

Universidade Estadual de Ponta Grossa
Programa de Pós-Graduação em Ciências
Área de concentração - Física

**MEMÓRIAS EM REDE COM CONEXÕES
LOCAIS E ALEATÓRIAS**

ROBSON CONRADO BONETTI

PONTA GROSSA

2007

ROBSON CONRADO BONETTI

**MEMÓRIAS EM REDE COM CONEXÕES
LOCAIS E ALEATÓRIAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências, área de concentração Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Antonio M. Batista

PONTA GROSSA

2007

Ficha catalográfica elaborada pelo setor de processos técnicos BICEN/UEPG.

B712m Bonetti, Robson Conrado
Memórias em rede com conexões locais e aleatórias /
Robson Conrado Bonetti. Ponta Grossa, 2007.
72 f.

Dissertação (mestrado em Ciências) – Universidade
Estadual de Ponta Grossa – Pr.

Orientador: Prof^o. Dr^o. Antonio M. Batista

1. Padrões de memória – formação. 2. Memórias em rede.
3. Conexões aleatórias. I. Batista, Antonio M. II.
Universidade Estadual de Ponta Grossa. Mestrado em
Ciências.

CDD 530

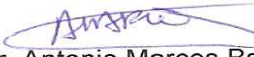
TERMO DE APROVAÇÃO

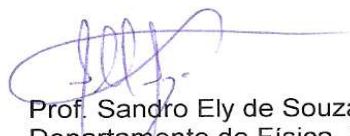
ROBSON CONRADO BONETTI


MEMÓRIAS EM REDE COM CONEXÕES LOCAIS E ALEATÓRIAS

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Ciências área de concentração Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Orientador:


Prof. Dr. Antonio Marcos Batista
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG/PR


Prof. Sandro Ely de Souza Pinto
Departamento de Física, UEPG/PR


Prof. Dr. Diógenes Borges Vasconcelos
Departamento de

Ponta Grossa, 22 de maio de 2007.

À minha esposa Melissa.

Sinceros agradecimentos:

à minha esposa, aos meus pais, aos
meus irmãos, ao Dr. Antonio M.
Batista, aos amigos e professores.

Resumo

Uma aplicação de modelos de mapas acoplados foi utilizada para explicar a formação de padrões de memórias, observadas em experiências de ondas de densidade de carga em $NbSe_3$. Consideramos um acoplamento local para estudar o tempo transiente das memórias. Também analisamos a formação das memórias em uma rede com acoplamentos locais e globais. O tempo transiente foi obtido variando os acoplamentos não-locais para o caso linear e para o caso não linear estudamos a formação de múltiplas memórias.

Abstract

An application of coupled maps models has been used in order to explain the formation of memories patterns, observed in charge density waves experiences in $NbSe_3$. We have considered a local coupling in order to study transient time of memories. We have also analyzed the memories formation in a lattice with local and non local couplings. The transient time was obtained varying the non local couplings for linear case and for non-linear case we studied the formation of multiples memories.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Conceitos básicos	6
2.1	Mapas	6
2.2	Mapa logístico	8
2.3	Pontos fixos em mapas	12
2.4	Expoente de Lyapunov	14
3	Redes de mapas acoplados	18
3.1	Conceitos básicos	20
3.1.1	Condições iniciais e de contorno	21
3.1.2	Dinâmica local	22
3.1.3	Tipos de acoplamentos	23
3.2	Acoplamento local	27

3.2.1	Domínios e <i>kinks</i>	29
3.3	Acoplamento global	32
3.4	Redes complexas	33
3.4.1	Grafos aleatórios	34
3.4.2	Redes de mundo pequeno	38
3.4.3	Redes sem escala	42
4	Memórias em redes de mapas acoplados	44
4.1	Tempo transiente das memórias	48
4.2	Padrões das memórias	52
4.3	Memórias com conexões aleatórias	54
5	Conclusões	61
A	Grafos	64
Bibliografia		68

Capítulo 1

Introdução

Sistemas dinâmicos espaço-temporais com um número infinito de graus de liberdade têm sido amplamente estudados na comunidade científica devido à sua interdisciplinaridade e aplicabilidade em várias áreas científicas. Este interesse é motivado em virtude do grande número de problemas práticos onde a dinâmica espacial desempenha um papel significativo: sistemas óticos, fenômenos de turbulência observados em fluidos e plasmas, física do estado sólido, química, redes neurais [1], formação de padrões em sistemas naturais, redes de mundo pequeno [2], redes sem escala [3], sistemas dinâmicos acoplados em biologia e tecnologia, dentre outros [4]. Para o estudo destes sistemas dinâmicos têm-se que utilizar um modelo espaço-temporal [5], onde temos a possibilidade da ocorrência de caos.

As redes de mapas acoplados são modelos úteis para investigar sistemas espacialmente extensos e foram introduzidos em dinâmica não-linear no início dos anos 80 [5, 6, 7] como modelos simples para o estudo de sistemas caóticos espaço-temporais nos quais o espaço e o tempo são discretos, porém a variável de estado é contínua. A evolução temporal do sistema é determinada tanto pelo comportamento individual de cada sítio da rede, como também pelo tipo de acoplamento entre eles, podemos citar em especial o acoplamento do tipo local, que conecta seus dois vizi-

nhos mais próximos [5] e o acoplamento do tipo global, no qual a dinâmica de um mapa é determinada por todos os outros [8]. Desta maneira, é possível investigar a evolução espaço-temporal do sistema, caracterizada por uma grande variedade de aspectos, como domínios, *kinks*, *antikinks*, caos espaço-temporal [9]. As redes de mapas acoplados estão presentes em vários ramos da ciência, como biologia, química, geofísica, em sistemas tecnológicos e engenharias [7] e estão sendo estudadas por inúmeros grupos de pesquisa no mundo.

Os sistemas estendidos de mapas acoplados são usados com frequência para o estudo da dinâmica espaço-temporal, porque sua implementação é mais simples em relação a sistemas hierarquicamente superiores. As redes de mapas acoplados quando comparadas a outros sistemas com extensão espacial, como é o caso das equações diferenciais parciais e das cadeias de osciladores acoplados, são computacionalmente mais fáceis de se manipular. As equações diferenciais parciais requerem uma quantidade muito grande de informações (uma função contínua) para especificar o estado e exige grandes recursos computacionais para a simulação [10]. As redes de mapas acoplados apresentam maior complexidade quando comparadas aos autômatos celulares onde o tempo, o espaço e a variável de estado são discretos, devido à capacidade de produção de informação local. O nosso trabalho será baseado em redes de mapas acoplados.

Uma aplicação de modelos de redes de mapas acoplados foi utilizado para explicar a formação de padrões de memórias de curta duração em um sistema dinâmico não-linear com muitos graus de liberdade. Coppersmith e colaboradores [11] usaram uma rede de mapas acoplados para simular o efeito de memórias em experiências de ondas de densidade de carga (ODC), nas quais seqüências de pulsos elétricos periódicos são aplicados em cerâmicas semicondutoras de $NbSe_3$. A rede de mapas acoplados surge do modelo de uma cadeia de partículas em um potencial periódico senoidal, o qual também é usado para o estudo de terremotos. A formação desses padrões sugere o estudo de redes complexas, como por exemplo, uma rede de

neurônios, onde o espaço e o tempo são discretos e a variável de estado é contínua, podendo dessa maneira armazenar padrões complexos de informações.

Trabalhos recentes em redes de mapas acoplados mostram outras formas de acoplamentos. Uma destas formas é a conectividade aleatória não-local, que não apresenta uniformidade espacial, ou seja, a existência de uma rede regular de conexões ou a presença de conexões entre todos os elementos e pode ser usada em redes neurais, redes de conexões e circuitos elétricos [12].

As redes complexas descrevem no mundo atual uma grande variedade de sistemas de bastante interesse intelectual, científico e tecnológico. Como exemplo, redes de interação social são formadas por pessoas ligadas umas as outras através do lazer ou relações de trabalho, a rede de colaboração entre atores de cinema entre outras [2, 13]; a internet é uma rede complexa formada por computadores conectados entre si; a World Wide Web é uma rede virtual de páginas conectadas através de hiperlinks [14, 15]. Esses são apenas alguns dos muitos exemplos existentes na natureza e no mundo atual que chamaram a atenção da comunidade científica para o estudo dos mecanismos que determinam a dinâmica de crescimento das redes complexas.

Através da Teoria dos Grafos teve início o estudo de redes complexas, sendo que no começo era utilizado o estudo de grafos regulares. Após 1950, redes grandes sem um perfil organizacional bem definido passaram a ser tratadas como grafos aleatórios através dos trabalhos de Paul Erdős e Alfréd Rényi [16], depois que Erdős mostrou que métodos probabilísticos podiam ser utilizados para resolver problemas da teoria de grafos. Todo sistema complexo apresenta algum tipo de princípio organizacional que, em geral, influencia sua topologia.

Desenvolvimentos tecnológicos recentes causaram um grande avanço no estudo de redes complexas. A informatização dos processos de aquisição de dados permitiu a construção de grandes bancos de dados com informações sobre a topolo-

gia de várias redes reais. O aumento da capacidade de cálculo dos computadores viabilizou o estudo das redes formadas por milhões de sítios. A crescente interação entre pesquisadores de diferentes áreas, permitiu que os mesmos tivessem acesso a dados sobre as redes de diversas naturezas. Impulsionado por esses fatores, vários conceitos e métodos foram investigados e propostos nos últimos anos.

Devido ao fato de serem amplamente empregadas na modelagem de uma série de fenômenos, como formação de padrões, dinâmica de populações, processos de difusão e em redes biológicas, as redes com topologias regulares como as empregadas em mapas localmente e globalmente acoplados parecem ser um pouco razoável para representar a conectividade presente nas redes complexas, caracterizadas, dentre outros aspectos, por uma grande quantidade de nós conectados com diferentes números de conexões. Resultados empíricos sobre essas redes complexas mostram a necessidade de modelos mais adequados para sua representação.

Recentemente, dois novos modelos de rede parecem representar, de forma mais adequada, essas redes complexas: as redes sem escala [3] e as redes de mundo pequeno [13]. Aqui, nossa escolha foi pelo uso de redes de mundo pequeno, as quais julgamos mais adequadas para comparações com os modelos regulares e para o estudo da dinâmica de seus elementos. Em redes de mundo pequeno temos conexões entre os sítios vizinhos e algumas conexões aleatórias não-locais, privilegiando a representação na qual a distância média entre os sítios da rede é pequena, o coeficiente de agrupamento é alto e a distribuição das ligações é semelhante à de uma rede aleatória decaindo exponencialmente. Temos como exemplos: propagação de informações na internet e transmissão de doenças.

A dissertação está segmentada da seguinte forma:

No capítulo dois temos como objetivo introduzir alguns conceitos básicos relacionados a mapas, sistemas onde a variável de estado é contínua e o tempo é discreto, abordados no decorrer do trabalho. Este capítulo aborda temas

como sistemas dinâmicos, mapas, pontos fixos em mapas, análise da estabilidade linear, mapa logístico, bifurcação e expoente de Lyapunov.

No capítulo três mostramos algumas características e conceitos de mapas acoplados em uma rede unidimensional, bem como as formas de acoplamentos mais encontradas na literatura [6]. Neste capítulo foi abordado o acoplamento local, usando o mapa logístico para exemplificar alguns conceitos sobre a dinâmica espaço-temporal desta classe de sistemas dinâmicos e a formação de domínios espaciais e também foi abordado o acoplamento global. Na seção seguinte, redes complexas, grafos aleatórios, redes de mundo pequeno e redes sem escala são abordadas.

No capítulo quatro investigamos a formação de memórias em uma rede de mapas acoplados, com um acoplamento do tipo local, que modela partículas conectadas por molas sujeitas a perturbações periódicas externas. Analisamos os padrões de memórias formados, bem como os parâmetros do sistema que influenciam o tempo transiente necessário para a formação desses padrões. Faremos a análise da formação de memórias em rede do tipo mundo pequeno com conexões aleatórias e analisamos a probabilidade das conexões de termos ou não múltiplas memórias em função dos parâmetros da rede.

No capítulo cinco apresentamos as conclusões deste trabalho bem como as sugestões para os trabalhos futuros.

Capítulo 2

Conceitos básicos

2.1 Mapas

Inúmeros modelos atuais de interesse tem o tempo como variável discreta (ou seja, assume apenas valores inteiros $t = 0, 1, 2, \dots$), e descrevem a evolução no tempo de um sistema dinâmico expressando o seu estado como uma função do instante anterior. Uma das principais utilizações dos mapas é auxiliar na análise de sistemas contínuos. Tais modelos discretos são denominados equações a diferenças, relação de recorrência, mapas iterados ou simplesmente mapas. Eles têm sido bastante utilizados em sistemas dinâmicos, no estudo de formação de padrões e no estudo de caos [17].

Mapas são relações de recorrência, computacionalmente mais fáceis de tratar do que as equações diferenciais, pois o uso de modelos contínuos ou discretos envolvem uma escolha que tem por base vários fatores, analíticos e computacionais. Modelos discretos unidimensionais são os mais simples possíveis pois envolvem apenas uma variável dinâmica. Como exemplo de mapas citamos o mapa logístico, muito usado no estudo de caos. Podemos obter o mapa logístico seguindo a versão

discreta do modelo logístico de Pierre-François Verhulst (1804 – 1849) que prolongando as idéias de Malthus, incluiu a noção de fatores inibidores. Malthus em seu livro “*Ensaio sobre o Princípio da População*” [18], publicado em 1798, relacionou a população P_{n+1} de uma geração $n+1$ com a população P_n da geração n [19], com base na suposição de que a população aumentava progressivamente na dependência de um fator constante de crescimento. Descreveu essa população pela relação matemática (2.1):

$$P_{n+1} = rP_n, \quad (2.1)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$ indica as sucessivas gerações populacionais e r é o fator de crescimento por geração relacionado com a taxa de crescimento (ou seja, a taxa de natalidade menos a taxa de mortalidade). Essa relação também descreve um crescimento exponencial ilimitado para $r > 1$ e um decaimento até a extinção para $r < 1$ [19].

Thomas Malthus em 1798, afirmava que a população crescia em uma progressão geométrica, enquanto que os meios de subsistência aumentavam em uma progressão aritmética de forma bem mais lenta, concluindo que em breve não haveria alimento para todos. Preconizando o controle da procriação, Verhulst em 1838 inseriu o conceito de fatores inibidores, sugerindo que a taxa de crescimento de uma população r , não seria constante mas aumentaria de uma maneira exponencial com o passar do tempo. Supondo que essa população possa aumentar até um valor máximo P_{max} , onde se esgotariam todos os recursos naturais, podemos colocar uma dependência em relação ao número máximo da população:

$$P_{n+1} = rP_n \left(1 - \frac{P_n}{P_{max}} \right), \quad (2.2)$$

dividindo os dois membros da equação (2.2) pelo número máximo de indivíduos dessa população e sendo $x_n = P_n/P_{max}$ obtemos:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (2.3)$$

o que resulta no mapa logístico [20] com r sendo o parâmetro de controle no intervalo de $0 < r \leq 4$ e x_n a variável de estado no intervalo de $0 \leq x_n \leq 1$, muito usado no

estudo de caos pois apresenta um grande interesse devido à sua dinâmica apresentar pontos críticos (atratores e repulsores), órbitas de diferentes períodos, etc.

2.2 Mapa logístico

O mapa logístico (2.3) apresenta certos comportamentos, quando o seu parâmetro de controle r é variado (órbitas periódicas, atratores, repulsores, bifurcações etc...). A Figura (2.1) mostra a evolução da variável de estado do mapa logístico para diferentes valores do parâmetro de controle ($r = 2,8$; $r = 3,3$; $r = 3,5$; $r = 3,9$) e com uma condição inicial x_0 igual a 0,1 para todos. Observamos que no mapa logístico a mesma condição inicial pode apresentar diferentes comportamentos, com apenas a variação do parâmetro de controle r .

Na Figura (2.1a), com parâmetro de controle $r = 2,8$, a condição inicial evolui para o ponto fixo $x^* = 0,642891$. Na Figura (2.1b), com parâmetro de controle $r = 3,3$, o sistema evolui para uma órbita de período 2 apresentando os valores $x = 0,476158$ e $x = 0,822753$ para a variável de estado. Na Figura (2.1c), com parâmetro de controle $r = 3,5$, o sistema evolui para uma órbita de período 4 com os seguintes valores para a variável de estado $x = 0,385327$, $x = 0,827013$, $x = 0,493294$ e $x = 0,872818$. Para a Figura (2.1d), com $r = 3,9$ o mapa logístico apresenta sensibilidade às condições iniciais, pois duas condições iniciais muito próximas, $x_0 = 0,1$ (círculos) e $x_0 = 0,2$ (losango), levam a órbitas completamente diferentes passado um certo intervalo de tempo.

O mapa logístico (2.3) apresenta duplicação de período com a variação do parâmetro de controle. A partir de um certo valor o mapa logístico apresenta uma cascata de duplicação de período [21] até atingir um valor onde o número de períodos é infinito, como pode ser visto na Tabela (2.1). Para o valor do parâmetro de controle $r = 3,568759$ o mapa logístico apresenta comportamento com ausência

de periodicidade. Para alguns valores de $r > r_\infty = 3,569946$ o mapa logístico apresenta janelas de periodicidade, que são caracterizadas por órbitas de período ímpar e também podem sofrer bifurcações, em $r = 3,83$ temos a ocorrência da maior janela, como pode ser visto na Figura (2.2).

