{b}_{k,j} \hat{b}_{k,j}^\dagger \hat{\sigma}_{R_k}(0) \right)$, encontra-se

$$\text{Tr}_{R_k} \left(\hat{b}_{k,j} \hat{b}_{k,j}^\dagger \hat{\sigma}_{R_k}(0) \right) = \bar{n}(\tilde{\omega}_{k,j}, T) + 1. \quad (\text{A.14})$$

Com o auxílio desses resultados acima e retornando para o primeiro termo de (A.3), observa-se que

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{R_1 R_2} \int_0^t \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t), \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t'), \hat{\sigma}(t') \right] \right] dt' &= \text{Tr}_{R_1 R_2} \int_0^t \left\{ \hat{H}_{RS}^{(I)}(t) \hat{H}_{RS}^{(I)}(t') \hat{\sigma}(t') - \hat{H}_{RS}^{(I)}(t') \hat{\sigma}(t') \hat{H}_{RS}^{(I)}(t) - \right. \\ &\quad \left. \hat{H}_{RS}^{(I)}(t) \hat{\sigma}(t') \hat{H}_{RS}^{(I)}(t') + \hat{\sigma}(t') \hat{H}_{RS}^{(I)}(t') \hat{H}_{RS}^{(I)}(t) \right\} dt'. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Para a simplificação de (A.15), há quatro termos envolvidos no argumento da integral e o processo de simplificação aplicado a cada um deles se realiza de forma similar. Deste modo, o primeiro termo de (A.15), com a definição de $\hat{H}_{RS}^{(I)}(t)$ dado em (3.21) e $\hat{\sigma}(t')$ dado em (A.4), torna-se

$$\begin{aligned} \int_0^t \text{Tr}_{R_1 R_2} \left\{ \hat{H}_{RS}^{(I)}(t) \hat{H}_{RS}^{(I)}(t') \hat{\sigma}(t') \right\} dt' &= \int_0^t \text{Tr}_{R_1 R_2} \left(\sum_{k=1}^2 \hat{a}_k^\dagger \hat{G}_k(t) + \hat{a}_k \hat{G}_k^\dagger(t) \right) \left(\sum_{k=1}^2 \hat{a}_k^\dagger \hat{G}_k(t') + \right. \\ &\quad \left. \hat{a}_k \hat{G}_k^\dagger(t') \right) \left(\hat{\sigma}_s(t') \hat{\sigma}_{R_1}(0) \hat{\sigma}_{R_2}(0) \right) dt'. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Pela definição de $\hat{G}_k(t)$ em (3.22) e com as relações obtidas acima, relacionadas à operação de traço sobre as variáveis dos reservatórios, dadas em (A.10), (A.11), (A.12) e (A.14), obtém-se o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \int_0^t \text{Tr}_{R_1 R_2} \left\{ \hat{H}_{RS}^{(I)}(t) \hat{H}_{RS}^{(I)}(t') \hat{\sigma}(t') \right\} dt' &= \sum_{k=1}^2 \int_0^t \left[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{\sigma}_s(t') \left\langle \hat{G}_k(t) \hat{G}_k^\dagger(t') \right\rangle_{R_k} + \right. \\ &\quad \left. \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_s(t') \left\langle \hat{G}_k^\dagger(t) \hat{G}_k(t') \right\rangle_{R_k} \right] dt', \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

onde $\langle \mathcal{O}_k \rangle_{R_k} = \text{Tr}_{R_k} (\mathcal{O}_k \hat{\sigma}_{R_k}(0))$, com

$$\langle \hat{G}_k(t) \hat{G}_k^\dagger(t') \rangle_{R_k} = \sum_j |g_{k,j}|^2 e^{i(\omega_k - \tilde{\omega}_{k,j})(t-t')} \left(\bar{n}(\tilde{\omega}_{k,j}, T) + 1 \right), \quad (\text{A.18})$$

$$\langle \hat{G}_k^\dagger(t) \hat{G}_k(t') \rangle_{R_k} = \sum_j |g_{k,j}|^2 e^{-i(\omega_k - \tilde{\omega}_{k,j})(t-t')} \bar{n}(\tilde{\omega}_{k,j}, T), \quad (\text{A.19})$$

$$\langle \hat{G}_k^\dagger(t) \hat{G}_k^\dagger(t') \rangle_{R_k} = 0, \quad (\text{A.20})$$

