

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO-FÍSICA

MOISÉS SOUZA SANTOS

FORMAÇÃO DE ESTADOS QUIMERA EM DIFERENTES ACOPLAMENTOS

PONTA GROSSA
2014

MOISÉS SOUZA SANTOS

FORMAÇÃO DE ESTADOS QUIMERA EM DIFERENTES ACOPLAMENTOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Ciências, área de concentração Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como requisito parcial para à obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. José Danilo Szezech Jr.

PONTA GROSSA

2014

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

Santos, Moisés Souza
S237 Formação de estados quimera em
diferentes acoplamentos/ Moisés Souza
Santos. Ponta Grossa, 2014.
95f.

Dissertação (Mestrado em Ciências -
Área de Concentração: Física),
Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Orientador: Prof. Dr. José Danilo
Szezech Jr.

1.Redes. 2.Entropia. 3.Caos. 4.Lyapunov.
5.Quimera. I.Szezech Jr, José Danilo. II.
Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Mestrado em Ciências. III. T.

CDD: 531

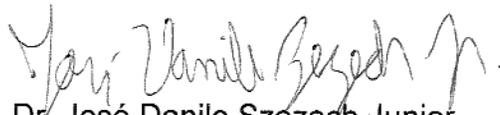
TERMO DE APROVAÇÃO

MOISÉS SOUZA SANTOS

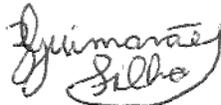
“FORMAÇÃO DE ESTADOS QUIMERA EM DIFERENTES ACOPLAMENTOS”

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Ciências - Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador:



Prof. Dr. José Danilo Szezech Junior
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG/PR



Prof. Dr. Zwinglio de Oliveira Guimarães Filho
Instituto de Física, USP/SP



Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG/PR

Ponta Grossa, 27 de fevereiro de 2014

Agradecimentos

Agradeço à Deus, à minha família (Patrícia e Amanda) e aos meus amigos pelo apoio nas horas difíceis e momentos de fraqueza.

Ao meu orientador e amigo José Danilo Szezech Jr. (UEPG) pela paciência e dedicação.

À CAPES, CNPQ e Fundação Araucária pela bolsa de estudos e todo o suporte financeiro utilizado durante o curso.

À Universidade Estadual de Ponta Grossa pelo espaço e ao Programa de Pós Graduação em Ciências pela oportunidade, especialmente secretária Josecler da Conceição Kapp Lepinski, ao Coordenador da Pós-Graduação Prof. Dr. Sérgio da Costa Saab, ao Prof. Dr. Antônio Marcos Batista, ao Prof. Dr. Luis Augusto Trevisan e ao Prof. Dr. Luiz Américo pelo apoio e incentivo.

Aos professores A. M. Batista (UEPG), R. L. Viana (UFPR), S. R. Lopes (UFPR) e demais integrantes do grupo de Dinâmica Não-Linear e Sistemas Complexos (UEPG-UFPR) pelas discussões e sugestões e a Universidade Federal do Paraná pelo suporte computacional.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão deste trabalho, em especial as colegas da sala 105 (UEPG).

Resumo

Neste trabalho foi realizado um estudo dos estados quimera em redes compostas por mapas logísticos cuja interação entre os mesmos pode ser de dois tipos de acoplamentos (não-local e lei de potência). Utilizamos como ferramenta de análise os expoentes de Lyapunov e uma quantidade derivada deste, a entropia de Kolmogorov-Sinai, para calcular o tempo médio de “vida” ou tempo de colapso de quimera para o caso não-local em redes de diferentes tamanhos. Para o acoplamento lei de potência mostramos que quando este possui características não-locais a rede também pode exibir estados quimera. Além disso calculamos as prováveis regiões de existência de quimeras dentro do espaço dos parâmetros para ambos os casos. Uma vez que a dinâmica de estados quimera ocorre quando coexistem regiões que são periódicas e caóticas no tempo, obtivemos a região, no espaço de parâmetros, onde este comportamento ocorre. Mostramos as relações prováveis que existem entre os estados quimera e o parâmetro de ordem global que fornece informações sobre o quão relacionados estão os sítios de uma rede acoplada.

Palavras-chave: rede. entropia. caos. Lyapunov. quimera.

Abstract

This work report on a study of the chimera states in networks composed by logistic maps whose interaction between them may have two types of couplings (nonlocal and power law). The Lyapunov exponents and a derivative of this quantity, the Kolmogorov-Sinai entropy, were used as analysis tool to calculate the average time of “life” or collapse time of chimera for nonlocal case with different sizes of networks. For coupling power law the results show that when it has nonlocal features it is also possible to see chimera states through the network. We also calculate the probable existence of regions of chimeras within the parameter space for both cases. Since the chimera dynamic states occurs when coexist regions that are chaotic and periodic in time, we obtained the region of the parameter space where this behavior occurs. We show the probable relations between the chimera states and the global order parameter that provides information on how the sites of a coupled network are related.

Keywords: network. entropy. chaos. Lyapunov. chimera.

Lista de Figuras

- 2.1 Sistema inercial (S) em duas dimensões para as partículas de massas m_1 e m_2 interagindo gravitacionalmente, \vec{r}_1 é o vetor posição de m_1 , \vec{r}_2 é o vetor posição de m_2 p. 19
- 2.2 Trajetória de uma pequena massa no problema de três corpos. p. 21
- 2.3 Atrator de Lorenz: a figura mostra a evolução temporal de uma trajetória para os parâmetros de controle ($\sigma = 10,00$; $b = 2,66$ e $r = 28,00$). p. 24
- 2.4 Sistema de Lorenz caracterizado pela convergência para o ponto fixo (p_0), onde os parâmetros utilizados foram: $r = 18,00$, $\sigma = 10,00$ e $b = 2,66$ p. 25
- 2.5 Primeiras iteradas do mapa $f(x) = 2x$ para a população inicial $x_0 = 3$ p. 26
- 2.6 Evolução temporal do mapa de May para duas condições iniciais diferentes e mesmo parâmetro de controle $a = 1,85$. A linha verde representa uma condição inicial $x_0 = 0,35$ e a linha vermelha representa uma condição inicial $x_0 = 0,15$ p. 28
- 2.7 Dinâmica temporal do mapa logístico para alguns valores do parâmetro de controle: (a) o valor de x_n converge para um único ponto (órbita de período 1), (b) temos uma órbita de período 2 para a variável x_n , (c) o mapa possui uma órbita de período 4 e (d) a órbita passa a ser de período indeterminado. Todos os casos foram iniciados com a mesma condição inicial ($x_0 = 0,20$). p. 29
- 2.8 Diagrama de bifurcação do mapa logístico representando a mudança de comportamento da variável dinâmica x_n conforme a variamos o parâmetro de controle a p. 30
- 2.9 Rede de N mapas acoplados com o primeiro vizinho (acoplamento local) de forma bi-direcional e condições de contorno periódicas. O índice i representa cada elemento (vértice) da rede. p. 33

2.10	Rede de N mapas acoplados não-localmente de forma bi-direcional e condições de contorno periódicas. O índice i representa cada vértice (elemento) da rede e as arestas correspondem as ligações não-locais da rede.	p. 34
2.11	Rede de N mapas acoplados globalmente de forma bi-direcional e condições de contorno periódicas. O índice i representa cada vértice (elemento) da rede e as ligações estão representadas pelas arestas do grafo.	p. 36
3.1	Aperiodicidade no mapa logístico: (a) evolução temporal do mapa logístico para $a = 3,57$, (b) temos $a = 3,89$ e em (c) o valor do parâmetro de controle é $a = 4,00$. Em (a), (b) e (c) o mapa não apresenta período para o intervalo de tempo observado.	p. 41
3.2	Divergência de trajetórias inicialmente muito próximas. Temos uma condição inicial qualquer (x'_0) e uma outra condição inicial próxima (x_0) de modo que a distância $d_0 = x_0 - x'_0 $ entre elas seja muito pequena.	p. 42
3.3	Evolução do mapa logístico para trajetórias inicialmente próximas. Em (a) temos uma condição inicial qualquer x_0 e (b) refere-se a uma outra condição inicial x'_0 . Ambas diferem em $d_0 = x_0 - x'_0 = 10^{-5}$ e possuem o mesmo valor de $a = 3,80$. Em (c) temos a distância d_n	p. 43
3.4	Temos em (a) o diagrama de bifurcação do mapa logístico onde x_n representa a variável de estado do mapa. Para (b) temos o expoente de Lyapunov (λ) pela variação do parâmetro de controle a	p. 46
3.5	Evolução da hiperesfera de condições iniciais com raio \vec{v}_0 . Após n iteradas a hiperesfera inicial será deformada e possuirá contrações em algumas direções e dilatação em outras direções.	p. 48
3.6	Regiões coerentes e incoerentes obtidas por Kuramoto: ϕ representa o ângulo de fase e x (normalizada) representa a posição dos osciladores ao longo da rede	p. 52
3.7	Estados quimera obtidos em osciladores químicos. A variável ϕ representa a fase e i representa a posição de cada oscilador ($i = 1, 2, 3, \dots, N$)	p. 53

3.8	Espaço dos parâmetros ($\varepsilon \times r$) para uma rede de osciladores óticos acoplados. Onde r é o alcance e ε é a intensidade do acoplamento. A linha pontilhada marca o valor de ε abaixo do qual podemos obter quebra no perfil espacial da rede	p. 54
4.1	Parâmetro de ordem global (Z_n) no espaço $\sigma \times p/N$ para acoplamento não-local com os parâmetros: $N = 100$, $a = 3,80$ e $t_r = 10^4$ iteradas. A escala de cores refere-se ao módulo do parâmetro de ordem global ($ Z_n $) e a linha pontilhada refere-se a $p/N = 0,32$ que será utilizada como referência para as próximas simulações.	p. 57
4.2	Sincronização caótica: (a) evolução temporal a cada 8 iteradas da rede e (b) perfil espacial para $N = 100$, $a = 3,80$, $p/N = 0,32$, $\sigma = 0,61$ e $t_r = 10^4$ iteradas. A escala de cores representa a variável de estado x_i dos mapas e i a posição de cada mapa na rede ($1 \leq i \leq N$).	p. 58
4.3	Formação de duas regiões: (a) evolução temporal a cada 8 iteradas da rede e (b) perfil espacial para $N = 100$, $a = 3,80$, $p/N = 0,32$, $\sigma = 0,45$ e $t_r = 10^4$ iteradas. A escala de cores representa a variável de estado x_i dos mapas e i a posição de cada mapa na rede ($1 \leq i \leq N$).	p. 59
4.4	Evolução temporal dos últimos 40 tempos para $N = 100$, $p/N = 0,32$, $\sigma = 0,45$, $a = 3,80$ e $t_r = 10^4$ iteradas. Em (a) temos a evolução do mapa de índice $i = 1$, (b) representa o mapa $i = 94$, (c) o mapa $i = 40$ e (d) refere-se ao mapa de índice $i = 55$	p. 60
4.5	Quebra do perfil espacial: (a) representa a evolução temporal a cada 8 iteradas da rede e (b) perfil espacial para $N = 100$, $p/N = 0,32$, $\sigma = 0,43$, $a = 3,80$ e transiente 10^4 iteradas. A escala de cores representa a variável de estado x_i dos mapas e i a posição de cada mapa na rede ($1 \leq i \leq N$).	p. 61
4.6	Quimera: (a) evolução temporal a cada 8 iteradas da rede e em (b) temos o perfil espacial para $n = 100$, $p/N = 0,32$, $\sigma = 0,31$, $a = 3,80$ e $t_r = 10^4$ iteradas. A escala de cores representa a variável de estado x_i dos mapas e i a posição de cada mapa na rede ($1 \leq i \leq N$).	p. 62

- 4.7 Regiões sem coerência espacial: evolução temporal a cada 8 iteradas (a) e perfil espacial (b) para os parâmetros $N = 100$, $p/N = 0,32$, $\sigma = 0,23$, $a = 3,80$ e $t_r = 10^4$ iteradas. A escala de cores representa a variável de estado x_i dos mapas e i a posição de cada mapa na rede ($1 \leq i \leq N$). p. 63
- 4.8 Caos espaço-temporal: evolução temporal a cada 8 iteradas (a) e perfil espacial (b) para os parâmetros $N = 100$, $p/N = 0,32$, $\sigma = 0,05$, $a = 3,80$ e $t_r = 10000$ iteradas. A escala de cores representa a variável de estado x_i dos mapas e i a posição de cada mapa na rede ($1 \leq i \leq N$). p. 63
- 4.9 Evolução temporal da rede a cada 8 iteradas para $N = 100$, $p/N = 0,32$ e parâmetro de controle do logístico $a = 3,80$. Em (a) temos $\sigma = 0,25$ representado um valor da intensidade de acoplamento na qual a rede não exibe estados quimera. Em (b) temos a evolução para $\sigma = 0,32$, para este valor a rede exibe estados quimera. p. 65
- 4.10 Densidade de entropia (h) para $N = 100$, $p/N = 0,32$ e parâmetro de controle do logístico $a = 3,80$. A linha em preto refere-se ao valor de h para $\sigma = 0,25$ e a em vermelho para $\sigma = 0,32$. Em ambos os casos o tempo transiente foi de 10^4 iteradas. p. 66
- 4.11 Quimera para outras redes: Para (a) temos uma rede com 30 mapas acoplados, onde próximo ao sítio $i = 7$ temos a região incoerente. Em (b) temos 40 mapas logísticos na rede, a região incoerente encontra-se nas proximidades do sítio $i = 30$. Em ambas as figuras com $\sigma = 0,34$, $p/N = 0,32$, $a = 3,80$ e condições iniciais aleatórias. p. 67
- 4.12 Quimera para redes de outros tamanhos: Em (a) temos a densidade de entropia para uma rede com 30 mapas acoplados e (b) refere-se a uma rede com 40 mapas. Em ambos os casos utilizamos $p/N = 0,32$ e $\sigma = 0,34$ e condições iniciais aleatórias. A linha pontilhada marca o valor de referência (h') abaixo do qual marcamos como início dos estados quimeras. p. 68
- 4.13 Redes com 100 mapas acoplados de forma não-local: Para ambos os casos (a) e (b) as redes possuem $\sigma = 0,31$, $a = 3,80$ e $p/N = 0,32$, mas diferem nas condições iniciais. Para (a) existe estados quimera mas quando alteramos as condições iniciais em (b) o rede passa a exibir comportamento regular. A escala de cores está relacionada a variável de estado x_i p. 69

- 4.14 Colapso dos estados quimera: temos uma rede com 40 mapas acoplados de forma não-local para $a = 3,80$, $p/N = 0,32$ e $\sigma = 0,34$: (a) representa a evolução temporal da rede, (b) temos um perfil espacial dentro da região de colapso e (c) mostra um perfil espacial dentro da região de quimera. A escala de cores está relacionada a variável de estado x_i p. 70
- 4.15 Tempos de colapsos (n^*): (a) representa uma rede com 60 mapas acoplados e (b) temos 80 mapas ambas com o mesmo valor de $\sigma = 0,30$, $a = 3,80$, $p/N = 0,32$ e condições iniciais ($x_i^0 = 0,60 + r_i^0/1000$). p. 71
- 4.16 Números de colapsos (C) para outras redes (N). Para todos os casos temos $\sigma = 0,30$, $a = 3,80$, $p/N = 0,32$ e 2000 condições iniciais próximas ($x_i^0 = 0,60 + r_i^0/1000$). p. 72
- 4.17 Regiões Periódicas no espaço ($\sigma \times p/N$) para $N = 100$, $a = 3,80$ e 60 condições iniciais próximas ($x_i^0 = 0,60 + r_i^0/1000$). A escala de cores representa o percentual das condições iniciais em que a rede apresentou comportamento regular após transiente de 2×10^5 p. 73
- 4.18 Parâmetro de ordem global para acoplamento lei de potência com os parâmetros $a = 4,00$, $N = 101$ e transiente de 10^4 iteradas. Temos no eixo vertical a intensidade do acoplamento (ϵ), no eixo horizontal o alcance do acoplamento (α) e a escala de cores refere-se ao módulo do parâmetro de ordem ($|Z_n|$). p. 75
- 4.19 Sincronização Caótica: $N = 101$, $a = 4,00$, $\alpha = 0,70$, $\epsilon = 0,65$, condições iniciais aleatórias e transiente de 10^4 iteradas. Em (a) temos a evolução temporal da rede, em (b) o perfil espacial para $n = 200$, i representa os mapas da rede ($1 \leq i \leq N$) e a escala de cores refere-se a variável de estado (x_i). p. 76
- 4.20 Descontinuidade espacial: $N = 101$, $\alpha = 0,70$, $\epsilon = 0,45$, $a = 4,00$, condições iniciais aleatórias e transiente de 10^4 iteradas. Em (a) temos a evolução temporal da rede, em (b) o perfil espacial para $n = 200$, i representa os mapas da rede ($1 \leq i \leq N$) e a escala de cores refere-se a variável de estado (x_i). p. 77

- 4.21 Evolução temporal (n) periódica para $N = 101$, $a = 4,00$, $\alpha = 0,70$, $\varepsilon = 0,45$. Em (a) temos a evolução do mapa de índice $i = 15$, (b) para o mapa $i = 90$, (c) representa o mapa $i = 40$ e (d) o mapa $i = 60$. As condições iniciais são aleatórias. p. 78
- 4.22 Formação de estados quimera: $N = 101$, $\alpha = 0,70$, $a = 4,00$, $\varepsilon = 0,31$, condições iniciais aleatórias e transiente de 10^4 iteradas. Em (a) temos a evolução temporal da rede, em (b) o perfil espacial para $n = 150$, i representa os mapas da rede ($1 \leq i \leq N$) e a escala de cores refere-se a variável de estado (x_i). p. 79
- 4.23 Transição quimera-caos: $N = 101$, $a = 4,00$, $\alpha = 0,70$, $\varepsilon = 0,20$, condições iniciais aleatórias e transiente de 10^4 iteradas. Em (a) temos a evolução temporal da rede, em (b) o perfil espacial para $n = 200$, i representa os mapas da rede ($1 \leq i \leq N$) e a escala de cores refere-se a variável de estado (x_i). p. 80
- 4.24 Caos espaço-temporal: $n = 101$, $\alpha = 0,70$, $\varepsilon = 0,10$, $a = 4,00$, condições iniciais aleatórias e transiente de 10^4 iteradas. Em (a) temos a evolução temporal da rede, em (b) o perfil espacial para $n = 200$, i representa os mapas da rede ($1 \leq i \leq N$) e a escala de cores refere-se a variável de estado (x_i). p. 81
- 4.25 Regiões de período 2-vermelho, 4-amarelo e 8-azul claro. Temos 101 mapas acoplados ($N = 101$), o parâmetro do mapa logístico $a = 4,00$ e condições iniciais próximas ($x_i^0 = 0,40 + r_i^0/1000$). A figura mostra a quebra do perfil espacial para $\varepsilon \approx 0,43$ abaixo da região onde os mapas estão sincronizados. p. 82
- 4.26 Sensibilidade às condições iniciais: $n = 101$, $\alpha = 0,40$, $\varepsilon = 0,34$, $a = 4,00$. As condições iniciais são aleatórias e a escala de cores refere-se a variável dinâmica (x_i). Em (a) temos a evolução temporal periódica e em (b) temos um perfil espacial para um instante de tempo ($n = 200$). p. 83

- 4.27 Sensibilidade às condições iniciais: $n = 101$, $\alpha = 0,40$, $\varepsilon = 0,34$, $a = 4,00$.
As condições iniciais são aleatórias e a escala de cores refere-se a variável dinâmica (x_i). Em (a) temos a evolução temporal e em (b) temos um perfil espacial para um instante de tempo ($n = 200$) mostrando a coexistência de estados coerentes e incoerentes. p. 84
- 5.1 Evolução temporal das últimas 40 iteradas para uma rede de 100 mapas logísticos acoplados de forma não-local. Em (a) temos o mapa de índice $i = 40$, (b) o mapa $i = 15$, em (c) o mapa $i = 60$ e para (d) o mapa $i = 90$. Os parâmetros utilizados foram: $\sigma = 0,35$, $t_r = 10^4$ e $p/N = 0,32$ p. 92

Lista de Tabelas

- 2.1 Resumo dos padrões de comportamento do mapa logístico para diferentes valores do parâmetro de controle a p. 30
- 4.1 Tempos médios de colapso para redes: $\sigma = 0,30$, $a = 3,80$, $p/N = 0,32$ e com 2000 condições iniciais próximas ($x_i^0 = 0,60 + r_i^0/1000$). p. 72

Sumário

1	INTRODUÇÃO	p. 16
2	SISTEMAS DINÂMICOS	p. 18
2.1	HISTÓRICO	p. 18
2.2	DINÂMICA NÃO-LINEAR	p. 21
2.2.1	Fluxos	p. 22
2.2.2	Mapas	p. 25
2.3	REDES	p. 32
2.3.1	Acoplamento não-local	p. 33
2.3.2	Acoplamento lei de potência	p. 35
3	CAOS EM MAPAS	p. 38
3.1	ESTABILIDADE DE PONTOS FIXOS	p. 38
3.2	ÓRBITAS CAÓTICAS	p. 39
3.2.1	Aperiodicidade	p. 40
3.2.2	Sensibilidade às condições iniciais	p. 41
3.3	EXPOENTE DE LYAPUNOV	p. 43
3.3.1	Cálculo Numérico dos expoentes de Lyapunov	p. 48
3.3.2	Ortonormalização de Gram-Schmidt	p. 49
3.3.3	Entropia de Kolmorov-Sinai	p. 50
3.4	PARÂMETRO DE ORDEM GLOBAL	p. 51

3.5	QUIMERA	p. 52
3.5.1	Evidências Experimentais de Quimera	p. 53
4	RESULTADOS	p. 56
4.1	ACOPLAMENTO NÃO LOCAL	p. 56
4.1.1	Colapso dos estados quimera	p. 64
4.1.2	Tempos de colapso	p. 68
4.1.3	Regiões periódicas	p. 73
4.2	ACOPLAMENTO LEI DE POTÊNCIA	p. 74
4.2.1	Regiões Periódicas	p. 81
4.2.2	Sensibilidade às condições iniciais	p. 83
5	CONCLUSÕES	p. 85
	REFERÊNCIAS	p. 87
	APÊNDICE – INTENSIDADE CRÍTICA	p. 91

1 INTRODUÇÃO

A natureza sempre foi objeto de intenso estudo e admiração do homem, pois é dela que obtemos e transformamos nossa forma de viver nas mais diferentes culturas ao redor do globo. Por simplicidade, geralmente, estudamos a natureza de forma simplificada, procurando certas regularidades nos sistemas de nosso interesse, buscamos suas características que repetem-se no tempo e nem sempre isto é uma tarefa fácil de observar e quantificar.

A periodicidade torna a natureza, do ponto de vista matemático, um tanto mais previsível e descritiva. Sistemas onde não podemos fazer previsões sobre seu comportamento podem ser de natureza estocástica, onde não há uma equação de evolução temporal, ou são de natureza caótica. Quando o sistema é governado por equações temporais e mesmo assim, devido a características das mesmas, ele deixa de ser previsível para longos períodos de tempo este é denominado de sistema caótico determinístico.

Uma característica interessante, que vem sendo objeto de intensas pesquisas, se dá ao acoplarmos sistemas que isoladamente são caóticos. Devido à interação via acoplamentoⁱ, uma rede pode demonstrar outros padrões espaciais, por exemplo a sincronização caótica para o caso de acoplamento global ou a formação de *kinks*ⁱⁱ para acoplamento local [1].

Quando a interação, entre os elementos de rede, for mediada via acoplamento não-localⁱⁱⁱ temos um fenômeno muito interessante descoberto recentemente: a coexistência de duas regiões distintas no espaço (uma coerente e outra incoerente). Na região coerente há uma forte relação entre os elementos espacialmente conectados e todos possuem o mesmo padrão de comportamento temporal. Na região incoerente do espaço os

ⁱconexão entre os elementos de uma rede

ⁱⁱdobras na rede

ⁱⁱⁱa ligação entre os elementos da rede se estende para os primeiros vizinhos

elementos que fazem parte da mesma não possuem qualquer padrão da variável dinâmica. Cada sítio dentro da região incoerente evolui de forma totalmente independente dos demais pertencentes a mesma. Esta coexistência de estados (regiões coerentes e incoerentes) foi descoberta, inicialmente, por Kuramoto [2] e posteriormente denominada por estados quimera ou simplesmente quimera^{iv} por Strogatz [3], devido a sua característica espacial híbrida em sistemas acoplados não-localmente.

Experiências realizadas com osciladores químicos regidos pela equação fotosensível de Belousov-Zhabotinsky [4] e com osciladores óticos [5] exibiram a coexistência de subpopulações na espaço. Estas regiões são sincronizadas e desincronizadas espacialmente, implicando em evidências experimentais de estados quimera em sistemas acoplados. Estes fatos convergem para a importância de compreender as peculiaridades dos estados quimera, tendo em vista que se estuda estes comportamentos a aproximadamente uma década.

Neste trabalho estudamos os estados quimera para uma rede de mapas acoplados, mais especificamente mapas logísticos interagentes, para dois tipos de acoplamentos. Primeiramente a interação entre os sítios (mapas) constituintes da rede se dá por uma função *Heaviside*^v [1] que possui característica não-local e posteriormente a interação é realizada por uma função lei de potência [6]. Este último acoplamento apresenta comportamento não-local dependendo do parâmetro de alcance que utilizamos.

Nosso objetivo é encontrar numericamente quais regiões, no espaço de parâmetros, podem levar o sistema a exibir estados quimeras, calcular o espectro de Lyapunov e encontrar qual a sua relação com estes estados. Posteriormente se estes estados são perenes ou não calculando o tempo de permanência médio ou tempo de “vida” médio dos estados quimeras.

^{iv}termo emprestado da mitologia grega e refere-se a qualquer combinação híbrida de dois ou mais animais distintos.

^vfunção degrau

2 SISTEMAS DINÂMICOS

2.1 HISTÓRICO

Estudar e compreender a teoria de sistemas dinâmicos não-lineares é de fundamental importância para a ciência moderna e possui uma ampla gama de aplicações nos mais variados campos do conhecimento científico (neurociência, biologia, economia, eletrônica, etc.) [7]. Sua origem remonta a grécia antiga, mais explicitamente a Aristóteles (384-322 a.C), cuja a principal contribuição foi lançar as bases para o pensamento lógico: regras metodológicas que nos auxiliam a “pensar corretamente” sobre os mais variadas formas de problemas. A filosofia de Aristóteles, também chamada de “indutiva e dedutiva”, embora muitas vezes incorretas, teve a sua importância histórica, pois suas contribuições serviram como base para que Cláudio Ptolomeuⁱ pudesse sintetizar as contribuições de seus antecessores e formular o seu modelo geocêntrico. Mais tarde estas ideias levaram Nicolau Copérnicoⁱⁱ a consolidar o modelo aceito atualmente, o heliocêntrico [8].