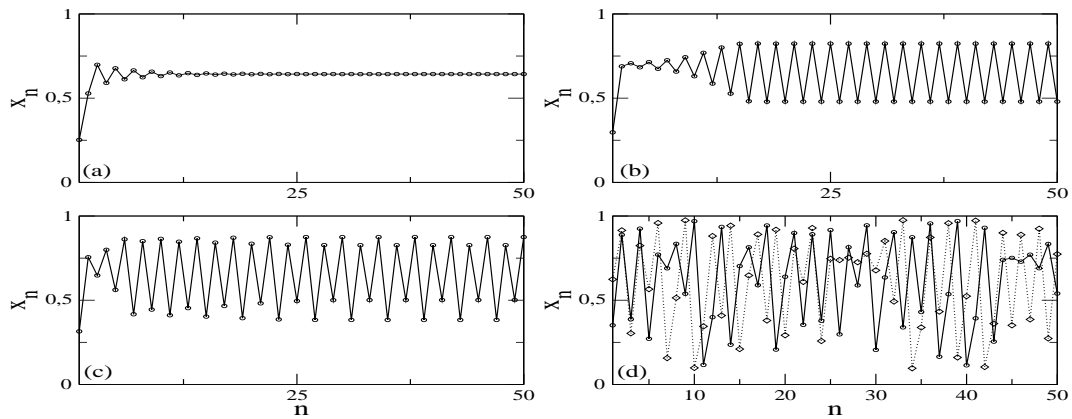


Figura 2.1: Evolução temporal da variável de estado considerando: (a) $r = 2,8$, o sistema tem um ponto fixo $x^* = 0,642891$, (b) $r = 3,3$, o sistema possui uma órbita periódica alternando entre os valores de $x = 0,476158$ e $x = 0,822753$, (c) $r = 3,5$, o sistema possui uma órbita periódica de período 4 com os seguintes valores $x = 0,385327$, $x = 0,827013$, $x = 0,493294$ e $x = 0,872818$, (d) $r = 3,9$ com duas condições iniciais próximas o sistema é aperiódico.

Utilizando o diagrama de bifurcações do mapa logístico, podemos observar melhor a cascata de duplicação de período até o comportamento caótico. Podem ser observados também as inúmeras janelas de periodicidade, para valores do parâmetro de controle $r > r_\infty$.

Na região de bifurcações ou periódica, as bifurcações estão associadas a um tipo de rota para o caos conhecida como duplicação de período ou rota de

Feigenbaum. Em 1978, Mitchell Feigenbaum percebeu que as razões das distâncias dos parâmetros entre duas bifurcações de período sucessivas se aproximam de uma constante à medida em que o período tende a infinito [21]. Esta constante é chamada constante de Feigenbaum [22, 23].

Tabela 2.1: Tabela com alguns valores dos parâmetros de controle, onde ocorre bifurcação de períodos [4].

r	Períodos
3	2
3,449	4
3,54409	8
3,5644	16
3,568759	32
⋮	⋮
3,569946	∞

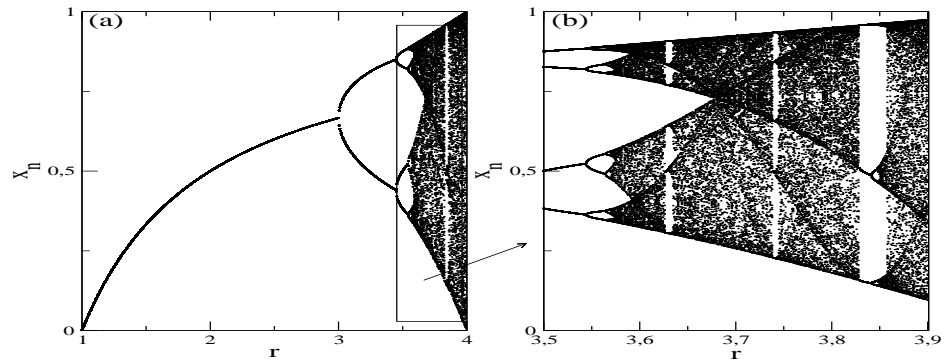


Figura 2.2: (a) Diagrama de bifurcações para o mapa logístico (2.3), com uma condição inicial x_0 igual a 0, 1, com 1032 iterações sendo desprezadas 1000 como *transiente*, (b) janelas de periodicidade do mapa logístico.

Nesta forma de bifurcação o ponto fixo que era estável antes da bi-

furcação torna-se instável e surgem dois novos pontos fixos estáveis. Neste regime periódico, considerando r_n como o valor de r onde um período de ciclo 2^{n-1} muda para 2^n , ocorre a seguinte lei de escala $r_n = r_\infty - \text{cte} \cdot \delta^{-n}$ para $n \gg 1$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = \delta, \quad (2.4)$$

onde δ é chamada primeira constante de Feigenbaum,

$$\delta = 4,669201609, \quad (2.5)$$

essa constante dá uma medida de quanto a diferença entre os valores do parâmetro de controle associados a duas bifurcações sucessivas é reduzida. Constata-se também que as distâncias d_n dos pontos fixos mais próximos de $x = 0,5$ (Figura 2.3) têm uma razão constante,

$$\frac{d_n}{d_{n+1}} = -\sigma, \quad (2.6)$$

onde a constante σ mede o fator de escala segundo o qual as distâncias entre pontos sobre o atrator no eixo são reduzidas, sendo denominada como a segunda constante de Feigenbaum [24], e tem seu valor dado por

$$\sigma = 2,50290785. \quad (2.7)$$

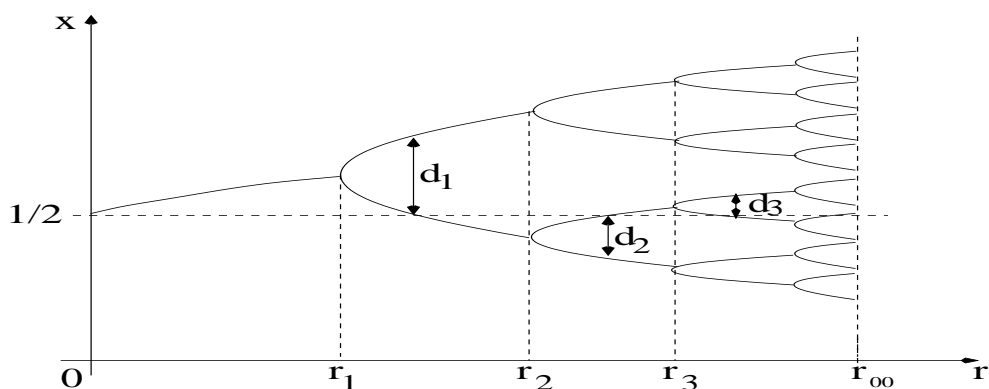


Figura 2.3: Distância d_n para os pontos fixos próximos de $x = 1/2$ para órbitas superestáveis.

2.3 Pontos fixos em mapas

O ponto x^* é mais comumente chamado ponto fixo do mapa $f(x)$, pois ele é um ponto que *mapeia* a si mesmo, ou seja, a função que descreve o mapa, no ponto fixo possui o mesmo valor do ponto fixo. Esta definição se aplica a qualquer tipo de mapa, seja ele linear ou não-linear. De um modo geral, os mapas unidimensionais são escritos na seguinte forma geral:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2.8)$$

com $n = 0, 1, 2, \dots$ sendo os valores discretos do tempo e $f(x_n)$ uma função que em nosso caso é não-linear. Dada uma condição inicial x_0 , os demais valores são obtidos por iterações sucessivas do mapa (2.8).

O ponto fixo é a solução da equação

$$x^* = f(x^*), \quad (2.9)$$

assim temos para o mapa logístico (2.3)

$$x^* = x^*r(1 - x^*), \quad (2.10)$$

equivalente a uma equação do segundo grau, cujas raízes são

$$x_1^* = 0 \quad \text{e} \quad x_2^* = \left(1 - \frac{1}{r}\right), \quad (2.11)$$

portanto, há dois pontos fixos.

Para uma órbita periódica de período m temos um conjunto de m pontos $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_m^*$ tais que um mapeia o outro, de forma cíclica, ou seja:

$$\begin{aligned} x_{i+1}^* &= f(x_i^*), \\ x_1^* &= f(x_m^*), \end{aligned} \quad (2.12)$$

com $i = 1, 2, \dots, m - 1$. Aplicando sucessivamente as condições acima a qualquer um dos pontos, por exemplo x_m^* , vemos que

$$x_m^* = f(x_{m-1}^*) = f(f(x_{m-2}^*)) = f(f(f(x_{m-3}^*))) = \dots f^m(x_m^*), \quad (2.13)$$

onde f^m é a m-ésima iterada do mapa.

A análise da estabilidade linear ou local do ponto fixo é feita através do estudo das iterações do mapa nas suas vizinhanças. Seja x_n uma iteração do mapa próxima ao ponto fixo x^* , com x_n pertencendo a uma pequena vizinhança de x^* . Podemos definir uma distância entre estes pontos como

$$\delta_n = |x_n - x^*|, \quad (2.14)$$

com δ_n e x_n variando com o tempo à medida que o mapa é iterado.

Logo, das equações (2.8) e (2.14) a distância evolui para

$$\delta_{n+1} = |x_{n+1} - x^*| = |f(x_n) - x^*| = |f(x^* + \delta_n) - x^*|, \quad (2.15)$$

expandindo a função do mapa $f(x)$ em uma série de Taylor em torno de $x = x^*$, em potências de δ_n :

$$f(x^* + \delta_n) = f(x^*) + \delta_n \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x^*} + O(\varepsilon^2), \quad (2.16)$$

onde os termos da expansão contendo potências de δ_n de ordem igual ou superior a 2 foram desprezados, de modo que, para que esta linearização seja válida, δ_n deve ser suficientemente pequeno.

O termo que multiplica δ_n é a derivada do mapa $f(x)$, calculada no ponto fixo $x = x^*$, portanto uma constante. Então a equação (2.15) se torna

$$\delta_{n+1} = \left| f(x^*) + \delta_n \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x^*} - x^* \right| = \left| \delta_n \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x^*} \right|. \quad (2.17)$$

Se $\delta_{n+1} < \delta_n$ as iterações estão convergindo para o ponto fixo x^* . Logo é estável (atrator), pois a cada nova iteração a órbita aproxima-se do ponto fixo e podemos escrever

$$\left| \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x^*} \right| < 1. \quad (2.18)$$

Caso $\delta_{n+1} > \delta_n$ as iterações estão divergindo do ponto fixo x^* . Logo é instável (repulsor), pois a cada nova iteração a órbita afasta-se do ponto fixo e podemos escrever

$$\left| \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x^*} \right| > 1. \quad (2.19)$$

Ainda podem ocorrer os casos para $|f'(x)_{x=x^*}| = 1$ onde o critério falha, pois a linearização efetuada não é suficiente para esclarecer se o ponto fixo é ou não estável e para $|f'(x)_{x=x^*}| = 0$ onde o ponto mais estável é equidistante dos extremos sendo chamado de super-estável.

2.4 Expoente de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov avaliam a sensibilidade às condições iniciais, verificando a divergência exponencial no tempo de trajetórias vizinhas, representando um dos critérios para definir o caos em sistemas dinâmicos. Considerando duas condições iniciais próximas $x_1(t)$ e $x_2(t)$ e admitindo-se que elas evoluam ao longo do tempo de modo a produzirem órbitas $x_1(t + \Delta t)$ e $x_2(t + \Delta t)$ (Figura 2.4), a dinâmica caótica do sistema faz com que as duas curvas inicialmente próximas afastem-se.

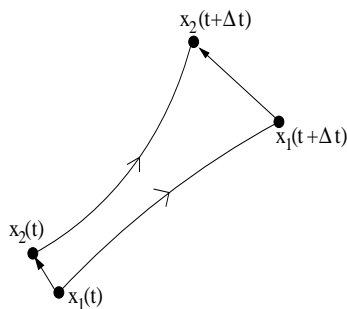


Figura 2.4: Ilustração da divergência de duas condições iniciais próximas.

O expoente de Lyapunov mede esta separação exponencial em trajetórias vizinhas (Figura 2.5). O comportamento caótico é caracterizado pela existência de, pelo menos, um dos expoentes de Lyapunov positivo. Para situações em que temos mais de um expoente de Lyapunov positivo fica caracterizado o hipercaos [25].

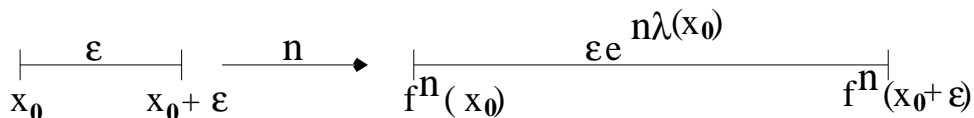


Figura 2.5: Divergência exponencial de duas condições iniciais próximas, onde n é o número de iterações.

Em um mapa unidimensional considerando que ϵ mede a distância entre dois pontos iniciais, após uma iteração obtemos $\epsilon' = \epsilon e^{\lambda(x_0)}$, onde λ é a taxa exponencial de expansão de ϵ até a distância ϵ' . Como resultado de uma única iteração temos $\epsilon' = f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)$.

Escrevendo a equação em termos de uma expansão exponencial da forma $|f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)| = |\epsilon|e^{\lambda(x_0)}$ e iterando o mapa n vezes obtemos

$$|f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)| = |\epsilon|e^{n\lambda(x_0)}, \quad (2.20)$$

que pode ser escrita como

$$\lambda(x_0) = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)}{\epsilon} \right|, \quad (2.21)$$

como λ depende de n e ϵ , o limite $\epsilon \rightarrow 0$ e $n \rightarrow \infty$ leva a

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)}{\epsilon} \right|, \quad (2.22)$$

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right|. \quad (2.23)$$

Isto significa que $e^{\lambda(x_0)}$ é o fator médio pelo qual a distância entre os pontos adjacentes próximos varia após um número grande de iterações.

Reescrevendo a equação pela regra da cadeia

$$\left. \frac{df^2(x)}{dx} \right|_{x_0} = \left. \frac{df[f(x)]}{dx} \right|_{x_0} = f'[f(x_0)]f'(x_0) = f'(x_1)f'(x_0), \quad (2.24)$$

onde $x_1 = f(x_0)$, logo temos em (2.23)

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right|, \quad (2.25)$$

separando o produtório em somas

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \ln |f'(x_i)|. \quad (2.26)$$

A generalização para m dimensões é imediata. O espectro de Lyapunov para R^m é definido por

$$(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_m}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{módulo dos autovalores de } \prod_{i=0}^{n-1} J(x_i))^{\frac{1}{n}}, \quad (2.27)$$

onde $J(x_i)$ é a matriz Jacobiana do mapa calculada em $x_i = F_i(x_0)$, ou seja

$$J(x_i) = \frac{\partial F_i}{\partial x_i}, \quad (2.28)$$

e podemos escrever o expoente $\lambda(x_0)$ da forma

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(\text{módulo dos autovalores de } \prod_{i=0}^{n-1} J(x_i))^{\frac{1}{n}}. \quad (2.29)$$

Na Figura (2.6) valores negativos do expoente de Lyapunov caracterizam um comportamento convergente, como periódico ou de ponto fixo. Na Figura (2.6c) percebe-se que isto ocorre para os valores iniciais de r , onde o diagrama do expoente está abaixo de zero, sendo igual a zero nos pontos que indicam mudanças qualitativas de comportamento (pontos de bifurcação). Na Figura (2.6d) temos os valores positivos para o expoente de Lyapunov indicando caos. Após aproximadamente $r = 3,5$ o expoente torna-se positivo, e a partir daí que surgem as primeiras

órbitas caóticas (não-periódicas). Também podemos ver que na região em que ocorrem as janelas de periodicidade o expoente torna-se negativo novamente, voltando logo depois a ser positivo.

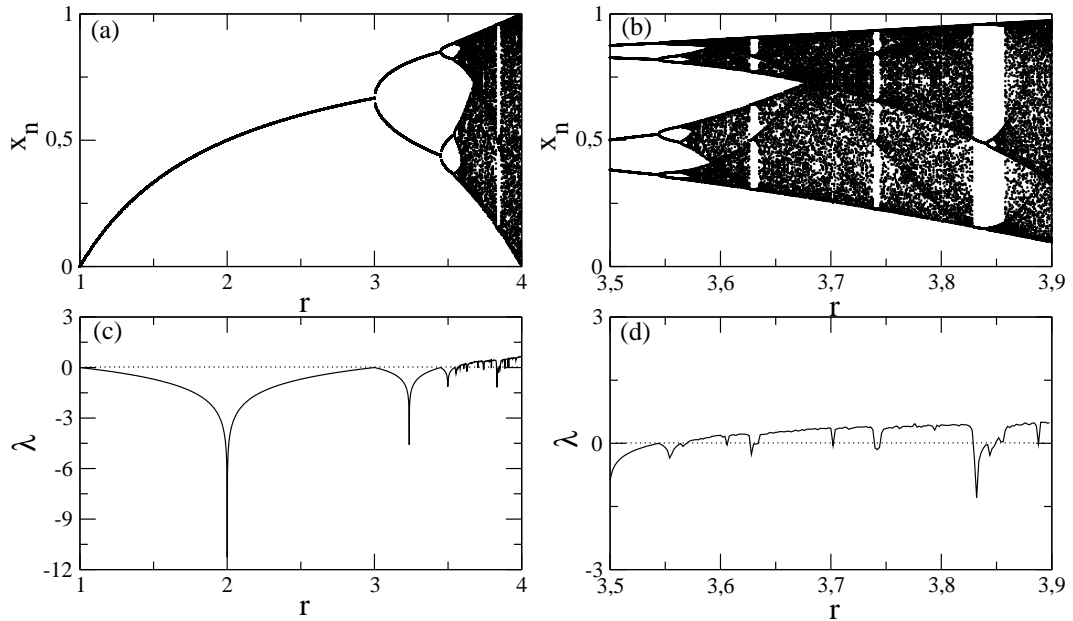


Figura 2.6: Diagrama de bifurcações: (a) $1 < r < 4$, (b) $3,5 < r < 3,9$. Expoente de Lyapunov: (c) $1 < r < 4$, (d) $3,5 < r < 3,9$.

Quanto mais negativo é o expoente de Lyapunov, mais rápido a série converge para os valores finais. Quando o expoente é positivo, o sistema apresenta comportamento caótico. Logo o expoente de Lyapunov é um indicador de caos e também mede a velocidade com que duas órbitas arbitrariamente próximas se afastam ou se aproximam à medida em que o tempo passa.

