

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

REGIANE APARECIDA NUNES DE SIQUEIRA

DISSIPACÃO EM MODOS ACOPLADOS

PONTA GROSSA - PR

MAIO - 2007

**REGIANE APARECIDA NUNES DE SIQUEIRA**

**DISSIPACÃO EM MODOS ACOPLADOS**

Dissertação submetida ao programa de Pós-Graduação em Ciências da Universidade Estadual de Ponta Grossa como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências, Área de concentração Física.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Sérgio Magalhães de Castro

**PONTA GROSSA - PR**

**MAIO - 2007**

Ficha catalográfica elaborada pelo Setor de Processos Técnicos BICEN/UEPG

S618p Siqueira, Regiane Aparecida Nunes de  
Dissipação em modos acoplados. / Regiane Aparecida Nunes de  
Siqueira. Ponta Grossa, 2007.  
99 f. il.

Dissertação (Mestrado em Ciências), Universidade Estadual de Ponta  
Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Sérgio Magalhães de Castro.

1. Emaranhamento. 2. Dissipação. 3. Compressão. 4. Correlações  
quânticas. I. Castro, Antônio Sérgio Magalhães. II. Universidade Estadual  
de Ponta Grossa. Mestrado em Ciências. III.T.

CDD: 530.12


**TERMO DE APROVAÇÃO**

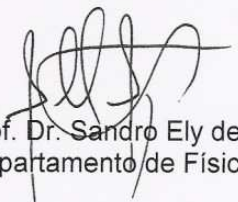
**REGIANE APARECIDA NUNES DE SIQUEIRA**

**"DISSIPACÃO EM MODOS ACOPLADOS"**

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Ciências - Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador:

  
Prof. Dr. Antonio Sérgio Magalhães de Castro  
Departamento de Física, UEPG/PR

  
Prof. Dr. Sandro Ely de Souza Pinto  
Departamento de Física, UEPG/PR

Prof. Dr. Viktor V. Dodonov  
Departamento de Física, UnB/DF



**Ponta Grossa, 25 de junho de 2007.**

Dedico este trabalho a Deus,  
Criador do céu e da Terra.

## AGRADECIMENTOS

A Deus pela saúde e oportunidade que tive de realizar e concluir este curso de Pós-Graduação em Ciências, área de concentração: Física.

Ao meu Orientador Antonio Sérgio Magalhães de Castro, pela dedicação, paciência, amizade e exemplo de competência e profissionalismo ao direcionar meu trabalho e ministrar disciplinas do curso.

Ao professor Viktor V. Dodonov pelas inúmeras contribuições para a realização deste trabalho.

Aos professores do departamento de Matemática pela amizade e apoio, em especial ao Professor Antonio Marcos Batista por indicar o caminho que eu devia seguir para ingressar no curso e ao Professor José Tadeu Teles Lunardi pela paciência e dedicação ao ser meu chefe de departamento e professor de Mecânica Quântica.

Aos professores do departamento de Física pela amizade, apoio e oportunidade oferecida para que eu realizasse este curso, em especial aos Professores Sandro e Luiz Américo pelas brilhantes aulas de Eletromagnetismo.

Aos professores Antonio Marcos Batista e Gerson Kniphoff da Cruz, membros da banca de qualificação, pelas grandes contribuições que trouxeram para que este trabalho pudesse ser aprimorado.

Aos meus pais Lauro Nunes de Siqueira e Odete Chimel Nunes de Siqueira que além da vida me deram coragem para lutar pelo meu ideal, incentivando-me a prosseguir.

Aos amigos e colegas de curso pelos bons e maus momentos compartilhados, em especial ao Carlos Adalberto pelo exemplo de dedicação e empenho.

Ao suporte parcial da agência brasileira CAPES. E ao Conselho Nacional de desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por haver parcialmente financiado este trabalho sob contrato No. 474690/2004-0.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização do curso e conclusão deste trabalho.

*Ainda que tivesse o dom da profecia,  
e conhecesse todos os mistérios e toda a ciência  
e ainda que tivesse toda a fé,  
de maneira tal que transportasse os montes,  
e não tivesse amor, nada seria.*

*(Coríntios 13:2)*

## RESUMO

A implementação de processos em Computação Quântica bem como a transmissão e controle de informação quântica em sistemas físicos realistas, precisam levar em consideração os efeitos do acoplamento do sistema com o ambiente, representado por reservatórios térmicos. Neste trabalho considera-se o estudo do efeito do ambiente nas propriedades quânticas de cada modo em um sistema de modos bosônicos fracamente acoplados (os modos eletromagnéticos na cavidade acoplada). É aplicado um método alternativo, baseado no Hamiltoniano Quadrático efetivo não Hermitiano, a fim de compreender como determinar a evolução temporal da função de Wigner do sistema sob estudo; é apresentada a técnica do propagador da função de Wigner e a solução específica. Além disso, a evolução temporal dos segundos momentos não-simetrizados é determinada exatamente para o caso especial de estados iniciais gerais Gaussianos para ambos os modos, na presença do reservatório térmico. Analisa-se como a compressão e a pureza de cada modo bem como o emaranhamento entre eles evoluem no tempo sob dissipação, comparado ao caso da ausência de reservatório. Para esse propósito, são brevemente consideradas algumas técnicas aplicadas ao estudo da informação quântica e medidas de correlação quântica para sistemas quânticos de muitas partes, sendo aqui somente aplicado a sistemas de duas partes. Este trabalho é concluído com uma análise numérica das propriedades quânticas em termos dos parâmetros do estado inicial e algumas perspectivas futuras são apresentadas a fim de generalizar estes resultados.