Inspirado no modelo proposto por Nicolau Copérnico e nas observações realizadas por Tycho Braheⁱⁱⁱ, Johannes Kepler^{iv} postulou as três leis fundamentais da mecânica celeste. Esta teoria forneceu as bases, para que mais tarde, Issac Newton^v publicasse a sua obra prima *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, que é considerado o livro de maior influência já publicado. Este livro contém as leis fundamentais para o movimento dos corpos celestes e no interior do planeta [8].

ⁱ Cláudio Ptolomeu (90-168 d.C), cientista, astrônomo e geógrafo grego

ⁱⁱ Nicolau Copérnico (1473-1543 d.C), matemático e astrônomo polonês, conhecido como o “pai” da astronomia moderna

ⁱⁱⁱ Tycho Brahe (1543-1601 d.C), astrônomo dinamarquês

^{iv} Johannes Kepler (1571-1630 d.C), astrônomo, matemático e astrólogo alemão, que foi uma das principais figuras da revolução científica do séc. XVII

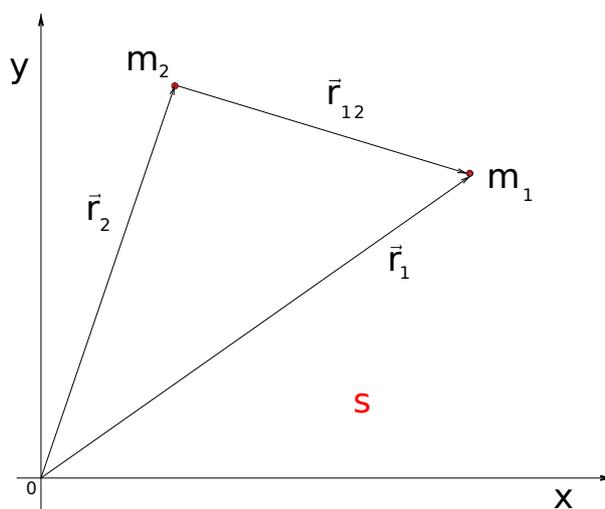
^v Issac Newton (1643-1727 d.C), físico e matemático inglês

A lei da gravitação de Newton [9] nos fornece informações sobre a força entre duas massas m_1 e m_2 que estejam separadas por uma certa distância ($\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$) conforme a expressão (2.1):

$$\vec{F}_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad (2.1)$$

onde G é a constante universal de gravitação, m_1 é massa da partícula 1, m_2 é a massa da partícula 2, \vec{r}_{12} é o vetor posição entre as partículas m_1 e m_2 e F_{21} é a força sobre m_2 devido a sua interação com m_1 com relação ao referencial inercial (S) exemplificado na figura 2.1 para duas dimensões.

Figura 2.1: Sistema inercial (S) em duas dimensões para as partículas de massas m_1 e m_2 interagindo gravitacionalmente, \vec{r}_1 é o vetor posição de m_1 , \vec{r}_2 é o vetor posição de m_2 .



Fonte: O autor.

Pela terceira lei de Newton (lei de ação e reação) temos ainda que $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, onde F_{12} é a força sobre m_1 devido sua interação gravitacional com m_2 . Para obtermos a dinâmica teremos que combinar a expressão (2.1) com a segunda lei de Newton para ambas

as massas, e sabendo que $\vec{p} = m\vec{v}$ e $d\vec{r}/dt = \vec{v}$, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \text{e} \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} \\
 m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad \text{e} \quad m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\
 \overbrace{\frac{d\vec{v}_1}{dt} = -G \frac{m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}^{m_1} \quad \overbrace{\frac{d\vec{v}_2}{dt} = G \frac{m_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}^{m_2} \\
 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = G \frac{m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = G \frac{m_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) , \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

sendo $\vec{r}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$ e $\vec{v}_1(\vec{v}_{x_1}, \vec{v}_{y_1})$ são os vetores posição e velocidade da partícula m_1 e $\vec{r}_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2)$ e $\vec{v}_2(\vec{v}_{x_2}, \vec{v}_{y_2})$ os vetores posição e velocidade da partícula m_2 ambas em relação ao referencial S. O objetivo da dinâmica é obter e descrever o comportamento das variáveis \vec{r}_1 e \vec{v}_1 , ou \vec{r}_2 e \vec{v}_2 , para quaisquer instantes de tempo, queremos saber como as posições e consequentemente as velocidades das massas m_1 e m_2 evoluem com a variável independente t , dadas as condições iniciais $\{\vec{r}_1(0), \vec{v}_1(0), \vec{r}_2(0) \text{ e } \vec{v}_2(0)\}$.

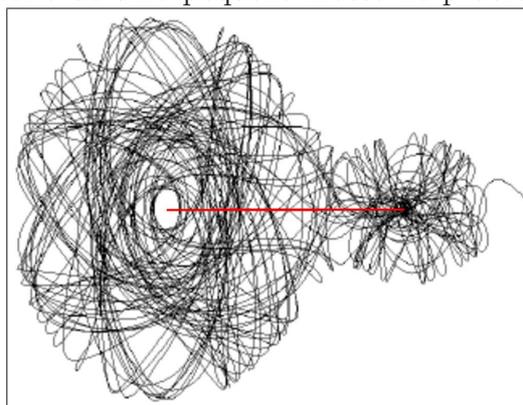
Nota-se que na expressão (2.2) que as equações de evolução possuem uma dependência com o inverso ao quadrado da distância da separação entre as massas, que para este caso simples de duas massas interagentes, possuem uma forma fechada (analítica) como solução para quaisquer instantes de tempo t . Se, no entanto, existirem mais corpos envolvidos no sistema, a situação muda drasticamente e torna-se muito mais complicada a análise. Assim, teremos o problema de N corpos interagentes através da expressão newtoniana de atração gravitacional entre partículas $\left(\vec{F}_{ij} = \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j)\right)$ cujo o qual se encontra no âmago de mecânica celeste [7].

Para mais de dois corpos ($N > 2$) não é possível, em geral, obter soluções analíticas (fechadas) para as posições e velocidades dos corpos (massas) em função do tempo t . Uma das primeiras tentativas de encontrar uma solução analítica para o problema dos N corpos foi realizada pelo matemático francês Henri Poincaré no final do século XIX quando, em homenagem ao seu aniversário, o rei Oscar II da Suécia disponibilizou um prêmio para quem resolvesse o problema da estabilidade do sistema solar, ou seja, o problema dos N -corpos experimentando interações mútuas dadas pela lei de atração gravitacional de Newton [10]. Poincaré, que era professor da Universidade de Paris, foi o ganhador do prêmio mesmo sem resolver o problema. Ele assumiu duas simplificações: primeiro que são

três corpos movendo-se sobre um plano e segundo que dois dos corpos possuem uma massa muito grande, de tal forma que podemos “desprezar” a massa do terceiro corpo envolvido no sistema. Desta forma a “massa desprezível” não influencia nos movimento das massas maiores, podemos imaginar tal situação pensando num sistema composto por duas grandes estrelas e um pequeno cometa.

Geralmente duas estrelas descrevem órbitas elípticas, mas Poincaré fez uma outra suposição a de que as condições iniciais são escolhidas para que o movimento descrito pelas duas estrelas possam ser representados por círculos, ou seja, que as órbitas sejam circulares e com velocidade constante, circulando em torno do centro de massa do sistema [10, 11]. Estas suposições são realizadas para que possamos observar a trajetória de uma pequena massa (cometa) num sistema de coordenadas no qual as estrelas são estacionárias, a figura 2.2 ilustra esta concepção, onde a linha central em vermelho representa a distância entre as duas estrelas e a linha em preto a trajetória do cometa movendo-se entre elas.

Figura 2.2: Trajetória de uma pequena massa no problema de três corpos.



Fonte: Adaptada de Alligood [10].

Na figura 2.2 o corpo de menor massa move-se de maneira aparentemente imprevisível para longos períodos de tempo. O método de análise utilizado por Poincaré é a projeção de um movimento em \mathbb{R}^3 sobre o \mathbb{R}^2 .

2.2 DINÂMICA NÃO-LINEAR

Um sistema dinâmico pode ser definido como uma descrição matemática determinista de evolução temporal de estado, onde a variável temporal pode ser discreta ou

contínua [11], ou seja, trata-se de uma teoria matemática que estuda a evolução de sistemas de equações onde o tempo t é a variável independente. Se estas forem lineares há soluções exatas que nos permitem determinar seu comportamento, para quaisquer instantes de tempo, de forma fechada, em função do conhecimento atual que tenhamos sobre o sistema. Para o caso em que estas equações, que governam o sistema, forem não-lineares, geralmente, não existem soluções exatas (analíticas) em uma forma fechada, como vimos Poincaré pôde vislumbrar o comportamento “anormal” quando não há tal solução. Portanto, comportamentos muito complicados podem emergir quando estudamos sistemas que são governados por equações não-lineares.

Poincaré não pôde avançar em seus estudos devido a impossibilidade de obter soluções analíticas para quaisquer instantes de tempo. Embora ele seja considerado o “pai” da dinâmica não-linear, esta somente se desenvolveu conforme a tecnologia da informação avançou. Podemos utilizar métodos numéricos (computacionais) para resolver as equações de movimento para cada um dos corpos no problema de Poincaré, dentre outros problemas de dinâmica. Desta forma encontramos as suas posições e velocidades para quaisquer instantes de tempo t que estejamos interessados, pois o objeto de estudo da dinâmica não-linear são os comportamentos para longos períodos de tempo.

2.2.1 Fluxos

Quando temos a variável independente t variando de forma contínua dizemos que a dinâmica do sistema é regida por equações diferenciais, passando a ser denominados fluxos e o conhecimento da evolução temporal do sistema é dado pela integração destas equações que nos fornece a sua solução para quaisquer instantes de tempo t de interesse. Como exemplo, podemos analisar o conjunto de equações conhecido como sistema de Lorenz. Em 1950 o meteorologista do MIT, Edward Lorenz, trabalhando com um recém adquirido computador McBee LGP-30, o qual possuía o tamanho aproximado de uma geladeira, calculou a solução aproximada de um sistema contendo 12 equações diferenciais que modelava o comportamento da atmosfera em menor escala [10].

Este computador possuía uma memória interna de **16KB**, realizava cálculos a uma taxa de **60** multiplicações por segundo e imprimia os dados num rolo de papel a uma velocidade de seis linhas de números por minuto [10]. Com o intuito de aumentar o desempenho de seu computador Lorenz teve o “insight” de alterar o programa para imprimir

os números com somente três dígitos significativos, embora internamente os cálculos continuassem a ser realizados com mais dígitos de precisão, obtendo uma solução aproximada das trajetórias.

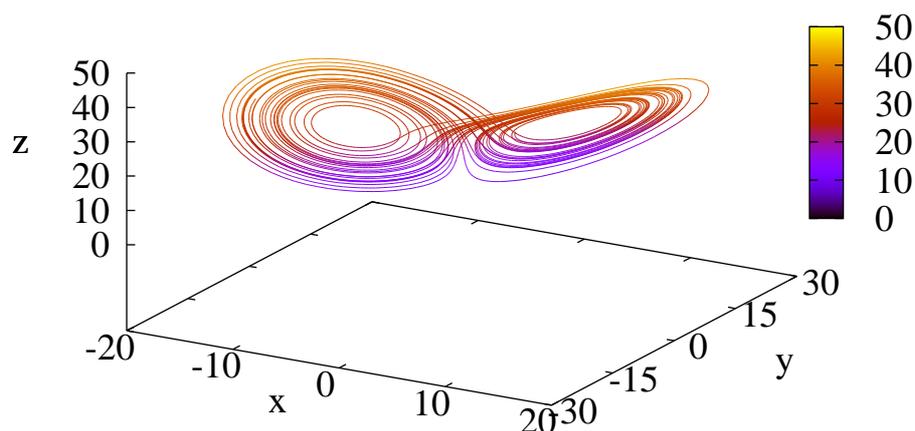
Após obter os resultados em uma escala de tempo menor, Lorenz decidiu reiniciar os cálculos utilizando as saídas iniciais (com três dígitos significativos) de sua impressora e saiu para tomar uma xícara de café. Ao retornar observou que os resultados foram completamente diferentes dos anteriormente obtidos a partir de condições iniciais que não foram alteradas nos primeiros três dígitos significativos [10, 11].

Inicialmente ele pensou que fosse algum problema no tubo de vácuo mas observou que a discrepância ocorria gradativamente, não podendo ter relação com o tubo de vácuo, primeiro no decimal de menor importância, depois no próximo e assim por diante. Ele percebeu que a diferença entre as trajetórias iniciadas por condições relativamente próximas, aproximadamente dobravam de tamanho a cada quatro dias de simulação do sistema. Lorenz concluiu que não tratava-se de um problema no seu computador e que tinha observado a sensível dependência do sistema às condições iniciais. Posteriormente ele reduziu seu complexo modelo de 12 equações para um modelo menor que apresentasse um comportamento semelhante, chegando a um modelo com 3 equações diferenciais que apresentavam as mesmas características do sistema inicial [10, 11] e que são representados por:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + rx - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz,\end{aligned}\tag{2.3}$$

este sistema de equações é um modelo idealizado de fluídos [10]. Na equação (2.3) x , y , z são variáveis de estados dependentes do tempo t . Para valores diferentes de σ , b e r , que são os parâmetros de controle do sistema de equações, podemos obter comportamentos distintos. Ao integrarmos numericamente o conjunto de equações dadas por (2.3), utilizando os parâmetros de controle $\sigma = 10,00$, $b = 2,66$ e $r = 28,00$ obteremos a evolução temporal tipicamente caótica, conhecida como atrator de Lorenz ou popularmente “atrator borboleta” conforme ilustrado na figura 2.3. Lorenz publicou a observação deste fenômeno em um artigo no ano de 1963 [10].

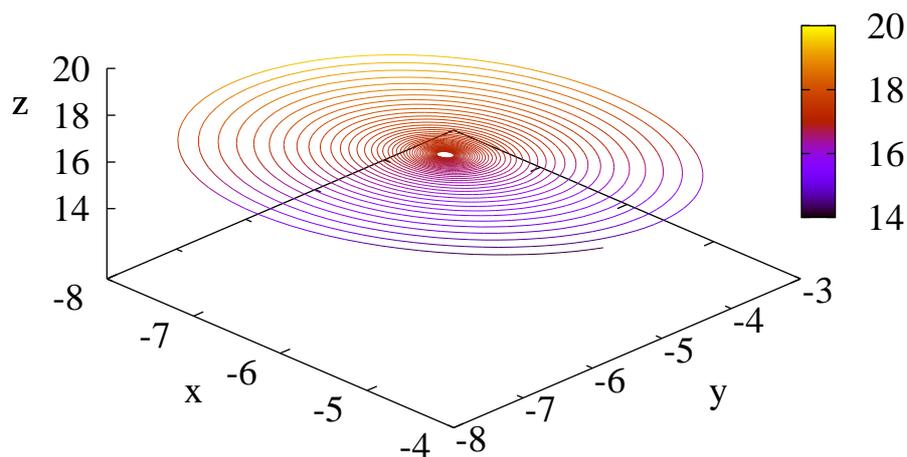
Figura 2.3: Atrator de Lorenz: a figura mostra a evolução temporal de uma trajetória para os parâmetros de controle ($\sigma = 10,00$; $b = 2,66$ e $r = 28,00$).



Fonte: O autor.

Como dissemos anteriormente o comportamento do sistema de Lorenz dado pelas equações (2.3) depende fortemente dos parâmetros de controle. O padrão caótico apresentado pela figura 2.3 não é a única solução possível. Para $r < 24,74$, mantendo-se fixos os parâmetros $\sigma = 10,00$ e $b = 2,66$, o sistema de Lorenz converge para órbitas periódicas ou pontos fixos. Temos um caso típico para $r = 18,00$ onde o sistema tende a convergir para um ponto fixo $p_0 = (-6,73; -6,73; 17,00)$, ou seja, o processo deixa de ser caótico e tende para um único ponto como exemplificado na figura 2.4.

Figura 2.4: Sistema de Lorenz caracterizado pela convergência para o ponto fixo (p_0), onde os parâmetros utilizados foram: $r = 18,00$, $\sigma = 10,00$ e $b = 2,66$.



Fonte: O autor.

2.2.2 Mapas

Para o caso de termos o tempo t como uma variável discreta ($t = 0, 1, 2, 3, \dots$), o sistema será denominado mapa e a variável temporal será representada por n . A dinâmica consistirá de um conjunto possível de estados através de uma regra que determina a configuração atual do sistema em termos de um estado anterior supostamente conhecido. Podemos utilizar um modelo simples para exemplificar isto, seja a função:

$$f(x) = 2x. \quad (2.4)$$

A expressão (2.4) pode ser descrita como uma regra que assume a cada iterada^{vi} do mapa um número x que é duas vezes maior que o seu antecessor $x/2$. Suponha que x seja uma certa população qualquer e que a função $f(x)$ denote a população em um dia posterior, então a regra (2.4) nos fornece a informação que a população estará dobrando

^{vi}uma nova aplicação

a cada dia que se passa, se ela for de 3 elementos no primeiro dia, no segundo dia será de $f(3) = 6$ elementos, para o terceiro dia $f(6) = 12$ elementos e assim por diante.

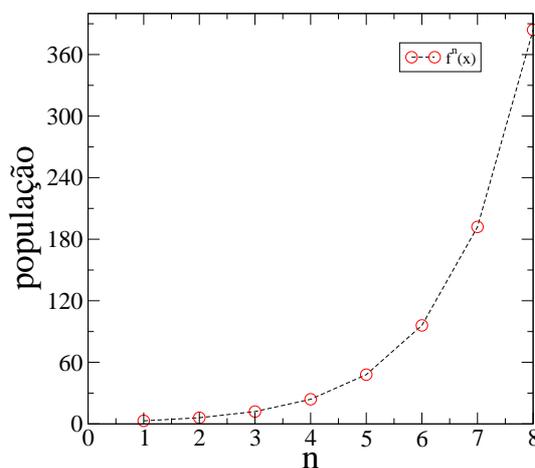
A expressão 2.4 pode ser reescrita de uma maneira tal que mude com relação ao tempo:

$$x_{n+1} = f(x_n) = 2x_n, \quad (2.5)$$

a variável n denota o tempo discreto e x_n será a população em um tempo n . Esta é uma regra determinística, ou seja, o estado atual é determinado, de forma única, pelo estado anterior, além disso a constante 2 nos fornece a taxa de crescimento. Esta é uma das principais metas das ciências: descrever como um sistema evolui temporalmente através de uma regra que seja a mais simples possível.

A evolução da expressão (2.4) pode ser novamente reescrita pela composição de uma função, observando que $f(12) = f(f(3)) = f^2(3)$, ou de uma forma mais geral $f^n(x)$ onde o índice n denota que a função $f(x)$ foi composta n vezes e as primeiras iteradas podem ser visualizadas na figura 2.5.

Figura 2.5: Primeiras iteradas do mapa $f(x) = 2x$ para a população inicial $x_0 = 3$.



Fonte: O autor.

A figura 2.5 deixa claro que se tivermos uma população inicial maior que zero ($x_0 > 0$) a população irá crescer sem limites. Este tipo de crescimento populacional no qual uma população é multiplicada por um fator constante a cada unidade de tempo é chamado

de crescimento exponencial.

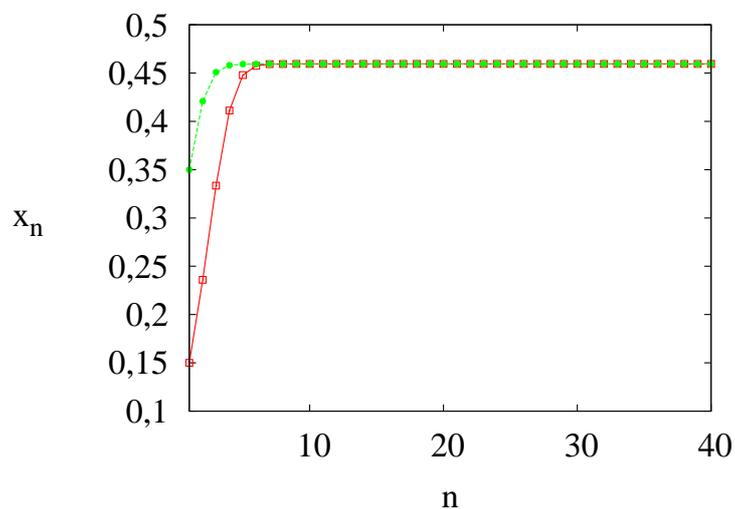
Sistemas reais possuem fatores que limitam o crescimento de populações: espaço e recursos finitos, competição entre espécies, etc.. Isto faz com que a figura 2.5 não reflita a realidade, ou seja, a função $f(x) = 2x$ pode estar correta e ter aplicabilidade prática somente para tamanhos pequenos de populações e perca a sua aplicação para populações maiores. Para contornar este problema um modelo biológico idealizado por May [12] para descrever várias populações de insetos é dado pela expressão (2.6),

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n), \quad (2.6)$$

sendo este denominado de mapa logístico de May [11], onde a é o parâmetro de controle que determina o tipo de comportamento do sistema (varia dependendo da espécie) e a variável x esta agora normalizada e fica restrita a um intervalo unitário ($0 \leq x \leq 1$), a variável x_n é o valor da população no tempo n e x_{n+1} é o valor que a população irá ter num tempo $(n + 1)$ posterior.

A figura 2.6 exemplifica um possível comportamento para a expressão (2.6). A linha na cor verde indica que o mapa logístico foi iniciado com uma população igual a 0,35 ($x_0 = 0,35$). A linha na cor vermelha temos uma população inicial de 0,15 ($x_0 = 0,15$). Em ambos os casos o comportamento final do mapa é o mesmo. Percebemos na figura 2.6 que o mapa dado pela expressão (2.6) não apresentará problemas de divergência.

Figura 2.6: Evolução temporal do mapa de May para duas condições iniciais diferentes e mesmo parâmetro de controle $a = 1,85$. A linha verde representa uma condição inicial $x_0 = 0,35$ e a linha vermelha representa uma condição inicial $x_0 = 0,15$.

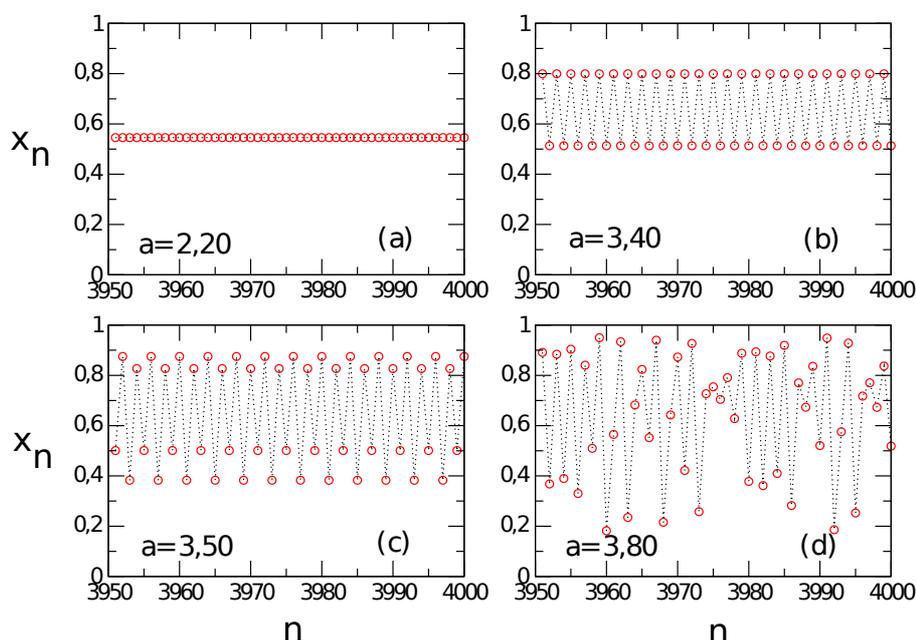


Fonte: O autor.

Na figura 2.6 temos uma estagnação do crescimento, após algumas iterações do mapa o resultado converge para um determinado valor ($x_n \approx 0,46$) sendo este um resultado mais coerente com a realidade.

Como agora temos uma expressão que não diverge para qualquer população inicial, podemos analisar quais os possíveis comportamentos para outros valores do parâmetro de controle a . A figura 2.7 mostra alguns comportamentos que podem surgir, para o mapa logístico dado pela expressão (2.6).

Figura 2.7: Dinâmica temporal do mapa logístico para alguns valores do parâmetro de controle: (a) o valor de x_n converge para um único ponto (órbita de período 1), (b) temos uma órbita de período 2 para a variável x_n , (c) o mapa possui uma órbita de período 4 e (d) a órbita passa a ser de período indeterminado. Todos os casos foram iniciados com a mesma condição inicial ($x_0 = 0,20$).



Fonte: O autor.

Visualizamos pela figura 2.7 que na evolução temporal da expressão 2.6, após um tempo transiente^{vii} de 1000 iteradas, para $a = 2,20$ (item (a) da figura 2.7) o mapa apresenta período igual a 1, para $a = 3,40$ (item (b) da figura 2.7) ele apresenta um período 2 e para $a = 3,50$ (item (c) da figura 2.7) o sistema passa a exibir um período 4, ou seja, o sistema apresenta um comportamento muito bem definido para estes valores de a .

Já para o caso de $a = 3,80$ (item (d) da figura 2.7) o sistema deixa de apresentar características periódicas ou regulares e exibe uma evolução temporal sem qualquer relação

^{vii}tempo necessário para o sistema atingir o estado assintótico.

aparente com o seus estados anteriores, mesmo este sistema sendo regido por uma regra ou equação de evolução no tempo. A tabela 2.1 resume todas estas informações.

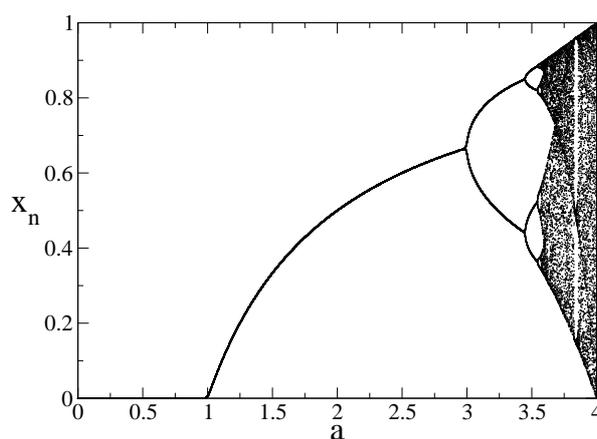
Tabela 2.1: Resumo dos padrões de comportamento do mapa logístico para diferentes valores do parâmetro de controle a .

a	período	comportamento
2,20	1	regular
3,40	2	regular
3,50	4	regular
3,80	indeterminado	irregular

Fonte: o autor.