Capítulo 3

Redes de mapas acoplados

As redes de mapas acoplados são sistemas dinâmicos que apresentam espaço discreto, tempo discreto e variáveis de estado contínuas, onde os mapas são acoplados de modo a formarem uma malha, em que, cada sítio, conecta-se a outros sítios, de modo que cada sítio da rede influencia e é também influenciado por outros sítios da rede. Estes sistemas podem mostrar comportamentos assintóticos diferentes, como a formação de grupos de elementos que entram em sincronização e passam a demonstrar a mesma dinâmica [26] representando uma capacidade de se auto-organizarem [27].

A Tabela (3.1) apresenta uma classificação dos sistemas em relação ao espaço, tempo e variáveis de estado. Em sistemas de equações diferenciais parciais o espaço, o tempo e a variável de estado são contínuos. Em sistemas de equações diferenciais iteradas temos o diferencial no tempo como sendo discreto. Nos sistemas que envolvem cadeias de osciladores que são equações diferenciais ordinárias acopladas, a variável de estado e o tempo são contínuos e o espaço é discreto. Para sistemas de autômatos celulares o espaço, o tempo e a variável de estado são discretos.

O uso ou escolha de um ou outro sistema leva a uma questão na facilidade de implementação de tal sistema. Por exemplo, podemos utilizar equações

diferenciais parciais que são sistemas hierarquicamente superiores (todas as grandezas são contínuas) devido à sua “generalidade”, mas o tempo computacional necessário pode tornar-se um problema e para efetuarmos a integração numérica necessitamos discretizar o espaço e o tempo. Podemos utilizar os autômatos celulares, mas devido ao fato do tempo, espaço e a variável de estado serem discretos podemos perder em “generalidade” [4].

Tabela 3.1: Tabela referente a classificação dos sistemas espacialmente estendidos.

Sistema	Espaço	Tempo	Variável de Estado
equações diferenciais parciais	contínuo	contínuo	contínua
equações diferenciais iteradas	contínuo	discreto	contínua
cadeias de osciladores	discreto	contínuo	contínua
redes de mapas acoplados	discreto	discreto	contínua
autômatos celulares	discreto	discreto	discreta

A estratégia para modelar fenômenos dinâmicos em sistemas espacialmente extensos por redes de mapas acoplados é baseada nos seguintes passos:

- Escolher um conjunto de variáveis de estado macroscópicas numa rede. Num sistema físico-químico, por exemplo, tais variáveis podem ser a temperatura, o campo de velocidades do fluido ou a concentração local de alguma substância. A dimensão e a topologia da rede devem ser escolhidas de acordo com o sistema físico a ser modelado;
- decompor o processo subjacente ao fenômeno em componentes independentes. Por exemplo, para um sistema fluido não-homogêneo e condutor de calor, os processos de convecção, reação, difusão, etc;
- substituir cada componente por uma dinâmica paralela simples na rede. A dinâmica consiste numa transformação não-linear das variáveis de estado em

cada sítio da rede e um termo de acoplamento entre vizinhos adequadamente escolhidos;

- levar a cabo cada unidade dinâmica da rede, ou processo, sucessivamente.

A maior motivação, segundo [4], para o estudo das redes de mapas acoplados tem sido a investigação de caos espaço-temporal, entendido como a dinâmica caótica em sistemas espacialmente irregulares, onde o número efetivo de graus de liberdade diverge quando o tamanho dos sistemas aumenta. Alguns tipos de mapas e acoplamentos permitem que o número de graus seja variado através de uma perturbação suficientemente grande. O caos espaço-temporal é criado pela dinâmica não-linear local e pela difusão espacial. Nas redes de mapas acoplados estes procedimentos são considerados separadamente.

3.1 Conceitos básicos

A dimensão espacial da rede na maioria dos casos é inteira ($M = 1, 2, \dots$), embora haja casos sobre redes fractais (como o tapete de Sierpinski) [28], nas quais M não é um número inteiro. A cada sítio da rede espacial atribuímos uma variável de estado real D -dimensional $x^{(i)} \in R^D$, onde i ($i = 1, 2, \dots, N$) é o índice que faz referência ao i -ésimo sítio numa rede unidimensional com N sítios (considerando $M = 1$). O tempo é discretizado na forma usual $n = 0, 1, 2, \dots$, tal que $x_n^{(i)}$ seja a variável do sítio i no tempo n , como está representado na Figura (3.1).

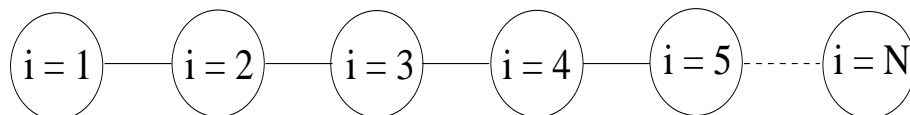


Figura 3.1: Figura esquemática para um acoplamento local de N sítios.

A dinâmica da variável de estado é governada por dois fatores:

- A dinâmica local do sítio i , através da função $f(x)$;
- pela dinâmica dos demais sítios da rede, através do acoplamento.

De forma geral, a equação que define uma rede unidimensional de mapas acoplados é:

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + C^{(i)}(x_n^{(j)}), \quad (3.1)$$

onde $C^{(i)}(x_n^{(j)})$ é um termo genérico de acoplamento do sítio i com os demais sítios da rede, esse termo de acoplamento depende do $j = 1, 2, 3, \dots, N$ sítios da rede, inclusive o próprio sítio i . O vetor N -dimensional $(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(N)})$, que representa o estado da rede no tempo n , é dito o seu padrão neste instante.

3.1.1 Condições iniciais e de contorno

Uma rede de mapas acoplados sendo um sistema espacialmente extenso, precisa de condições de contorno adequadas (nos extremos da rede: $i = 0$ e $i = N + 1$):

- Fixas: $x_n^{(0)} = a$, $x_n^{(N)} = b$, usualmente $a = b = 0$;
- periódicas: $x_n^{(0)} = x_n^{(N)}$ e $x_n^{(N+1)} = x_n^{(1)}$, ou em geral $x_n^{(i)} = x_n^{(N+i)}$ para todo i (mais utilizado);
- livres: $x_n^{(0)}$ e $x_n^{(N)}$ podem ter quaisquer valores;
- mistas: uma extremidade fixa e outra livre, que utilizaremos neste trabalho.

Devem ser também, especificadas condições iniciais em $n = 0$ para todos os sítios da rede, destacam-se:

- Perfil constante: $x_0^{(i)} = \text{constante}$;
- perfil senoidal: $x_0^{(i)} = A + B\sin\left(\frac{2\pi i}{N}\right)$;
- perfil gaussiano: $x_0^{(i)} = C\exp\left(-\frac{(i-j)^2}{N}\right)$;
- perfil aleatório: $x_0^{(i)} = \text{número pseudo-aleatório dentro de um certo domínio, como } [0, 1]$.

Certas características, como veremos, dependem desta escolha. Outras não, razão pela qual os perfis aleatórios são preferíveis em muitas aplicações [4].

3.1.2 Dinâmica local

A dinâmica local diz respeito à dinâmica de cada sítio em separado. Esta tem sido investigada por meio de mapas de baixa dimensionalidade e bem conhecidos. O exemplo mais utilizado é o mapa logístico

$$x \rightarrow f(x) = rx(1 - x), \quad (3.2)$$

onde $x \in [0, 1]$ é a variável de estado e $r \in [0, 4]$ é o parâmetro de controle do mapa. Além deste, merecem destaque os mapas lineares por partes, como o mapa do padeiro para $x \in [0, 1]$,

$$x \rightarrow f(x) = 2x \pmod{1}, \quad (3.3)$$

e o mapa do seno-círculo

$$x \rightarrow f(x) = x + \omega + \frac{K}{2\pi}\text{sen}(2\pi x) \pmod{1}, \quad (3.4)$$

onde $x \in [0, 1]$ é uma variável angular, $0 \leq \omega < 1$ é a frequência natural e $K > 0$ mede a não-linearidade do sistema.

Quanto a mapas bidimensionais ($D = 2$), podemos citar o mapa de Hénon

$$\begin{cases} x_{n+1} = A - (x_n)^2 + By_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \quad (3.5)$$

e o mapa padrão de Chirikov-Taylor

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + K \text{sen}(\theta_{n+1}) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + p_n. \end{cases} \quad (3.6)$$

Quanto ao tipo de dinâmica local, podemos classificar as redes de mapas acoplados como

- Homogêneas: quando os mapas são idênticos em todos os sítios;
- não-homogêneas: quando os mapas não são idênticos devido às mudanças nos seus parâmetros para cada sítio da rede ou os mapas são diferentes.

As redes homogêneas são mais comuns nos estudos computacionais, mas em alguns casos como no estudo de sincronização [29], é mais apropriado usar redes não-homogêneas com parâmetros aleatoriamente distribuídos num dado intervalo de tempo.

3.1.3 Tipos de acoplamentos

Os acoplamentos geralmente estudados são os locais, não-locais e globais que levam em consideração a ligação entre os sítios, embora hajam diferentes formas de acoplamento entre mapas. Nos acoplamentos locais, a dinâmica de um dado sítio i é determinada apenas pelos sítios vizinhos mais próximos: $i + 1$ e $i - 1$. Já os acoplamentos não-locais permitem que o sítio i seja influenciado por um

número arbitrário de outros sítios. Um tipo genérico de acoplamento local é dado pelo termo de acoplamento

$$C_{j=i,i\pm 1}^{(i)}(x_n^{(i)}) = \varepsilon_0 g(x_n^{(i)}) + \varepsilon_R g(x_n^{(i+1)}) + \varepsilon_L g(x_n^{(i-1)}) \quad (3.7)$$

onde o vetor $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \varepsilon_R, \varepsilon_L)$ é chamado de *núcleo* do acoplamento. Pode-se destacar quatro casos interessantes [10]:

- Acoplamento aditivo: $\varepsilon_0 = 0, \varepsilon_R = \varepsilon_L$;
- acoplamento Laplaciano ou difusivo: $-\frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_R = \varepsilon_L$;
- acoplamento totalístico: $\varepsilon_0 = -\frac{2}{3}, \varepsilon_R = \varepsilon_L = \frac{1}{3}$;
- acoplamento unidirecional: $-\varepsilon_0 = \varepsilon_L, \varepsilon_R = 0$.

Os três primeiros casos são modelos para um sistema com difusão simétrica, ao passo que o último corresponde ao acoplamento assimétrico, o qual pode ser encontrado em modelos de fluxos abertos (*open flow lattices*) [10].

O acoplamento Laplaciano é o mais utilizado nos estudos de redes de mapas acoplados localmente

$$x_{n+1}^{(i)} = g(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} [g(x_n^{(i-1)}) - 2g(x_n^{(i)}) + g(x_n^{(i+1)})], \quad (3.8)$$

onde ε é a intensidade do acoplamento. O nome é decorrente do fato que o termo de acoplamento pode ser considerado como a discretização de uma derivada segunda espacial

$$\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} \rightarrow \frac{1}{2} [g(x^{(i-1)}) - 2g(x^{(i)}) + g(x^{(i+1)})], \quad (3.9)$$

onde o parâmetro de rede espacial é igual a um: $\Delta x = (i+1) - i = 1$. Estas derivadas ocorrem em termos difusivos de equações de reação e difusão [4].

A função $g(x)$ define a dinâmica de acoplamento. Há apenas dois casos de interesse:

- Acoplamento Linear: $g(x) = x$;
- acoplamento Futuro: $g(x) = f(x)$.

Sendo que este último tem como vantagem o fato da variável de estado em cada sítio permanecer dentro do mesmo domínio que teria o mapa isolado, e assim os mapas da rede continuam normalizados. Além do mais, os mapas dos sítios $i \pm 1$ são iterados antes de serem acoplados ao sítio i , fornecendo uma melhor aproximação ao mapeamento estroboscópico de uma cadeia análoga de osciladores a tempo contínuo.

A iteração simultânea dos vizinhos é uma aproximação melhor do estado corrente da rede, em relação ao simples uso de seus valores no instante precedente. Como exemplo, um acoplamento laplaciano futuro é dado por

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(i)} &= f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} [f(x_n^{(i-1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i+1)})] \\ &= (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} [f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)})]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

No entanto, poderíamos permutar os processos, primeiro acoplando os valores dos vizinhos e depois aplicando a função do mapa ao resultado

$$x_{n+1}^{(i)} = f\left((1 - \varepsilon)x_n^{(i)} + \frac{\varepsilon}{2}[x_n^{(i-1)} + x_n^{(i+1)}]\right), \quad (3.11)$$

esta substituição não deve alterar qualitativamente nenhum dos resultados obtidos com a primeira forma do acoplamento (3.10).

O caso extremo de acoplamento não-local é chamado de *acoplamento global*, onde o sítio i acopla com a média de todos os sítios da rede, e por esse motivo também é chamado de acoplamento do tipo *campo médio* [8],

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{N - 1} \sum_{j=1; j \neq i}^N f(x_n^{(j)}), \quad (3.12)$$

onde N é o número de sítios na rede.

Outro exemplo de acoplamento não-local é o acoplamento tipo lei de potência, que leva em conta a distância de um sítio i em relação a outro sítio na rede

[30], onde cada sítio da rede pode estar acoplado com um grande número de sítios mais afastados,

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} [f(x_n^{(i+j)}) + f(x_n^{(i-j)})], \quad (3.13)$$

onde o parâmetro α ($\alpha \in [0, \infty)$) controla o alcance do acoplamento. O somatório expressa a contribuição dos sítios tanto à direita quanto à esquerda de um dado sítio e η representa um fator de normalização

$$\eta(\alpha) = 2 \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} = 2 \left(\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{N'^\alpha} \right), \quad (3.14)$$

onde

$$N' = \frac{N-1}{2}. \quad (3.15)$$

O sistema com um acoplamento do tipo lei de potência possui dois casos limites em relação ao valor de α (alcance do acoplamento):

- Acoplamento do tipo global quando o valor de $\alpha = 0$;
- acoplamento do tipo local para o valor de $\alpha \rightarrow \infty$.

Para $\alpha = 0$ temos $\eta = N - 1$ e podemos escrever a somatória na mesma forma do acoplamento global do tipo *campo médio* (3.12). Se $\alpha \rightarrow \infty$ somente os termos com $j = 1$ não desaparecem em ambas as somatórias, logo $\eta \rightarrow 2$ e apenas os sítios, $i + 1$ e $i - 1$ contribuem para o acoplamento, resultando no acoplamento local laplaciano futuro (3.10).

Existe também um modelo de mapas acoplados, chamado redes de *mundo pequeno* [13], em analogia com o fenômeno de *mundo pequeno* [2] que apresentam além das interações locais, um pequeno número de acoplamentos não-locais, distribuídos aleatoriamente sobre a rede [31], sendo uma interpolação entre redes conectadas regularmente e aleatoriamente [13]. Estas redes surgem, com frequência,

em uma série de sistemas com alto poder de complexidade. As interações não-locais estão presentes em fenômenos sociais, como redes de amigos, redes de colaboração entre artistas que atuaram juntos em um filme [2], contatos sexuais. Aparecem na biologia, por exemplo no metabolismo de células, redes de proteínas e conexões neurais [1]. Surgem nas malhas de distribuição de energia e telefonia, em desenhos de circuitos elétricos e em redes de relacionamento entre classes de uma linguagem de programação. Também estão presentes na *world wide web*, redes de hyperlinks entre documentos, roteadores ou emails e propagação de doenças [13].

3.2 Acoplamento local

Uma rede de mapas acoplados é um sistema dinâmico que pode ser usado para descrever variações no espaço e tempo em processos de interesse físico. Uma grande classe de sistemas pode ser modelada por uma equação de difusão e reação periodicamente forçada. Partindo do modelo unidimensional para uma variável de estado $u(x, t)$ [32],

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G(t)R(u), \quad (3.16)$$

onde $u = f(x, t)$, x é a posição, t é o tempo, D é a constante de difusão, R é a reação não linear e G é uma função periódica no tempo. Pode ser representada por uma frequência de perturbações impulsivas com período τ conforme

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau). \quad (3.17)$$

Integrando (3.16) sobre um intervalo infinitesimal $[n\tau - \varepsilon, n\tau + \varepsilon]$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{n\tau - \varepsilon}^{n\tau + \varepsilon} \frac{\partial u}{\partial t} dt - \int_{n\tau - \varepsilon}^{n\tau + \varepsilon} D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt - \int_{n\tau - \varepsilon}^{n\tau + \varepsilon} R(u) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau) dt = 0, \quad (3.18)$$

e como ε é muito pequeno, a integral com a segunda derivada espacial anula-se. Assim, fazendo a integração, obtem-se o seguinte resultado para a equação (3.18)

$$u(x, n\tau + \varepsilon) = u(x, n\tau - \varepsilon) + R(u(x, n\tau - \varepsilon)). \quad (3.19)$$

No intervalo $[n\tau + \varepsilon, (n + 1)\tau - \varepsilon]$, somente a difusão age sobre o sistema, assim derivando u em relação ao tempo t obtemos

$$\frac{du}{dt} = \frac{u(iw, (n + 1)\tau - \varepsilon) - u(iw, n\tau + \varepsilon)}{\tau}, \quad (3.20)$$

sendo τ a diferença entre os tempos $n + 1$ e n , w o intervalo espacial entre os sítios i e $i + 1$. Para

$$\frac{du}{dx} = \frac{u(i(w + 1), n\tau + \varepsilon) - u(iw, n\tau + \varepsilon)}{w}, \quad (3.21)$$

e

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{u((i + 1)w, n\tau + \varepsilon) - 2[u(iw, n\tau + \varepsilon)] - u((i - 1)w, n\tau + \varepsilon)}{w^2}, \quad (3.22)$$

na equação (3.16) temos

$$\frac{u(iw, (n + 1)\tau - \varepsilon) - u(iw, n\tau + \varepsilon)}{\tau} = D \frac{u((i + 1)w, n\tau + \varepsilon) - 2[u(iw, n\tau + \varepsilon)] - u((i - 1)w, n\tau + \varepsilon)}{w^2}. \quad (3.23)$$

Assim, definindo $u_n^{(i)} = u(ix, n\tau\varepsilon)$, encontramos o sistema para mapas acoplados

$$u_{n+1}^{(i)} = f(u_n^{(i)}) + a_O f(u_n^{(i)}) + a_L f(u_n^{(i-1)}) + a_R f(u_n^{(i+1)}), \quad (3.24)$$

onde o mapa local é

$$f(u) = u + R(u), \quad (3.25)$$

e

$$\begin{aligned} a_O &= -2\varepsilon, \\ a_L &= a_R = \varepsilon, \end{aligned} \quad (3.26)$$

com $\varepsilon = D\tau/w^2$, que é a constante de acoplamento [32]. Finalmente, substituindo os valores das equações (3.26) na equação (3.24) e trocando a variável u para x , temos o acoplamento para mapas chamado de laplaciano local na forma

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2}[f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)})], \quad (3.27)$$

onde ε a constante de acoplamento.