$$\langle \hat{G}_k(t) \hat{G}_k(t') \rangle_{R_k} = 0. \quad (\text{A.21})$$

Aqui deve-se observar um resultado interessante. Não só para o cálculo de (A.17), mas para outros termos de (A.3), nota-se que não há termos “cruzados”, ou seja, termos que aparecem operadores do primeiro oscilador multiplicando com operadores do segundo oscilador, como por exemplo $\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \hat{\sigma}_s(t')$ ao realizar o traço sobre as variáveis dos reservatórios. Isso se deve ao fato dos operadores $\hat{G}_k(t)$ e $\hat{G}_k^\dagger(t)$ conterem apenas termos lineares de $\hat{b}_{k,j}^\dagger$ e $\hat{b}_{k,j}$ e quando se realiza o traço, esses termos se anulam. Note ainda que

$$\langle \hat{G}_k(t') \hat{G}_k^\dagger(t) \rangle_{R_k} = \langle \hat{G}_k(t) \hat{G}_k^\dagger(t') \rangle_{R_k}^*, \quad (\text{A.22})$$

$$\langle \hat{G}_k^\dagger(t') \hat{G}_k(t) \rangle_{R_k} = \langle \hat{G}_k^\dagger(t) \hat{G}_k(t') \rangle_{R_k}^*. \quad (\text{A.23})$$

No modelo de reservatório térmico considerado pode-se tomar o limite contínuo da soma em \sum_j tornando-a uma integral e introduzindo uma densidade de estados $D(\tilde{\omega}_k)$ em que $D(\tilde{\omega}_k) d\tilde{\omega}_k$ fornece o número de modos num intervalo entre $\tilde{\omega}_k$ e $\tilde{\omega}_k + d\tilde{\omega}_k$, assim

$$\sum_j \rightarrow \int D(\tilde{\omega}_k) d\tilde{\omega}_k, \quad (\text{A.24})$$

e introduzindo a variável $\tau = t - t'$, o termo de (A.17) se torna

$$\begin{aligned} \int_0^t \text{Tr}_{R_1 R_2} \left\{ \hat{H}_{RS}^{(I)}(t) \hat{H}_{RS}^{(I)}(t') \hat{\sigma}(t') \right\} dt' &= \sum_{k=1}^2 \int_0^t \int \left[\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_s(t - \tau) |g_k(\tilde{\omega}_k)|^2 D(\tilde{\omega}_k) e^{-i(\omega_k - \tilde{\omega}_k)\tau} \bar{n}(\tilde{\omega}_k, T) \right. \\ &\quad \left. + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{\sigma}_s(t - \tau) |g_k(\tilde{\omega}_k)|^2 D(\tilde{\omega}_k) e^{i(\omega_k - \tilde{\omega}_k)\tau} \left(\bar{n}(\tilde{\omega}_k, T) + 1 \right) \right] d\tilde{\omega}_k d\tau. \end{aligned}$$

Considera-se o sistema interagindo com o reservatório na aproximação de Markov [37]. Nessa aproximação, o cálculo da integral acima é simplificado pelo fato dos reservatórios serem muito grandes quando comparado ao sistema e mantidos no equilíbrio térmico, os reservatórios não irão guardar por muito tempo informações relativas ao sistema, assumindo-se que as correlações temporais dos reservatórios decaiam muito mais rápido que as correlações do sistema. Deste modo,

pode-se aplicar $\hat{\sigma}_s(t - \tau) \rightarrow \hat{\sigma}_s(t)$ e estender a integral em τ para $t \rightarrow \infty$. Assim, aplicando o resultado

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{\pm i\Omega\tau} d\tau = \pi\delta(\Omega) \pm i\mathcal{P}\left(\frac{1}{\Omega}\right), \quad (\text{A.25})$$

onde \mathcal{P} representa o valor principal de Cauchy, definido por [38]

$$\mathcal{P} \int_{-a}^b f(\Omega) d\Omega = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-a}^{-\epsilon} f(\Omega) d\Omega + \int_{\epsilon}^b f(\Omega) d\Omega \right\}, \quad (\text{A.26})$$

resulta que

$$\begin{aligned} \int_0^t \text{Tr}_{\text{R}_1\text{R}_2} \left\{ \hat{H}_{RS}^{(I)}(t) \hat{H}_{RS}^{(I)}(t') \hat{\sigma}(t') \right\} dt' &= \sum_{k=1}^2 \int \left\{ \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{\sigma}_s(t) |g_k(\tilde{\omega}_k)|^2 D(\tilde{\omega}_k) \left[\pi\delta(\omega_k - \tilde{\omega}_k) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i\mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega_k - \tilde{\omega}_k}\right) \right] \left(\bar{n}(\tilde{\omega}_k, T) + 1 \right) + \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_s(t) |g_k(\tilde{\omega}_k)|^2 D(\tilde{\omega}_k) \times \right. \\ &\quad \left. \left[\pi\delta(\omega_k - \tilde{\omega}_k) - i\mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega_k - \tilde{\omega}_k}\right) \right] \bar{n}(\tilde{\omega}_k, T) \right\} d\tilde{\omega}_k, \end{aligned}$$