A figura 2.7 mostra a dinâmica de somente alguns valores de a , mas podemos ir um pouco mais além e variar os valores possíveis de a dentro do intervalo $[0,4]^{\text{viii}}$ para observar a mudança de comportamento do sistema. Este método de análise é conhecido como diagrama de bifurcação.

Figura 2.8: Diagrama de bifurcação do mapa logístico representando a mudança de comportamento da variável dinâmica x_n conforme a variamos o parâmetro de controle a .



Fonte: O autor.

^{viii}fora desse intervalo o mapa logístico diverge

A figura 2.8 mostra a mudança de estabilidade da equação (2.6) correspondente a variação do parâmetro de controle a . Portanto, temos um gráfico dos valores assintóticos de uma variável de estado x_n *versus* um parâmetro de controle, que no caso do mapa logístico é a . Após um tempo suficientemente longo podemos obter:

1. pontos fixos: é quando o sistema atinge um determinado valor e para todo e qualquer tempo posterior este valor não muda mais. Dissemos que este ponto mapeia ele mesmo, ou seja, $f(x^*) = x^*$. Para $0,00 \leq x \leq 1,00$ temos a origem como ponto fixo estável. Para o intervalo $1,00 < a \leq 3,00$ a origem passa a ser instável e temos outros pontos fixos estáveis dependendo do valor de a utilizado dentro deste intervalo.
2. órbitas periódicas: o sistema passa a oscilar entre determinados valores, para um caso simples de período-2, temos que um ponto x_1^* mapeia um outro x_2^* que no tempo posterior mapeia x_1^* , logo:

$$\begin{aligned}x_2^* &= f(x_1^*) \\x_1^* &= f(x_2^*).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Podemos observar uma órbita de período 2 para, aproximadamente, $3,00 < a < 3,45$ na figura 2.8. De uma forma geral se x^* for um ponto fixo de período- m a função retornará ao ponto x^* após m iteradas do mapa.

$$x^* = f^m(x^*).\tag{2.8}$$

Temos na figura 2.8 uma órbita de período-4 para, aproximadamente, $3,45 < a < 3,55$, logo a função terá novamente o valor x^* após 4 iteradas: $x^* = f^4(x^*)$.

3. caos: Para $3,55 < a \leq 4,00$, figura 2.8, temos órbitas densas, mas este aspecto visual não é de fato conclusivo pois poderíamos ter órbitas de período muito elevado. No capítulo seguinte veremos que estas órbitas densas, juntamente com outras características, referem-se a um comportamento caótico do sistema.
4. janelas periódicas: ainda dentro da região $3,55 < a \leq 4,00$ temos as janelas periódicas que são regiões de período imersas na região caótica. Podemos observar uma órbita de período-3, na figura 2.8, para $a = 3,83$.

2.3 REDES

Segundo Omel'chenko *et al* [1] “Compreender a dinâmica de redes é o coração da ciência não-linear moderna e tem uma ampla aplicabilidade nos mais variados campos.” Uma rede pode ser definida utilizando-se a teoria de grafos. Um grafo G é definido por um par de conjuntos $G\{V,E\}$, onde V representa um conjunto de vértices e E é um conjunto de arestas [13]. Na figura 2.9 os círculos ($i = 1, 2, 3, \dots N$) representam os vértices^{ix} e as conexões (ligações entre os elementos da rede) são equivalentes as arestas do grafo.

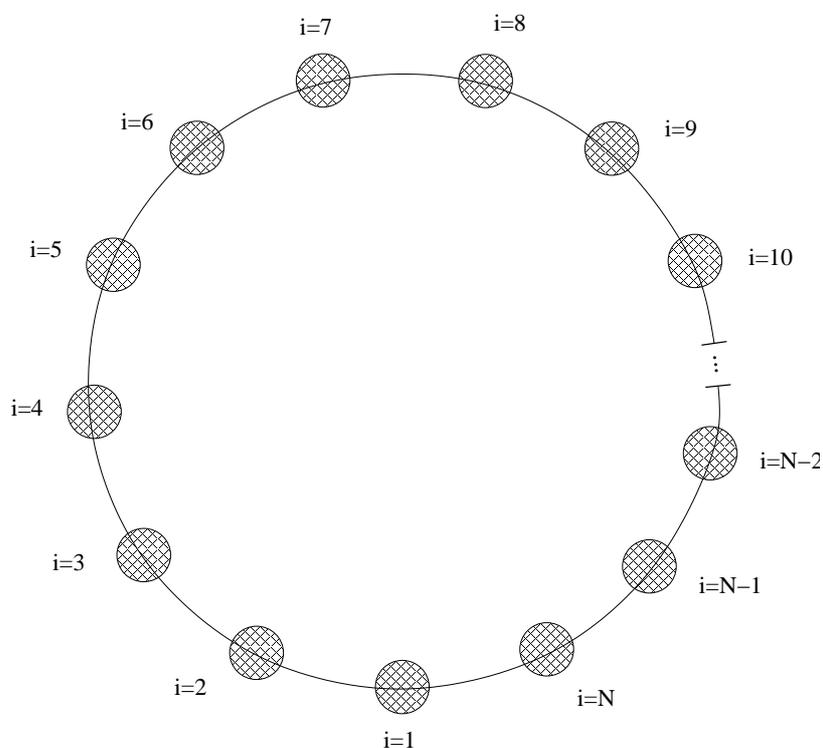
Neste trabalho os vértices do grafo correspondem a mapas logísticos e as arestas representam as ligações entre eles, estas ligações não possuem direção privilegiada (grafo não direcionado). Ou seja, cada vértice de índice i é conectado aos vértices $i - 1$ e $i + 1$ influenciando o comportamento destes e vice-versa.

Para o caso de uma rede de N mapas acoplados e condições de contorno periódicas teremos ainda que o elemento de índice $i = N + 1$ corresponderá ao elemento de índice $i = 1$. A figura 2.9 exemplifica o que foi dito anteriormente, nesta temos uma rede de N elementos (mapas) acoplados somente com o primeiro vizinho^x de forma bi-direcionada (grafo não direcionado) e condições de contorno periódicas.

^{ix}elementos da rede

^xacoplamento local

Figura 2.9: Rede de N mapas acoplados com o primeiro vizinho (acoplamento local) de forma bi-direcional e condições de contorno periódicas. O índice i representa cada elemento (vértice) da rede.



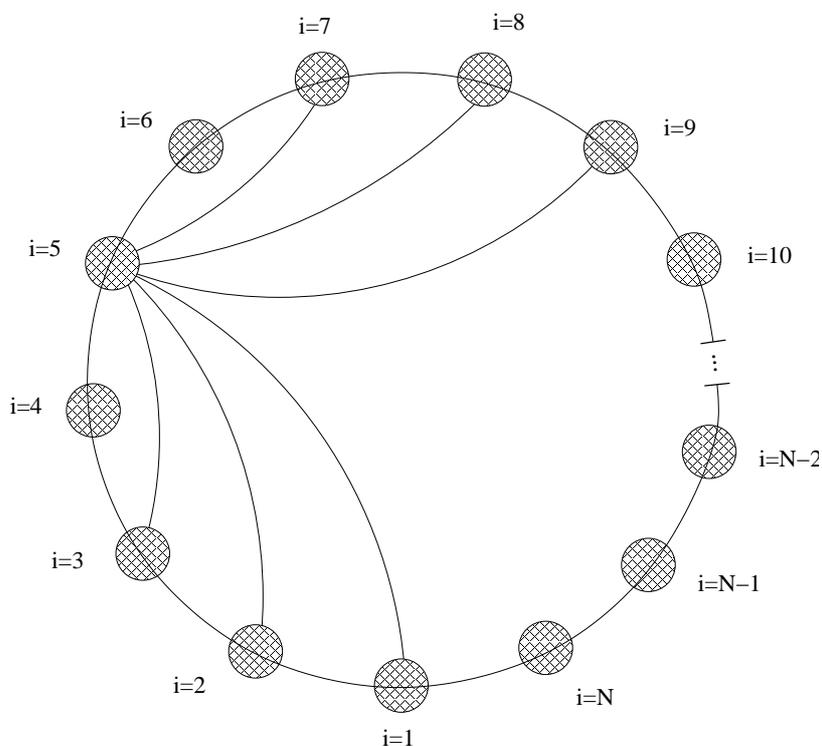
Fonte: O autor.

Existem várias outras maneiras de se acoplar sistemas (redes), na figura 2.9 temos apenas um exemplo de acoplamento com primeiros vizinhos para N elementos, podemos trabalhar com outras formas de topologia, a seguir daremos mais dois exemplos de acoplamentos, os quais serão utilizados neste trabalho.

2.3.1 Acoplamento não-local

Este é um tipo de acoplamento em que há atalhos na rede e o vértice de índice i pode estar conectado aos elementos de índice $\{i-m, \dots, i-2, i-1, i, i+1, i+2, \dots, i+m\}$ onde m é um número inteiro e está relacionado ao alcance do acoplamento.

Figura 2.10: Rede de N mapas acoplados não-localmente de forma bi-direcional e condições de contorno periódicas. O índice i representa cada vértice (elemento) da rede e as arestas correspondem as ligações não-locais da rede.



Fonte: O autor.

A figura 2.10 mostra uma rede acoplada não-localmente onde, para não sobrecarregar demais a figura, mostramos as ligações de somente um elemento de índice $i = 5$. Os demais elementos possuem o mesmo padrão, esta figura possui N elementos acoplados de tal forma que o elemento 5 possui 4 ligações de cada lado, ou seja, $m = 4$. A expressão matemática para o acoplamento não-local, figura 2.10, é dada geralmente por uma função degrau,

$$h(q) = \begin{cases} 1 & \text{se } q \leq m \\ 0 & \text{se } q > m. \end{cases} \quad (2.9)$$

Onde 1 significa que há conexão entre os elementos e 0 significa que não existe conexão alguma com o elemento além de $m + 1$. Se tivermos uma rede onde todos os

seus elementos interagem com todos os demais este acoplamento será global^{xi}. Podemos obter uma rede com acoplamento global através de uma rede acoplada de forma não-local fazendo $m \rightarrow N$ desta forma todos os elementos da rede possuiram ligações com os demais constituintes da mesma.

A expressão que será utilizada neste trabalho para acoplamento não-local [1] é representada pela equação (2.10):

$$x_i^{n+1} = f(x_i^n) + \frac{\sigma}{2p} \sum_{j=i-p}^{i+p} [f(x_j^n) - f(x_i^n)], \quad (2.10)$$

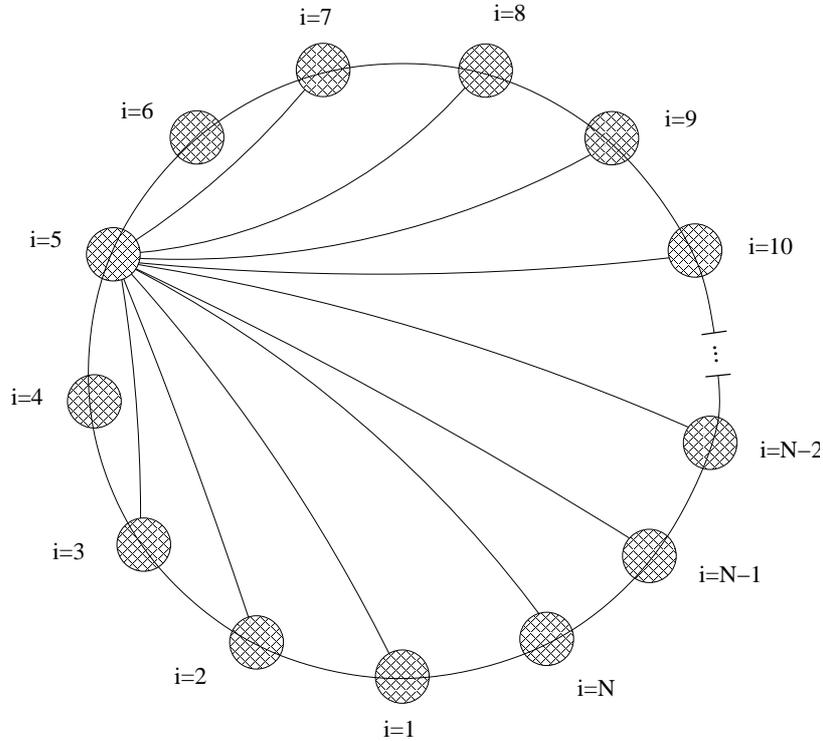
onde x_i^{n+1} representa a variável de estado de índice i , com $1 \leq i \leq N$, o parâmetro p representa o número de vizinhos acoplados de cada lado, ou seja, m da expressão (2.9), o parâmetro σ nos fornece a intensidade do acoplamento ($0 \geq \sigma \geq 1$). A função $f(x_i^n)$ é a expressão de apenas um mapa logístico isolado dada pela expressão (2.6) com $a = 3,80$. Para este valor do parâmetro de controle ($a = 3,80$) o mapa logístico apresenta comportamento caótico.

2.3.2 Acoplamento lei de potência

Neste tipo de acoplamento os vértices (mapas para o nosso caso) possuem uma interação via acoplamento global. No entanto a influência no elemento de índice i , que é aplicada por todos os outros elementos da rede, decai conforme nos afastamos do mesmo. A figura 2.11 representa um acoplamento global.

^{xi}todos com todos

Figura 2.11: Rede de N mapas acoplados globalmente de forma bi-direcional e condições de contorno periódicas. O índice i representa cada vértice (elemento) da rede e as ligações estão representadas pelas arestas do grafo.



Fonte: O autor.

A figura 2.11, novamente por simplicidade, mostra somente as ligações do elemento de índice $i = 5$, pois para todos os outros o padrão será o mesmo, onde a interação entre os elementos decai^{xiii} conforme a distância entre os mesmos. A expressão para este tipo de acoplamento, conhecida na literatura como lei de potência [6, 14], é dada por:

$$x_i^{n+1} = (1 - \varepsilon) f(x_i^n) + \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} \left[f(x_{(i+j)}^n) + f(x_{(i-j)}^n) \right], \quad (2.11)$$

com x_i^{n+1} representando a variável de estado de índice i , o parâmetro α controla o alcance do acoplamento ($\alpha \geq 0$), ε é responsável pela intensidade deste acoplamento ($0 \leq \varepsilon \leq 1$) e a expressão $f(x_i^n)$ novamente é dada pelo mapa logístico. A expressão para $\eta(\alpha)$ é escrita

^{xiii} não podendo ser visualizado com base somente na figura 2.11

como:

$$\eta(\alpha) = 2 \sum_{j=1}^{N'} j^{-\alpha}, \quad (2.12)$$

com $N' = \frac{(N-1)}{2}$ e devido a isto teremos que utilizar redes de tamanho ímpares para o acoplamento lei de potência, caso contrário o acoplamento não seria simétrico e os elementos da rede ficaram ligados com números diferentes de vizinhos de cada lado.

3 CAOS EM MAPAS

Se abandonarmos uma esfera “próxima” ao pico de uma montanha em um tempo inicial (t_0) ela provavelmente, devido a interação gravitacional, irá descer até um ponto onde a sua energia potencial seja diferente da inicial. Supondo a dissipação de energia por atrito, enquanto a esfera desce a montanha, para algum tempo final (t_f) ela permanecerá imóvel no ponto mais baixo da planície para qualquer $t \geq t_f$, do ponto de vista do referencial da Terra.

Aqui temos dois pontos com comportamentos distintos da trajetória deste objeto (esfera), um destes pontos (lugar mais baixo da planície) a bola aproxima-se qualquer que seja a posição inicial sobre a montanha, outro ponto (o pico da montanha) ocorre justamente o contrário, o objeto tende a se afastar deste ponto qualquer que seja a sua posição inicial, desde que este não seja colocado exatamente sobre o pico.

Este simples exemplo introduz o que seria a ideia de ponto fixo instável (pico da montanha) e ponto fixo estável (ponto mais baixo da planície).

3.1 ESTABILIDADE DE PONTOS FIXOS

O estudo da estabilidade de pontos fixos é importante, pois objetos reais sempre estão sujeitos a pequenas perturbações. Assim um estado estável no mundo real certamente corresponde a um ponto fixo estável. Para o caso de um ponto fixo instável, erros pequenos ou pequenas perturbações, por isto a palavra “próxima” anteriormente escrita, fazem com que o sistema evolua para longe deste ponto, por este motivo geralmente são raros e não observamos o mesmo.

O termo “próxima” utilizado anteriormente pode ser abordada de forma precisa para qualquer número real. Dada uma distância ε de um ponto p , um **epsilon próximo**

denotado por $N_\varepsilon(p)$ e denotando a reta real por \mathbb{R} então $N_\varepsilon(p)$ é um intervalo de números $\{x \in \mathbb{R} : |x - p| < \varepsilon\}$. Supondo ε como um número muito pequeno e positivo teremos.

Definição 1 *Seja f um mapa em \mathbb{R} e seja p um número real tal que $f(p) = p$, se todos os pontos suficientemente próximos de p são atraídos para p , então p será chamado um **sorvedouro** ou **ponto fixo atrativo**. De forma mais precisa, se houver um $\varepsilon > 0$ tal que para todos os x sobre um **epsilon próximo** $N_\varepsilon(p)$, e $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = p$, então p é um sorvedouro. Se todos os pontos suficientemente próximos de p são repelidos de p , então p é chamado de **fonte** ou um **ponto fixo repelente**. De forma mais precisa, se houver um epsilon próximo $N_\varepsilon(p)$ tal que cada x em $N_\varepsilon(p)$, exceto eventualmente p , mapeia para fora de $N_\varepsilon(p)$, então p é uma fonte [10].*

Supondo que a função f seja contínua e possui derivadas de qualquer ordem teremos.

Teorema 1 *Seja f um mapa suaveⁱ em \mathbb{R} e assumindo que p é um ponto fixo de f [10].*

1. *Se $|f'(p)| < 1$ então p é um sorvedouro.*
2. *Se $|f'(p)| > 1$ então p é uma fonte.*

Onde f' representa a primeira derivada de f . Se a derivada f' no ponto p tiver módulo menor que 1 isto fará com que pontos na vizinhança de p aproximem-se de p , logo p é um sorvedouro. Se por outro lado a taxa de variação da função f no ponto p possuir módulo maior que 1 isto implica que as órbitas próximas deste ponto p irão afastar-se de p por este motivo dizemos que o ponto p é uma fonte.

3.2 ÓRBITAS CAÓTICAS

Do capítulo anterior vimos na figura 2.8 que para o parâmetro de controle no intervalo $3,57 < a \leq 4,00$, o mapa logístico apresenta órbitas densas, voltaremos a esta questão para mostrar que estas órbitas densas (aperiódicas) em conjunto com a sensibilidade as condições iniciais implicam em caos no sistema.

ⁱ diferenciável em todo o seu domínio

3.2.1 Aperiodicidade

Órbitas periódicas possuem um padrão bem estabelecido, pois após um certo período de tempo n um ponto de sua órbita x^* retorna novamente a x^* ,

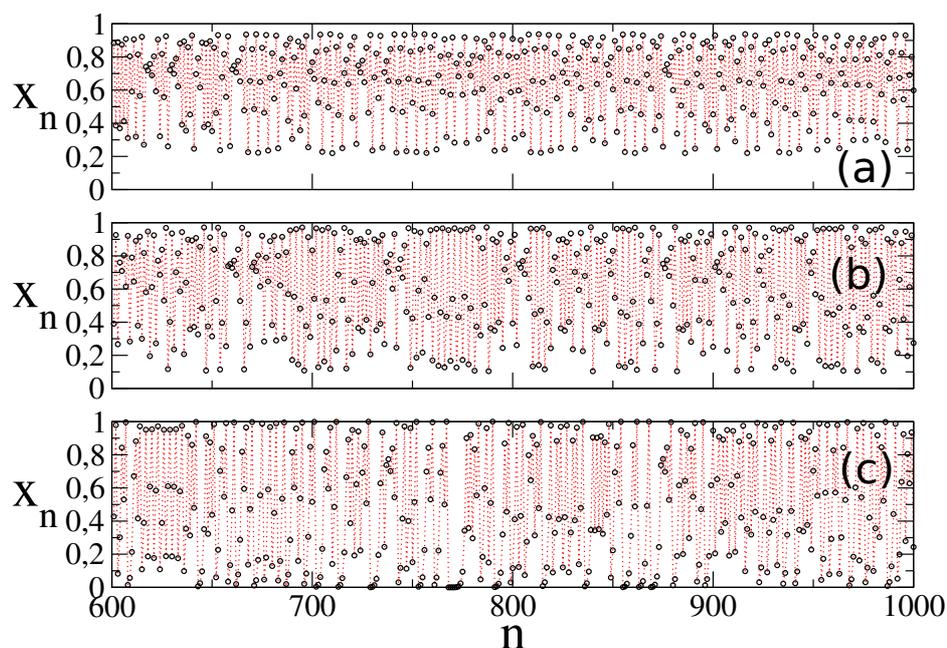
$$x^* \implies x^{**} \implies x^{***} \implies \dots \implies x^*, \quad (3.1)$$

desta forma podemos prever todos os pontos por onde a trajetória do sistema irá passar (figura 2.7 letras (a), (b) e (c)). Já para sistemas que são aperiódicos não temos tais previsões sobre a possível trajetória e sua evolução temporal é irregular.

Este comportamento dificulta a previsão futura sobre a órbita caótica mesmo que saibamos o estado atual do sistema. Na ausência de um padrão bem estabelecido é tão difícil prever o comportamento do mapa para tempos posteriores assim como seria em um sistema aleatório (por exemplo no lançamento de um dado).

Na figura 3.1 temos a evolução do mapa logístico $\{x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)\}$ para valores de a dentro do intervalo $(3,57; 4,00]$ e desprezando as 600 primeiras iteradas do mapa, onde para (a) temos $a = 3,57$, (b) $a = 3,89$ e (c) $a = 4,00$. Nota-se pela figura 3.1 que, dentro deste intervalo, o mapa logístico não apresenta qualquer padrão de regularidade, ou seja, ele é totalmente aperiódico no intervalo de tempo observado.

Figura 3.1: Aperiodicidade no mapa logístico: (a) evolução temporal do mapa logístico para $a = 3,57$, (b) temos $a = 3,89$ e em (c) o valor do parâmetro de controle é $a = 4,00$. Em (a), (b) e (c) o mapa não apresenta período para o intervalo de tempo observado.



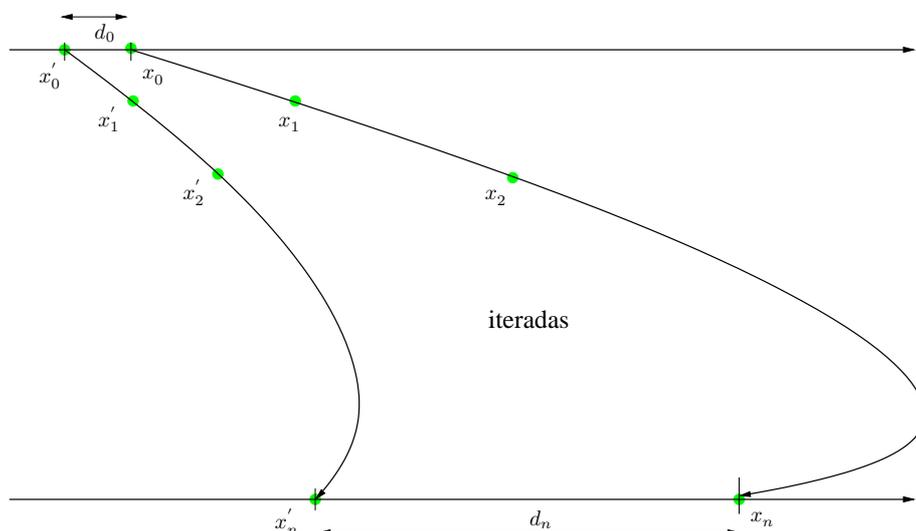
Fonte: O autor.

Este padrão de comportamento dificulta imensamente qualquer previsão futura da órbita e é similar a um problema estocástico. Porém essa análise visual não é suficiente para afirmar que o sistema é aperiódico pois podemos ainda estar observando um comportamento transiente ou o sistema apresenta uma órbita de período elevado, possivelmente maior que o tempo (iteradas) mostrado na figura 3.1.

3.2.2 Sensibilidade às condições iniciais

A figura 3.2 ilustra como seria o aspecto da evolução de duas trajetórias inicialmente muito próximas, cuja distância inicial d_0 , em módulo, é muito pequena e após um número n de iteradas esta distância passa a ser d_n , em módulo. Nota-se que neste caso temos sensibilidade a pequenas mudanças nas condições iniciais.

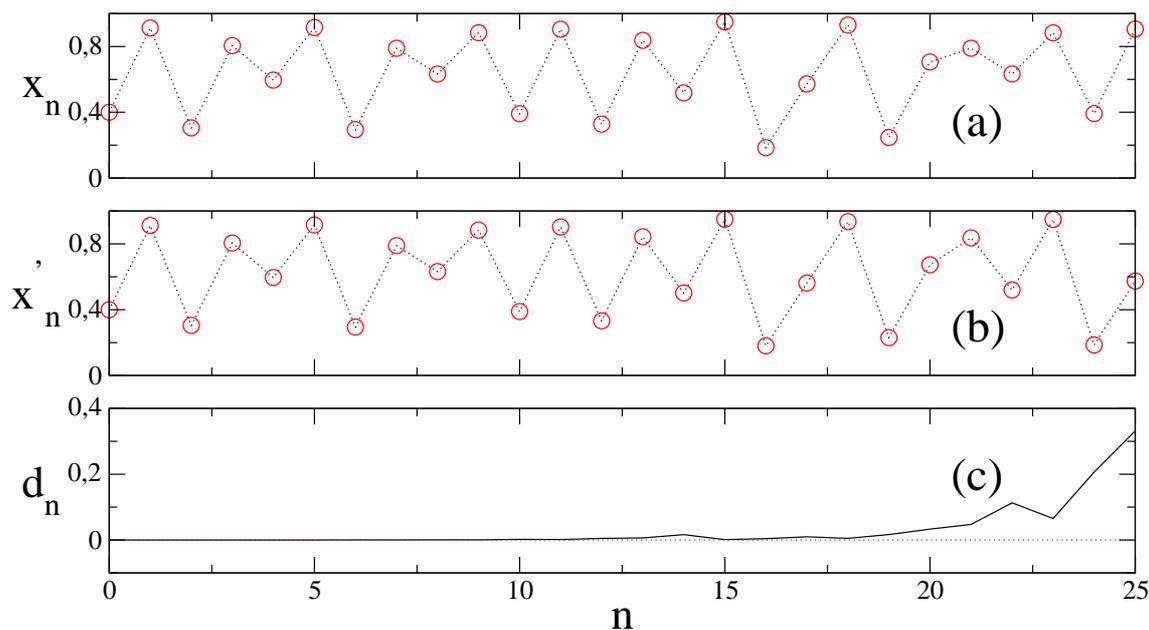
Figura 3.2: Divergência de trajetórias inicialmente muito próximas. Temos uma condição inicial qualquer (x'_0) e uma outra condição inicial próxima (x_0) de modo que a distância $d_0 = |x_0 - x'_0|$ entre elas seja muito pequena.