Devido às fronteiras da rede, no acoplamento local, utiliza-se condições de contorno que podem ser: fixas, periódicas, etc. Como o mapa tem a necessidade de um valor inicial, para que os próximos valores sejam obtidos por iterações, uma rede de mapas acoplados também necessita de valores iniciais, os quais podem ser: funções periódicas, funções aleatórias, gaussianas, constantes, etc.

3.2.1 Domínios e *kinks*

Para analisarmos de uma forma quantitativa o acoplamento local de mapas, utilizaremos o mapa logístico (2.3) onde $x_n \in [0, 1]$ e $r \in [1, 4]$, sendo r o parâmetro de controle e x_n a variável de estado. Consideraremos condições de contorno periódicas e usaremos o acoplamento (3.27).

Em uma rede de mapas acoplados, a dinâmica em um dado sítio será naturalmente perturbada pela presença dos demais sítios da rede, fazendo com que o diagrama de bifurcação da Figura 2.2 (sítio isolado) perca completamente sua estrutura quando o sítio passa a interagir com outros sítios da rede. A “lembrança” que um dado sítio guarda da dinâmica de quando o mesmo era isolado depende da intensidade do acoplamento ε [33].

Ao realizarmos o acoplamento local de mapas é possível verificar que a cada iteração, existem conjuntos de sítios denominados *domínios*, nos quais estes sítios que pertencem a um determinado conjunto, estão correlacionados espacialmente. Os domínios são separados entre si por *kinks* e *antikinks* e podem ser visualizados através dos gráficos variável de estado *versus* sítio. Para $r < 3$ o comportamento assintótico da rede é sempre um ponto fixo estável do mapa isolado para qualquer valor do acoplamento ε e independente das condições iniciais. Aumentando

o valor de r , a rede de mapas acoplados exibe duplicação de período dos domínios, e depois da cascata de duplicação, o sistema exibe comportamento caótico.

Para entender a formação dos domínios analisaremos um sistema desacoplado para o valor de r em que os mapas apresentam período 2. Devido às condições iniciais os sítios adjacentes podem ter soluções com fases diferentes em um dado instante de tempo, por exemplo, o sítio i pode exibir: $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots$, e o sítio $i+1$: $x_2^{(i+1)}, x_1^{(i+1)}, \dots$. Para o sistema acoplado esta estrutura persiste, mas os *kinks* são suavizados e estendidos sobre vários sítios da rede devido à difusão. Com o passar das iterações um *antikink* toma o lugar de um *kink* e vice-versa, formando um nodo estacionário centrado em um ciclo periódico instável, que foi estabilizado devido ao acoplamento [34]. Logo a estrutura dos domínios é fixa e depende das condições iniciais, havendo a coexistência de muitos atratores diferentes no sistema [32]. Na Figura (3.2) temos situações de padrões estacionários com os domínios apresentando comportamentos regulares. Alterando o valor da condição inicial ocorrem alterações nos domínios, indicando assim que o tamanho e a distribuição dos domínios dependem da condição inicial [9].

Variando o parâmetro de controle r (aumento da não-linearidade), ocorre uma diminuição na distância entre os *kinks* e os domínios maiores começam a se tornar instáveis e dividem-se em domínios menores. Na Figura (3.3) vemos esta diminuição quando variamos o parâmetro de controle de não linearidade de 3,5 para 3,57, respectivamente. Estes valores de r correspondem, no mapa desacoplado, ao regime de bifurcações próximo ao ponto de acumulação, a partir do qual inicia-se o regime caótico [9]. Quando aumentamos o valor do parâmetro de controle até um determinado valor acima deste ponto de acumulação r_∞ para o mapa isolado, há uma transição para o regime caótico em parte dos sítios da rede. Na Figura (3.3) podemos observar que no início do regime caótico ($r = 3,65$) a existência dos domínios é preservada podendo existir alguns domínios que apresentam regimes periódicos, e no decorrer do aumento da não linearidade ($r = 3,9$) a estrutura colapsa

pela fusão dos domínios.

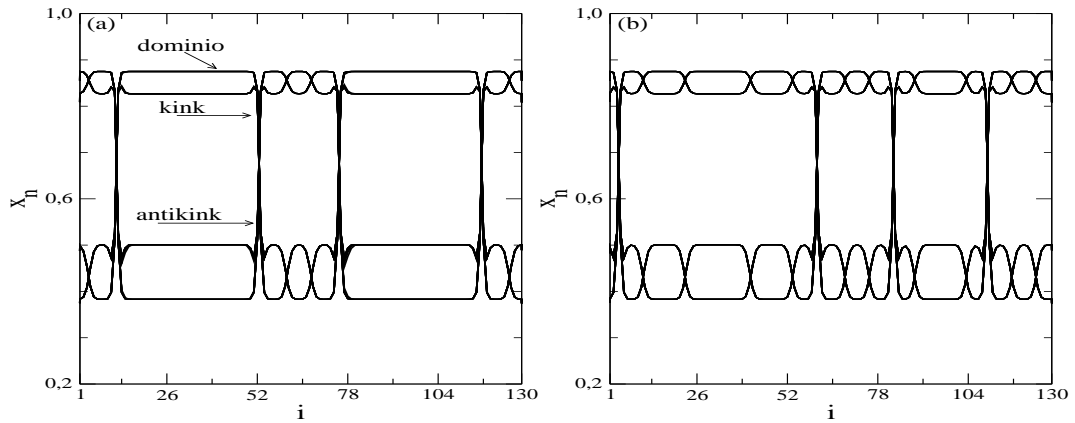


Figura 3.2: (a) condição inicial $x_0^i = 0,5 + 0,4\text{sen}(2\pi iN^{-1})$, (b) condição inicial $x_0^i = 0,25 + 0,2\text{sen}(2\pi iN^{-1})$. Considerando $N = 128$, $\varepsilon = 0,2$ e $r = 3,5$.

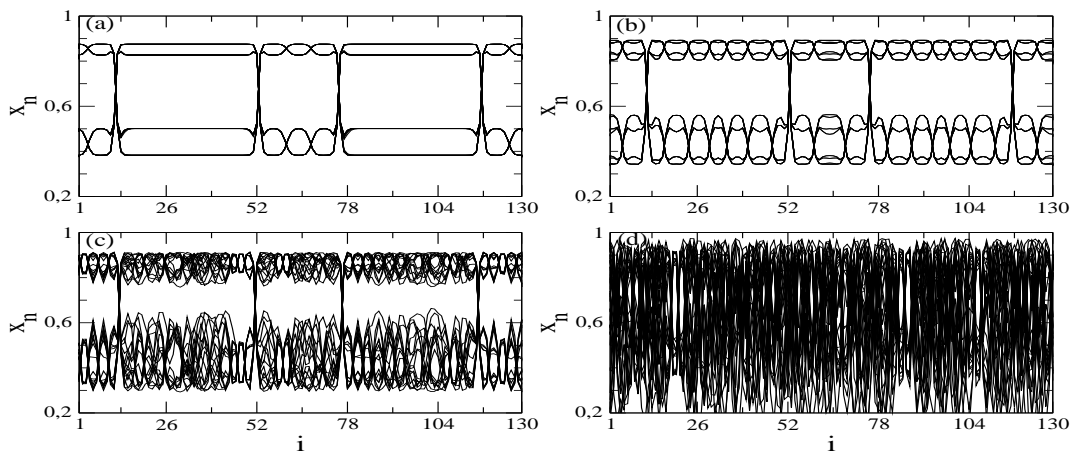


Figura 3.3: Sítio *versus* amplitude para parâmetros de controle (a) $r = 3,5$, (b) $r = 3,57$, (c) $r = 3,65$ e (d) $r = 3,9$. Considerando $\varepsilon = 0,2$ e $N = 128$.

Na Figura (3.4) a configuração dos domínios depende também do acoplamento, ocorrendo a diminuição do número de pontos fixos estáveis com o aumento do acoplamento.

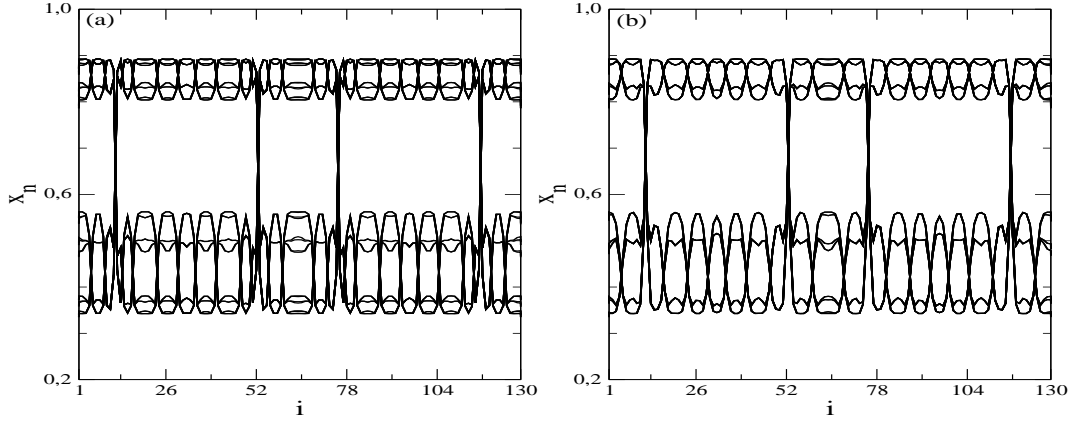


Figura 3.4: Sítio *versus* amplitude com (a) $\varepsilon = 0, 1$, (b) $\varepsilon = 0, 25$. Considerando $r = 3, 57$ e $N = 128$.

3.3 Acoplamento global

No acoplamento local o alcance do acoplamento é pequeno e o sítio i interage apenas com os seus primeiros vizinhos. O limite oposto corresponde ao acoplamento global, onde as interações tem alcance infinito [35], e de acordo com a maneira com que os sítios da rede influenciam o sítio i , temos diferentes formas de acoplamento global. Das formas possíveis podemos citar:

- Acoplamento global linear

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{N-1} \sum_{j=1; j \neq i}^N x_n^{(j)}; \quad (3.28)$$

- acoplamento global futuro

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j \neq i}^N f(x_n^{(j)}), \quad (3.29)$$

onde n é o tempo discreto, N o tamanho da rede e i ($i = 0, 1, 2, \dots, N$) é o índice de cada elemento na rede. Para o acoplamento global a dinâmica do sítio i é determinada pelo *campo médio* [8] de todos os sítios da rede, pois o termo de iteração é na verdade a média espacial de todos os sítios da rede.

O acoplamento global pode simular sistemas que possuem forças de longo alcance na Física e na Biologia [35] e recentemente podemos citar situações de um acoplamento do tipo global como a dinâmica *vortex* em fluidos (que possui iterações não lineares e um longo alcance) [36], a dinâmica neural que é um sistema não-linear com acoplamento global [37], o processamento de informação biológica e as possíveis aplicações em engenharia [37], em modelos de populações onde um aumento da conexão entre populações isoladas conduz a sincronização em fase da população local e um aumento perigoso para a extinção global [38].

3.4 Redes complexas

No mundo atual muitos sistemas têm sua estrutura formada por uma rede complexa que pode ser modelada através de um grafo. Devido a alta complexidade e dinâmica dessas redes, geralmente é inviável descrever a sua topologia para entender determinadas propriedades. Para isso existem várias representações na modelagem das redes reais, permitindo assim uma aproximação das redes para facilitar a compreensão de suas propriedades.

Em particular, três modelos destacam-se na representação destes tipos de redes. Modelos de redes aleatórias, em que as conexões em um conjunto de nós são

realizadas de forma aleatória [39], e eram, até muito recente, o modelo mais empregado. Nos últimos anos, modelos de redes de mundo pequeno [13, 40] e modelos de redes sem escala [39, 41] vêm sendo empregados como estruturas que melhor representam inúmeras características das redes complexas encontradas. Modelos de redes de mundo pequeno privilegiam a representação da distância média e do coeficiente de agregação de redes complexas, enquanto os modelos de redes sem escala enfatizam à representação da distribuição de conexões baseando-se em redes que apresentam crescimento [39, 42], ou seja, redes em que o número de elementos, ou nós, cresce com o tempo. Por outro lado, modelos de rede mundo pequeno, representam adequadamente uma série de redes complexas que se observam [13, 40], e podem ser construídas a partir de redes regulares, não requerendo o crescimento da rede.

3.4.1 Grafos aleatórios

Grafos são estruturas matemáticas que melhor representam redes reais. É uma noção simples, abstrata e intuitiva, usada para representar a idéia de alguma espécie de relação entre os *objetos*. Os grafos são úteis para representar várias estruturas que aparecem na prática, como exemplo, estruturação de dados, resolução e modelagem de problemas, abstração de problemas computacionais. Uma representação usual para um grafo é um conjunto de pontos, representando os nós, e linhas representando as conexões entre dois nós.

Os primeiros estudos sobre grafos e suas propriedades foram dos matemáticos húngaros Paul Erdős e Alfred Rényi [2, 43, 44], destacando-se os trabalhos sobre grafos aleatórios com conexões distribuídas aleatoriamente. Analisando a formação das redes sociais, eles demonstraram que bastava uma conexão entre cada um dos convidados de uma festa, para que todos estivessem conectados ao final dela e quanto mais ligações eram adicionadas, maior a probabilidade de serem gerados agrupamentos, ou seja, grupos de nós mais conectados. Portanto, uma festa poderia

ser um agrupamento de pessoas que de tempos em tempos estabeleciam relações com outros grupos.

Erdős e Rényi acreditavam que a conexão entre esses nós era aleatória, no sentido de que esses nós se agregavam aleatoriamente, concluindo que todos os nós de uma determinada rede, deveriam ter mais ou menos a mesma quantidade de conexões, ou igualdade nas chances de receber novas ligações constituindo-se, assim, como redes igualitárias [44]. Logo, quanto mais complexa era a rede analisada, maiores as chances dela ser aleatória.

Na teoria dos grafos aleatórios de Erdős, parte-se de um número previamente dado de nós e em seguida eles são conectados. Mais exatamente, parte-se de N nós e nenhuma ligação, e em seguida conecta-se aleatoriamente com probabilidade P cada par de nós (Figura 3.5). Essa probabilidade pode ser calculada como a fração entre as ligações atuais e a totalidade das ligações possíveis $[N(N - 1)/2]$. Num gráfico aleatório cada nó i possui um determinado número de ligações z_i . O número médio de ligações por sítio, ou a conectividade média $\langle z \rangle$ da rede (grafo), é dado por

$$\langle z \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i = \frac{1}{N} 2 \frac{P[N(N - 1)]}{2} = P(N - 1) \approx PN, \quad (3.30)$$

onde a aproximação final é válida para N muito grande, ou seja, $N \rightarrow \infty$.

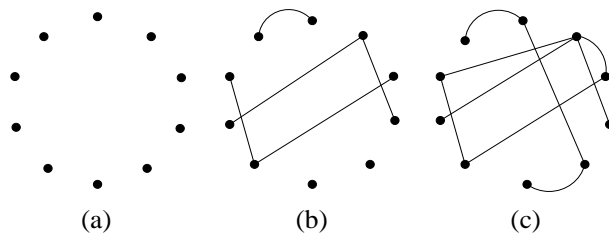


Figura 3.5: Construção de gráficos aleatórios com 10 vértices e conectando-os com probabilidade (a) $P = 0$, (b) $P \approx 0,1$ e (c) $P = 0,2$.

Uma das propriedades topológicas existente nesse tipo de espaço é o

diâmetro da rede que é a distância máxima entre um par de nós da rede. Para quase todos os valores da probabilidade P , todas as redes aleatórias com os mesmos valores de N e de P possuem o mesmo diâmetro, dado por

$$d = \frac{\ln(N)}{\ln(PN)} = \frac{\ln(N)}{\ln(\langle z \rangle)}. \quad (3.31)$$

A distância média entre dois nós quaisquer de uma rede aleatória, ou, mais especificamente, a menor distância média é definida como o menor número de nós entre eles. Também é uma função do número de nós N e da conectividade média $\langle z \rangle$ da rede aleatória. Logo, a distância média entre nós escala com essas quantidades da mesma forma que o diâmetro da rede

$$l \sim \frac{\ln(N)}{\ln(\langle z \rangle)}. \quad (3.32)$$

Para uma rede totalmente conectada, como em um acoplamento global de mapas, l é igual a 1 para qualquer número de elementos. Já em um acoplamento local de mapas, l é função do número de elementos da rede unidimensional N e do número de vizinhos z que se encontram conectados. Em geral, l varia proporcionalmente com respeito a N e inversamente com respeito a z e, portanto $l \rightarrow \infty$ quando $N \rightarrow \infty$. Na Tabela (3.2) vemos que em redes complexas, entretanto, obtêm-se valores muito pequenos de l , ou seja $l \ll N$, mesmo em redes com N muito grande.

Tabela 3.2: Valores de coeficientes de agregação, C , e distância média, l , medidos em algumas redes complexas, calculados por Watts e Strogatz [13].