e após efetuar-se as integrais, tem-se finalmente que

$$\begin{aligned} \int_0^t \text{Tr}_{\text{R}_1\text{R}_2} \left\{ \hat{H}_{RS}^{(I)}(t) \hat{H}_{RS}^{(I)}(t') \hat{\sigma}(t') \right\} dt' &= \sum_{k=1}^2 \left\{ \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{\sigma}_s(t) \left(\gamma_k - i\Delta\omega_k \right) \left(\bar{n}_k + 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_s(t) \left(\gamma_k + i\Delta\omega_k \right) \bar{n}_k \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

onde

$$\gamma_k = \pi D(\omega_k) |g(\omega_k)|^2 \quad (\text{A.28})$$

$$\Delta\omega_k = -\mathcal{P} \int_0^\infty \frac{D(\tilde{\omega}_k) |g_k(\tilde{\omega}_k)|^2}{\omega_k - \tilde{\omega}_k} d\tilde{\omega}_k, \quad (\text{A.29})$$

e $\bar{n}_k = (\exp(\omega_k/k_B T) - 1)^{-1}$. De maneira análoga para obtenção de (A.27), os termos restantes de (A.15) são realizados da mesma maneira e após este procedimento, obtém-se o primeiro termo de (A.3) escrito por

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\text{R}_1\text{R}_2} \int_0^t \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t), \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t'), \hat{\sigma}(t') \right] \right] dt' &= \sum_{k=1}^2 \left\{ \gamma_k (1 + \bar{n}_k) \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{\sigma}_s(t) + \hat{\sigma}_s(t) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - 2\hat{a}_k \hat{\sigma}_s(t) \hat{a}_k^\dagger \right) + \right. \\ &\quad \left. \gamma_k \bar{n}_k \left(\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_s(t) + \hat{\sigma}_s(t) \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger - 2\hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_s(t) \hat{a}_k \right) - \right. \\ &\quad \left. i\Delta\omega_k \left[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k, \hat{\sigma}_s(t) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Para o segundo e terceiro fatores de (A.3), expressos por

$$\text{Tr}_{\text{R}_1\text{R}_2} \int_0^t \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t), \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t'), \hat{\sigma}(t') \right] \right] dt', \quad \text{Tr}_{\text{R}_1\text{R}_2} \int_0^t \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t), \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t'), \hat{\sigma}(t') \right] \right] dt', \quad (\text{A.31})$$

na simplificação dessas expressões, o termo $\hat{H}_{RS}^{(I)}(t)$ (ou $\hat{H}_{RS}^{(I)}(t')$) definido em (3.21), aparece uma única vez no comutador duplo, e esse termo contém apenas termos lineares de $\hat{b}_{k,j}^\dagger$ e $\hat{b}_{k,j}$ de maneira que ao realizar o traço sobre as variáveis dos reservatórios esses termos se anulam devido aos resultados obtidos em (A.10) e (A.11). Portanto

$$\text{Tr}_{R_1 R_2} \int_0^t \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t), \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t'), \hat{\sigma}(t') \right] \right] dt' = \text{Tr}_{R_1 R_2} \int_0^t \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t), \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t'), \hat{\sigma}(t') \right] \right] dt' = 0. \quad (\text{A.32})$$

Para o quarto fator de (A.3), $\hat{H}_{12}^{(I)}(t)$ definido em (3.14) não contém variáveis referentes aos reservatórios de tal modo que

$$\text{Tr}_{R_1 R_2} \int_0^t \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t), \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t'), \hat{\sigma}(t') \right] \right] dt' = \int_0^t \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t), \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t'), \hat{\sigma}_s(t') \right] \right] dt', \quad (\text{A.33})$$

onde $\hat{\sigma}_s(t) \equiv \text{Tr}_{R_1 R_2}(\hat{\sigma}(t))$. Portanto, com os resultados dos termos de (A.2) obtidos em (A.30), (A.32) e (A.33), pode-se então escrever (A.2) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{R_1 R_2} \int_0^t \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t) + \hat{H}_{12}^{(I)}(t), \left[\hat{H}_{RS}^{(I)}(t') + \hat{H}_{12}^{(I)}(t'), \hat{\sigma}(t') \right] \right] dt' &= \sum_{k=1}^2 \left\{ \gamma_k (1 + \bar{n}_k) \times \right. \\ &\left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{\sigma}_s(t) + \hat{\sigma}_s(t) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - 2 \hat{a}_k \hat{\sigma}_s(t) \hat{a}_k^\dagger \right) + \gamma_k \bar{n}_k \left(\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_s(t) + \hat{\sigma}_s(t) \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger - 2 \hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_s(t) \hat{a}_k \right) - \\ &\left. i \Delta \omega_k \left[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k, \hat{\sigma}_s(t) \right] \right\} + \int_0^t \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t), \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t'), \hat{\sigma}_s(t') \right] \right] dt'. \end{aligned}$$