Fonte: O autor.

Podemos mostrar computacionalmente esta sensibilidade as condições iniciais. Na figura 3.3 temos a evolução de duas órbitas que em $n = 0$ estão muito próximas $d_0 = |x'_0 - x_0|$ para o mapa dado pela expressão 2.6, onde a letra (a) e (b) são as trajetórias com condições iniciais que diferem em d_0 para $n = 0$ e a letra (c) é a sobreposição de ambas as trajetórias.

Figura 3.3: Evolução do mapa logístico para trajetórias inicialmente próximas. Em (a) temos uma condição inicial qualquer x_0 e (b) refere-se a uma outra condição inicial x'_0 . Ambas diferem em $d_0 = |x_0 - x'_0| = 10^{-5}$ e possuem o mesmo valor de $a = 3,80$. Em (c) temos a distância d_n .



Fonte: O autor.

Na figura 3.3 fixamos o parâmetro de controle $a = 3,80$ e a distância inicial de separação entre as trajetórias é de $d_0 = 10^{-5}$. Para os primeiros tempos as órbitas permanecem praticamente as mesmas, como pode ser visto na figura 3.3 (c) onde temos que a distância d_n permanece próxima de zero, a medida que o tempo evolui as órbitas perdem relação que tinham no instante inicial. As figuras 3.1 e 3.3 apresentam aspectos visuais do que seria uma sistema que apresenta caos.

3.3 EXPOENTE DE LYAPUNOV

Uma maneira mais precisa de obter a informação de que o sistema exibe caos é através do cálculo do expoente de Lyapunov. Este nome foi dado em homenagem ao matemático e físico russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918), cujo manuscrito

póstumoⁱⁱ sobre a prova do equilíbrio de uma elipsóide para o caso de um fluido não-homogêneo [15] introduziu o expoente de Lyapunov como uma ferramenta poderosa para o estudo de equilíbrio em sistemas físicos.

Na dinâmica não-linear utilizamos o expoente de Lyapunov λ para calcular a taxa exponencial média com que duas trajetórias, inicialmente muito próximas, divergem conforme o sistema evolui no tempo, ver figura 3.3. Para mapas teremos:

Definição 2 *Seja f um mapa suave sobre a reta real \mathbb{R} . O número de Lyapunov $L(x_1)$ da órbita $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ é definido como:*

$$L(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(|f'(x_1)| \dots |f'(x_n)| \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (3.2)$$

desde que este limite exista. O **expoente de Lyapunov** $\lambda(x_1)$ é definido como:

$$\lambda(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) \left[\ln |f'(x_1)| + \dots + \ln |f'(x_n)| \right], \quad (3.3)$$

desde que este limite exista, ou seja, λ existe se e somente se L existir, for diferente de zero e $\lambda = \ln L$ [10].

Temos três possibilidades possíveis para o expoente de Lyapunov.

1. Se $\lambda < 0$ o sistema possui comportamento regular (pontos fixos ou órbitas periódicas);
2. Se $\lambda > 0$ o sistema tem comportamento caótico;
3. Se $\lambda = 0$ temos uma mudança na estabilidade do sistema, denominado ponto de bifurcação.

Das equações (3.2) e (3.3) temos que para um ponto fixo x_1 de um sistema unidimensional f o seu número de Lyapunov será igual a $|f'(x_1)|$ com o seu respectivo expoente de Lyapunov dado por $\lambda = \ln |f'(x_1)|$. Supondo que x_1 seja um ponto periódico possuindo

ⁱⁱ publicado no jubileu de bi-centenário da Academia de Ciência (*Sur certaines séries de figures d'équilibre d'une liquide hétérogène en rotation 1925-1927*)

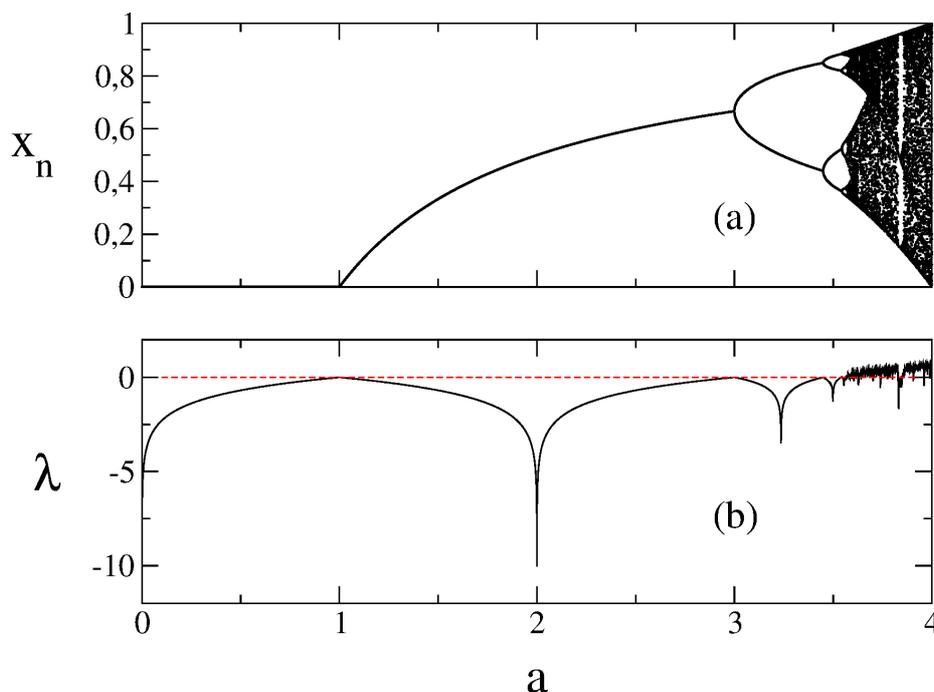
um período característico k , logo seu expoente de Lyapunov será dado por:

$$\begin{aligned}
 L(x_1) &= \left[|f'(x_1)| |f'(x_2)| \dots |f'(x_{k-1})| |f'(x_k)| \right]^{\frac{1}{k}} \\
 \lambda(x_1) &= \ln[L(x_1)] = \ln \left\{ \left[|f'(x_1)| |f'(x_2)| \dots |f'(x_{k-1})| |f'(x_k)| \right]^{\frac{1}{k}} \right\} \\
 \lambda(x_1) &= \frac{1}{k} \left\{ \ln \left[|f'(x_1)| |f'(x_2)| \dots |f'(x_{k-1})| |f'(x_k)| \right] \right\} \\
 \lambda(x_1) &= \frac{\ln |f'(x_1)| + \ln |f'(x_2)| + \dots + \ln |f'(x_{k-1})| + \ln |f'(x_k)|}{k}. \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

Para a órbita periódica o número de Lyapunov $e^{\lambda(x_1)}$ mede a taxa média local de afastamento, por iterada, próxima a um ponto sobre a órbita.

Utilizando a expressão (3.3) podemos calcular o expoente de Lyapunov para o mapa logístico dado pela expressão (2.6), o resultado da simulação numérica pode ser visto na figura 3.4 e desta forma confirmar, de forma rigorosa, que o mapa logístico apresenta comportamento caótico para alguns valores de parâmetro de controle a .

Figura 3.4: Temos em (a) o diagrama de bifurcação do mapa logístico onde x_n representa a variável de estado do mapa. Para (b) temos o expoente de Lyapunov (λ) pela variação do parâmetro de controle a .



Fonte: O autor.

Na figura 3.4 temos o diagrama de bifurcação para a equação (2.6) juntamente com a seu respectivo expoente de Lyapunov (λ). Agora podemos de fato afirmar que as órbitas densas vistas na figura 3.4 (a) refere-se a um comportamento caótico do mapa logístico, pois na figura 3.4 (b), para a maioria dos valores ($3,57 < a \leq 4,00$) o expoente de Lyapunov possui valores positivos ($\lambda > 0$). Onde o expoente de Lyapunov é negativo ($\lambda < 0$) o mapa apresenta comportamento regular ($0 \leq a \leq 3,57$) e conseqüentemente para $\lambda = 0$ o sistema passa por uma mudança de estabilidade. Ainda na região ($3,57 < a \leq 4,00$) temos alguns valores $\lambda < 0$ e estas regiões são conhecidas como janelas periódicas, ou seja, regiões imersas na região caótica que apresentam comportamento regular ou periódico.

Para sistemas com m -dimensões temos $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, neste caso teremos que calcular as derivadas da função vetorial \vec{f} , ao invés de apenas uma derivada, para o caso unidimensional, agora teremos m -derivadas. Seja $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ um mapa em \mathbb{R}^m

e seja $\vec{p} \in \mathbb{R}^m$, a matriz jacobiana de \vec{f} em \vec{p} será definida por [10]:

$$\vec{D}\vec{f}(\vec{p}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{p}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{p}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\vec{p}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{p}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{p}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(\vec{p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{p}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{p}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(\vec{p}) \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

podemos agora generalizar o número e o expoente de Lyapunov para um sistema m -dimensional. Definindo $J_n = \vec{D}\vec{f}^n(\vec{v}_0)$ como a primeira derivada da matriz para a n -ésima iterada de \vec{f} teremos:

Definição 3 *Seja \vec{f} um mapa suave em \mathbb{R}^m , seja $J_n = \vec{D}\vec{f}^n(\vec{v}_0)$, e para $k = 1, \dots, m$, seja r_k^n o tamanho dos k -éssimos eixos ortogonais da elipsóide $J_n N$ para uma órbita com um ponto inicial \vec{v}_0 durante as n primeiras iterações. Os k -éssimos números de Lyapunov de \vec{v}_0 são definidos por:*

$$L_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (r_k^n)^{\frac{1}{n}} \quad (3.6)$$

se este limite existir. Os k -éssimos expoentes de Lyapunov de \vec{v}_0 são $\lambda_k = \ln L_k$ [10].

Definição 4 *Seja \vec{f} um mapa no \mathbb{R}^m , $m \geq 1$, e seja $\{\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ a fronteira da órbita de \vec{f} . Esta órbita será caótica [10] se:*

1. não há período assintótico,
2. não há números de Lyapunov iguais a 1 e
3. $\lambda_1(\vec{v}_0) > 1$.

Isto implica em:

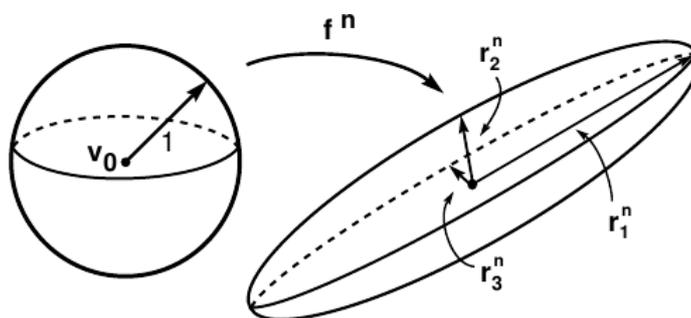
- Se todos os $\lambda_j \leq 0$, o sistema apresenta comportamento regular.
- Se ao menos um dos $\lambda_j > 0$, o sistema apresenta comportamento caótico.
- Se mais de um $\lambda_j > 0$, o sistema é chamado de hipercaótico.

Como agora o sistema possui m -dimensões e temos uma matriz de derivadas J fica extremamente difícil calcular os expoentes λ_j , e pela definição (3.6) necessitamos recorrer a uma aproximação de $J_n N$ por uma esfera unitária através de algoritmos computacionais.

3.3.1 Cálculo Numérico dos expoentes de Lyapunov

Supondo que temos uma hipersfera $J_n N$ de condições iniciais com raio \vec{v}_0 , após n iteradas ela será deformada em uma hipersfera que terá semi-eixos de comprimentos r_i sobre as direções u_i , uma aproximação para o cálculo dos λ_k é realizada de forma explícita por $J_n J_n^T$, onde J_n^T é a matriz transposta de J_n , e calculando os autovalores r_i^2 de $J_n J_n^T$. Se a hipersfera possuir contração e dilatação em suas direções, ela será um objeto longo e fino para n muito grande conforme mostra a figura 3.5.

Figura 3.5: Evolução da hipersfera de condições iniciais com raio \vec{v}_0 . Após n iteradas a hipersfera inicial será deformada e possuirá contrações em algumas direções e dilatação em outras direções.



Fonte: Alligood [10].

Os autovalores de $J_n J_n^T$ serão muito grandes ou muito pequenos e devido ao limite computacional torna-se difícil obter estes autovalores, devido a este fato não calcula-se a hipersfera $J_n N$ e conseqüentemente os autovalores r_i^2 diretamente, logo fazemos uma aproximação indireta da seguinte forma.

$$J_n U = \vec{D}\vec{f}(\vec{v}_{n-1}) \dots \vec{D}\vec{f}(\vec{v}_0) N, \quad (3.7)$$

se calcularmos uma iterada começando com uma base ortonormal $\{\vec{w}_1^0, \dots, \vec{w}_m^0\}$ em \mathbb{R}^m

obteremos os vetores $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_m$:

$$\vec{z}_1 = \vec{D}\vec{f}(\vec{v}_0)\vec{w}_1^0, \dots, \vec{z}_m = \vec{D}\vec{f}(\vec{v}_0)\vec{w}_m^0, \quad (3.8)$$

estes vetores encontra-se sobre a nova elipse $\vec{D}\vec{f}(\vec{v}_0)N$, porém estes vetores podem não ser ortogonais. Como os números de Lyapunov estão relacionados com todas as direções da elipse perpendiculares entre si, necessitamos de alguma forma criar um novo conjunto de vetores ortogonais $\vec{A} = \{\vec{w}_1^1, \dots, \vec{w}_m^1\}$ a qual possua o mesmo volume de $\vec{D}\vec{f}(\vec{v}_0)N$. Precisaremos ortogonalizar os vetores $\{\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_m\}$ para obtermos as direções de contração ou dilatação do círculo inicial de raio \vec{v}_0 .

3.3.2 Ortonormalização de Gram-Schmidt

Dado um espaço vetorial euclidiano V de dimensão m e uma base qualquer $\vec{B} = \{\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \dots, \vec{z}_m\}$ desse espaço, é possível, a partir dessa base, determinar uma nova base ortogonal de V através do processo de ortonormalização de Gram-Schmidt. Supondo que $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \dots, \vec{z}_m$ não são ortogonais e admitindo-se que $\vec{w}_1 = \vec{z}_1$, determina-se o valor de $\vec{w}_2 = \vec{z}_2 - \alpha\vec{w}_1$, exigindo que ele seja ortogonal a \vec{w}_1 , portanto:

$$\begin{aligned} \vec{w}_2 \cdot \vec{w}_1 &= 0, \\ (\vec{z}_2 - \alpha\vec{w}_1) \cdot \vec{w}_1 &= 0, \\ \vec{z}_2 \cdot \vec{w}_1 - \alpha\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1 &= 0, \\ \alpha &= \frac{\vec{z}_2 \cdot \vec{w}_1}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}, \\ \vec{w}_2 &= \vec{z}_2 - \left(\frac{\vec{z}_2 \cdot \vec{w}_1}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \right) \vec{w}_1. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Desta forma os vetores \vec{w}_1 e \vec{w}_2 são ortogonais. Para o vetor \vec{w}_3 , tem-se que $\vec{w}_3 = \vec{z}_3 - \alpha_2\vec{w}_2 - \alpha_1\vec{w}_1$ e considera-se que ele seja ortogonal aos vetores \vec{w}_1 e \vec{w}_2 determinando, assim, os valores de α_1 e α_2 , como segue:

$$\begin{aligned} \vec{w}_3 \cdot \vec{w}_1 &= 0 \quad \text{e} \quad \vec{w}_3 \cdot \vec{w}_2 = 0, \\ (\vec{z}_3 - \alpha_2\vec{w}_2 - \alpha_1\vec{w}_1) \cdot \vec{w}_1 &= 0, \\ (\vec{z}_3 - \alpha_2\vec{w}_2 - \alpha_1\vec{w}_1) \cdot \vec{w}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Como $\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_1 = 0$ obtem-se:

$$\alpha_1 = \frac{\vec{z}_3 \cdot \vec{w}_1}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{\vec{z}_3 \cdot \vec{w}_2}{\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2}, \quad (3.11)$$

consequentemente:

$$\vec{w}_3 = \vec{z}_3 - \left(\frac{\vec{z}_3 \cdot \vec{w}_2}{\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2} \right) \vec{w}_2 - \left(\frac{\vec{z}_3 \cdot \vec{w}_1}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \right) \vec{w}_1. \quad (3.12)$$

Logo os vetores \vec{w}_3, \vec{w}_2 e \vec{w}_1 são ortogonais. Por indução para $(m-1)$ vetores $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \dots, \vec{w}_{m-1}\}$ e considerando o vetor dado por:

$$\vec{w}_m = \vec{z}_m - \alpha_{m-1} \vec{w}_{m-1} - \dots - \alpha_2 \vec{w}_2 - \alpha_1 \vec{w}_1. \quad (3.13)$$

Sendo os valores de $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}\}$ tais que \vec{w}_m seja ortogonal aos vetores $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \dots, \vec{w}_{m-1}\}$, obtemos, a partir de base $\vec{B} = \{\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \dots, \vec{z}_m\}$, a base ortogonal $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \dots, \vec{w}_n\}$ de V . Normalizando cada um dos vetores \vec{w}_j , fazendo $\vec{u}_j = \frac{\vec{w}_j}{|\vec{w}_j|}$ obtemos uma base ortonormal $\vec{A} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_m\}$ de uma base qualquer $\vec{B} = \{\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \dots, \vec{z}_m\}$ de V . Este processo, a partir de uma base qualquer, determinamos um base ortogonal chama-se **Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt** [16, 17]. Utilizando este processo juntamente com o algoritmo desenvolvido, em linguagem Fortran, por Wolf [18] teremos os números e expoentes de Lyapunov de qualquer sistema m -dimensional sem problema com limites computacionais. Este foi então o procedimento utilizado no presente trabalho.

3.3.3 Entropia de Kolmorov-Sinai

Uma rede composta por N mapas acoplados possuirá N expoentes de Lyapunov ($\lambda_{(i)} \rightarrow i = 1, 2, 3, N-1, N$) que medem a taxa média de convergência ou divergência de trajetórias inicialmente próximas. Para o caso desta rede possuir dinâmica caótica, espera-se que alguns dos expoentes de Lyapunov sejam maiores que zero ($\lambda_{(i)} > 0$). Teremos a quantidade obtida através destes expoentes, definida como entropia de Kolmogorov-Sinai (H) dada matematicamente pela expressão:

$$H = \sum_{k(\lambda_{(i)} > 0)}^N \lambda_{(i)}^k, \quad (3.14)$$

obviamente, caso o sistema não possua dinâmica caótica, a entropia terá um valor nulo ($H = 0$) indicando que o sistema apresenta comportamento regular ou periódico. Valores positivos desta entropia ($H > 0$) caracterizam a existência de dinâmica caótica no sistema.

Outra quantidade de interesse é a densidade de entropia de Kolmorov-Sinai (h) definida na equação (3.15):

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{N}H \\ h &= \frac{1}{N} \sum_{k(\lambda_{(i)} > 0)} \lambda_{(i)}^k \end{aligned} \quad (3.15)$$

que será utilizada neste trabalho para caracterizar o colapso dos estados quimera, ou seja, quando o sistema analisado passa a exibir somente comportamento regular ($h = 0$), neste caso dizemos que o sistema colapsou para órbitas periódicas. Obviamente se o sistema apresentar comportamento caótico teremos uma densidade de entropia positiva ($h > 0$).

3.4 PARÂMETRO DE ORDEM GLOBAL

Para estudar sistemas acoplados foi inicialmente introduzido por Kuramoto [2] o parâmetro de ordem complexo e adaptado [14] posteriormente para rede de mapas acoplados. O parâmetro de ordem (Z_n) é uma ferramenta poderosa no estudo de sistemas que exibem sincronismo. Matematicamente, para uma rede com N mapas acoplados teremos:

$$Z_n = R_n \exp(2\pi i \phi_n) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp(2\pi i x_n^j), \quad (3.16)$$

onde x_n^j representa o mapa de índice j da rede, R_n representa a amplitude e ϕ_n representa o ângulo de um vetor de fase em um tempo n qualquer, utilizando a identidade de Euler $\{\exp(i\phi) = \cos(\phi) + i \operatorname{sen}(\phi)\}$ podemos reescrever a equação (3.16) da seguinte forma:

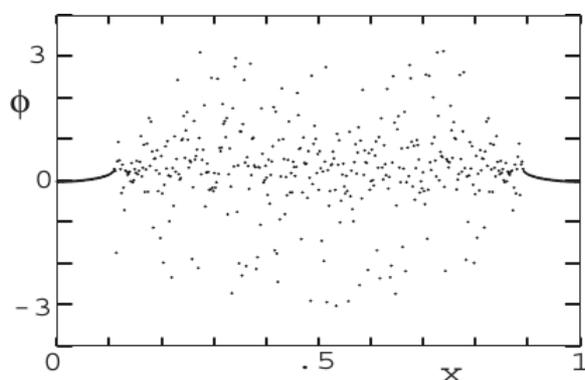
$$\begin{aligned} Z_n &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp(2\pi i x_n^j) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [\cos(2\pi x_n^j) + i \operatorname{sen}(2\pi x_n^j)], \quad (3.17) \\ |Z_n| &= \frac{1}{N} \left\{ \left[\sum_{j=1}^N \cos(2\pi x_n^j) \right]^2 + \left[\sum_{j=1}^N \operatorname{sen}(2\pi x_n^j) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

quando o módulo do parâmetro de ordem [2] tende a unidade ($|Z_n| \rightarrow 1 ; \forall n$) dizemos que o sistema está completamente sincronizado [14]. Quando o módulo do parâmetro de ordem é menor que 1 ($|Z_n| < 1 ; \forall n$) temos que o sistema não apresenta sincronização completa.

3.5 QUIMERA

Quando uma rede, composta por sistemas acoplados, possui dois domínios distintos (uma região coerente e outra incoerente no espaço) dizemos que esta rede exibe estados quimera. Estes padrões foram inicialmente observados por Kuramoto [2] utilizando osciladores de fase idênticos acoplados de forma não-local. Em seu trabalho ele descreve estes padrões como a coexistência de regiões coerentes (sincronizadas) e regiões incoerentes (desincronizadas) no espaço. Na figura 3.6 mostramos o resultado da simulação numérica obtida por Kuramoto [2] para 512 osciladores de fase acoplados. O eixo horizontal x é a variável espacial relacionada a quantidade normalizada de osciladores da rede e a variável vertical ϕ é o ângulo de fase dos mesmos.

Figura 3.6: Regiões coerentes e incoerentes obtidas por Kuramoto: ϕ representa o ângulo de fase e x (normalizada) representa a posição dos osciladores ao longo da rede



Fonte: Kuramoto [2].

A figura 3.6 mostra que os osciladores da extremidade da rede estão com as suas fases sincronizadas enquanto na região central não há qualquer relação entre os elementos (osciladores) da rede. Strogatz [3] utilizando um sistema parecido com o de Kuramoto obteve os mesmos padrões coerentes e incoerentes no espaço que os denominou de estados quimera, devido a sua característica híbrida assim como figuras gregas míti-

cas que possuem partes de animais distintos. Kuramoto e Strogatz utilizaram a equação complexa de Ginzburg-Landau como sistemas idênticos para seus estudos. Maistrenko e colaboradores [1] obtiveram estados quimera para uma rede composta por mapas logísticos idênticos (mesmo parâmetro de controle $a = 3,80$) acoplados de forma não-local conforme equação (3.18) mostrando que estados quimera também podem surgir em sistemas com tempo discreto,

$$x_i^{n+1} = f(x_i^n) + \frac{\sigma}{2p} \sum_{j=i-p}^{i+p} [f(x_j^n) - f(x_i^n)], \quad (3.18)$$

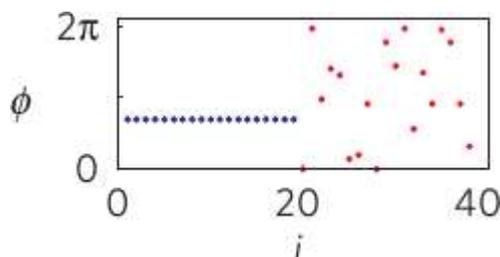
onde $f(x_i^n)$ é a expressão de apenas um mapa logístico isolado dada pela equação (2.6) no tempo n , a variável dinâmica é dado por x_i^{n+1} , o parâmetro p está relacionado ao número de vizinhos acoplados (vértices da rede) de cada lado do elemento de índice i , σ está contida no intervalo $[0, 1]$ sendo a intensidade do acoplamento e $i = 1, 2, 3, \dots, N$ é o tamanho da rede. Com base nestes trabalhos chegamos a seguinte definição:

Definição 5 *Quimera: coexistência de duas regiões espaciais distintas. Uma coerente e outra incoerente para sistemas não-lineares acoplados de forma não-local.*

3.5.1 Evidências Experimentais de Quimera

Kuramoto e Strogatz, dentre outros, obtiveram resultados teóricos. No campo experimental evidências sobre formação de estados quimera em uma rede de osciladores químicos fotossensíveis [4], baseados na reação química de Belousov-Zhabotinsky. A figura 3.7 mostra duas populações com comportamentos distintos obtida pelos autores [4].

Figura 3.7: Estados quimera obtidos em osciladores químicos. A variável ϕ representa a fase e i representa a posição de cada oscilador ($i = 1, 2, 3, \dots, N$)

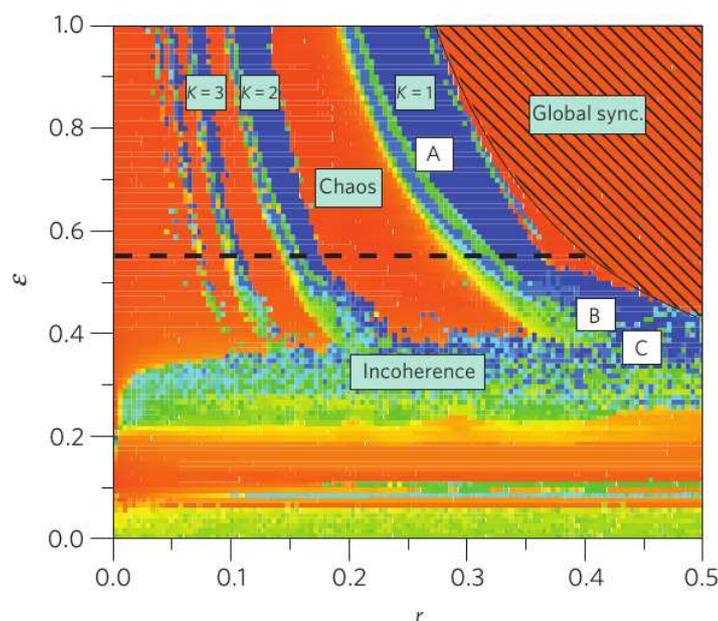


Fonte: Tinsley [4].