Rede complexa	N	C	l
<i>C. elegans</i>	282	0,28	2,65
Rede de energia	4941	0,08	18,7
Atores de filmes	225226	0,79	3,65

Uma outra propriedade importante na teoria das redes é a existência de um coeficiente de agrupamento C comum em redes sociais, representado por

círculos de amigos ou conhecidos onde cada um dos elementos de um círculo conhece todos os outros elementos. Essa tendência natural de agrupamento pode ser quantificada pelo cálculo do coeficiente de agrupamento [13]. Seja um dado sítio da rede, o sítio i , que tenha z_i ligações com outros sítios da rede. Se todos os z_i vizinhos do sítio i , além dele mesmo, formassem um círculo fechado existiriam $[z_i(z_i - 1)/2]$ ligações entre eles. O coeficiente de agrupamento do sítio i é a razão entre o número de ligações que de fato existem entre seus vizinhos, E_i , e o número de ligações existentes se eles formassem um círculo fechado. O coeficiente de agrupamento da rede é definido como a média dos coeficientes de todos os sítios da rede, ou seja

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{2E_i}{z_i(z_i - 1)}. \quad (3.33)$$

O número de ligações que de fato existem entre os z_i vizinhos de um nó i é dado pelo produto $P[z_i(z_i - 1)/2]$. Assim, da equação (3.33) temos que o coeficiente de agrupamento de uma rede aleatória é

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{P[z_i(z_i - 1)]/2}{[z_i(z_i - 1)]/2} \quad (3.34)$$

$$C = P = \frac{\langle z \rangle}{N}. \quad (3.35)$$

De fato, a probabilidade de que dois vizinhos de um nó estejam ligados entre si é igual à probabilidade de que dois nós quaisquer da rede estejam ligados entre si. Em geral, cada sítio da rede possui um número próprio de ligações, isto é, de vizinhos. O número de vizinhos de um dado sítio é definido como sendo a conectividade do sítio z_i .

Quando consideramos redes em que os elementos diferenciam-se unicamente pela forma, ou topologia, de suas conexões, a característica mais simples de um nó é o seu grau, definido como o número de conexões z_i que o nó i apresenta. O grau médio de uma rede, \bar{z} , é a média dos valores z_i para todos os nós, de modo que os valores z_i obedecem a uma distribuição de conexões, $P(z)$, que é a probabilidade de um nó selecionado, aleatoriamente na rede, apresentar z conexões.

3.4.2 Redes de mundo pequeno

O conceito de mundo pequeno refere-se ao fato de que a distância média entre os sítios da rede é pequena (semelhante ao encontrado em redes aleatórias), onde dois sítios quaisquer, estão separados por uma distância relativamente pequena, apesar do grande tamanho das redes e apresenta um alto coeficiente de agregação (semelhante ao encontrado em redes regulares). Em geral, associa-se às redes de mundo pequeno um grande número de elementos e um número pequeno de conexões por nó.

Analisando as redes sociais como interdependentes umas das outras, é aceitável perceber que todas as pessoas estariam interligadas umas às outras em algum nível. O exemplo mais notório do conceito de mundo pequeno é o trabalho do sociólogo Stanley Milgram [45], na década de 60 que observou os graus de separação entre as pessoas [43, 44, 46]. Milgram entregou uma mensagem a várias pessoas escolhidas aleatoriamente nos Estados Unidos e determinou que cada mensagem chegasse a um destinatário, também escolhido aleatoriamente. As pessoas deviam entregar a mensagem a um conhecido que tivesse mais chances de fazê-la chegar ao destinatário. Neste trabalho Milgram concluiu que a distância média entre duas pessoas nos Estados Unidos era de seis pessoas, ou seja, em média a mensagem passava por seis pessoas entre a pessoa inicial e o destinatário.

Devido à forma do experimento de Milgram, pode-se dizer que o número seis não é provavelmente um valor preciso. O experimento certamente contém muitas fontes possíveis de erro. Entretanto, o resultado geral de que duas pessoas escolhidas aleatoriamente podem ser conectadas por uma cadeia curta de conhecidos tem sido verificado, e bastante aceito e referido como efeito de *mundo pequeno* [47].

O efeito de mundo pequeno aparece em outras redes, como por exemplo no jogo de Kelvin Bacon: *Os seis graus de Kevin Bacon*. Por ele ser um artista

que não foi o ator principal de muitos filmes, Bett Tjaden levou-o ao reconhecimento internacional com a criação desse jogo. Este jogo consiste em se pensar em um ator ou atriz, e se ele atuou em um filme com Kelvin Bacon, então ele apresenta um número de Bacon que é um. Se ele nunca filmou com Kelvin Bacon, mas atuou com alguém que atuou com Bacon, então ele tem número dois, e assim por diante. Tjaden, usando a internet, determinou que o maior número de Bacon, para qualquer nacionalidade, é oito [48].

A partir do experimento de Milgram, Watts e Strogatz [13] descobriram que as redes sociais apresentavam padrões altamente conectados, tendendo a formar pequenas quantidades de conexões entre cada indivíduo, pois cada um de nós tem conhecidos e amigos em vários lugares do mundo, que por sua vez, têm outros conhecidos e amigos. Em grande escala, essas conexões mostram a existência de poucos graus de separação entre os indivíduos no planeta. Além disso, Watts e Strogatz mostraram que bastavam poucos ligações entre vários agrupamentos para formar um mundo pequeno numa grande rede, transformando a própria rede num grande agrupamento [43].

Watts e Strogatz criaram um modelo semelhante ao de Erdős e Rényi, onde as conexões eram estabelecidas entre as pessoas mais próximas e algumas conexões estabelecidas de modo aleatório entre alguns nós, transformando a rede num mundo pequeno [2, 49]. Eles sugeriram uma rede unidimensional com condições de contorno periódicas, como mostra a Figura (3.6), onde ocorre uma reconexão aleatória, com uma probabilidade P .

Se o valor da probabilidade P for zero, $P = 0$, a rede não ganha nenhuma ligação de longo alcance e permanece como uma rede regular. Se $P = 1$, as ligações de curto alcance são substituídas por ligações de longo alcance e a rede aproxima-se de um grafo aleatório. Para $0 < P < 1$, tem-se uma fração P de ligações de longo alcance e a estrutura da rede é um meio termo entre uma rede regular e uma

rede aleatória. O processo de criação de uma rede de mundo pequeno a partir de uma rede regular não altera o número total de ligações, nem a conectividade média da rede, uma vez que o processo de religação altera apenas o sítio final da ligação.

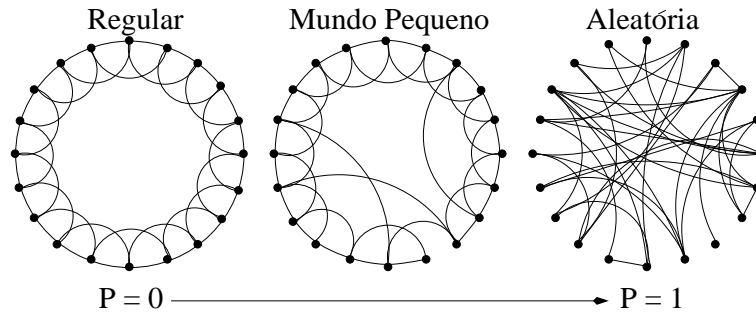


Figura 3.6: Modelo de mundo pequeno proposto por Watts e Strogatz [13] para $z = 4$ e $N = 20$. A rede passa de uma estrutura regular para uma estrutura aleatória com o aumento da probabilidade P .

No modelo de Watts e Strogatz existem variações, entre elas, uma foi proposta por Newman e Watts [50] (Figura 3.7), onde ligações entre nós escolhidos aleatoriamente foram adicionados à rede regular sem que as ligações existentes fossem retiradas. Sendo que, nem o número de ligações por nó, nem o número total de ligações, permanecem os mesmos na rede original, não ocasionando o aparecimento de porções de rede separadas do restante. No modelo de Watts e Strogatz é preservado o número de conexões original da rede, enquanto que no modelo de Newman-Watts a rede criada apresenta um número maior de conexões. Para valores suficientemente pequenos de P e grandes valores de N o modelo de Newman e Watts é equivalente ao modelo de Watts e Strogatz.

O coeficiente de agrupamento e a distância média entre os nós são funções da probabilidade de religação da rede P , ou seja, $C(P)$ e $l(P)$. Watts e Strogatz notaram que o comportamento destas funções apresenta variações semelhantes

para diversos tipos de redes regulares. No limite $P \rightarrow 0$, temos

$$l(0) \sim \frac{N}{z} \quad \text{e} \quad C(0) \approx \frac{3}{4}, \quad (3.36)$$

enquanto no limite $P \rightarrow 1$

$$l(1) \sim \frac{\ln(N)}{\ln(z)} \quad \text{e} \quad C(1) \sim \frac{z}{N}. \quad (3.37)$$

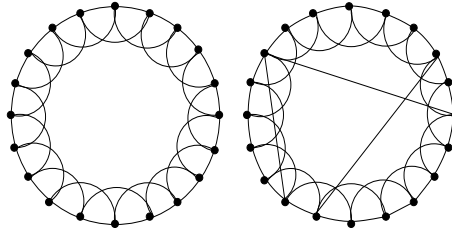


Figura 3.7: Rede regular e uma rede Newman-Watts produzida a partir dela.

A rede comporta-se como uma rede regular quando a probabilidade de religação é muito pequena, com um alto coeficiente de agrupamento e a distância média aumentando com o número de nós. Quando a rede se aproxima de uma rede aleatória, a distância entre os nós escala com o logaritmo de N , e a rede torna-se muito menos agrupada. Para os casos limites $P \rightarrow 0$ e $P \rightarrow 1$ vemos que em algum valor de P ocorre uma transição e as duas grandezas $C(P)$ e $l(P)$ mudam do comportamento característico de uma rede regular para o de uma rede aleatória.

As redes regulares apresentam um número fixo de conexões por nó. Já em uma rede de mapas globalmente acoplados com N elementos, cada nó encontra-se conectado a todos os demais e tem-se $z_i = \bar{z} = N$ para todo i . Em uma rede de mapas localmente acoplados, com N elementos e cada nó conectado a m vizinhos, tem-se $z_i = \bar{z} = m$ para todo i . Logo, modelos de rede de mundo pequeno, são construídos, aleatoriamente, a partir de uma rede regular devido ao alto coeficiente

de agregação e exibem a mesma distribuição de conexões que as redes aleatórias devido a distância média entre os nós ser pequena, onde o número de conexões segue a distribuição de Poisson [39]

$$P(z) = \frac{z^{-z} e^{-\bar{z}}}{z!}, \quad (3.38)$$

em geral, ainda associa-se às redes de mundo pequeno um grande número de elementos e um número pequeno de conexões por nó.

3.4.3 Redes sem escala

Na teoria de mundo pequeno, Watts tratava as suas redes sociais como redes aleatórias, ou seja, redes em que as conexões entre os nós eram estabelecidas de modo aleatório, exatamente como Erdős e Rényi. Entretanto, Barabási [3] demonstrou que as redes não eram formadas de modo aleatório. Ele acreditava que, como os estudos de Watts e Strogatz tinham apontado, existia uma ordem na dinâmica de estruturação das redes e algumas leis bem específicas. Essa lei, foi chamada por Barabási de “rich get richer” (ricos ficam mais ricos).

Em redes sem escala, quanto mais conexões um nó possuir, maiores as chances dele ter novas conexões, ou seja, a probabilidade de que um novo nó se conecte a outro já existente depende do número de ligações que este nó possui. Barabási chamou essa característica de ligação preferencial, onde um novo nó tende a se conectar com um nó pré-existente. Um exemplo dessa ligação preferencial em uma rede real é a rede de citações de artigos científicos, onde a probabilidade de que um novo artigo cite um artigo conhecido, e conseqüentemente muito citado, é muito maior do que a probabilidade de que ele cite um artigo menos conhecido (menos citado).

Deste modo, as redes não seriam constituídas de nós igualitários, com a possibilidade de ter, mais ou menos, o mesmo número de conexões. Ao contrário,

tais redes possuiriam nós que seriam altamente conectados e uma grande maioria de nós com poucas conexões como pode ser visto na Figura (3.8). Redes com essas características foram chamadas de redes sem escala.

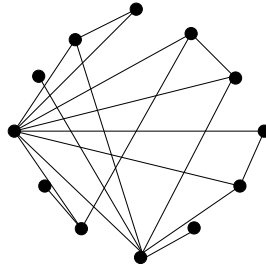


Figura 3.8: Exemplo de rede sem escala com $N = 12$ e $z = 18$. Na figura temos a maioria dos nós estabelecendo poucas conexões, enquanto poucos são altamente conectados.

A análise de redes reais mostrou que várias redes são do tipo sem escala (*scale-free networks*), onde estas redes possuem um pequeno número de nós com um grande número de conexões e sendo a probabilidade $P(z)$ de um nó possuir z arestas, têm sua distribuição de conectividades regida por uma lei de potências [39],

$$P(z) \sim z^{-\gamma}, \quad (3.39)$$

sendo γ o expoente de distribuição da rede.

Tal distribuição de conectividade tem sido encontrada em diferentes contextos e utilizada no estudo da dinâmica de redes, com o objetivo de oferecer uma teoria universal para a evolução das redes, por exemplo, na *world wide web*, internet, rede de citações de artigos, rede de colaboração científica e de atores de filmes.

Capítulo 4

Memórias em redes de mapas acoplados

Neste trabalho considera-se redes de mapas acoplados [51] com o objetivo de analisar a formação de memórias em um sistema dinâmico com muitos graus de liberdade. O sistema é descrito por uma equação de difusão discretizada, e que armazena memórias, podendo ser comparado com uma rede neural [1], que é um sistema dinâmico com parâmetros ajustáveis, o qual armazena padrões que minimizam a energia funcional do sistema.

A possibilidade da formação de memórias foi estudada por Coppersmith [11] para explicar o experimento de uma onda de densidade de carga (ODC) em cerâmicas semicondutoras de $NbSe_3$. Neste experimento a memória codificada manifesta-se como a sincronização da resposta a um trem de pulsos elétricos periódicos tal que V/I (V = voltagem, I = corrente da onda de densidade de carga, proporcional a velocidade da onda de densidade de carga v) diminui quando cada pulso cessa [11, 52]. A onda de densidade de carga (ODC) “recorda” a duração do pulso e ajusta a resposta para estar sincronizada com o pulso, Coppersmith propôs o efeito das memórias como assinaturas de processos que ocorrem em muitos sistemas dinâmicos [52] e estudou a resposta da cerâmica semicondutora $NbSe_3$ quando sujeita a pulsos elétricos. A resposta do sistema (o padrão formado), é tal que minimiza

a energia funcional do sistema.

Para explicar a formação de memórias de curta duração foi proposta uma rede de mapas acoplados com pulsos periódicos. A rede recebe uma seqüência de pulsos durante um curto espaço de tempo e posteriormente perde quase toda a informação quando a perturbação externa é desligada. O sistema é deterministicamente forçado para um ponto fixo, e uma vez que este ponto fixo é atingido, não é mais possível recuperar as memórias de curta duração. Logo, é possível manter as memórias transientes adicionando um ruído ao sistema, já que múltiplas memórias são observadas em amostras da cerâmica semicondutora de $NbSe_3$, quando é feito um arranjo que induz ruído ao experimento.

A forma do acoplamento que utilizaremos é dada por

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \text{int}\{K[f(x_n^{(i+1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i-1)})] - (1 + A_n)\}, \quad (4.1)$$

onde o tempo n é discreto ($n = 0, 1, 2, \dots$), i é o índice referente as posições dos mapas na rede ($i = 1, 2, \dots, N = \text{tamanho do sistema}$), K é o parâmetro de acoplamento entre os mapas, $f(x)$ é o mapa característico de cada sítio, x é a variável de estado, que pode representar a posição, a fase ou outra propriedade física do sistema e $\text{int}\{z\}$, é uma função descontínua que retorna o maior inteiro igual ou menor do que z . A função $\text{int}\{z\}$ surge na equação (4.1), pois a cada final de pulso as partículas estão em um potencial mínimo que com o decorrer das iterações formará um padrão na rede (padrão das memórias). Esta equação descreve a dinâmica de uma onda de densidade de carga (ODC) e está relacionada a modelos de uma variedade de sistemas dinâmicos [53, 54].

A equação (4.1) descreve a dinâmica das posições de N partículas em um poço de potencial periódico (Figura 4.1), com as partículas vizinhas acopladas por molas de constante elástica $K < 1$, onde todas as partículas estão na presença de um forçamento periódico externo da forma $(1 + A_n)$.

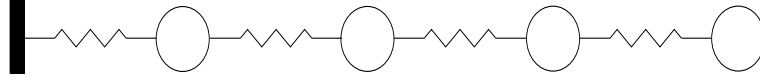


Figura 4.1: Partículas acopladas com seus vizinhos através de molas elásticas.

Para observarmos as formações das memórias utilizaremos a variável de curvatura $c_n^{(i)}$, que é a segunda derivada da variável de estado (vide equação 3.9)

$$c_n^{(i)} = K \left[f(x_n^{(i+1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i-1)}) \right], \quad (4.2)$$

sendo que podemos verificar que a rede apresenta um padrão, ou memória, quando $c_n^{(i)}$ torna-se constante em uma determinada região.

Utilizando as equações (4.1) e (4.2), podemos verificar a formação das memórias permanentes (valores finais das variáveis de curvatura e valores transientes) e das memórias de curta-duração, para 10 mapas acoplados localmente em uma rede unidimensional com uma extremidade fixa e outra livre (Figura 4.2)

$$\begin{cases} x_n^{(0)} = 0 \\ x_n^{(N+1)} = x_n^{(N)}, \end{cases} \quad (4.3)$$

onde a dinâmica do mapa isolado é linear $f(x) = x$, e aplicando pulsos A_n em ciclos que se repetem com valores 9 e 10 ($A_1 = 9, A_2 = 10, A_3 = 9, A_4 = 10, \dots$), verifica-se que os sítios da rede, após um determinado número de iterações, armazenam certos níveis de memória. Elas são provenientes dos pulsos, que ocasionam na variável de curvatura $c_n^{(i)}$, com o decorrer das iterações, valores constantes. Para os valores de $c_n^{(i)} = 1$ a $c_n^{(i)} = 9$ temos memórias transientes, enquanto para o valor de $c_n^{(i)} = 10$ temos uma memória permanente.