Com este resultado obtido para o traço sobre as variáveis dos reservatórios, ao retornar para a equação de $\hat{\sigma}_s(t)$ dada em (A.1), tem-se a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}_s(t)}{dt} &= -i \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t), \hat{\sigma}_s(0) \right] - \sum_{k=1}^2 \left\{ \gamma_k (1 + \bar{n}_k) \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{\sigma}_s(t) + \hat{\sigma}_s(t) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - 2 \hat{a}_k \hat{\sigma}_s(t) \hat{a}_k^\dagger \right) + \right. \\ &\quad \left. \gamma_k \bar{n}_k \left(\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_s(t) + \hat{\sigma}_s(t) \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger - 2 \hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_s(t) \hat{a}_k \right) + i \Delta \omega_k \left[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k, \hat{\sigma}_s(t) \right] \right\} - \\ &\quad \int_0^t \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t), \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t'), \hat{\sigma}_s(t') \right] \right] dt'. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Em (A.34), pode-se ainda simplificar dois termos, são eles

$$-i \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t), \hat{\sigma}_s(0) \right] - \int_0^t \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t), \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t'), \hat{\sigma}_s(t') \right] \right] dt'. \quad (\text{A.35})$$

Para o processo de simplificação, pode-se notar que na ausência de reservatórios ($\gamma_k = 0$), na representação de interação, a equação diferencial para o operador densidade, neste caso denominado $\hat{\sigma}'(t)$, é dada por

$$i \frac{d\hat{\sigma}'(t)}{dt} = \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t), \hat{\sigma}'(t) \right], \quad (\text{A.36})$$

onde $\hat{\sigma}'(t)$ é o operador densidade do sistema total, que nesse caso é composto por dois osciladores harmônicos sem reservatórios. Ao realizar-se a integração de (A.36), resulta em

$$\hat{\sigma}'(t) = \hat{\sigma}'(0) - i \int_0^t \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t'), \hat{\sigma}'(t') \right] dt'. \quad (\text{A.37})$$

Dessa maneira, a menos de correções de segunda ordem em ϵ , o comutador de $\hat{H}_{12}^{(I)}(t)$ com $\hat{\sigma}'(t)$ em (A.37) se torna

$$\left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t), \hat{\sigma}'(t) \right] = \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t), \hat{\sigma}'(0) \right] - i \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t), \int_0^t \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t'), \hat{\sigma}'(t') \right] dt' \right], \quad (\text{A.38})$$

multiplicando ambos os lados por $-i$, pode-se escrever

$$-i \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t), \hat{\sigma}'(t) \right] = -i \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t), \hat{\sigma}'(0) \right] - \int_0^t \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t), \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t'), \hat{\sigma}'(t') \right] dt' \right]. \quad (\text{A.39})$$

Note que o termo da direita de (A.39) é o mesmo termo que aparece em (A.35), de forma que pode-se então substituir esses dois termos pelo termo da esquerda de (A.39) em (A.34). Portanto, a equação para $\hat{\sigma}_s(t)$ se torna

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}_s(t)}{dt} = & -i \left[\hat{H}_{12}^{(I)}(t), \hat{\sigma}_s(t) \right] - \sum_{k=1}^2 \left\{ \gamma_k (1 + \bar{n}_k) \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{\sigma}_s(t) + \hat{\sigma}_s(t) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - 2\hat{a}_k \hat{\sigma}_s(t) \hat{a}_k^\dagger \right) + \right. \\ & \left. \gamma_k \bar{n}_k \left(\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_s(t) + \hat{\sigma}_s(t) \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger - 2\hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_s(t) \hat{a}_k \right) + i\Delta\omega_k \left[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k, \hat{\sigma}_s(t) \right] \right\}, \quad (\text{A.40}) \end{aligned}$$

a equação mestra em uma forma aproximada, suficiente para a descrição dos efeitos da dissipação em modos acoplados nos processos de conversão e amplificação paramétricas, válida somente nos limites de acoplamento fraco entre modos e dos modos com os seus respectivos reservatórios.