Temos na figura 3.7 que os elementos ($i = 1, 2, \dots, 20$) possuem uma forte sincronização de fase. No entanto os osciladores ($i = 21, 22, \dots, 40$) não possuem qualquer tipo de correlação. Cada elemento, dentro do intervalo $[21, 40]$, oscila de forma totalmente independente dos demais elementos da rede.

Outra experimento que revelou a coexistência de estados coerentes e incoerentes foi em moduladores de cristal líquido [5] onde a relação não-linear é dada via polarização ótica. Temos o resultado no espaço dos parâmetros ($\varepsilon \times r$) na figura 3.8.

Figura 3.8: Espaço dos parâmetros ($\varepsilon \times r$) para uma rede de osciladores óticos acoplados. Onde r é o alcance e ε é a intensidade do acoplamento. A linha pontilhada marca o valor de ε abaixo do qual podemos obter quebra no perfil espacial da rede



Fonte: Hagerstrom [5].

Onde r representa o alcance do acoplamento (número de vizinhos ligados de ambos os lados de um sítio de índice i qualquer) e ε representa a intensidade do acoplamento. Na figura 3.8 temos a divisão do espaço ($\varepsilon \times r$) em regiões caóticas e periódicas que possuem números de onda $k = 1, 2, 3$. Dentro das regiões periódicas e abaixo da linha pontilhada é que podemos obter estados quimera pois pode coexistir regiões coerentes e incoerentes.

Indícios teóricos e experimentais apontam para outra característica intrigante

dos estados quimera, estes possuem natureza transiente, e variam com o tamanho da rede. Logo é de suma importância entender estes comportamentos uma vez que sistemas não-lineares e possivelmente estados quimera podem emergir nos mais variados campos da ciência moderna (neurociência, biologia, química, eletrônica, etc ...).

4 *RESULTADOS*

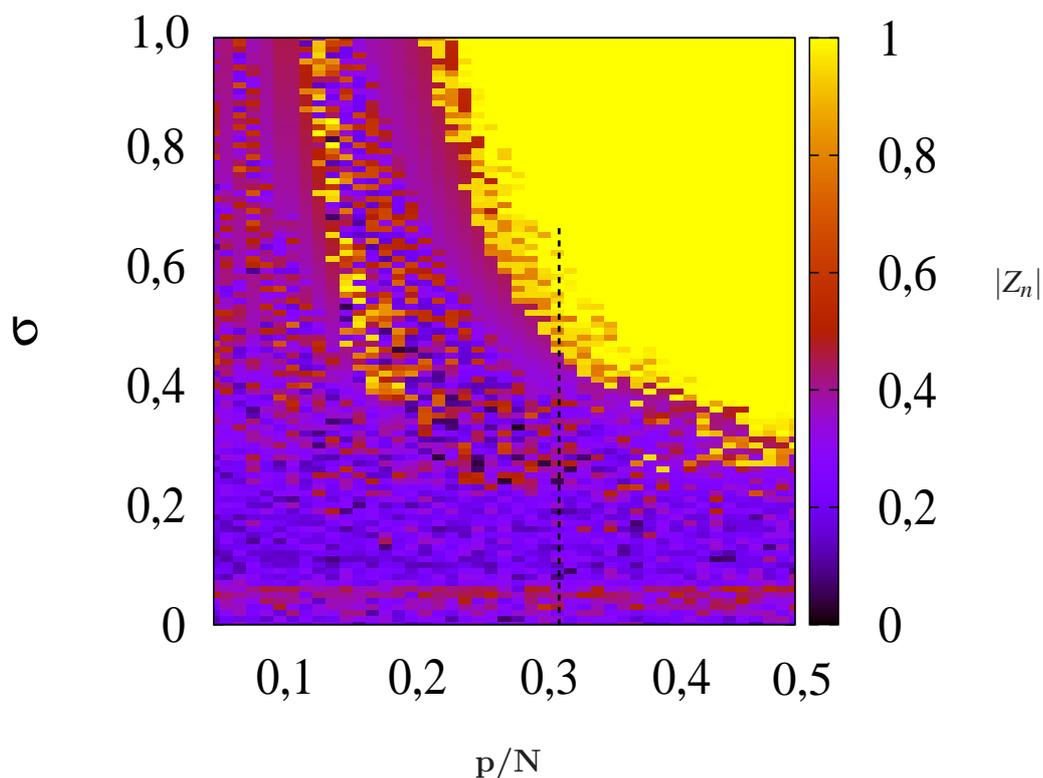
Aqui apresentamos os resultados obtidos para estados quimera em redes de mapas acoplados primeiramente por acoplamento não-local e posteriormente para acoplamento lei de potência.

4.1 *ACOPLAMENTO NÃO LOCAL*

A maioria dos resultados apresentados aqui referem-se a uma rede com 100 mapas logísticos acoplados conforme a equação (2.10), quando ocorrer o contrário explicitaremos. Pelas equações (3.16) e (3.18) temos que sistemas sincronizados possuem o parâmetro de ordem $|Z_n| \rightarrow 1, \forall n$, ou seja, todos os sítios constituintes da rede possuem o mesmo valor da variável de estado para qualquer tempo n . Vimos também que estados quimeras estão relacionados com a coexistência de regiões sincronizadas e não sincronizadas no espaço [2,3]. Devido a estes comportamentos começamos calculando o parâmetro de ordem global para obtermos as regiões no espaço de parâmetros $(\sigma \times p/N)$ onde possivelmente poderemos observar estados quimeras. Onde σ refere-se a intensidade do acoplamento variando no intervalo $0 \leq \sigma \leq 1$ é a intensidade, p é o alcance do acoplamento e N trata-se do tamanho da rede, ver expressão (2.10).

Na figura 4.1 temos o resultado do parâmetro de ordem global para 100 mapas acoplados de forma não-local. Utilizamos a equação (2.10) com o parâmetro de controle do mapa logístico $a = 3,80$ e um tempo transiente de 10000 iteradas ($t_r = 10^4$), ou seja, o cálculo do parâmetro de ordem foi realizado após a rede realizar 10^4 iteradas.

Figura 4.1: Parâmetro de ordem global (Z_n) no espaço $\sigma \times p/N$ para acoplamento não-local com os parâmetros: $N = 100$, $a = 3,80$ e $t_r = 10^4$ iteradas. A escala de cores refere-se ao módulo do parâmetro de ordem global ($|Z_n|$) e a linha pontilhada refere-se a $p/N = 0,32$ que será utilizada como referência para as próximas simulações.



Fonte: O autor.

Temos na figura 4.1 os possíveis valores para o módulo do parâmetro de ordem global. Se tivermos $|Z_n| \approx 0$ os mapas da rede não apresentam qualquer sincronização e todos os sítios (mapas) da mesma evoluem sem qualquer relações com os demais sítios da rede. No outro extremo temos que para $|Z_n| \approx 1,00$ os sítios possuem uma sincronização completa. A linha pontilhada mostrada na figura 4.1 serve de referência para as próximas simulações e representa o acoplamento não-local de tal forma que para $N = 100$ teremos:

$$\frac{p}{N} = 0,32 \rightarrow \frac{p}{100} = 0,32 \rightarrow p = 32,$$

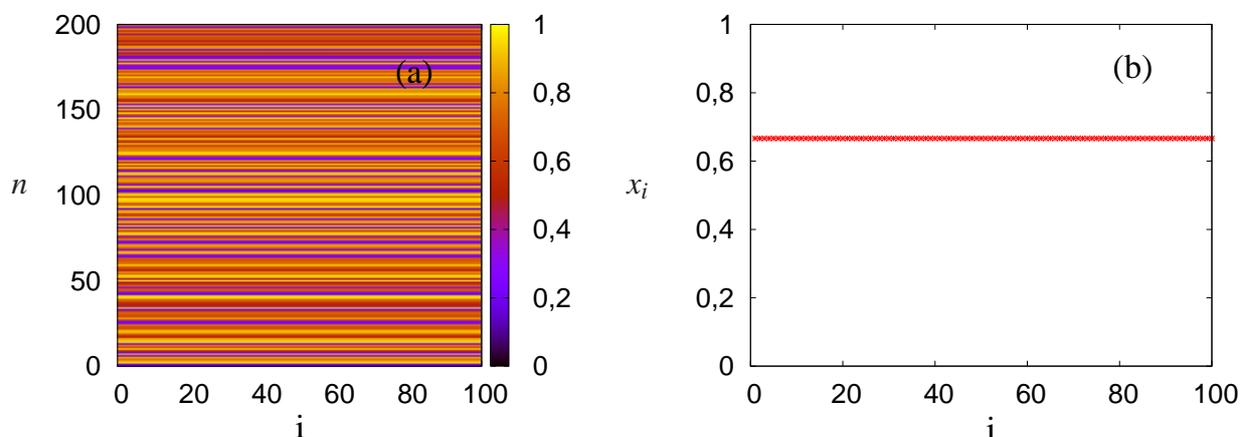
assim uma rede com 100 mapas possuirá ligações com 32 vizinhos de cada lado.

O perfil espacial é obtido fixando um tempo n qualquer (por exemplo $n = 15 \times 10^4$)

após o transiente, assim teremos a variável de estado de todos os mapas da rede *versus* os sítios da mesma ($x_i \times i$) conforme figura 4.2 (b) mostra. O eixo vertical n refere-se a cada 8 iteradas da rede para todas a figuras a seguir onde plotamos a escala temporal *versus* posição do mapa na rede ($n \times i$).

O perfil temporal e espacial dentro da região onde ocorre a sincronização ($|Z^n| \approx 1,00$) é mostrado na figura 4.2 (a) e (b) respectivamente. Em (a) nota-se que a evolução temporal da rede é totalmente caótica no tempo n (a escala de cores mostra que a rede não apresenta período aparente), mas se nos atermos ao perfil espacial (b) notamos que os mapas estão completamente sincronizados no espaço, ou seja dentro da região amarela da figura 4.1 o comportamento da rede é a sincronização caótica [6, 14] dos mapas logísticos acoplados.

Figura 4.2: Sincronização caótica: (a) evolução temporal a cada 8 iteradas da rede e (b) perfil espacial para $N = 100$, $a = 3,80$, $p/N = 0,32$, $\sigma = 0,61$ e $t_r = 10^4$ iteradas. A escala de cores representa a variável de estado x_i dos mapas e i a posição de cada mapa na rede ($1 \leq i \leq N$).



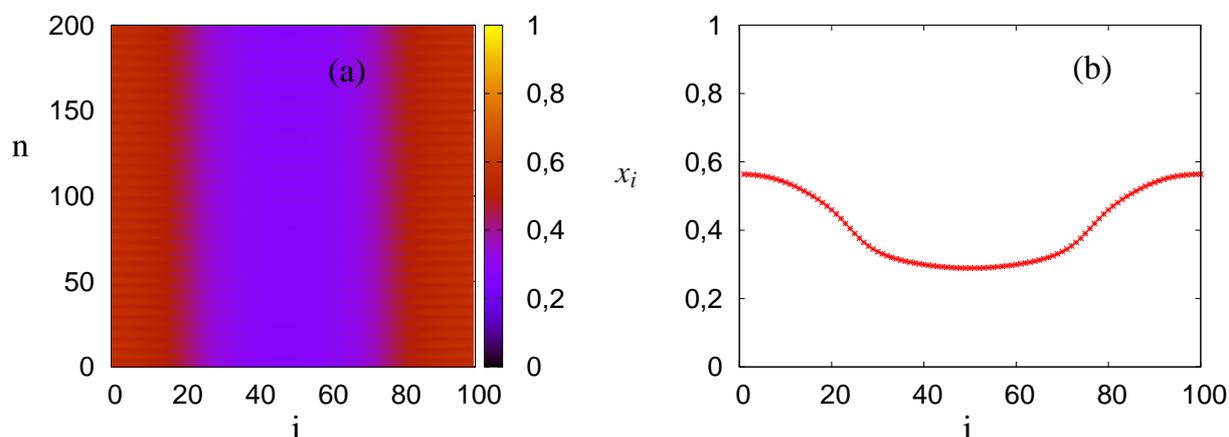
Fonte: O autor.

Fixando o alcance do acoplamento em $p/N = 0,32$, como mostra a linha pontilhada na figura 4.1, a medida que mudamos o valor de σ ao longo desta linha podemos obter outros padrões, além de sincronização completa $|Z_n| = 1,00$.

Diminuindo a intensidade de acoplamento σ ocorrem oscilações no perfil espacial da rede. Estas oscilações implicam que os mapas (sítios da rede) começam a perder

a sua sincronização caótica. Portanto ocorre uma diminuição no valor do parâmetro de ordem global e nota-se pela figura 4.3 (b) o início da formação de duas regiões na rede quando utilizamos $\sigma = 0,45$. Esta figura mostra a evolução temporal (a) e o perfil espacial (b) da rede com 100 mapas logísticos acoplados de forma não-local onde descartamos um tempo transiente de 10^4 iteradas. Nota-se que para o tempo transiente utilizado o comportamento final da rede é periódico no tempo conforme a figura 4.3 (a) mostra.

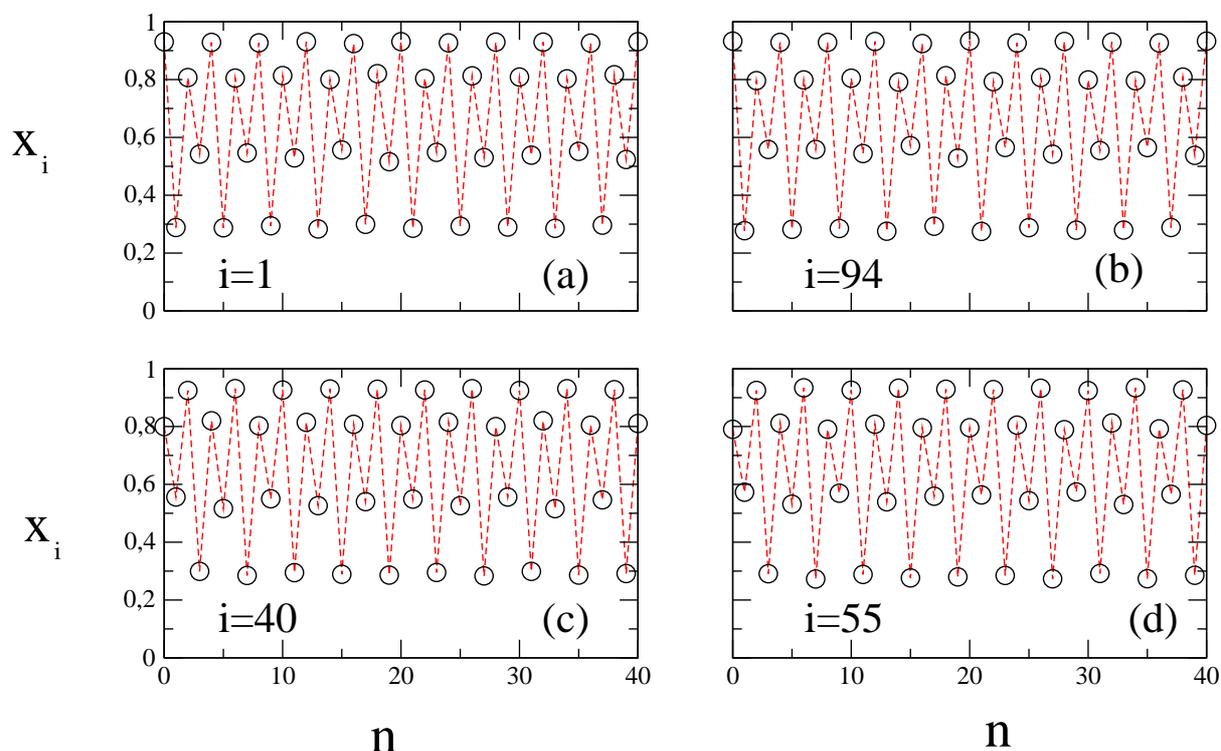
Figura 4.3: Formação de duas regiões: (a) evolução temporal a cada 8 iteradas da rede e (b) perfil espacial para $N = 100$, $a = 3,80$, $p/N = 0,32$, $\sigma = 0,45$ e $t_r = 10^4$ iteradas. A escala de cores representa a variável de estado x_i dos mapas e i a posição de cada mapa na rede ($1 \leq i \leq N$).



Fonte: O autor.

Para visualizar a formação de períodos no tempo, para (a) da figura 4.3, plotamos a evolução das 40 últimas iteradas desta rede em (a), (b), (c) e (d) da figura 4.4. Para os parâmetros ($N = 100$, $a = 3,80$, $p/N = 0,32$, $\sigma = 0,45$ e $t_r = 10000$ iteradas) a rede exibe período-4 no tempo. Em (a) o comportamento final do sítio $i = 1$, (b) representa o sítio $i = 94$, (c) representa o sítio $i = 40$ e (d) representa o sítio $i = 55$. As condições iniciais de cada mapa da rede foram geradas de forma totalmente aleatória no intervalo $[0, 1]$

Figura 4.4: Evolução temporal dos últimos 40 tempos para $N = 100$, $p/N = 0,32$, $\sigma = 0,45$, $a = 3,80$ e $t_r = 10^4$ iteradas. Em (a) temos a evolução do mapa de índice $i = 1$, (b) representa o mapa $i = 94$, (c) o mapa $i = 40$ e (d) refere-se ao mapa de índice $i = 55$.



Fonte: O autor.

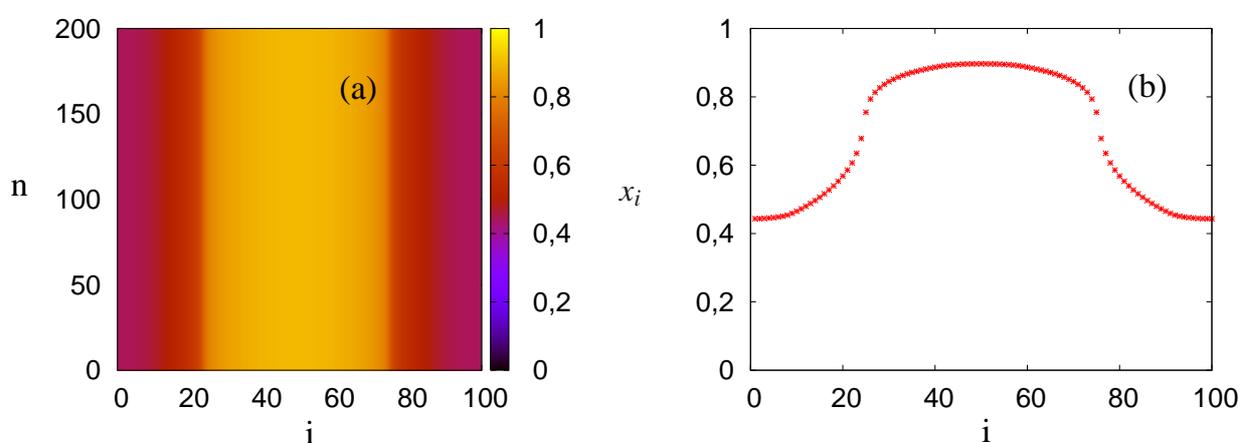
Devido ao fato deste comportamento periódico no tempo e para podermos observar o comportamento da rede para intervalos de tempos maiores, nas figuras que colocarmos a evolução temporal *versus* tamanho de rede ($n \times i$) plotamos a variável de estado x_i para múltiplos deste período. Portanto, em todas as figuras o eixo y (“ n ”) representa a evolução temporal da rede de mapas acoplados a cada 8 iteradas.

A escala de tempo 0–200 está relacionada a observação de 0–1600 iteradas da rede, isto é realizado com a intenção de suavizar o aspecto visual dos resultados e destacar a ocorrência de estados quimera além de possibilitar um tempo maior de observação do sistema.

Continuando a diminuir o valor de σ sobre a linha pontilhada da figura 4.1 as oscilações espaciais tornam-se mais intensas e para ($\sigma \approx 0,43$) ocorre uma ruptura

(descontinuidade) no perfil espacial, este fato marca o início da formação de estados quimera na rede [1]. A quebra do perfil espacial pode ser visualizada na figura 4.5 (b) onde a rede claramente começa a subdividir-se em duas regiões.

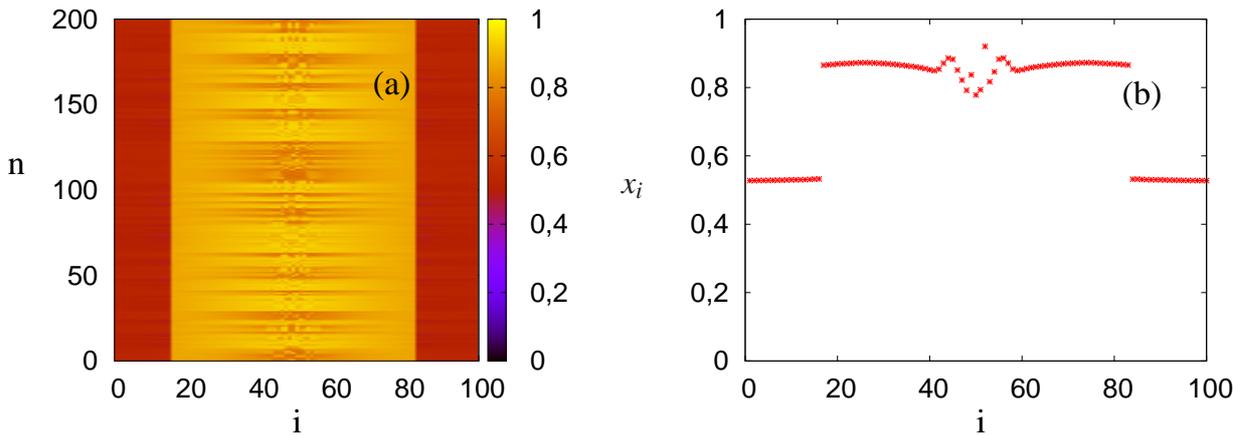
Figura 4.5: Quebra do perfil espacial: (a) representa a evolução temporal a cada 8 iteradas da rede e (b) perfil espacial para $N = 100$, $p/N = 0,32$, $\sigma = 0,43$, $a = 3,80$ e transiente 10^4 iteradas. A escala de cores representa a variável de estado x_i dos mapas e i a posição de cada mapa na rede ($1 \leq i \leq N$).



Fonte: O autor.

As simulações nos mostram que regiões no espaço dos parâmetros possíveis para a ocorrência de estados quimeras acontecem para valores do parâmetro de ordem global próximos a $0,45$ ($|Z_n| \approx 0,45$). Percebemos que quando o $|Z_n|$ está em torno deste valor a rede pode exibir estados quimera, podemos ver isto pela figura 4.6 (b) para $\sigma = 0,31$ onde a região central da evolução temporal mostra uma pequena parcela da rede que não possui correlação no espaço. O perfil espacial mostra que os sítios próximos a posição $i = 50$ não estão sincronizados devido a pequenas flutuações em seus valores.

Figura 4.6: Quimera: (a) evolução temporal a cada 8 iteradas da rede e em (b) temos o perfil espacial para $n = 100$, $p/N = 0,32$, $\sigma = 0,31$, $a = 3,80$ e $t_r = 10^4$ iteradas. A escala de cores representa a variável de estado x_i dos mapas e i a posição de cada mapa na rede ($1 \leq i \leq N$).

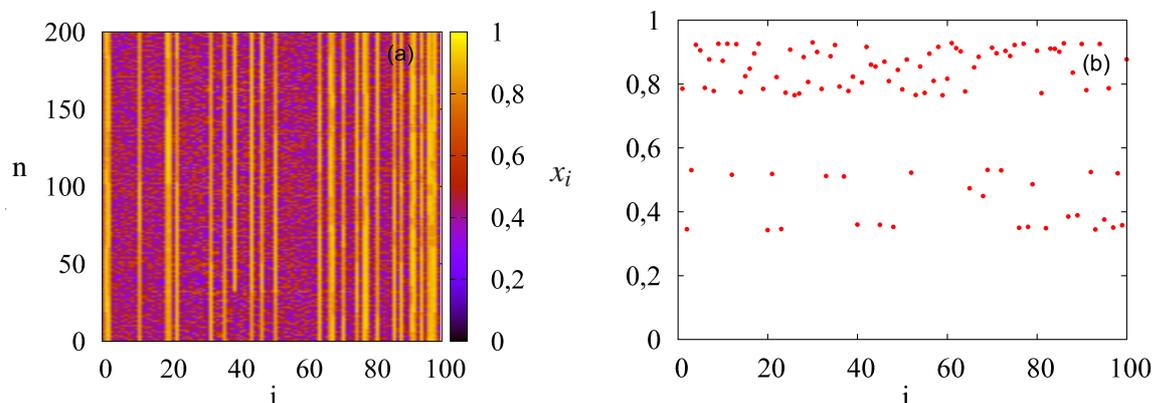


Fonte: O autor.

Podemos ter outras regiões dentro do espaço dos parâmetros de acoplamento ($\sigma \times p/N$) com $|Z^n| \approx 0,45$, ver figura 4.1, mas nestes casos quando olhamos para o perfil espacial nota-se que o sistema não possui somente duas regiões distintas. A figura 4.7 (a) mostra a evolução temporal e o perfil espacial (b) para $\sigma = 0,23$. Para esta intensidade de acoplamento a rede não possui a presença de somente dois domínios distintos, esta ainda possui regiões caóticas e periódicas coexistindo na rede, mas quando olhamos para o perfil espacial percebemos que não há qualquer correlação espacial entre os mapas que fazem parte da mesma.

Estados quimera são definidos como a coexistência de duas regiões distintas na rede, uma coerente e outra incoerente, que não é o caso visto na figura 4.7 (a) e (b) pois para este valor de σ a rede apresenta mais regiões coexistindo, mas estas não apresentam qualquer correlação espacial. As simulações numéricas mostram que comportamentos parecidos com a figura 4.7 começam a ocorrer para $\sigma \approx 0,29$. Abaixo deste valor da intensidade de acoplamento não temos mais a ocorrência de estados quimera na rede, logo o intervalo de ocorrência de estados quimera para $N = 100$, $p = 32$, $a = 3,80$ é o intervalo $(0,29;0,43)$.