Para compreender como as memórias formam-se, necessitamos olhar para Figura (4.2). Inicialmente, cada pulso A_n causa um incremento de mesmo valor para cada sítio $x_n^{(i)}$, menos para o mapa acoplado na extremidade fixa ($x_n^{(0)} = 0$), na qual começa apresentar um aumento da variável de curvatura $c_n^{(i)}$. Com o passar

das iterações a variável de curvatura aumenta cada vez mais até que o acoplamento entre o primeiro sítio e a extremidade fixa torna-se grande o bastante para manter o valor da variável de curvatura constante sobre a aplicação de $A_1 = 9$. Depois de algumas iterações o acoplamento não é mais suficiente para mudar a ação do forçamento ($A_2 = 10$), gerando um aumento da variável de curvatura até a memória permanente. Isso ocorre para o $c_n^{(2)}$, $c_n^{(3)}$ e para os outros $c_n^{(i)}$. Deste modo a variável de curvatura estende-se para todos os valores inteiros dos $c_n^{(i)}$, e ao final de um longo tempo, ocorre uma saturação [11, 55], $c_n^{(i)} = 10$.

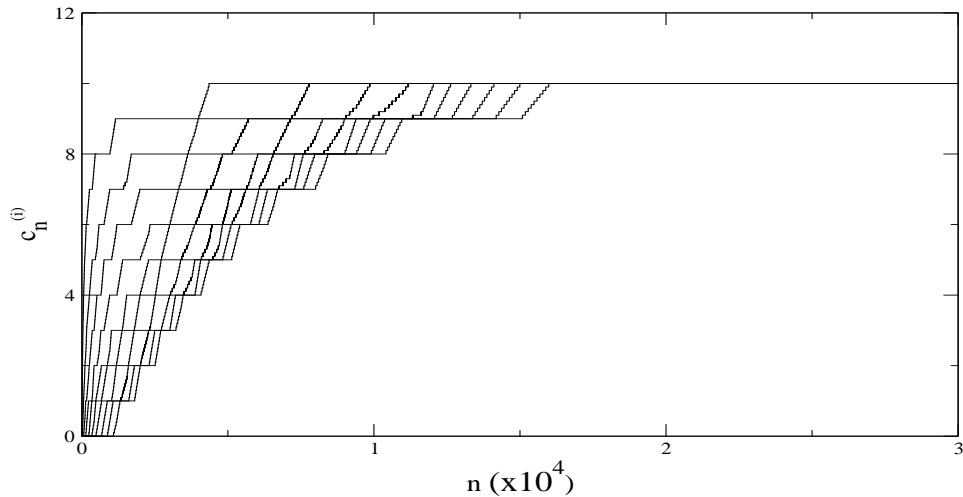


Figura 4.2: $c_n^{(i)} \times n$. O tamanho da rede é $N = 10$, com $K = 0,01$, $A_n = 9$ para n ímpar e $A_n = 10$ para n par e a função é linear $f(x) = x$.

Utilizando a Figura (4.2), podemos observar que as memórias transientes são formadas durante um número determinado de iterações e posteriormente perde-se toda a sua informação, não podendo ser mais recuperada. À medida que o tempo (n) evolui, a variável de curvatura é forçada para um ponto fixo, onde ficará enquanto o pulso periódico estiver agindo sobre o sistema [56].

4.1 Tempo transiente das memórias

O tempo transiente para obtenção da memória permanente, depende de certos parâmetros do sistema. Esta variação no tempo e nos padrões das memórias ocorre devido a certas características da rede (tamanho da rede N , constante de acoplamento K , a função que descreve o mapa $f(x)$ e o valor do forçamento A_n). As redes maiores possuem memórias transientes com um tempo maior de duração do que as redes menores (Figura 4.3) e conseqüentemente as redes maiores necessitam de um tempo maior para apresentar um valor final constante para a variável de curvatura.

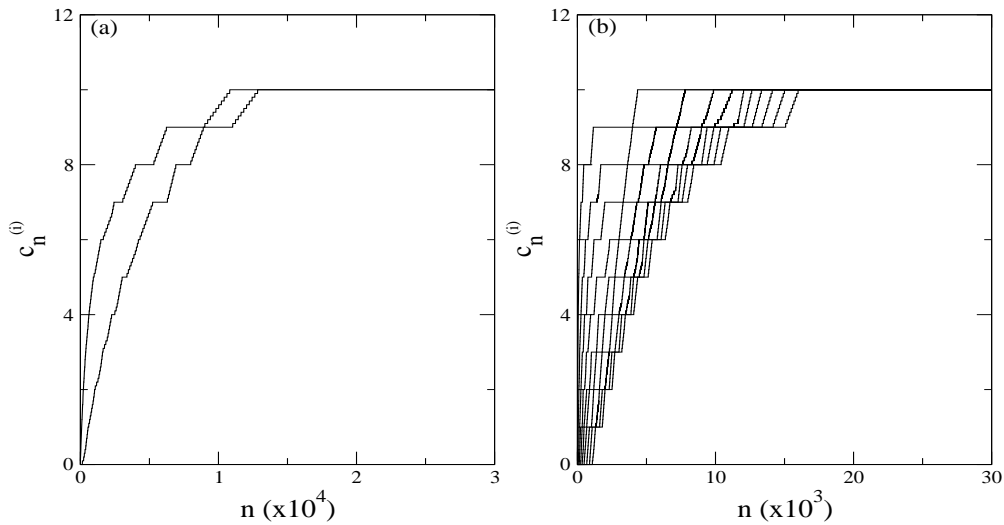


Figura 4.3: $c_n^{(i)}$ x n , com $K = 0,01$, $A_n = 9$ para n ímpar e $A_n = 10$ para n par e $f(x) = x$. (a) $N = 2$ e (b) $N = 10$.

Podemos observar na Figura (4.3), que para uma rede de $N = 2$ as memórias transientes quase não estão presentes no sistema. Em uma rede de $N = 10$, ocorre o aparecimento das memórias transientes e o tempo necessário para os sítios

atingirem o valor final da variável de curvatura é maior do que em uma rede com $N = 2$. A Figura (4.3) mostra que o tempo necessário para o sítio i atingir o valor permanente da variável de curvatura $c_n^{(i)} = 10$, varia em relação ao tamanho da rede.

O tempo necessário para o sítio i atingir o padrão final das memórias depende de sua posição na rede [55]. Os sítios mais distantes da extremidade fixa ($x_n^{(0)} = 0$), necessitam de um tempo maior para atingir o valor final da memória, como pode ser observado na Figura (4.4).

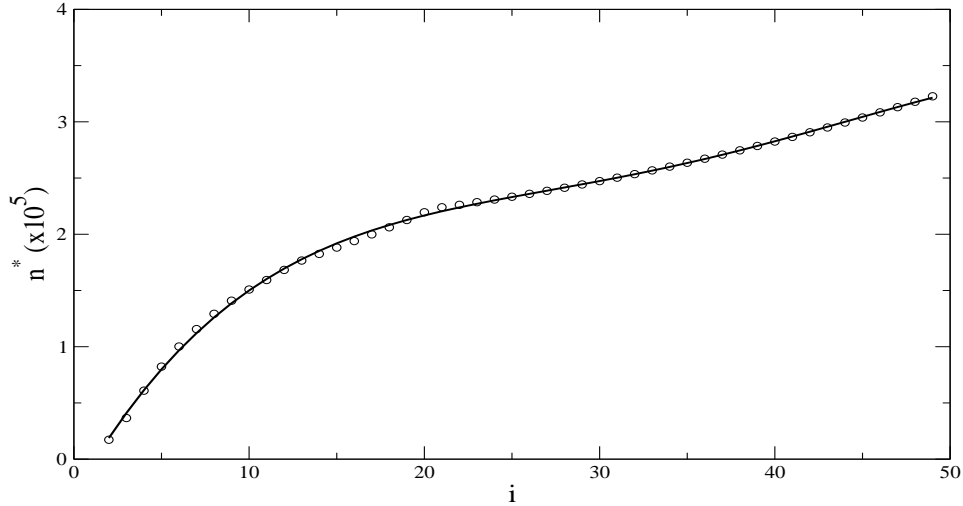


Figura 4.4: n^* x i , para uma rede $N = 50$, $K = 0,01$ e $A_n = 10$. Uma extremidade fixa $x_n^{(0)} = 0$ e outra extremidade livre $x_n^{(N+1)} = x_n^{(N)}$.

Na Figura (4.4) temos n^* x i , com uma rede de tamanho $N = 50$, $K = 0,01$ e $A_n = 10$. Para estudar e entender como a distância do sítio i em relação a extremidade fixa influencia no tempo (n^*) necessário para que a variável de curvatura do sítio i atinja um valor permanente, obtemos a seguinte relação

$$n^*(i) = a_0 + a_1i + a_2i^2 + a_3i^3 + a_4i^4, \quad (4.4)$$

onde a_m ($m = 0, 1, 2, 3, 4$) são os coeficientes do polinômio. A equação (4.4) foi obtida por meio de um ajuste polinomial na curva da Figura (4.4) e os valores dos coeficientes do polinômio de quarta ordem, são apresentados na Tabela (4.1).

Tabela 4.1: Valores das constantes do ajuste polinomial da equação (4.4).

Constante	Valor
a_0	-31873
a_1	27537
a_2	-1146,3
a_3	22,731
a_4	-0,15926

A Figura (4.4) mostra que o tempo para a variável de curvatura atingir o valor permanente varia de forma não-linear a medida que nos afastamos da extremidade fixa [55]. Logo o tempo aumenta muito rapidamente para os sítios próximos da extremidade livre. Então se queremos uma rede onde as memórias sejam formadas rapidamente, temos que escolher redes pequenas, pois desta maneira os últimos sítios da rede (extremidade livre) necessitam de um tempo menor para atingir o valor final dos padrões das variáveis de curvatura ($c_n^{(i)}$).

Outro parâmetro do sistema que influencia no tempo transiente (n^*) para obtenção do valor permanente da variável de curvatura (padrões finais das memórias) é o valor da constante de acoplamento (constante elástica da mola) K . Para valores pequenos da constante K da mola o tempo (n^*) aumenta rapidamente, já para constantes da mola maiores o tempo (n^*) diminui [55].

A Figura (4.5) indica como varia n^* , para o sítio $i = 10$, em função da constante de acoplamento K da rede, para um rede de $N = 10$. Esse comportamento é semelhante para todos os sítios da rede. Ela também sugere uma forma de controlar o tempo (n^*) das memórias, seria diminuir ou aumentar o acoplamento entre os sítios

vizinhos. A função que descreve n^* x K segue uma lei de potência

$$n^{*(i)} = b^{(i)} K^{\beta(i)}, \quad (4.5)$$

onde $\beta(i) = -1.0016$, $b^{(i)} = 131,87$, coeficiente de correlação igual a -0.9999981 e $i = 10$.

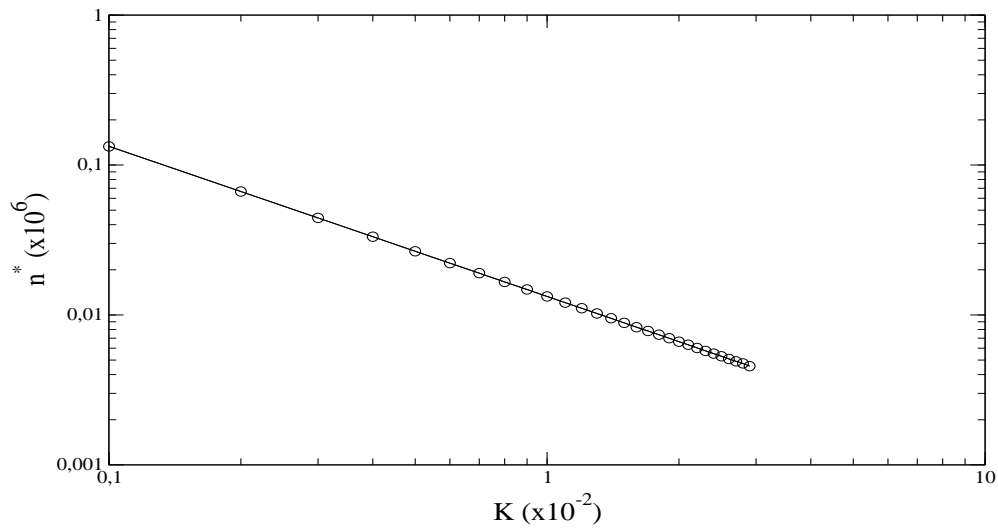


Figura 4.5: n^* x K , para uma rede $N = 10$, $i = 10$ e $A_n = 10$ para todos os n e $f(x) = x$.

Existem outras maneiras de variar o tempo transiente para obtenção do valor final da memória. Uma delas é a presença de um termo não-linear na função que descreve o mapa local, como pode ser visto na próxima seção.

4.2 Padrões das memórias

Alterando certas características da rede podemos observar na Figura (4.6) a formação de diferentes padrões de memórias em uma rede de mapas acoplados. Para analisar a formação destes diferentes padrões nos valores das memórias em rede de mapas acoplados, Batista, Viana e Lopes utilizaram em seu trabalho [55] no lugar da variável de estado nas equações (4.1) e (4.2) a função

$$f(x) = x + rx^2, \quad (4.6)$$

com $r > 0$ controlando a não-linearidade do sistema, N sendo o tamanho da rede, n o tempo discreto, K a constante de acoplamento e A_n o forçamento externo.

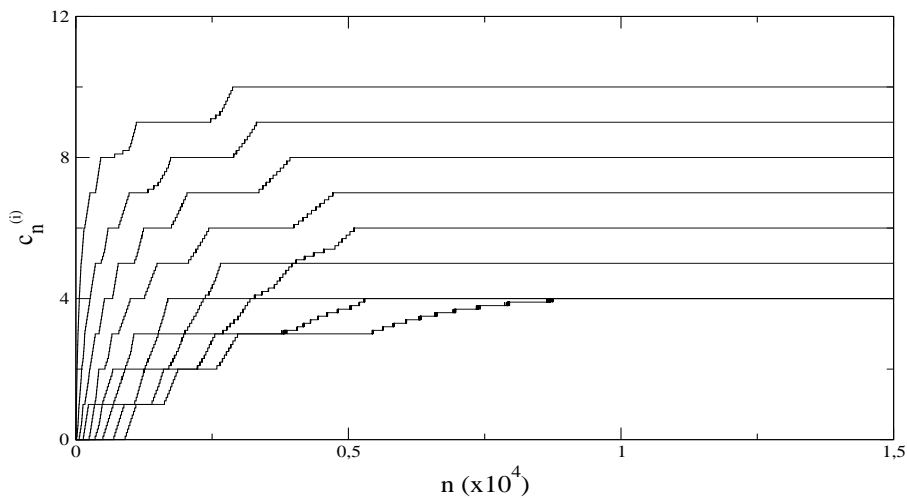


Figura 4.6: $c_n^{(i)}$ x n . O tamanho da rede é $N = 10$ com $K = 0,01$ e $A_n = 10$ para qualquer n , condições iniciais aleatórias, com uma extremidade fixa e uma livre. Sendo a função $f(x) = x + rx^2$, com $r = 10^{-8}$.

Como para $r = 0$, o mapa isolado apresenta um contínuo de pontos fixos estáveis, com o inserimento do termo não-linear $r = 10^{-8}$ a variável de estado

varia de forma não linear, dependendo do parâmetro r . No gráfico do mapa isolado de x versus $f(x)$, pode ser observado que o mapa fica muito próximo da reta $f(x) = x$. Esta pequena variação $x_n^{(i)}$ no mapa isolado, quando acoplado, faz surgir memórias isoladas e grupos de memórias com valores diferentes. A Figura (4.6) mostra sítios com memórias diferentes para a realização do acoplamento com o mapa fracamente não-linear ($r = 10^{-8}$). Apesar do termo não-linear ser pequeno $r = 10^{-8}$ os valores das variáveis de estado são da ordem de 10^4 , então o termo não-linear, embora pequeno é muito importante para a dinâmica do sistema [55].

Com a presença do termo não-linear as variáveis de estado tendem a sincronizar em amplitude, pois começam a apresentar o mesmo valor da variável de estado, e a medida em que aumentamos o termo que controla a não linearidade do sistema ($r > 10^{-8}$), as variáveis de estado sincronizam cada vez mais, como pode ser observado na Figura (4.7).

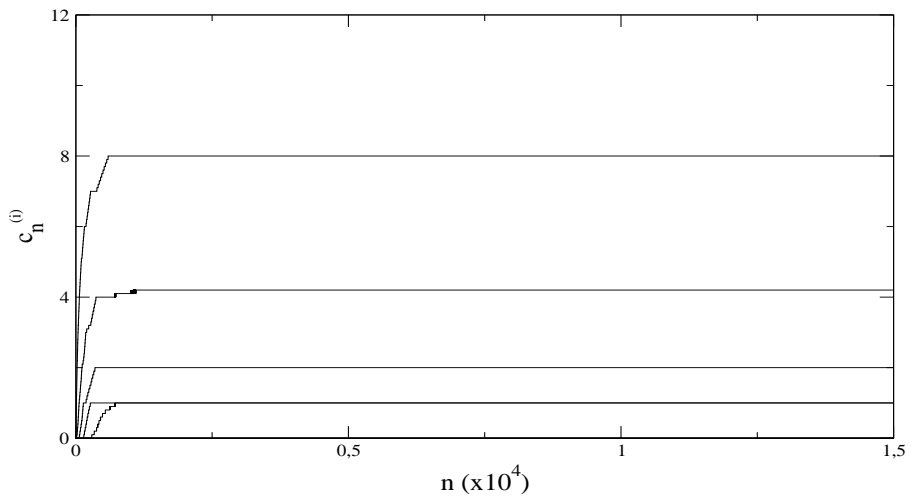


Figura 4.7: $c_n^{(i)}$ x n . O tamanho da rede é $N = 10$ com $K = 0,01$ e $A_n = 10$ para qualquer n , condições iniciais aleatórias, com uma extremidade fixa e uma livre. Sendo a função $f(x) = x + rx^2$, com $r = 10^{-6}$.

Deste modo as variáveis de curvatura tendem a se anularem pois os valores de $x_n^{(i)}$ encontram-se cada vez mais próximos [55] e podemos obter diferentes padrões alterando o forçamento do sistema, pois o valor final da variável de curvatura depende do forçamento.

4.3 Memórias com conexões aleatórias

Nesta seção analisaremos a formação de memórias em uma rede de mapas acoplados, inserindo na equação (4.1) conexões aleatórias $\mathcal{M}^{(i)}$, ou seja,

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \text{int} \left\{ K \left[f(x_n^{(i+1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i-1)}) + \mathcal{M}^{(i)} \right] - (1 + A_n) \right\}, \quad (4.7)$$

onde o tempo n é discreto ($n = 0, 1, 2, \dots$), i é o índice referente as posições dos mapas na rede ($i = 1, 2, \dots, N = \text{tamanho do sistema}$), K é o parâmetro de acoplamento entre os mapas, x é a variável de estado, $\text{int}\{z\}$ uma função descontínua que retorna o maior inteiro igual ou menor do que z e $f(x) = x + rx^2$ é o mapa característico de cada sítio com $r > 0$ controlando a não-linearidade do sistema.

Para observarmos a formação de memórias com conexões aleatórias, utilizaremos a variável de curvatura $c_n^{(i)}$ definida pela relação

$$c_n^{(i)} = K \left[f(x_n^{(i+1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i-1)}) + \mathcal{M}^{(i)} \right], \quad (4.8)$$

onde as conexões aleatórias são dadas por

$$\mathcal{M}^{(i)} = \sum_j \left\{ \left[f(x_n^{(j)}) - f(x_n^{(i)}) \right] I_{ij} \right\}, \quad (4.9)$$

sendo j o índice dos sítios escolhidos aleatoriamente, onde $j \neq i$, $j \neq i + 1$ e $j \neq i - 1$. Os termos aleatórios ou de conexões não-locais são representados pelos elementos da matriz conectividade simétrica I_{ij} . Estes elementos da matriz são 1 e 0, que nos dizem se os sítios $x^{(i)}$ e $x^{(j)}$ estão ($I_{ij} = 1$) ou não ($I_{ij} = 0$) conectados. Para uma

rede com $N = 10$ temos a seguinte matriz de conexão

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nesta matriz de conexão os elementos da última coluna e da última linha são sempre nulos porque o sítio i está conectado apenas com o $(n - 1)$ sítio (penúltimo sítio), representando assim o sítio que está na extremidade livre. Os elementos da diagonal principal da matriz de conexão são nulos porque o sítio não se conecta com ele mesmo, e os elementos da diagonal inferior e superior da matriz são sempre nulos pois expressam as conexões locais e esta matriz de conexão representa as conexões não-locais. Esta matriz de conexão é simétrica onde a conexão que vai do sítio i para o sítio j é a mesma que vai no sentido contrário, por exemplo, os elementos $a_{35} = a_{53} = 1$, significam que os sítios 3 e 5 estão conectados e os elementos $a_{49} = a_{94} = 0$, significam que os sítios 4 e 9 não estão conectados.

Na Figura (4.8) para 10 mapas acoplados por molas de constante elástica K em uma rede unidimensional com conexões aleatórias, com uma extremidade fixa e outra livre ($x_n^{(0)} = 0$ e $x_n^{(N+1)} = x_n^{(N)}$), calculamos o tempo médio τ para o sistema atingir o valor da memória permanente em função da probabilidade P , sendo P o número de conexões da rede dividido pelo número máximo de possíveis

conexões e

$$\tau = \frac{\sum_{m=1}^h n_m^*}{h}, \quad (4.10)$$

onde n^* é o tempo em que todos os sítios da rede já atingiram a memória permanente, h é o número de configurações iniciais da matriz I .

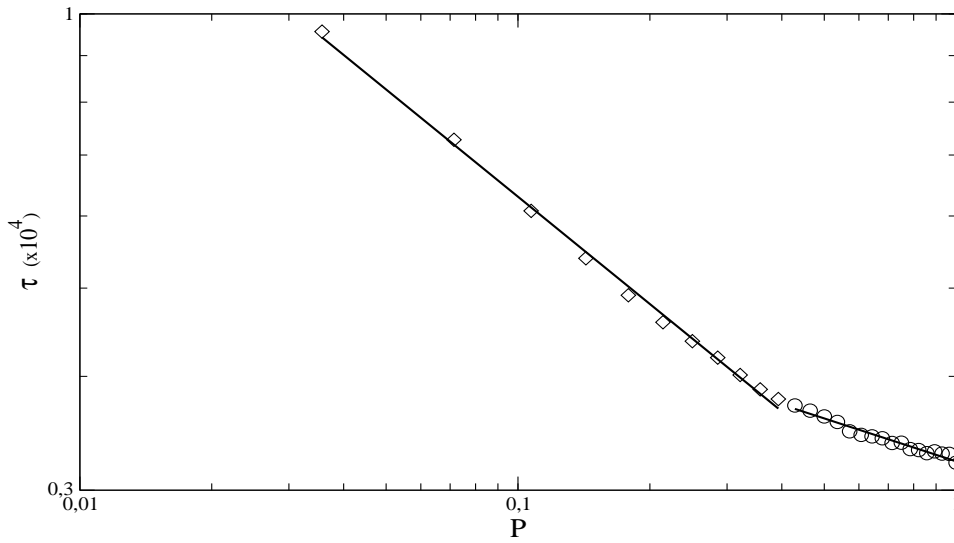


Figura 4.8: $\tau \times P$, com $N = 10$, $r = 0$, $A_n = 10$, $K = 0,01$ e $h = 50$. Para $P = 0$ o acoplamento é local e $P = 1$ temos o acoplamento global.

Analisando a dependência do tempo médio τ para que a rede atinja a memória permanente, com a probabilidade P que isto ocorra, fixamos a intensidade dos pulsos em $A_n = 10$ e o tamanho da rede em $N = 10$. Verificamos que tal dependência ocorre em forma de uma lei de potência

$$\tau = \beta P^\gamma, \quad (4.11)$$

para $P(0 \text{ a } 0,4)$, quadrados, temos $\gamma = -0,39132$, $\beta = 2558,4$ e coeficiente de

correlação igual a -0.9986151 e para $P(0, 4$ a $1)$, círculos, temos $\gamma = -0,1564538$, $\beta = 3227,2$ e coeficiente de correlação igual a -0.9842179 .

Na Figura (4.9) vemos que a medida que aumentamos o valor da constante de acoplamento da mola K o valor do coeficiente angular permanece aproximadamente constante.

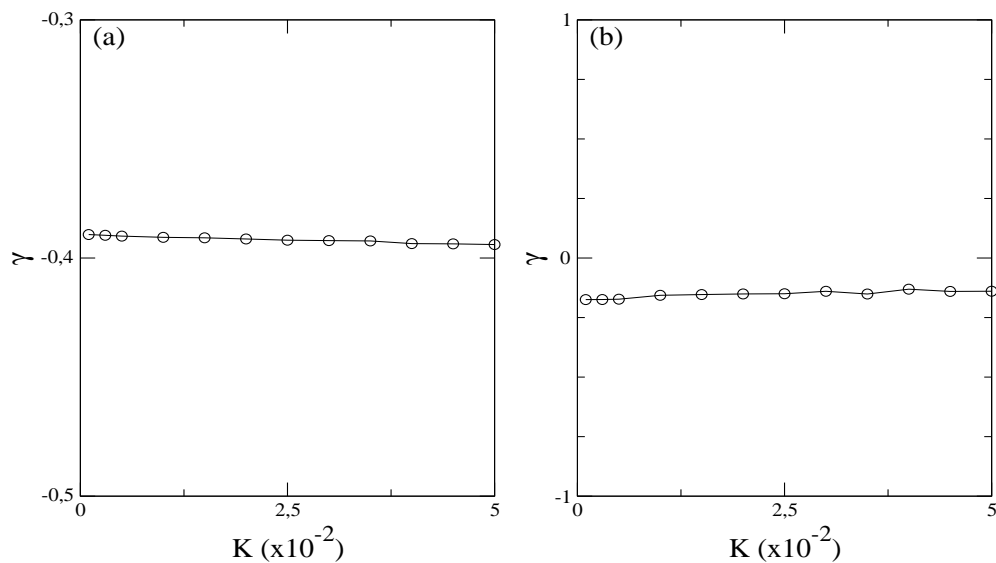


Figura 4.9: $\gamma \times K$, com $N = 10$, $r = 0$, $A_n = 10$ e $h = 50$. (a) $P(0$ a $0,4)$, (b) $P(0,4$ a $1)$.

Para a formação de memórias com conexões aleatórias e parâmetro de não linearidade diferente de zero, utilizamos a variável de curvatura média da rede c_L , equação (4.12), para analisarmos se as conexões exibem uma memória permanente ($c_L = 10$) ou múltiplas memórias ($c_L < 10$). Também analisamos o desvio padrão da rede (σ_L) em relação a média, equação (4.13), para verificarmos se existe ou não apenas uma memória. Quando $c_L = 10$ não existem múltiplas memórias e se $\sigma_L \neq 0$

teremos a ocorrência de múltiplas memórias,

$$c_L = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \overline{c_n^{(j)}}, \quad (4.12)$$

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\overline{c_n^{(j)}})^2 - c_L^2}. \quad (4.13)$$

A Figura (4.10) mostra que a medida que o valor de P aumenta necessita-se de um menor valor de K para obter a memória permanente $c_L = 10$. Para valores de $K \geq 0,01$ o valor médio da variável de curvatura da rede (c_L) é aproximadamente constante e o desvio padrão em relação a média da rede (σ_L) é próximo de zero.

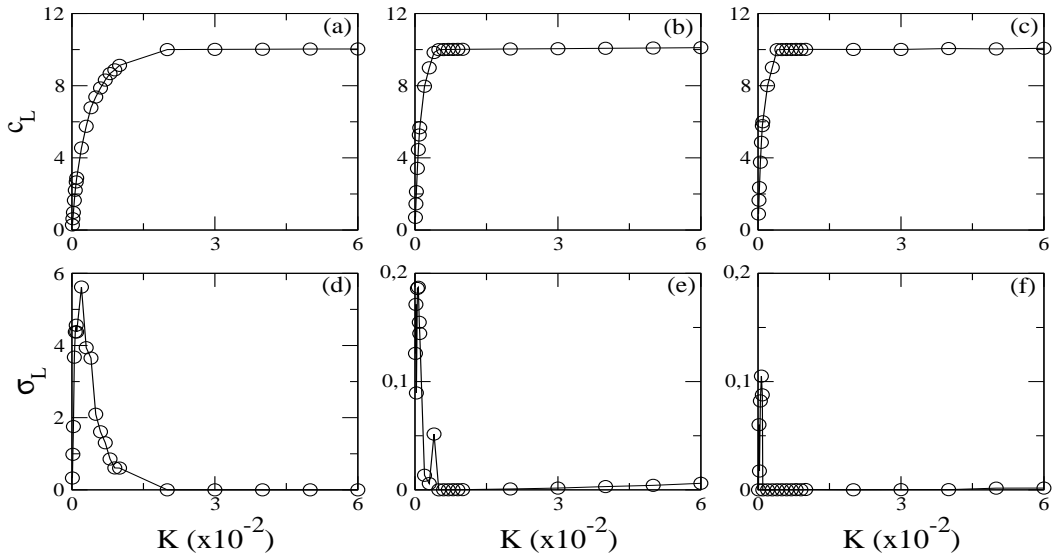


Figura 4.10: $c_L \times K$; $\sigma_L \times K$. Sendo $N = 10$, $A_n = 10$ e $r = 10^{-9}$. $P = 0$ nas figuras (a) e (d); $P = 0,5$ nas figuras (b) e (e); $P = 1,0$ nas figuras (c) e (f).

Podemos também analisar a probabilidade P de termos memórias com conexões aleatórias indo para o valor da memória permanente ($c_L = 10$) em

função do parâmetro de não linearidade r do sistema. Na Figura (4.11) para valores de P e r acima da curva temos uma memória permanente ($c_L = 10$), não havendo múltiplas memórias. Quando $r < 3 \cdot 10^{-10}$ a rede apresenta a formação de uma memória permanente em $P = 0$. Para $r > 3 \cdot 10^{-10}$ surgem múltiplas memórias permanentes, e inserindo conexões aleatórias é possível obter apenas uma memória permanente no intervalo $3 \cdot 10^{-10} < r < 4 \cdot 10^{-9}$. Logo com o aumento do parâmetro de não-linearidade do sistema r , necessita-se de um número maior de conexões aleatórias para que a rede apresente uma memória permanente.

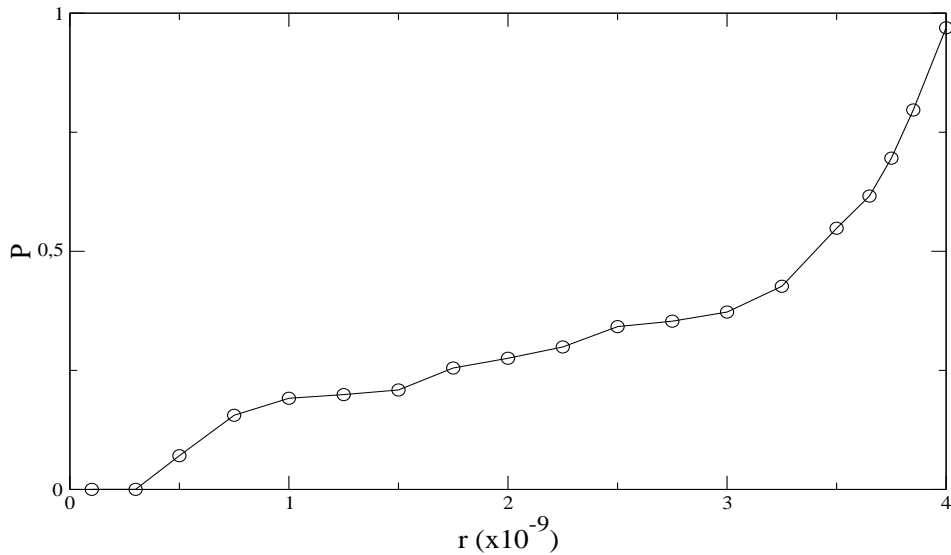


Figura 4.11: P x r , com $N = 10$, $A_n = 10$ e $K = 0,01$.

Na Figura (4.12), analisando a probabilidade P de termos memórias com conexões aleatórias indo para o valor de memória permanente em função da constante elástica da mola K , vemos que acima da curva ocorre a formação de uma memória permanente ($c_L = 10$) e para valores abaixo da curva temos a formação de múltiplas memórias permanentes. Logo com o aumento da constante de acoplamento

K , necessita-se de um número menor de conexões aleatórias para que a rede apresente apenas uma memória permanente.

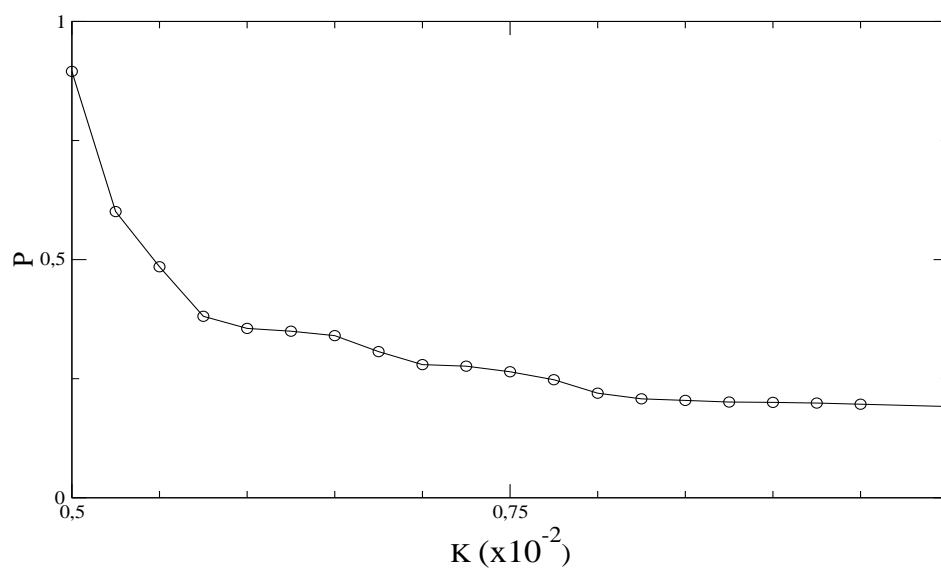


Figura 4.12: P x K , com $N = 10$, $A_n = 10$ e $r = 10^{-9}$.

Capítulo 5

Conclusões

Consideramos uma rede de mapas acoplados para estudar a formação de padrões de memórias em um sistema dinâmico espaço-temporal com muitos graus de liberdade. O sistema, descrito por uma simples equação de difusão discretizada, armazena memórias após um tempo transiente. Esta possibilidade foi explorada por Coopersmith, et. al [11] para explicar o experimento de uma onda de densidade de carga (ODC) em amostras de $NbSe_3$, onde a memória é manifestada como a sincronização da resposta a pulsos elétricos periódicos. Esse sistema é semelhante a uma rede de partículas acopladas com seus primeiros vizinhos através de molas elásticas que estão sujeitas a um forçamento periódico. Em resposta a este forçamento, o sistema apresenta uma dinâmica de formação de memórias de curta duração e evolui para padrões de memórias permanentes. O sistema é deterministicamente forçado para um ponto fixo (memória permanente). Uma vez que este ponto fixo é atingido, perde-se toda a informação das memórias transientes.

Para uma não linearidade nula ($r = 0$) no mapa isolado (4.6) do acoplamento (4.1) verificamos a formação de memórias ou padrões. Considerando uma seqüência periódica de pulso de amplitude A_n , observamos que o tempo transiente para a obtenção da memória permanente do sistema, depende de certos parâ-

metros do sistema. O tamanho do sistema influencia no tempo transiente, pois quanto maior o número de partículas do sistema o tempo necessário para a obtenção do padrão final das memórias aumenta. O tempo transiente aumenta para os sítios que estão mais distantes do início da rede. O tempo necessário para o sítio obter o padrão final da memória aumenta de acordo com um polinômio de quarta ordem em relação ao início da rede. O tempo transiente para a obtenção das memórias é inversamente proporcional a constante de acoplamento K (constante da mola), com a constante de proporcionalidade aumentando para os sítios mais distantes da extremidade fixa. Então para uma otimização da armazenagem de tais memórias devemos usar uma rede de intensidade de pulso baixa, tamanho pequeno e um parâmetro de acoplamento alto.