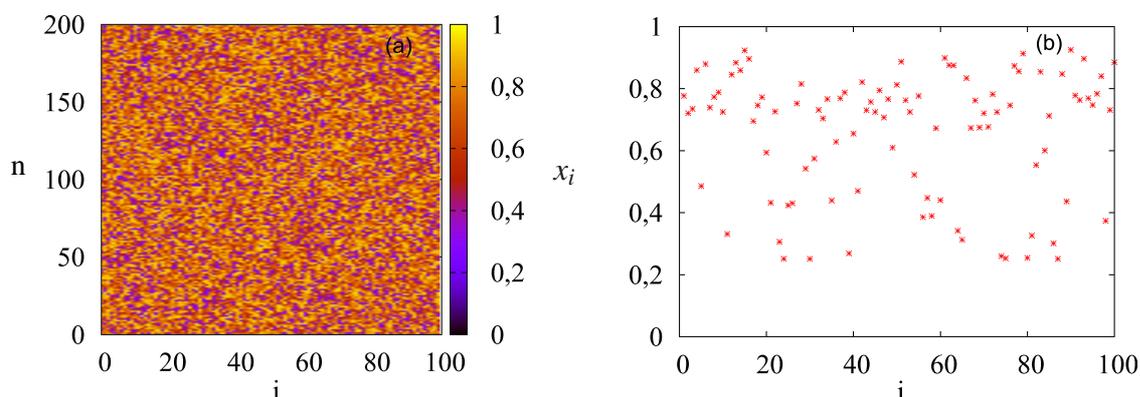
Figura 4.7: Regiões sem coerência espacial: evolução temporal a cada 8 iteradas (a) e perfil espacial (b) para os parâmetros $N = 100$, $p/N = 0,32$, $\sigma = 0,23$, $a = 3,80$ e $t_r = 10^4$ iteradas. A escala de cores representa a variável de estado x_i dos mapas e i a posição de cada mapa na rede ($1 \leq i \leq N$).



Fonte: O autor.

Regimes caóticos no tempo e no espaço (caos espaço-temporal) irão aparecer para valores pequenos da intensidade de acoplamento (σ), quando isto ocorre é como se cada sítio (mapa) da rede não influenciasse mais o seu vizinho.

Figura 4.8: Caos espaço-temporal: evolução temporal a cada 8 iteradas (a) e perfil espacial (b) para os parâmetros $N = 100$, $p/N = 0,32$, $\sigma = 0,05$, $a = 3,80$ e $t_r = 10000$ iteradas. A escala de cores representa a variável de estado x_i dos mapas e i a posição de cada mapa na rede ($1 \leq i \leq N$).



Fonte: O autor.

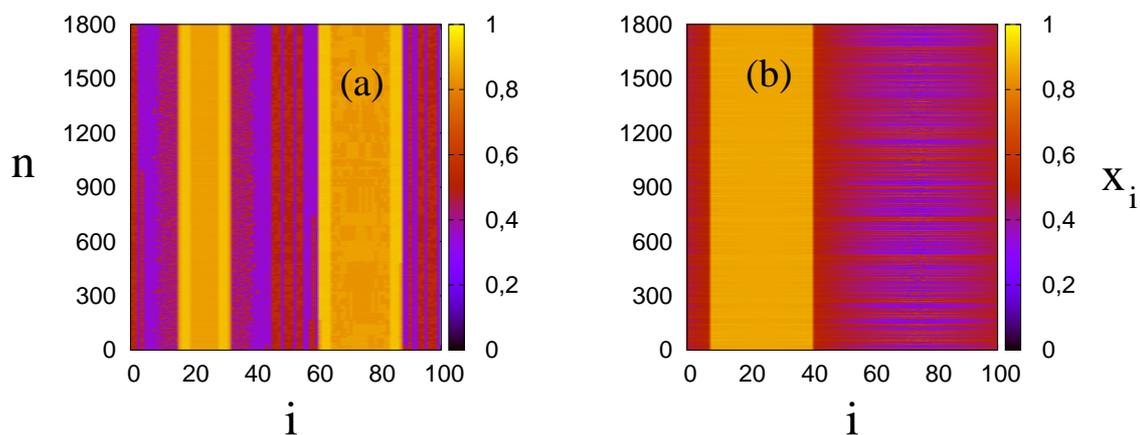
Na figura 4.8 temos um exemplo de caos espaço-temporal. A rede não apresenta qualquer padrão conforme o tempo evolui (a), em (b) temos o perfil espacial, para um tempo n qualquer após transiente, novamente nota-se que os mapas não apresentam um padrão espacial. Olhando para a figura 4.1 obtemos informação similar, pois o parâmetro de ordem ($|Z_n|$) possui um valor pequeno para $\sigma = 0,05$ mostrando que há uma mínima correlação espacial entre os sítios da rede.

4.1.1 Colapso dos estados quimera

Trabalhos recentes mostram que os estados quimeras para sistemas regidos por equações diferenciais, quando acoplados de forma não-local, possuem natureza transiente [19]. Portanto, a coexistência de estados coerentes e incoerentes podem aparecer e posteriormente desaparecer para longos períodos de tempo n . Nós procuramos estes comportamento para mapas acoplados de forma não-local utilizando, como ferramenta teórica, a entropia de Kolmorov-Sinai (H), mais especificamente a densidade de entropia (h) dada pela equação (3.15) para detectarmos o início (surgimento) e possivelmente o colapso (desaparecimento) destes estados quimera na rede.

Mostramos a evolução temporal da rede na figura 4.10 para dois valores de σ , em (a) temos $\sigma = 0,25$ e em (b) $\sigma = 0,32$ em ambos os casos as condições iniciais são aleatórias no intervalo $[0, 1]$.

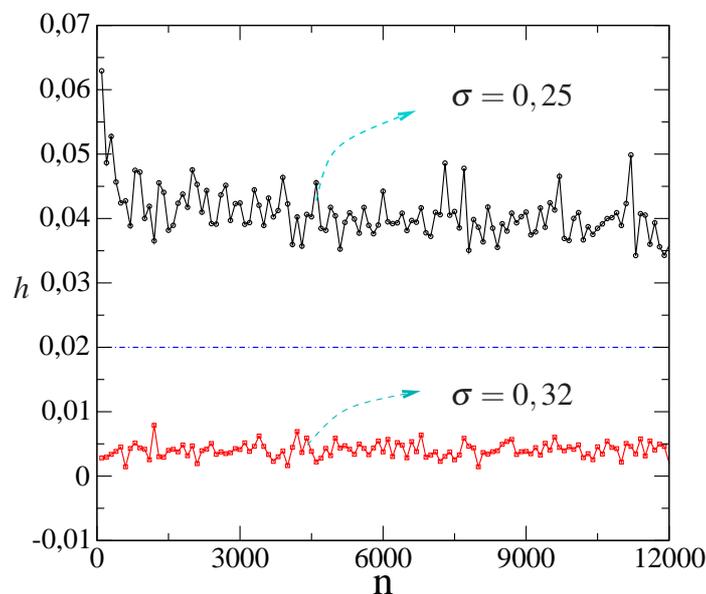
Figura 4.9: Evolução temporal da rede a cada 8 iteradas para $N = 100$, $p/N = 0,32$ e parâmetro de controle do logístico $a = 3,80$. Em (a) temos $\sigma = 0,25$ representado um valor da intensidade de acoplamento na qual a rede não exibe estados quimera. Em (b) temos a evolução para $\sigma = 0,32$, para este valor a rede exibe estados quimera.



Fonte: O autor.

A densidade de entropia (h) da figura 4.9 é mostrado na figura 4.10, onde representamos também a linha de referência $h' = 0,02$ que será utilizada para diferenciar regiões onde existe a coexistência de estados coerentes e incoerentes das regiões onde isto não ocorre. Este valor de densidade de entropia h' foi utilizado devido as simulações mostrarem que quando a rede exibe um valor de entropia abaixo de $0,02$ temos o surgimento de estados quimera. Logo quando a rede apresentar densidade de entropia menor que h' marcamos como o início da formação de estados quimera.

Figura 4.10: Densidade de entropia (h) para $N = 100$, $p/N = 0,32$ e parâmetro de controle do logístico $a = 3,80$. A linha em preto refere-se ao valor de h para $\sigma = 0,25$ e a em vermelho para $\sigma = 0,32$. Em ambos os casos o tempo transiente foi de 10^4 iteradas.

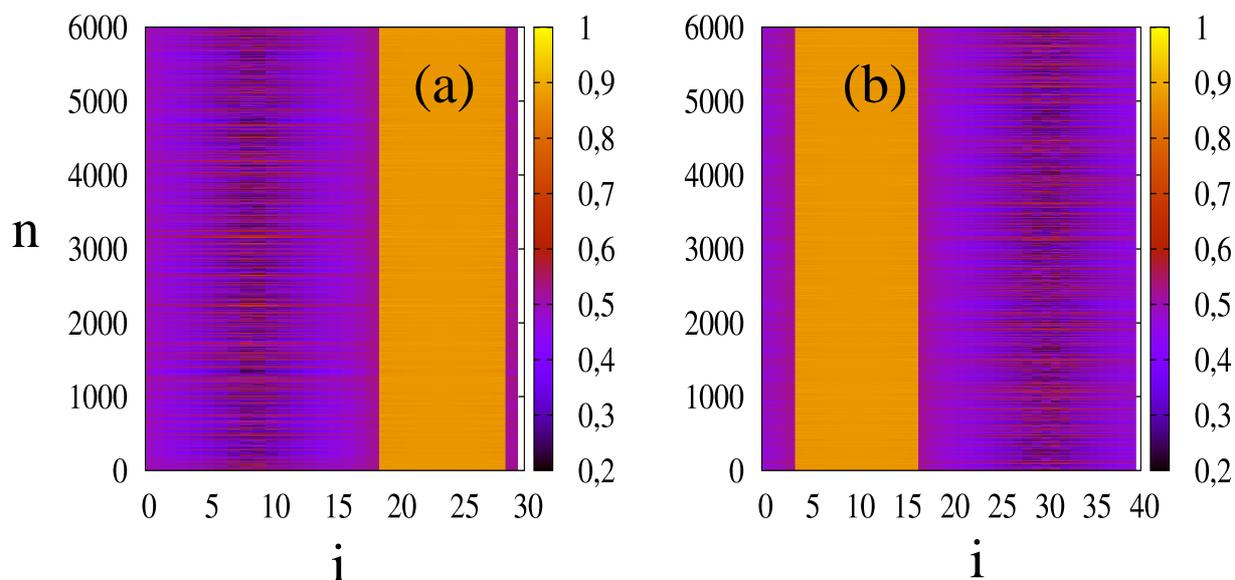


Fonte: O autor.

Na figura 4.10 temos a densidade de entropia h para 100 mapas logísticos com dois valores de σ , a linha em preto mostra o caso para $\sigma = 0,25$ que está fora da região onde há coexistência de estados coerentes e incoerentes, conforme a linha pontilhada da figura 4.1. Portanto não há existência de quimera para $\sigma = 0,25$ pois este encontra-se fora do intervalo $(0,29;0,44)$. A linha em vermelho na figura 4.10 refere-se a $\sigma = 0,32$.

Podemos obter estados quimera para outros tamanhos de redes, cujo resultado da simulação encontra-se na figura 4.11, onde (a) refere-se a evolução temporal para uma rede com 30 e (b) a outra com 40 mapas logísticos, ambas as redes possuem o mesmo valor da intensidade do acoplamento ($\sigma = 0,34$) e condições iniciais aleatórias.

Figura 4.11: Quimera para outras redes: Para (a) temos uma rede com 30 mapas acoplados, onde próximo ao sítio $i = 7$ temos a região incoerente. Em (b) temos 40 mapas logísticos na rede, a região incoerente encontra-se nas proximidades do sítio $i = 30$. Em ambas as figuras com $\sigma = 0,34$, $p/N = 0,32$, $a = 3,80$ e condições iniciais aleatórias.

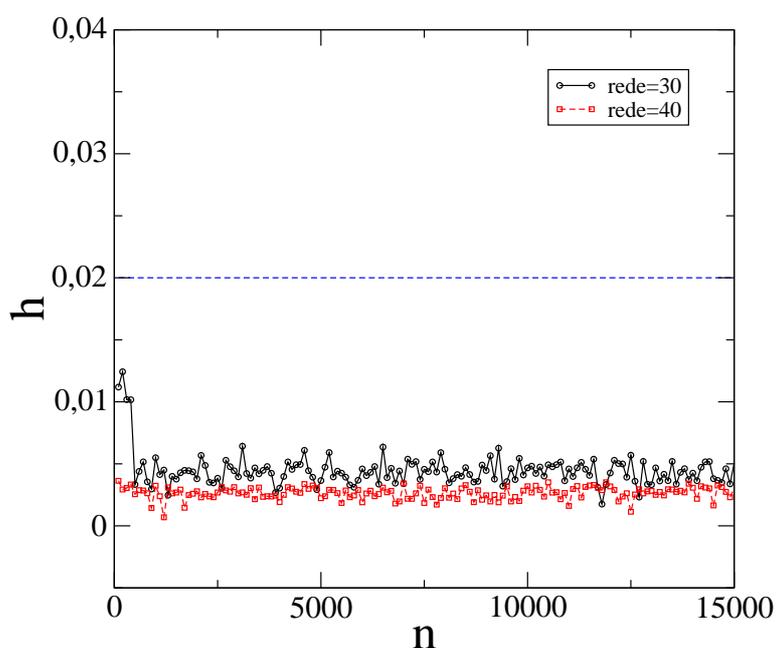


Fonte: O autor.

Na figura 4.11 (a) temos uma rede com 30 mapas logísticos acoplados de forma não-local e a evolução temporal mostra a coexistência de duas regiões no espaço (i). Para 4.11 (b) a rede possui 40 mapas acoplados, novamente vemos a coexistência de duas regiões conforme o sistema evolui. Em ambos os casos utilizamos a intensidade de acoplamento $\sigma = 0,34$ e a razão do número de vizinhos acoplados pelo tamanho da rede foi $p/N = 0,32$.

O valor de h para as redes da figura 4.11 encontra-se na figura 4.12. Os resultados das simulações numéricas mostram que também para estes tamanhos de redes a densidade de entropia pode ser utilizada para detectar o início e possivelmente o colapso dos estados quimeras, usado o valor $h \leq 0,02$ como referência.

Figura 4.12: Quimera para redes de outros tamanhos: Em (a) temos a densidade de entropia para uma rede com 30 mapas acoplados e (b) refere-se a uma rede com 40 mapas. Em ambos os casos utilizamos $p/N = 0,32$ e $\sigma = 0,34$ e condições iniciais aleatórias. A linha pontilhada marca o valor de referência (h') abaixo do qual marcamos como início dos estados quimeras.



Fonte: O autor.

Quando a rede apresentar somente regiões periódicas para qualquer n o sistema passa a apresentar todos os λ_k menores que zero e conseqüentemente h , que depende diretamente dos expoentes de Lyapunov positivos, possuirá um valor nulo ($h = 0, \forall n$), logo neste caso dizemos que o sistema colapsou em órbitas periódicas e utilizamos este fato para marcar o colapso dos estados quimera.

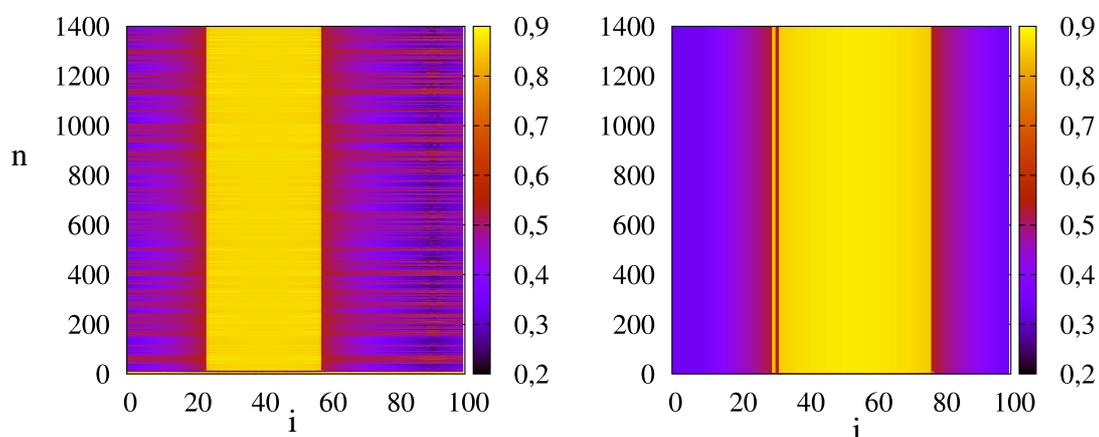
4.1.2 Tempos de colapso

Utilizamos como diagnóstico a densidade de entropia de Komorov-Sinai (h) para computar o surgimento e conseqüentemente o colapso dos estados quimera, onde este colapso está ligada a natureza transiente deste estados. Quando temos uma densidade

de entropia abaixo de um determinado valor de referência ($h \leq 0,02$) marcamos como início ou surgimento dos estados quimera, pois coexistem estados caóticos (incoerentes) e regulares (coerentes). Quando o valor da entropia passa a ser igual a zero para todo o tempo ($h = 0, \forall n$), ou seja, o sistema deixa de apresentar caos em todas as suas partes constituintes (sítios) marcamos este tempo como o colapso da coexistência de estados (quimera).

Nas simulações percebemos que estes estados quimeras são sensíveis as condições iniciais, ou seja, dependendo da condição que iniciamos as iteradas da rede esta pode não exibir regiões coerentes e incoerentes, mesmo dentro das regiões onde havíamos obtido estes padrões anteriormente. Este fato pode estar relacionado com a natureza transiente e muda conforme a condição inicial como mostra figura 4.13 onde utilizamos 100 mapas logísticos acoplados.

Figura 4.13: Redes com 100 mapas acoplados de forma não-local: Para ambos os casos (a) e (b) as redes possuem $\sigma = 0,31$, $a = 3,80$ e $p/N = 0,32$, mas diferem nas condições iniciais. Para (a) existe estados quimera mas quando alteramos as condições iniciais em (b) o rede passa a exibir comportamento regular. A escala de cores está relacionada a variável de estado x_i .



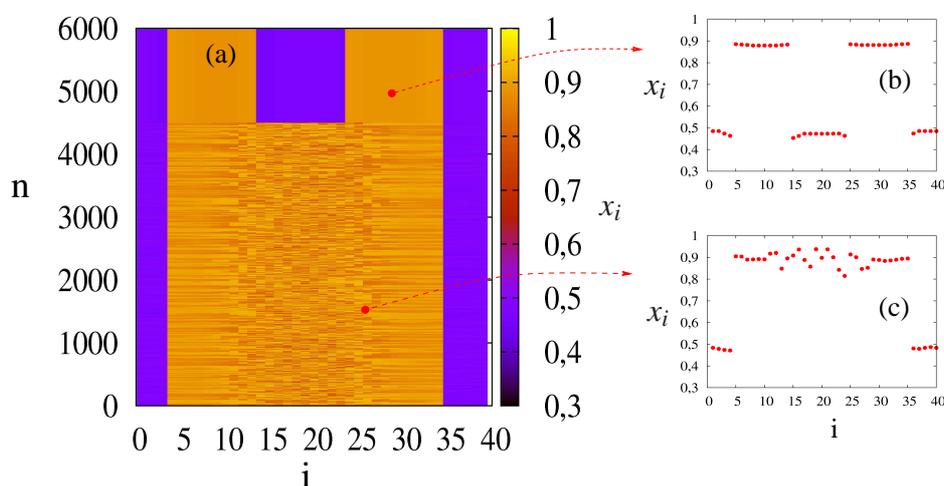
Fonte: O autor.

As condições iniciais dadas para cada mapa da rede são diferentes para os casos mostrados na figura 4.13 (a) e (b), para $\sigma = 0,31$, notamos a formação de quimeras na rede da figura 4.13 (a), mas quando iniciamos o sistema novamente com outras condições iniciais, percebemos que o sistema passa a apresentar comportamento regular para quase

todo o tempo t conforme figura 4.13 (b). Estas figuras mostram que o tempo de duração dos estados quimera muda com a condição inicial dada ou ainda podem não ocorrer. Os estados quimeras são extremamente sensíveis a estas condições iniciais utilizadas.

O colapso dos estados quimera pode ser observado na figura 4.14, onde a rede utilizada foi de 40 mapas acoplados.

Figura 4.14: Colapso dos estados quimera: temos uma rede com 40 mapas acoplados de forma não-local para $a = 3,80$, $p/N = 0,32$ e $\sigma = 0,34$: (a) representa a evolução temporal da rede, (b) temos um perfil espacial dentro da região de colapso e (c) mostra um perfil espacial dentro da região de quimera. A escala de cores está relacionada a variável de estado x_i .



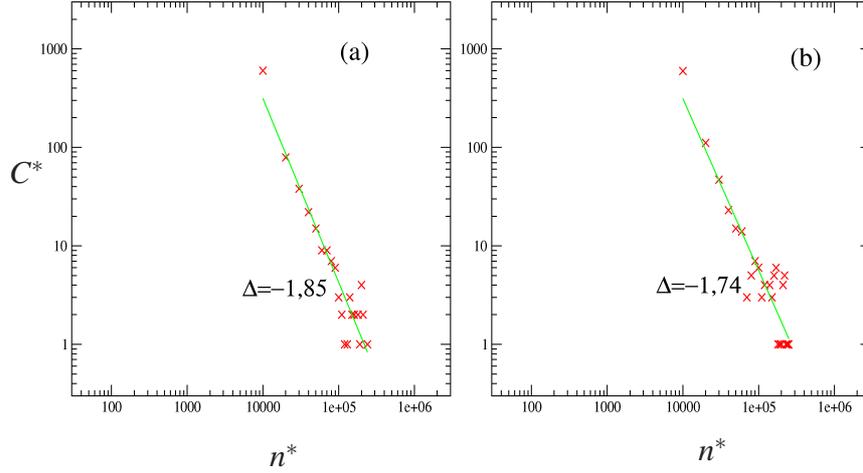
Fonte: O autor.

Na figura 4.14 (a) mostramos a evolução temporal da rede ($N = 40$). Nota-se que há uma mudança de comportamento para $n \approx 4500$ iteradas, ou seja, ocorre o colapso dos estados quimera, conforme podemos visualizar em 4.14 (b). As condições iniciais utilizadas são geradas aleatoriamente e dependendo dela pode não ocorrer estados quimera.

Obtivemos os tempos de permanência dos estados quimera utilizamos 2000 condições iniciais próximas ($x_i^0 = 0,60 + r_i^0/1000$). O valor inicial de r_i^0 é gerado aleatoriamente cada vez que a simulação é reiniciada e $i = 1, 2, \dots, N$ varia dependendo do tamanho da rede ($N = 30, 40, \dots$). Os resultados a seguir são para o mesmo valor $\sigma = 0,30$ e mudando somente o tamanho das redes, cuja a figura 4.15 mostra dois resultados para os

tempos de colapso (n^*).

Figura 4.15: Tempos de colapsos (n^*): (a) representa uma rede com 60 mapas acoplados e (b) temos 80 mapas ambas com o mesmo valor de $\sigma = 0,30$, $a = 3,80$, $p/N = 0,32$ e condições iniciais ($x_i^0 = 0,60 + r_i^0/1000$).



Fonte: O autor.

Nos eixos horizontais dos gráficos (a) e (b) da figura 4.15 estão os tempos de colapso (n^*) dos estados quimera e nos eixos verticais estão os números de ocorrências (C^*). O gráfico 4.15 (a) é para uma rede com 60 mapas logísticos e o gráfico 4.15 (b) possui 80 mapas logísticos. Estas figuras indicam que os tempos de colapso possuem uma certa regularidade, obedecem a uma lei de potência, para ambos os casos e, além disso, há uma maior probabilidade da ocorrência de tempos curtos e isto dificulta a observação de quimeras em redes pequenas devido ao tempo de permanência nestes estados serem geralmente pequenos.

A inclinação da reta (Δ) indica que conforme aumentamos a rede existe a possibilidade de um aumento do tempo de permanência da rede em estados quimera dificultando a observação do colapso destes estados. A tabela 4.1 mostra o tempo médio (t_m) dos estados quimera para outros tamanhos de redes dado por:

$$t_m = \frac{1}{C} \sum n^*, \quad (4.1)$$

onde C é o número de colapsos e n^* os tempos de colapso.

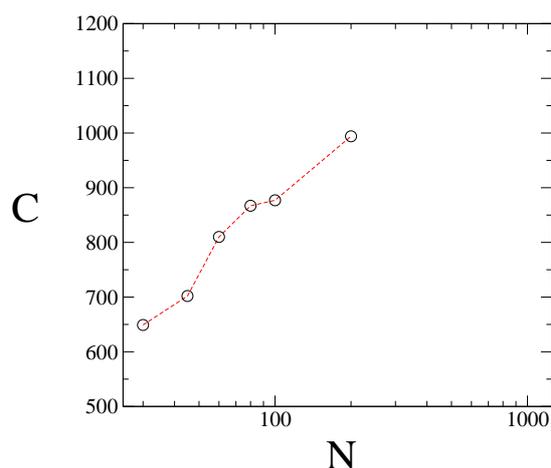
Tabela 4.1: Tempos médios de colapso para redes: $\sigma = 0,30$, $a = 3,80$, $p/N = 0,32$ e com 2000 condições iniciais próximas ($x_i^0 = 0,60 + r_i^0/1000$).

rede	45	60	80	100	200
tempo-médio (t_m)	14157,47	13875,42	17668,26	17318,88	18207,19
número de colapsos (C)	702	810	867	877	994

Fonte: o autor.

A tabela 4.1 mostra o tempo médio de permanência dos estados quimera para diferentes tamanhos de redes. Para o aumento da rede observamos que aumentam o número de colapsos (C) dos estados quimeras devido as diferentes condições iniciais utilizadas, isto mostra que é mais fácil obtermos estados quimeras para redes com maior quantidade de sítios, observando a rede de tamanho 200 temos que 49,70% das condições iniciais obtivemos regiões de quimera enquanto que para o outro extremo, rede 45 temos 35,10% das condições levaram o rede a exibir tais estados. Temos na figura 4.16 a representação gráfica das condições iniciais, as quais levaram as redes a exibir estados quimera.

Figura 4.16: Números de colapsos (C) para outras redes (N). Para todos os casos temos $\sigma = 0,30$, $a = 3,80$, $p/N = 0,32$ e 2000 condições iniciais próximas ($x_i^0 = 0,60 + r_i^0/1000$).



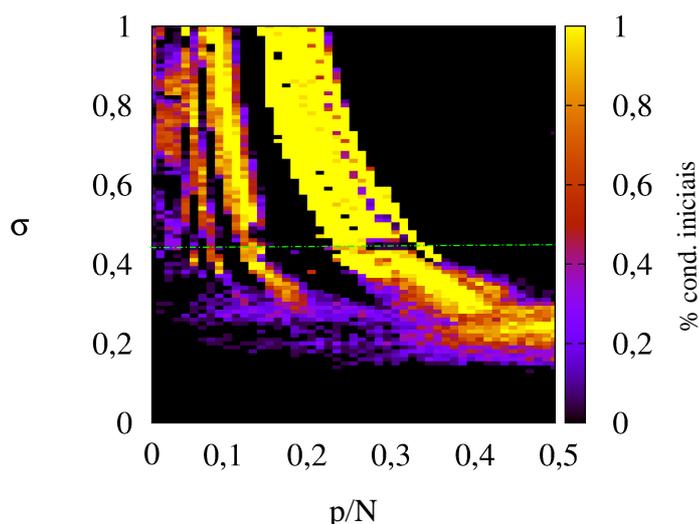
Fonte: O autor.