Uma forma de alterarmos os padrões das memórias é aumentarmos o forçamento externo exercido sobre o sistema e a inserção de um termo não-linear que descreve o mapa de cada sítio, gerando assim a formação de memórias permanentes intermediárias. A presença do termo não-linear ($r > 0$) na função que descreve o mapa isolado (4.6), modifica os valores das memórias finais, ocasionando o surgimento das memórias intermediárias devido ao fato que as variáveis de estado sincronizam em amplitude. Os sítios que sincronizam apresentam o valor da variável de curvatura nula, pois o valor da variável de curvatura está relacionado com a diferença entre os valores das variáveis de estado. A diminuição no valor final das variáveis de curvatura acarreta uma diminuição no tempo transiente devido a redução no número de iterações para que os sítios atinjam a memória permanente. Logo, o termo não-linear é importante, pois nesse sistema podemos armazenar informações mais complexas, devido a formação das memórias intermediárias.

Na seqüência estudamos a formação de memórias em uma rede de mapas acoplados com conexões aleatórias do tipo mundo pequeno. Considerando $r = 0$ na dinâmica local verificamos que o tempo médio para que a rede atinja a memória permanente em função da probabilidade P segue uma lei de potência.

Ocorre uma variação na declividade a partir de $P = 0,4$ e esta declividade não apresenta dependência com o parâmetro de acoplamento.

Com uma não linearidade baixa no mapa ocorre o aparecimento de múltiplas memórias. Neste caso estudamos a variável de curvatura média e o desvio padrão em relação a média. Obtivemos valores dos parâmetros de não linearidade r e de acoplamento K que exibem ou não múltiplas memórias em função da probabilidade das conexões aleatórias.

Como trabalho futuro, iremos analisar a influência do tamanho da rede no comportamento das múltiplas memórias.

Apêndice A

Grafos

A teoria dos grafos estuda objetos combinatórios que são um bom modelo para muitos problemas em vários ramos da matemática, da informática, da engenharia e da indústria, tendo importantes aplicações práticas. O formalismo dos grafos é uma ferramenta importante para o estudo de sistemas complexos, como relacionamento humano, interação entre as proteínas, internet, sistemas de transporte aéreo. São estruturas versáteis na representação de diversas formas de sistemas e problemas.

Um grafo G é uma representação gráfica das relações existentes entre elementos de dados. Pode ser descrito num espaço euclidiano, como um par $G = (V, E)$ de conjuntos V e E , sendo V um conjunto de vértices ou nodos e E um conjunto arestas ou conexões. Cada elemento do conjunto E associa dois elementos do conjunto V , assim, se $(a, b) \in E$ então existe uma conexão entre o vértice a e o vértice b do grafo. Os vértices que estão conectados por uma aresta são denominados de vizinhos. O caminho ou percurso entre dois vértices v_a e v_b em G é um par (V', E') , com $V' \subset V$ e $E' \subset E$, tal que v_a e v_b encontram-se conectados. Um caminho que não passa duas vezes pelo mesmo vértice é um caminho simples (ou elementar). Um caminho que não contém duas vezes a mesma aresta é chamado de trajeto. O grafo da Figura (1) é assim definido por $G = ([a, b, c, d], [(a, b), (a, d), (a, c), (b, d)])$ com o

vértice a apresentando três vizinhos, $[b, c, d]$, e $G' = ([a, b, d], [(a, b), (b, d)])$ sendo um caminho entre os vértices a e d .

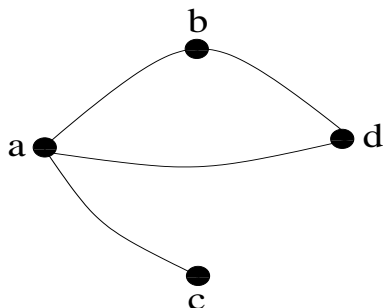


Figura 1: Grafo $G = (V, E)$ com vértices $V = [a, b, c, d]$ e conexões $E = [(a, b), (a, d), (a, c), (b, d)]$.

Chamamos de grafos “direcionados” aqueles que fazem distinção entre os elementos (a, b) e (b, a) , ou seja, a conexão que vai de a para b não é a mesma que vai no sentido contrário. Quando esta restrição não é imposta dizemos que os grafos são “não-direcionados”. Conexões não-direcionadas são representadas por uma linha simples, enquanto conexões direcionadas são geralmente representadas por setas indicando a direção da ligação, como pode ser observado na Figura (2).

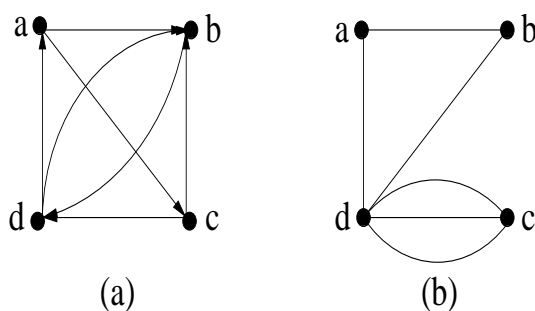


Figura 2: (a) Grafo direcionado, (b) Grafo não-direcionado.

A grande maioria dos grafos reais não são binários, ou seja, as conexões

não podem ser representadas simplesmente por 1 (existe) ou 0 (não-existe), neste caso devemos introduzir uma nova quantidade que informa a intensidade da interação entre dois vértices, definindo assim, o peso da conexão entre o vértice a e o vértice b como $w_{a,b}$. Então quando não existe conexão entre a e b , $w_{a,b} = 0$. Na Figura (1) dois caminhos entre os vértices são equivalentes se possuírem o mesmo número de arestas, ou seja, sem peso para as conexões. Esta classificação é dada de acordo com a necessidade, ou não, da indicação do fluxo entre os vértices. Na prática este número pode representar: custo de ir de um vértice a outro ou distância entre os vértices.

Para representar um grafo a forma mais utilizada é a matriz de adjacência. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$, onde n é o número de nós de um grafo $G = (V, E)$, associando cada linha e cada coluna a um vértice. A matriz de adjacência é construída da seguinte forma:

$$A(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \sim j \\ 0 & \text{se } i \not\sim j \end{cases} \quad (1)$$

onde a Figura (3), ilustra o conceito de matriz de adjacência para um grafo binário direcionado.

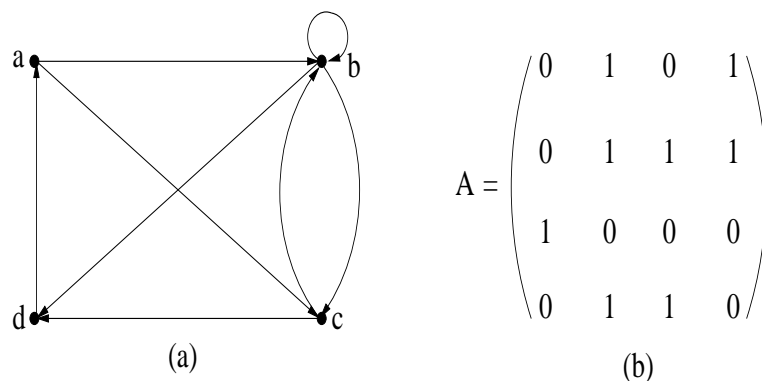


Figura 3: (a) Grafo binário direcionado e (b) sua matriz de adjacência.

Nos grafos binários, a matriz de adjacência é denotada por A (com

elementos $a_{a,b}$), enquanto que nos grafos não-binários a notação será W (com elementos $w_{a,b}$). Os dados estruturais correspondem a valores nulos associados à ausência de ligações e a valores nulos (iguais a 1 quando existe uma conexão entre os vértices a e b). O mesmo ocorre para os grafos não-binários porém, neste caso o valor de cada elemento da matriz de adjacência é igual a intensidade da conexão entre a e b , ou seja, $w_{a,b}$.

Outra propriedade importante no estudo dos grafos é o grau de um vértice a em um grafo G , definido como o número de vértices que são adjacentes à este vértice a . O grau de um vértice a_i em um grafo não-direcionado, representado por uma matriz de adjacência, pode ser obtido pela soma de sua linha (ou coluna) correspondente. Para um grafo direcionado (dígrafo), a soma dos elementos na linha i representa o grau de saída do vértice a_i , enquanto a soma dos elementos na coluna i representam o grau de entrada de a_i .

Também podemos explorar o isomorfismo no estudo de grafos. Um isomorfismo entre dois grafos A e B é uma bijeção f de $V(A)$ em $V(B)$ tal que dois vértices a e b são adjacentes em A se e somente se $f(a)$ e $f(b)$ são adjacentes em B . Dois grafos A e B são isomorfos se existe uma correspondência entre os seus vértices e arestas de tal maneira que a relação de incidência seja preservada. Na Figura (4) temos um exemplo de um grafo isomorfo.

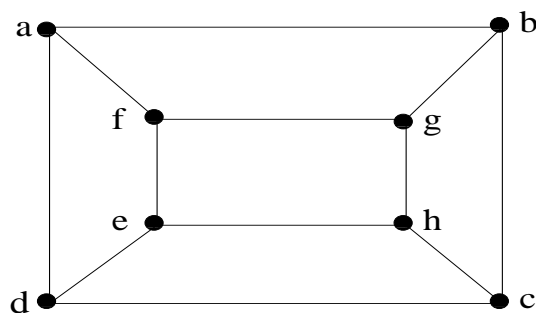


Figura 4: (a) Exemplo de grafo isomorfo.

Bibliografia

- [1] Hopfield, J. J. (1982): *Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities*, Proceedings of National Academy of Science, USA, **79**, 2554-2558;
- [2] Watts, D. J. (1999): *Small Worlds: the dynamics of networks between order and randomness*, Princeton Studies in Complexity, Princeton University Press, New Jersey;
- [3] Barabási, A. L. (2002): *Linked: the new science of networks*, Perseus Publishing;
- [4] Viana, R. L. (2001): *Introdução às redes de mapas acoplados. Modelos para o estudo de caos espaço-temporal*, Departamento de Física da UFPR. Notas de aula do mini-curso ministrado no IF-USP de 21 a 25/02/2000, IFUSP, n. 1527;
- [5] Kaneko, K. (1983): *Collapse of tori and genesis of chaos in dissipative systems*, Ph. D. Thesis, p. 222 (uma versão foi publicada pela editora World Scientific, Singapore, 1986);
- [6] Waller, I., Kapral, R. (1984): *Spatial and temporal structure in systems of coupled nonlinear oscillators*, Physical Review A, **30**, 4, 2047-2055;
- [7] Crutchfield, J. P. (1983): *Noisy chaos*, Ph. D. Dissertation, University of California, Santa Cruz;
- [8] Kaneko, K. (1991): *Globally coupled circle maps*, Physica D, **54**, 5-19;

- [9] Batista, A. M. (1996): *Mapas acoplados na rede e sincronização*, Dissertação de Mestrado, UFPR;
- [10] Crutchfield, J. P., Kaneko, K. (1987): *Phenomenology of spatiotemporal chaos*, in: *Directions in chaos*, **Vol. 1**, Ed. Hao Bai-lin, World Scientific, Singapore;
- [11] Coppersmith, S. N., Jones, T. C., Kadanoff, L. P., Levine, A., McCarten, J. P., Nagel, S. R., Venkataramani, S. C., Wu, X. (1997): *Self-organized short-time memories*, Physical Review Letters, **78**, 21, 3983-3986;
- [12] Gade, P. M. (1996): *Synchronization of oscillators with random nonlocal connectivity*, Physical Review E, **54**, 1, 64-70;
- [13] Watts, D. J., Strogatz, S. H. (1998): *Collective dynamics of 'small-world' networks*, Nature, **393**, 440-442;
- [14] Barabási, A. L., Albert, R. (1999): *Emergence of scaling in random networks*, Science, **286**, 509-512;
- [15] Albert, R., Jeong, H., Barabási, A. L. (1999): *Diameter of the world-wide web*, Nature, **401**, 130;
- [16] Erdős, P., Rényi, A. (1959): *On random graphs I*, Publ. Math. (Debrecen), **6**, 290-297;
- [17] Strogatz, S. H. (1999): *Nonlinear dynamics and chaos with applications to physics, biology, chemistry and engineering*, Perseus Books Publishing, New York, E.U.A.;
- [18] Malthus, T. (1798): *Ensaio sobre o princípio da população*, Sintra, Publicações Europa-América;
- [19] May, R. M. (1976): *Theoretical Ecology: principles and applications*, Oxford, Blackwell Scientific Publications;

- [20] Ott, E. (1993): *Chaos in dynamical system*, Cambridge University Press, New York;
- [21] Alligood, K. T., Sauer, T. D., Yorke, J. A. (1997): *Chaos an introduction to dynamical systems*, Springer-Verlag, New York, Inc;
- [22] Grebogi, C., Ott, E., Yorke, J. A. (1987): *Chaos, strange attractors, and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics*, Science, **238**, 632-638;
- [23] Fiedler-Ferrara, N., Prado, C. P. C. (1994): *Caos: uma introdução*, Ed. Edgard Blücher, São Paulo;
- [24] Schuster, H. G. (1984): *Deterministic chaos*, 2nd edition, Weinheim, Physik-Verlag;
- [25] Savi, M. A., Pacheco, P. M. C. L. (2002): *Chaos and hyperchaos in shape memory systems*, International Journal of Bifurcation and Chaos, **12**, 3, 645-657;
- [26] Kaneko, K., Tsuda, I. (2000): *Complex systems chaos and beyond*, Springer-Verlag;
- [27] Kaneko, K. (1994): *Relevance of dynamic clustering to biological networks*, Physica D, **75**, 55-73;
- [28] Consenza, M. G., Kapral, R. (1992): *Clouped maps on fractal lattices*, Physical Review A, **46**, 4, 1850-1858;
- [29] Boccaletti, S., Kurths, J., Osipov, G., Valladares, D. L., Zhou, C. S. (2002): *The synchronization of chaotic systems*, Physics Reports, **366**, 1-101;
- [30] Batista, A. M., Pinto, S. E. S., Viana, R. L., Lopes, S. R. (2002): *Lyapunov spectrum and synchronization of piecewise linear map lattices with power-law coupling*, Physical Review E, **65**, 056209;

- [31] Batista, A. M., Pinto, S. E. S., Viana, R. L., Lopes, S. R. (2003): *Mode locking in small-world networks of clouped circle maps*, Physica A, **322**, 118-128;
- [32] Lichtenberg, A., Lieberman. M. (1983): *Regular and stochastic motion*, Springer-Verlag, New York;
- [33] Vasconcelos, D. B. (2005): *Correlação espacial em redes de mapas acoplados*, Tese de Doutorado, UFPR;
- [34] Batista, A. M. (2001): *Memórias, espectro de Lyapunov e sincronização de sistemas acoplados*, Tese de Doutorado, UFPR;
- [35] Choi, M. Y., Choi. J. (2003): *Stability and ensemble inequivalence in a globally clouped system*, Physical Review Letters, **91**, 12, 124101;
- [36] Kaneko, K. (1990): *Globally coupled chaos violates the law of large numbers but not the central-limit theorem*, Physical Review Letters, **65**, 12, 1391-1394;
- [37] Kaneko, K. (1989): *Chaotic but regular posi-nega switch among coded attractors by cluster-size variation*, Physical Review Letters, **63**, 3, 219-223;
- [38] Martí, A. C., Masoller, C. (2003): *Delay-induced synchronization phenomena in an array of globally coupled logistic map*, Physical Review E, **67**, 056219;
- [39] Albert, R., Barabási, A. L. (2002): *Statistical mechanics of complex networks*, Reviews of Modern Physics, **74**, 47-96;
- [40] Strogatz, S. H. (2001): *Exploring complex networks*, Nature, **410**, 268-276;
- [41] Barabási, A. L., Bonabeau, E. (2003): *Scale-free networks*, Scientific American, may/2003, 50-59;
- [42] Wang, X. F., Chen, G. (2003): *Complex networks: small-world, scale-free and beyond*, IEEE Circuits and Systems Magazine, 6-20;
- [43] Buchanan, M. (2002): *Nexus: small worlds and the groundbreaking theory of networks*, W. W. Norton e Company, New York;

- [44] Barabási, A. L. (2003): *Linked: how everything is connected to everything else and what it means for business, science and everyday life*, Cambridge, Plume;
- [45] Milgran, S. (1967): *The small-world problem*, Psychology Today, **2**, 61-67;
- [46] Degenne, A., Forsé, M. (1999): *Introducing social networks*, Sage, London;
- [47] Newman, M. E. (2000): *Models of the small world*, Journal of Statistical Physics, **101**, 3, 1-23;
- [48] Tjaden, B., Wasson, G. (1997): disponível em <http://www.cs.virginia.edu/oracle>;
- [49] Watts, D. J. (2003): *Six Degrees. The science of a connected age*, W. W. Norton e Company, New York;
- [50] Newman, M. E., Watts, D. J. (1999): *Scaling and percolation in the small-world network model*, Physical Review E, **60**, 6, 7332-7342;
- [51] Kaneko, K. (1993): *Theory and application of coupled map lattices*, Wiley, Chichester;
- [52] Coppersmith, S. N., Littlewood, P. B. (1987): *Pulse-duration memory effect and deformable charge-density waves*, Physical Review B, **36**, 1, 311-317;
- [53] Carlson, J. M., Langer, J. S. (1989): *Properties of earthquakes generated by fault dynamics*, Physical Review Letters, **62**, 22, 2632-2635;
- [54] Herz, A. V. M., Hopfield, J. J. (1995): *Earthquake cycles and neural reverberations: Collective oscillations in systems with pulse-coupled threshold elements*, Physical Review Letters, **7**, 6, 1222-1225;
- [55] Batista, A. M., Viana, R. L., Lopes, S. R. (2000): *Multiple short-time memories in clouped weakly nonlinear map lattices*, Physical Review E, **61**, 5, 5990-5993;
- [56] Pontes, J. A. C., Batista, A. M., Viana, R. L., Lopes, S. R. (2005): *Short-term memories with a stochastic perturbation*, Chaos, Solitons and Fractals, **23**, 1689-1694;