Isto parece indicar que para redes muito grandes podemos obter estados quimera, dentro do espaço de parâmetros que permitam tais estados, independentemente das condições iniciais utilizadas. Logo o oposto também deve valer, ou seja, para redes menores seja talvez mais difícil observarmos estados quimeras devido ao aumento da sensibilidade das condições iniciais, que damos para o sistema.

4.1.3 Regiões periódicas

Calculamos as regiões periódicas no espaço dos parâmetros ($\sigma \times p/N$) pois como na ocorrência de colapso teremos como resultado final que a evolução temporal será regular (periódica), conforme pode ser observado na figura 4.4 (a), (b), (c) e (d) que exibe uma dinâmica de período-4 no tempo n . Outros períodos podem ocorrer como resultado final da evolução da rede. Na figura 4.17 as regiões periódicas referem-se a múltiplos de 2 (períodos 2, 4 e 8). Períodos acima destes valores são desprezados. Então é de extrema importância que saibamos quais regiões, no espaço de parâmetros, que o sistema seja regular e possa, para alguma condição inicial, exibir a coexistência de dois estados distintos.

Figura 4.17: Regiões Periódicas no espaço ($\sigma \times p/N$) para $N = 100$, $a = 3,80$ e 60 condições iniciais próximas ($x_i^0 = 0,60 + r_i^0/1000$). A escala de cores representa a percentual das condições iniciais em que a rede apresentou comportamento regular após transiente de 2×10^5 .



Fonte: O autor.

A escala de cores da figura 4.17 indica o percentual das condições iniciais que são periódicas no tempo, nesta figura possui 60 condições iniciais próximas ($x_i^0 = 0,60 + r_i^0/1000$), uma rede com 100 mapas acoplados ($N = 100$) e tempo transiente de 2×10^5 iteradas. Nas regiões escuras o sistema é sempre caótico no tempo e nestes casos não poderemos obter estados quimera.

Na figura 4.17 a linha pontilhada na cor verde marca o valor abaixo do qual a rede passa a apresentar descontinuidade espacial, cujo valor de referência é $\sigma^* \approx 0,44$, ver apêndice. Então σ não depende da razão p/N e teremos um limite superior onde encontraremos estados quimeras para qualquer p/N , conforme mostra a figura 4.17. Portanto as regiões onde poderemos obter quimera encontram-se abaixo deste valor de σ^* , desde que estejamos dentro das regiões periódicas, além disso esta figura mostra a sensibilidade as condições iniciais pois nas regiões mais escuras tivemos poucas condições que levaram o sistema acoplado a exibir comportamento periódico no tempo e estas correspondem a locais onde é mais difícil obtermos estados quimera.

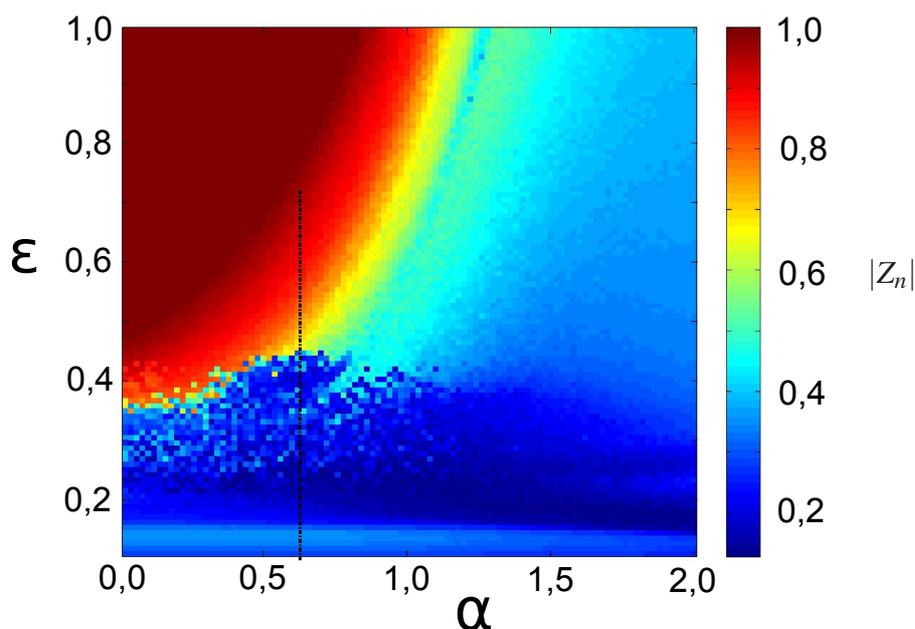
Passaremos agora aos resultados sobre a formação de estados quimera no acoplamento lei de potência.

4.2 ACOPLAMENTO LEI DE POTÊNCIA

Para redes de mapas logísticos onde o acoplamento é feito via lei de potência [6] a dinâmica será dada pela expressão (2.11) com o parâmetro de controle do mapa logístico $a = 4,00^i$. Utilizando a mesma sistemática para o caso não-local, começamos calculando o parâmetro de ordem global deste tipo de acoplamento cujo resultado da simulação numérica encontra-se na figura 4.18.

ⁱPara o parâmetro $a = 4,00$ o mapa logístico apresenta comportamento caótico assim como $a = 3,80$, ver figura 3.4

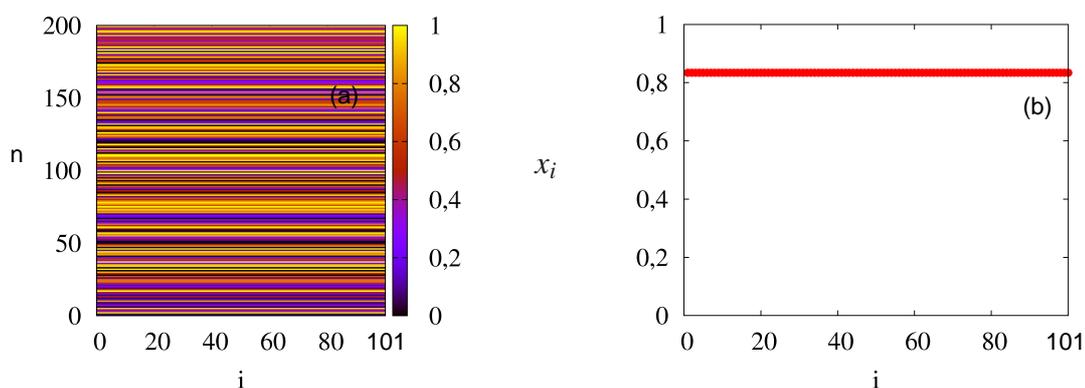
Figura 4.18: Parâmetro de ordem global para acoplamento lei de potência com os parâmetros $a = 4,00$, $N = 101$ e transiente de 10^4 iteradas. Temos no eixo vertical a intensidade do acoplamento (ε), no eixo horizontal o alcance do acoplamento (α) e a escala de cores refere-se ao módulo do parâmetro de ordem ($|Z_n|$).



Fonte: O autor.

Para a região onde o parâmetro de ordem possui valor próximo de 1,00 temos que a rede encontra-se sincronizada, ou seja, todos os mapas possuem o mesmo comportamento no tempo [6, 14]. Isto pode ser visto na figura 4.19 cujo os parâmetros utilizados foram $\alpha = 0,70$ e $\varepsilon = 0,65$ que encontram-se sobre a linha pontilhada da figura 4.18. As regiões onde o parâmetro de ordem é menor que 1,00 são as possíveis regiões de parâmetros ($\alpha \times \varepsilon$) onde para este tipo de acoplamento pode exibir estados quimera, devido a coexistência de uma parte da rede estar sincronizada (coerente) e a outra dessincronizada (incoerente).

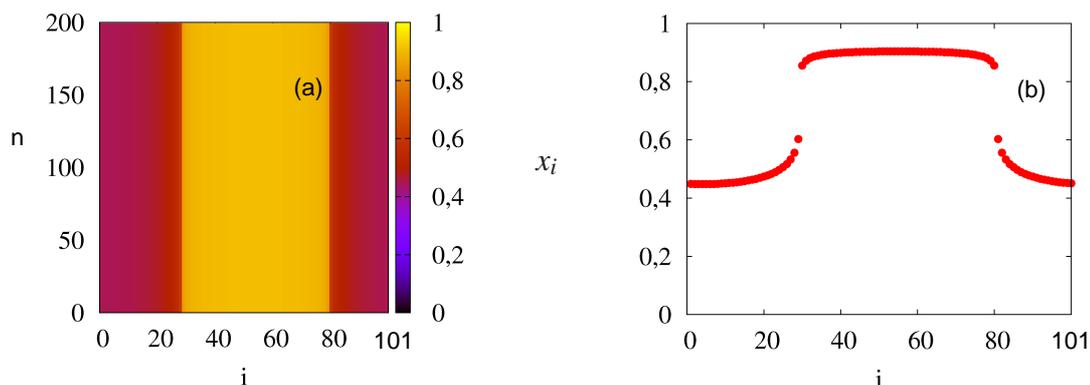
Figura 4.19: Sincronização Caótica: $N = 101$, $a = 4,00$, $\alpha = 0,70$, $\varepsilon = 0,65$, condições iniciais aleatórias e transiente de 10^4 iteradas. Em (a) temos a evolução temporal da rede, em (b) o perfil espacial para $n = 200$, i representa os mapas da rede ($1 \leq i \leq N$) e a escala de cores refere-se a variável de estado (x_i).



Fonte: O autor.

Na figura 4.19 (b) temos que o perfil espacial é completamente coerente e não apresenta descontinuidade no espaço. Isto mostra a existência de sincronização completa (coerência) dos mapas. A figura 4.19 (a) mostra que não existe um padrão de evolução temporal para os sítios da rede. Os mapas evoluem de forma imprevisível independentemente da sua posição ao longo da rede. Mesmo não sendo possível estabelecer um padrão temporal, vemos que os elementos (mapas) possuem uma forte correlação espacial.

Figura 4.20: Descontinuidade espacial: $N = 101$, $\alpha = 0,70$, $\varepsilon = 0,45$, $a = 4,00$, condições iniciais aleatórias e transiente de 10^4 iteradas. Em (a) temos a evolução temporal da rede, em (b) o perfil espacial para $n = 200$, i representa os mapas da rede ($1 \leq i \leq N$) e a escala de cores refere-se a variável de estado (x_i).

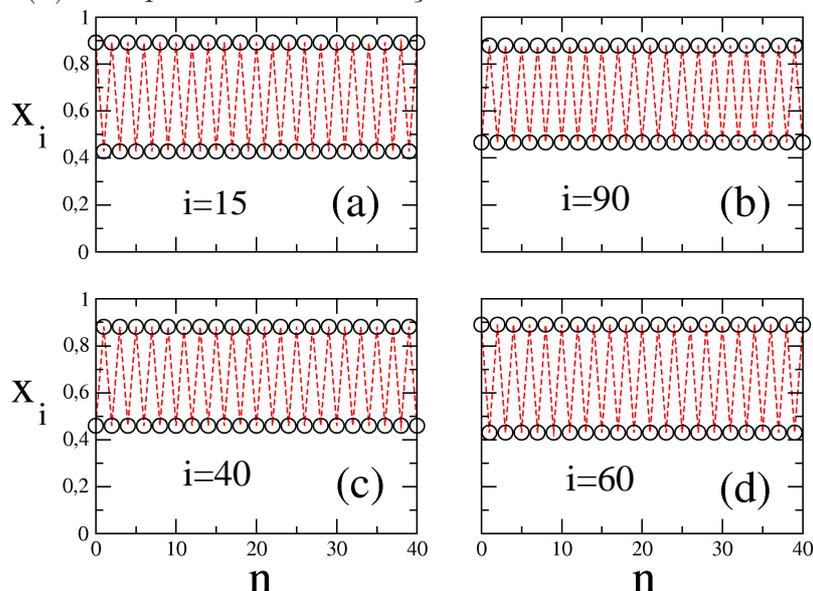


Fonte: O autor.

Para a figura 4.20 (b) mostramos a quebra do perfil espacial para $\alpha = 0,70$ e $\varepsilon = 0,45$, dividindo a rede em duas subdivisões que podem ocasionalmente exibir comportamentos distintos, conforme diminuimos a intensidade do acoplamento (ε) sobre a linha pontilhada da figura 4.18. Na figura 4.20 (a) a evolução temporal de todos os mapas da rede são periódicas. Esta figura os tempos novamente são mostradas para múltiplos de 2, ou seja, cada tempo n desta figura refere-se a 8 iteradas da rede.

Temos a evolução a cada tempo (iterada) da figura 4.20 (a) na figura 4.21 para alguns sítios dentro de cada subregião. A figura 4.21 (a) e (b) correspondem a mapas localizados na região em amarelo de figura 4.20 (a). Na figura 4.21 (c) e (d) estes mapas encontram-se localizados dentro da região em vermelho da figura 4.20 (a). Logo como afirmamos a pouco estas regiões são periódicas no tempo.

Figura 4.21: Evolução temporal (n) periódica para $N = 101$, $a = 4,00$, $\alpha = 0,70$, $\varepsilon = 0,45$. Em (a) temos a evolução do mapa de índice $i = 15$, (b) para o mapa $i = 90$, (c) representa o mapa $i = 40$ e (d) o mapa $i = 60$. As condições iniciais são aleatórias.

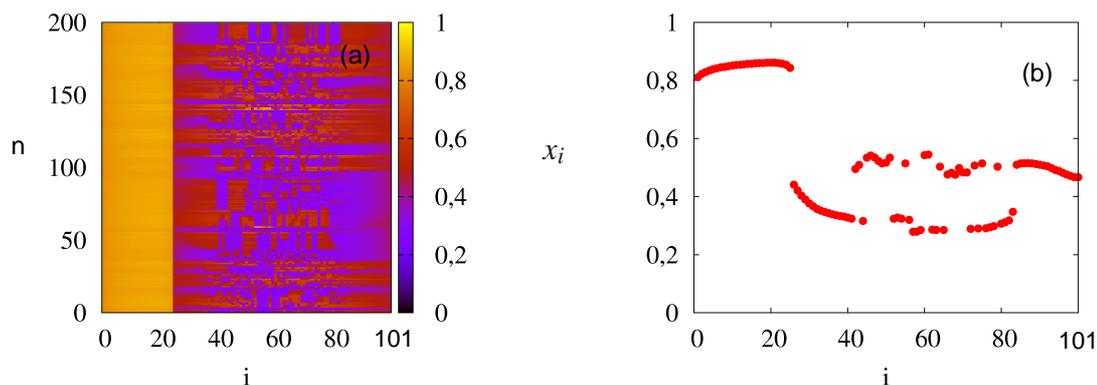


Fonte: O autor.

Órbitas de período-2 podem ser vistas na figura 4.21 (c) e (d) onde os mapas foram escolhidos de forma aleatória dentro das regiões distintas da figura 4.20 (a). De maneira similar temos novamente órbitas de período-2 para a figura 4.20 (a) é mostrada em 4.21 (a) e (b). Este fato será utilizado posteriormente para calcular as regiões no espaço de parâmetros ($\varepsilon \times \alpha$) onde uma rede acoplada por lei de potência pode exibir estados quimeras. Fica evidente que a coexistência de dois domínios distintos (quimera) na rede, se ocorrer, será de regiões periódicas e caóticas no tempo. O estado final, considerando que quimera possui natureza transiente [19], será quando todos os elementos (mapas logísticos) da rede possuírem comportamento periódico no tempo n .

Os estados quimera surgem a partir da quebra do perfil espacial da rede e após um valor crítico de ε . Dependendo da condição inicial dada para os sítios constituintes da rede, conforme o comportamento mostrado na figura 4.22 (a) e (b), notamos a coexistência de dois domínios distintos. Podemos obter estes comportamentos, sobre a linha pontilhada da figura 4.18, ou seja, a rede passa a exibir comportamento ou estados quimera da mesma forma que o acoplamento não-local mostrado na seção anterior.

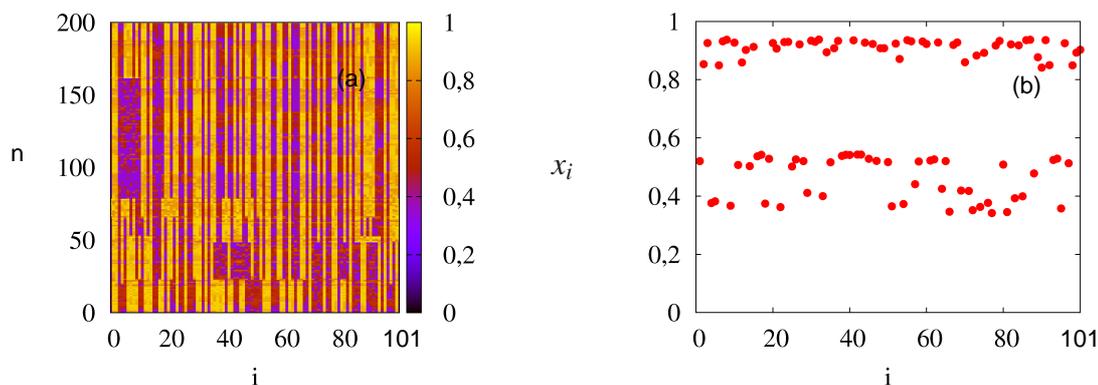
Figura 4.22: Formação de estados quimera: $N = 101$, $\alpha = 0,70$, $a = 4,00$, $\varepsilon = 0,31$, condições iniciais aleatórias e transiente de 10^4 iteradas. Em (a) temos a evolução temporal da rede, em (b) o perfil espacial para $n = 150$, i representa os mapas da rede ($1 \leq i \leq N$) e a escala de cores refere-se a variável de estado (x_i).



Fonte: O autor.

Para $0,27 < \varepsilon < 0,43$ ao longo da linha pontilhada da figura 4.18 (α fixo) a rede possui, logicamente dependendo da condição inicial, o padrão semelhante ao observado na figura 4.22 (a) e (b). Para valores menores de ε o perfil espacial passa a não mais exibir a coexistência de somente dois domínios. Estes casos não são caracterizados como estados quimera, ver figura 4.23, este tipo de padrão espacial marca o valor de ε onde, a partir dele, a rede não possui mais a coexistência de somente dois domínios distintos (quimera).

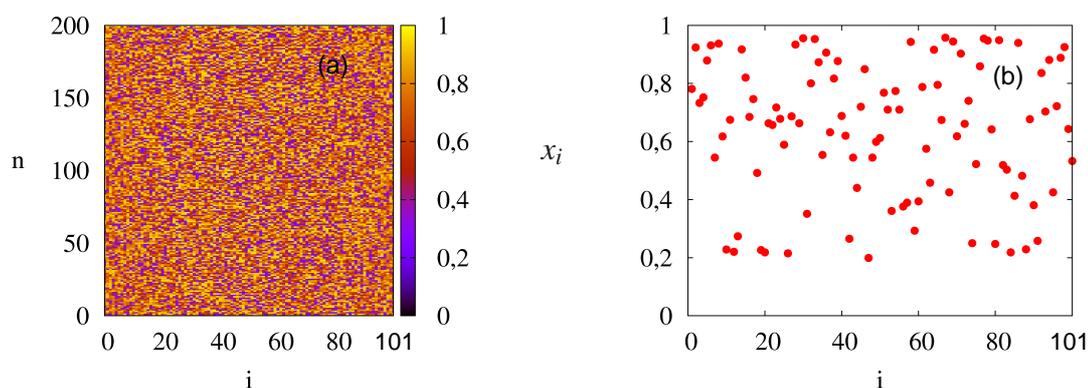
Figura 4.23: Transição quimera-caos: $N = 101$, $a = 4,00$, $\alpha = 0,70$, $\varepsilon = 0,20$, condições iniciais aleatórias e transiente de 10^4 iteradas. Em (a) temos a evolução temporal da rede, em (b) o perfil espacial para $n = 200$, i representa os mapas da rede ($1 \leq i \leq N$) e a escala de cores refere-se a variável de estado (x_i).



Fonte: O autor.

Diminuindo ainda mais a intensidade do acoplamento temos que para $\varepsilon = 0,10$ e mantendo α fixo (linha pontilhada na figura 4.18) a rede exibe caos espaço-temporal conforme mostra a figura 4.24. Neste caso não há qualquer relação espacial ou temporal entre os elementos (mapas) constituintes da rede, não havendo qualquer possibilidade de ocorrer a coexistência de domínios distintos característicos de quimera, uma vez que para este valor de ε , ou menor, a dinâmica de cada mapa da rede praticamente não é influenciada pelos seus vizinhos e cada sítio (mapa) evolui de maneira praticamente independente do restante da rede.

Figura 4.24: Caos espaço-temporal: $n = 101$, $\alpha = 0,70$, $\varepsilon = 0,10$, $a = 4,00$, condições iniciais aleatórias e transiente de 10^4 iteradas. Em (a) temos a evolução temporal da rede, em (b) o perfil espacial para $n = 200$, i representa os mapas da rede ($1 \leq i \leq N$) e a escala de cores refere-se a variável de estado (x_i).



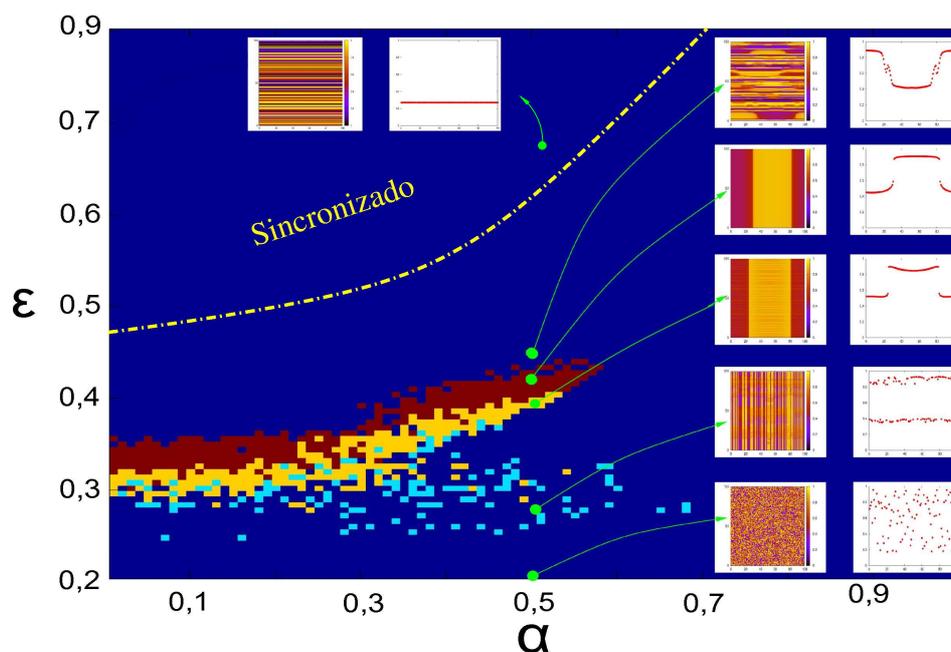
Fonte: O autor.

4.2.1 Regiões Periódicas

Quando temos a coexistência de dois domínios sincronizados e desincronizados em uma rede de sistemas acoplados é possível que ocorra o colapso destes estados quimera. Isto ocorre quando todos os sítios passarem a ter comportamento periódico no tempo. Tendo isto em mente, necessitamos procurar dentro do espaço dos parâmetros ($\varepsilon \times \alpha$), onde α é o alcance e ε a intensidade do acoplamento, as regiões onde a rede possui estados periódicos, uma vez que o comportamento final da rede, na ocorrência do colapso dos estados quimera, é periódico. A figura 4.21 mostra um exemplo deste comportamento periódico.

Na figura 4.25 temos as regiões onde a rede exibe comportamento periódico no tempo. Foi utilizado uma média de 60 condições iniciais próximas ($x_i^0 = 0,40 + r_i^0/1000$) e apresentamos as regiões onde uma rede com 101 mapas logísticos acoplados por lei de potência tem comportamento periódico no tempo. A escala de cores indica qual é o período (2-vermelho, 4-amarelo e 8-azul claro) para a região azul escuro o sistema é sempre caótico no tempo cujo um transiente de 10000 iteradas foi desprezado.

Figura 4.25: Regiões de período 2-vermelho, 4-amarelo e 8-azul claro. Temos 101 mapas acoplados ($N = 101$), o parâmetro do mapa logístico $a = 4,00$ e condições iniciais próximas ($x_i^0 = 0,40 + r_i^0/1000$). A figura mostra a quebra do perfil espacial para $\varepsilon \approx 0,43$ abaixo da região onde os mapas estão sincronizados.



Fonte: O autor.

Na figura 4.25 temos as regiões periódicas (2-vermelho, 4-amarelo e 8-azul claro) e mostramos alguns padrões obtidos para a rede, onde a região de fronteira superiorⁱⁱ corresponde ao início da ruptura do perfil espacial dos sítios, ou seja, o “nascimento” dos estados quimera. Diferentemente do que ocorreu no caso não-local, aqui obtivemos uma região menor no espaço dos parâmetros ($\varepsilon \times \alpha$) onde a rede pode exibir a coexistência de coerência e incoerência. Isto se deve ao fato de que somente para valores intermediários de α este acoplamento possui características não-locais sendo portanto somente para estes valores que poderemos obter estados quimera no acoplamento lei de potência.

Se aumentamos o valor do parâmetro de acoplamento (α) o comportamento será de tal forma que a interação entre os elementos da rede possuirá comportamento local e a formação de estados quimera não existirá dando lugar há caos espaço-temporal. Por outro lado, trabalharmos com pequenos valores de α o acoplamento se torna global onde o

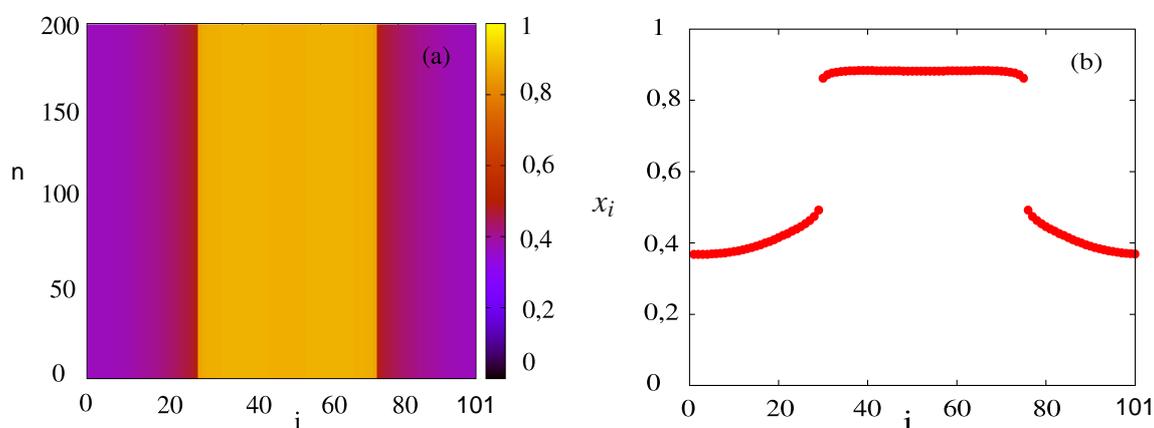
ⁱⁱfronteira entre a região caótica na cor azul escuro e a região de período-2 na cor vermelha

comportamento mais provável é a completa sincronização ou dessincronização da rede. Os perfis mostrados na figura 4.25 para $\alpha = 0,50$ mostram o surgimento da descontinuidade espacial em $\varepsilon \approx 0,43$ até a completa perda de correlação espacial dos sítios (mapas) da rede para $\varepsilon \approx 0,25$.

4.2.2 Sensibilidade às condições iniciais

A figura 4.26 (a) mostra a evolução temporal de 101 mapas logísticos acoplados via lei de potência cujo transiente de 10^4 iteradas foi desprezado. Os parâmetros utilizados foram $\alpha = 0,40$ e $\varepsilon = 0,34$ para o acoplamento e como parâmetro de controle do mapa logístico foi usado $a = 4,00$, sendo o mesmo para todos os sítios. A evolução temporal mostra que a rede apresenta um comportamento regular para todos os seus elementos.

Figura 4.26: Sensibilidade às condições iniciais: $n = 101$, $\alpha = 0,40$, $\varepsilon = 0,34$, $a = 4,00$. As condições iniciais são aleatórias e a escala de cores refere-se a variável dinâmica (x_i). Em (a) temos a evolução temporal periódica e em (b) temos um perfil espacial para um instante de tempo ($n = 200$).



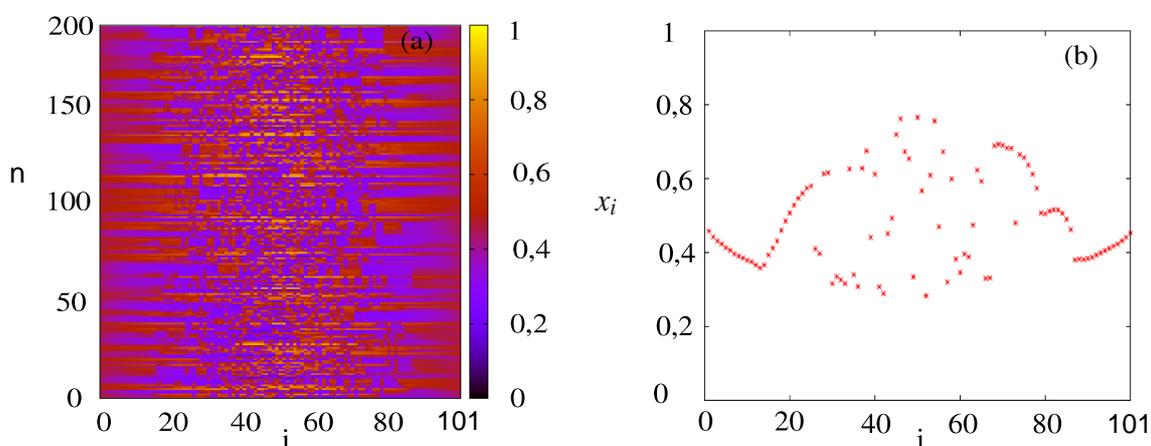
Fonte: O autor.

Na figura 4.26 (b) temos que o perfil espacial da rede é descontínuo, ou seja, para estes parâmetros ($\alpha \times \varepsilon$) a rede provavelmente apresenta estados quimera devido a quebra do perfil espacial. Neste caso mesmo os parâmetros ($\varepsilon \times \alpha$) estando dentro da regiãoⁱⁱⁱ em que a rede exibe estados quimeras, devido às condições iniciais utilizadas a rede não exibe coexistência de regiões coerentes e incoerentes no espaço.

ⁱⁱⁱ ver figura 4.25 as regiões que a rede apresenta períodos no tempo

Utilizando outras condições iniciais a rede passa a exibir estados quimera conforme mostra a figura 4.27 (a) para uma rede com 101 mapas logísticos com $a = 4,00$. Os parâmetros utilizados foram $\alpha = 0,40$ e $\varepsilon = 0,34$, que são os mesmos da figura 4.26 (a) e (b) somente as condições iniciais são diferentes.

Figura 4.27: Sensibilidade às condições iniciais: $n = 101$, $\alpha = 0,40$, $\varepsilon = 0,34$, $a = 4,00$. As condições iniciais são aleatórias e a escala de cores refere-se a variável dinâmica (x_i). Em (a) temos a evolução temporal e em (b) temos um perfil espacial para um instante de tempo ($n = 200$) mostrando a coexistência de estados coerentes e incoerentes.



Fonte: O autor.

Aqui temos outra característica parecida com o acoplamento não-local, ou seja, uma sensível dependência com as condições iniciais e a rede pode ou não exibir estados quimera.

5 CONCLUSÕES

Podemos concluir que estados quimera são sensíveis as condições iniciais e devido a este comportamento pode ocorrer deslocamento das regiões de quimera conforme mudamos a condição inicial da rede. Também é possível que a rede nem apresente tais estados ou que o tempo de permanência seja extremamente curto para que seja observado este comportamento. Para o acoplamento não-local a dependência às condições iniciais é mais evidente em redes pequenas e diminui conforme aumentamos N (tamanho da rede).

O acoplamento não-local demonstrou um comportamento distinto: as regiões coerentes e incoerentes não possuem deslocamento ao longo da rede. Dada uma condição inicial, caso o sistema demonstre estados quimera, estes estados possuem posições fixas para todos os tempos posteriores, ou seja, uma vez formada as regiões coerentes e incoerentes elas permanecem inalteradas ao longo do tempo n . Acreditamos que, ao não observarmos o deslocamento das regiões coerentes e incoerentes, este comportamento esteja influenciando nos resultados obtidos. O tempo médio de colapso refere-se a uma região próxima a fronteira do acoplamento ($\sigma = 0,30$) onde observamos estados quimera. Pode ser que nessa região de parâmetros ocorra um deslocamento das regiões coerentes e incoerentes, para alguma condição inicial, facilitando o colapso dos estados quimera.

Tudo está relacionado ao fato que na literatura os tempos de permanência de quimera ou tempos de colapso de quimera crescem de forma exponencial com o tamanho da rede [19], mas não obtivemos este comportamento em nossas simulações (ver tabela 4.1). Uma explicação possível para este resultado pode estar relacionado ao não deslocamento destes padrões na rede e que para a caso analisado aqui este colapso só ocorra nas regiões de fronteira onde possivelmente ocorra deslocamento dos padrões (coerentes e incoerentes) ou o tempo limite t_r' (tempo máximo de observação) utilizado nas simulações foi “pequeno” para que ocorresse o colapso para redes maiores.

Mostramos que estados quimeras podem ser obtidos para acoplamento lei de potência e que a coexistência de estados coerentes e incoerentes possuem sensibilidade às condições iniciais da mesma forma que o acoplamento não-local. É muito provável que ocorra o colapso dos estados quimera para o acoplamento lei de potência para alguma condição inicial e este ainda é um ponto para ser investigado, pois seguindo a mesma sistemática adotada para o caso não-local devemos primeiramente calcular os expoentes de Lyapunov da rede e depois a densidade de entropia h . Com estes diagnósticos poderemos de fato dizer se houve ou não algum colapso de quimera ($h = 0$) e qual o tempo médio dos estados quimera para a acoplamento lei de potência.

Como trabalhamos para o caso não-local com parâmetro do mapa logístico $a = 3,80$ para todos os sítios da rede, uma possibilidade futura é de se tratar outros valores deste parâmetro de controle dentro da região de caos conforme figura 3.4. É muito provável que os comportamentos descritos aqui podem também referir-se a este caso em particular de a . O mesmo pode ser realizado para o acoplamento lei de potência uma vez que fixamos $a = 4,00$. Outro ponto a ser investigado é calcular o tempo médio de colapso para mais valores de σ dentro do intervalo onde obtemos estados quimera para o acoplamento não-local. Como nas simulações utilizamos um tempo $t'_r = 3 \times 10^5$ iteradas como tempo limite de observação do comportamento da rede, podemos aumentar este tempo (t'_r). Pois o colapso dos estados quimera para redes “grandes” podem ocorrer para tempos maiores que este e podem estar influenciando nos resultados aqui obtidos.

REFERÊNCIAS

- [1] OMEL'CHENKO, I. et al. **Loss of Coherence in Dynamical Networks: Spatial Chaos and Chimera States.** *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 106, p. 234102, 2011.
- [2] KURAMOTO, Y.; BATTOGTOKH, D. **Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators.** *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, p. 380–385, 2002.
- [3] ABRAMS, D. M.; STROGATZ, S. H. **Chimera States for Coupled Oscillators.** *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 93, n. 17, p. 174102, 2004.
- [4] TINSLEY, M. R.; NKOMO, S.; SHOWALTER, K. **Chimera and phase-cluster states in populations of coupled chemical oscillators.** *Nature Physics*, p. 662–665, 2012.
- [5] HAGERSTROM, A. M. et al. **Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices.** *Nature Physics*, p. 658–661, 2012.
- [6] ANTENEODO, C. et al. **Analytical results for coupled-map lattices with long-range interactions.** *Physical Review E*, American Physical Society, v. 68, p. 045202, 2003.
- [7] VIANA, R. L. *Introdução a Dinâmica Não-Linear e Caos.* 2011. 131 p. Disponível em: <http://www.scribd.com/doc/127275242/Introducao-a-Dinamica-Nao-Linear-e-Caos>, Acesso em 12/06/2012.
- [8] SOUZA, E. G. *Caracterização de sistemas dinâmicos através de gráficos de recorrência.* 97 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.
- [9] NETO, J. B. *Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana.* São Paulo: Livraria da Física, 2004. 432 p.
- [10] ALLIGOD, K.; SAUER, T.; YORKE, J. A. *Chaos: an introduction to dynamical system.* New York, USA: Springer Verlag, 1996. 603 p.
- [11] OTT, E. *Chaos in dynamical systems.* New York, USA: Syndicate of the University of Cambridge, 1993. 385 p.

- [12] MAY, R. M. **Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamical.** *Nature*, v. 261, p. 459–467, 1976.
- [13] BOLLOBÁS, B. **Graph Theory: An Introductory Course.** New York, USA: Springer-Verlag, 1979. 180 p.
- [14] KAN, M. T. V. **Sincronização de caos em uma rede com interação de longo alcance.** 69 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2008.
- [15] SMIRNOV, V. I. **Biography of A. M Lyapunov.** 1947. Disponível em: <http://www.ingelec.uns.edu.ar/asnl/Materiales/Cap05Extras/LyapBio/lyapbio.pdf>. Acesso em 15/10/2013.
- [16] STEINBRUCH, A. W. **Álgebra Linear.** 2. ed. New York, USA: Makron Books, 1987. 584 p.
- [17] PAULA, P. A. **Processo de Ortonormalização.** 2013. Disponível em: [http://www.feg.unesp.br/anachiaradia/Material/Cap09-Processo de ortonormalizacao.pdf](http://www.feg.unesp.br/anachiaradia/Material/Cap09-Processo%20de%20ortonormalizacao.pdf). Acesso em 13/08/2013.
- [18] WOLF, A. et al. **Determining Lyapunov exponents from a time series .** *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 16, n. 3, p. 285–317, 1985.
- [19] WOLFRUM, M.; OMEL'CHENKO, O. **Chimera states are chaotic transients.** *Physical Review E*, American Physical Society, v. 84, p. 015201, 2011.
- [20] VISWANATH, D. **The fractal property of the Lorenz attractor.** *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 190, n. 1–2, p. 115–128, 2004.
- [21] OMELCHENKO, I. et al. **Transition from spatial coherence to incoherence in coupled chaotic systems.** *Physical Review E*, American Physical Society, v. 85, p. 026212, Feb 2012.
- [22] KURAMOTO, Y.; NAKAO, H. **Power-law spatial correlations and onset of individual motions in self-oscillatory media with non-local coupling.** *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 103, n. 1–4, p. 294–313, 1997.
- [23] OMEL'CHENKO, O. E.; WOLFRUM, M.; MAISTRENKO, Y. **Chimera states as chaotic spatiotemporal patterns.** *Physical Review E*, American Physical Society, v. 81, p. 065201, 2010.
- [24] WOLFRUM, M. et al. **Spectral properties of chimera states.** *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 21, n. 1, p. 13112, 2011.
- [25] HEHL, M. E. **Linguagem de programação estruturada: Fortran 77.** São Paulo, Brasil: McGraw-Hill do Brasil, 1986.

- [26] ADAMS, J. C. et al. *Fortran 90 Handbook*. New York, USA: McGraw-Hill Book Company, 1992.
- [27] WIGGINS, S. *Introduction to applied nonlinear dynamical system and chaos*. 2. ed. New York, USA: Springer Verlag, 2003. 843 p.
- [28] MARTENS, E. A.; LAING, C. R.; STROGATZ, S. H. **Solvable Model of Spiral Wave Chimeras**. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 104, p. 044101, 2010.
- [29] SILVA, L. G. de V. Dias da. *Órbitas Periódicas e suas Bifurcações em Bilhas-res Magnéticos*. 96 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1997.
- [30] MELLO, A. G. S. *Aplicações de Redes Complexas para a Definição de Vizinhaça na Otimização por Enxame de Partículas*. 144 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2010.
- [31] ROTH, B. A. F. *Determinação de pontos fixos e órbitas periódicas em sistemas caóticos*. 131 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2002.
- [32] BATISTA, C. A. S. *Sincronização de redes neurais*. 61 p. Tese (Tese de Doutorado) — Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2012.
- [33] GUEDES, A. V. *Caos espaço-temporal em mapas acoplados*. 81 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.
- [34] FEOFILOFF, P.; KOHAYAKAWA, Y.; WAKABAYASHI, Y. *Uma introdução Sucinta à Teoria de Grafos*. 2011. 61 p. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/pf/teriadografos/>. Acesso em 10/09/2012.
- [35] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Mechanics*. 3rd. ed. Moscou, Rússia: Pergamon Press, 1993. Translated from the Russian by J. B. Sykes and J. S. Bell.
- [36] SHANAHAN, M. **Metastable chimera states in community-structured oscillator networks**. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 20, n. 1, p. 13108, 2010.
- [37] SMET, F. D.; AEYELS, D. **Partial entrainment in the finite Kuramoto–Sakaguchi model**. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 234, n. 2, p. 81–89, 2007.
- [38] HONG, H.; STROGATZ, S. H. **Kuramoto Model of Coupled Oscillators with Positive and Negative Coupling Parameters: An Example of Conformist and Contrarian Oscillators**. *Physical Review Letters*, v. 106, 2011.

- [39] LAING, C. R. **Chimera states in heterogeneous networks**. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 19, n. 1, p. 13113, 2009.
- [40] MORGÜL, O. **On the synchronization of logistic maps**. *Physics Letters A*, v. 247, n. 6, p. 391–396, 1998.
- [41] CHUNG, T.; TRUANT, D.; MORRISS, G. P. **Lyapunov modes as fields**. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 83, p. 046216, 2011.
- [42] PANAGGIO, M. J.; ABRAMS, D. M. **Chimera States on a Flat Torus**. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 110, p. 094102, 2013.
- [43] BATISTA, A. M.; VIANA, R. L. **Lyapunov exponents of a lattice of chaotic maps with a power-law coupling**. *Physics Letters A*, v. 286, n. 2–3, p. 134–140, 2001.
- [44] MARTENS, E. A. et al. **Chimera states in mechanical oscillator networks**. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 110, n. 26, p. 10563–10567, 2013.
- [45] KELLER, K.; UNAKAFOV, A. M.; UNAKAFOVA, V. A. **On the relation of KS entropy and permutation entropy**. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 241, n. 18, p. 1477–1481, 2012.
- [46] WISSMAN, B. D.; MCKAY-JONES, L. C.; BINDER, P.-M. **Entropy rate estimates from mutual information**. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 84, p. 046204, 2011.
- [47] SZMOSKI, R. M. et al. **Synchronization and suppression of chaos in non-locally coupled map lattices**. *Pramana: Journal of Physics*, v. 73, n. 6, p. 999–1009, 2009.

APÊNDICE – INTENSIDADE CRÍTICA

Podemos obter o valor crítico (σ) onde o perfil espacial da rede de mapas acoplados de forma não-local [1] se tornará descontínuo. Este σ marca o início da coexistência de dois domínios distintos na rede. Utilizamos o limite termodinâmico [21] onde $N \rightarrow \infty$ reescrevendo a equação (2.10) de outra forma substituindo x por z teremos [1]:

$$z_i^{n+1} = f(z_i^n) + \frac{\sigma}{2p} \sum_{j=i-p}^{j+p} [f(z_i^n) - f(z_j^n)], \quad (5.1)$$

$$\text{quando } N \rightarrow \infty \text{ teremos } z_i^{n+1} \rightarrow z^{n+1}(x) \text{ logo:} \quad (5.2)$$

$$z^{n+1}(x) = f(z^n(x)) + \frac{\sigma}{2p} \int_{x-p}^{x+p} [f(z^n(y)) - f(z^n(x))] dy$$

$$z^{n+1}(x) = f(z^n(x)) + \frac{\sigma}{2p} \left\{ \int_{x-p}^{x+p} f(z^n(y)) dy - \int_{x-p}^{x+p} f(z^n(x)) dy \right\}$$

$$z^{n+1}(x) = f(z^n(x)) + \frac{\sigma}{2p} \left\{ \int_{x-p}^{x+p} f(z^n(y)) dy - f(z^n(x)) y \Big|_{x-p}^{x+p} \right\}$$

$$z^{n+1}(x) = f(z^n(x)) + \frac{\sigma}{2p} \left\{ \int_{x-p}^{x+p} f(z^n(y)) dy - f(z^n(x)) [(x+p) - (x-p)] \right\}$$

$$z^{n+1}(x) = f(z^n(x)) + \frac{\sigma}{2p} \left\{ \int_{x-p}^{x+p} f(z^n(y)) dy - 2pf(z^n(x)) \right\}$$

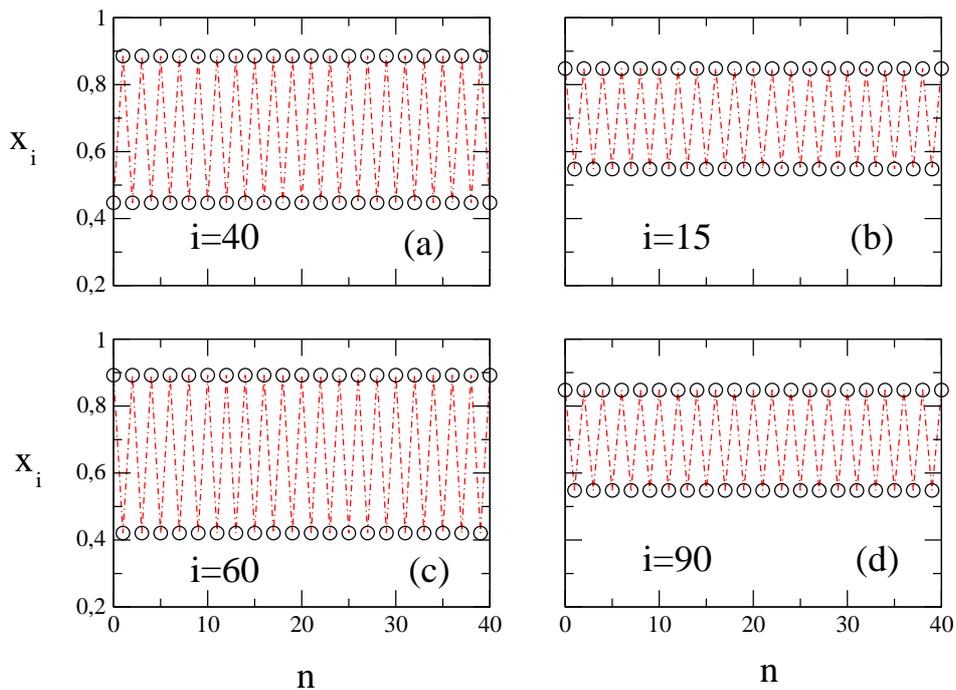
$$z^{n+1}(x) = (1 - \sigma) f(z^n(x)) + \frac{\sigma}{2p} \left\{ \int_{x-p}^{x+p} f(z^n(y)) dy \right\}, \quad (5.3)$$

calculando a derivada da expressão (5.3) em relação ao espaço teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \{z^{n+1}(x)\} &= \frac{\partial}{\partial x} \{(1 - \sigma) f(z^n(x))\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\sigma}{2p} \left[\int_{x-p}^{x+p} f(z^n(y)) dy \right] \right\} \\ \frac{\partial}{\partial x} \{z^{n+1}(x)\} &= (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial x} \{f(z^n(x))\} + \left\{ \frac{\sigma}{2p} [f(z^n(x+p)) - f(z^n(x-p))] \right\}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

considerando que o sistema possui período-2 no tempo conforme a figura 5.1 ilustra.

Figura 5.1: Evolução temporal das últimas 40 iteradas para uma rede de 100 mapas logísticos acoplados de forma não-local. Em (a) temos o mapa de índice $i = 40$, (b) o mapa $i = 15$, em (c) o mapa $i = 60$ e para (d) o mapa $i = 90$. Os parâmetros utilizados foram: $\sigma = 0,35$, $t_r = 10^4$ e $p/N = 0,32$.



Fonte: O autor

A descontinuidade ocorre quando a derivada no espaço diverge [21].

$$\frac{\partial}{\partial x} z^1(x) = \frac{\partial}{\partial x} z^0(x) = \infty, \quad (5.5)$$

com isso podemos desprezar o último termo do lado direito da expressão 5.4.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \{z^{n+1}(x)\} &= (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial x} \{f(z^n(x))\} \\ \frac{\partial z^1(x)}{\partial x} \frac{\partial z^0(x)}{\partial x} &= \left[(1 - \sigma)^2 \frac{\partial f(z^0(x))}{\partial z^0} \frac{\partial f(z^1(x))}{\partial z^1} \right] \frac{\partial z^0(x)}{\partial x} \frac{\partial z^1(x)}{\partial x},\end{aligned}\quad (5.6)$$

teremos que a equação 5.6 será uma igualdade se:

$$1 = (1 - \sigma)^2 \frac{\partial f(z^0)}{\partial z^0} \frac{\partial f(z^1)}{\partial z^1}.\quad (5.7)$$

A derivada do mapa logístico é dada por:

$$\frac{df(z(x))}{dz} = a[1 - 2z(x)],\quad (5.8)$$

com isso a expressão 5.6 torna-se:

$$1 = (1 - \sigma)^2 a^2 \{ [1 - 2z^0(x)] \} \{ [1 - 2z^1(x)] \},\quad (5.9)$$

se introduzirmos uma função $G(z(x))$ da seguinte forma [21]:

$$G(z(x)) = (1 - \sigma)^2 a^2 [(1 - 2z^0(x))] [(1 - 2z^1(x))] - 1\quad (5.10)$$

o ponto fixo do mapa logístico pode ser obtido da seguinte forma [10, 11]:

$$\begin{aligned}f(z^*) &= az^*(1 - z^*) \\ z^* &= az^*(1 - z^*) \\ 1 &= a(1 - z^*) \\ z^* &= 1 - \frac{1}{a},\end{aligned}\quad (5.11)$$

Assumindo que $z^1(x) = z^2(x) = z^*(x)$ e que $G(z^*(x)) = 0$ a expressão (5.10) fica da seguinte

forma:

$$\begin{aligned}
 G(z^*(x)) &= (1 - \sigma)^2 a^2 [1 - 2z^*(x)]^2 - 1 = 0 \\
 \{a(1 - \sigma) [1 - 2z^*(x)]\}^2 &= 1 \\
 a(1 - \sigma) [1 - 2z^*(x)] &= \pm\sqrt{1} \\
 &\text{logo} \\
 \text{soluções} &= \begin{cases} a(1 - \sigma) [1 - 2z^*(x)] = +1 \\ a(1 - \sigma) [1 - 2z^*(x)] = -1 \end{cases} \quad (5.12)
 \end{aligned}$$

substituindo 5.11 em 5.12 teremos:

$$\text{soluções} = \begin{cases} a(1 - \sigma) \left[1 - 2\left(1 - \frac{1}{a}\right)\right] = +1 \\ a(1 - \sigma) \left[1 - 2\left(1 - \frac{1}{a}\right)\right] = -1 \end{cases}$$

$$\text{soluções} = \begin{cases} a(1 - \sigma) \left[1 - 2\left(\frac{a-1}{a}\right)\right] = +1 \\ a(1 - \sigma) \left[1 - 2\left(\frac{a-1}{a}\right)\right] = -1 \end{cases}$$

$$\text{soluções} = \begin{cases} a(1 - \sigma) \left[1 + \left(\frac{2-2a}{a}\right)\right] = +1 \\ a(1 - \sigma) \left[1 + \left(\frac{2-2a}{a}\right)\right] = -1 \end{cases}$$

$$\text{soluções} = \begin{cases} a(1 - \sigma) \left[\left(\frac{a+2-2a}{a}\right)\right] = +1 \\ a(1 - \sigma) \left[\left(\frac{a+2-2a}{a}\right)\right] = -1 \end{cases}$$

$$\text{soluções} = \begin{cases} a(1 - \sigma) \left[\left(\frac{2-a}{a}\right)\right] = +1 \\ a(1 - \sigma) \left[\left(\frac{2-a}{a}\right)\right] = -1 \end{cases}$$

$$\text{soluções} = \begin{cases} (1 - \sigma)(2 - a) = +1 \\ (1 - \sigma)(2 - a) = -1 \end{cases}$$

$$\text{soluções} = \begin{cases} (1 - \sigma) = \frac{1}{2-a} \\ (1 - \sigma) = \frac{1}{a-2} \end{cases}$$

$$\text{soluções} = \begin{cases} \sigma = 1 + \frac{1}{a-2} \quad (\text{a}) \\ \sigma = 1 - \frac{1}{a-2} \quad (\text{b}) \end{cases} \quad (5.13)$$

Utilizando $a = 3,80$ temos que somente a solução 5.13 (b) é possível para σ .

$$\sigma = 1 - \frac{1}{a-2} \approx 0,44 \quad \longrightarrow \quad a = 3,80.$$

Este valor da intensidade do acoplamento é independente do alcance p (número de vizinhos acoplados de cada lado com o sítio de índice i) na expressão 5.1. O valor de $\sigma \approx 0,44$ marca o valor, abaixo do qual, o perfil espacial da rede torna-se descontínuo e podendo a mesma exibir estados quimera. Os resultados numéricos obtidos $\sigma \approx 0,43$ mostram que as aproximações feitas aqui são válidas.