Palavras-chave: Emaranhamento, dissipação, compressão, correlações quânticas.



## ABSTRACT

The implementation of processes of Quantum Computation as well as the transmission and quantum information control in realistic physical systems, must take in account the effects of the coupling of the systems with the environment, represented by thermal reservoirs. In this work it is considered the study of the effects of the environment in the quantum properties of each modes in a system of weakly coupled bosonics ones (the electromagnetic modes in the coupled cavities). It is applied an alternative method, based on effective non Hermitian Quadratic Hamiltonian, in order to understand how to determine the time evolution of the Wigner function of the system under study; the technique of Wigner function propagator and a specific solution is presented. In addition, the time evolution of the non symmetric second moments is exactly determined for the special case of initial general Gaussian states for both modes, in the presence of thermal reservoir. It is analyzed as the squeezing and the purity of each mode as well as the entanglement among them evolve in time under dissipation, compared to the case of reservoir absence. For this purpose, it is briefly considered some techniques applied the study of the quantum information and measures of quantum correlations for quantum multipartite systems, here only applied to a bipartite system. This work is concluded with some numerical analysis of the quantum properties in terms of initial state parameters and gives some future perspective in order to generalize our results.

Keywords: Entanglement, dissipation, squeezing, quantum correlations.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>Sistemas dissipativos em Mecânica Quântica</b>	<b>18</b>
2.1	O sistema acoplado ao reservatório . . . . .	18
2.2	Transição para a descrição de Schrödinger . . . . .	24
2.3	Valor esperado de quantidades físicas . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Efeito da dissipação na Informação Quântica</b>	<b>28</b>
3.1	Teoria quântica de sistemas dissipativos . . . . .	28
3.2	Transição para a descrição de Schrödinger . . . . .	32
3.3	Propagador da função de Wigner . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Efeito do reservatório nas propriedades quânticas</b>	<b>41</b>
4.1	Evolução do operador densidade . . . . .	41
4.2	Transferência de compressão . . . . .	45
4.3	Propriedades de correlação entre os modos . . . . .	52
4.4	Medidas de correlações quânticas . . . . .	58
4.5	Separabilidade como critério de emaranhamento . . . . .	63
4.6	Temperatura crítica do reservatório . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>74</b>
<b>A</b>	<b>Descrição de interação</b>	<b>85</b>
A.1	Equação de Liouville . . . . .	85
A.2	Hamiltoniano . . . . .	86
A.2.1	Teoremas . . . . .	87
A.2.2	Aplicação dos teoremas em $\hat{H}_{II}$ . . . . .	89

<b>B</b>	<b>Comutador duplo</b>	<b>90</b>
<b>C</b>	<b>Análise da medida de correlação</b>	<b>94</b>
C.1	Um dos modos não-comprimido e outro comprimido . . . . .	94
<b>D</b>	<b>Matriz M</b>	<b>97</b>
D.1	Elementos da matriz das covariâncias . . . . .	97
D.2	Relação entre os elementos $q_{\alpha\beta}$ e $M_{\alpha\beta}$ . . . . .	99

# Lista de Figuras

- 4.1 Comportamento da transferência de compressão no tempo ( $\tau = z\pi$ ) no caso de um único modo comprimido ( $\mathcal{G}_1 > 1$  e  $\mathcal{G}_2 < 1$ ) e na ausência do reservatório ( $\beta = 0$ ). A curva azul representa o modo 1 (num estado inicial não comprimido), a curva vermelha representa o modo 2 (num estado inicial comprimido) e a curva cinza o estado coerente. As curvas são construídas com  $\sigma = 1$ ,  $r_1 = 0,35$ ,  $r_2 = 1,10$ ,  $\vartheta_1 = 1,7$ ,  $\vartheta_2 = 0,9$  e  $\nu = 2$ . . . . . 47
- 4.2 Comportamento da transferência de compressão no tempo ( $\tau = z\pi$ ) no caso de um único modo comprimido ( $\mathcal{G}_1 > 1$  e  $\mathcal{G}_2 < 1$ ) e na presença do reservatório ( $\beta \neq 0$ ). A curva preta representa o modo 1 (num estado inicial não comprimido), a curva rosa representa o modo 2 (num estado inicial comprimido) e a curva cinza o estado coerente. As curvas são construídas com  $\beta = 0,01$ ,  $\sigma = 1$ ,  $r_1 = 0,35$ ,  $r_2 = 1,10$ ,  $\vartheta_1 = 1,7$ ,  $\vartheta_2 = 0,9$  e  $\nu = 2$ . . . 48
- 4.3 As curvas 1, 2 e 3 fornecem os valores de um número real  $l$  em termos de  $u = \vartheta_2 > 1/2$  com pureza  $\mathcal{P}_2 = (2\vartheta_2)^{-1}$ , respectivamente para  $\beta = 0,01$ ,  $\beta = 0,02$  e  $\beta = 0,04$ . Quanto menor é o valor de  $\beta$  maior é o número de vezes que o primeiro modo permanece comprimido. Todas as curvas são construídas com  $r_2 = 1,10$  e  $\nu = 2$ . . . . . 49
- 4.4 O comportamento no tempo ( $\tau = z\pi$ ) da compressão do primeiro modo é considerado para diferentes valores de  $\beta$ . As curvas azul (1), verde (2) e preta (3), referem-se respectivamente a  $\beta = 0$ ,  $\beta = 0,01$  e  $\beta = 0,02$  com  $\vartheta_1 = 1,7$ ,  $\vartheta_2 = 0,9$ ,  $r_1 = 0,35$ ,  $r_2 = 1,1$ ,  $\nu = 2$  e  $\sigma = 1$ . . . . . 50

4.5	Todas as curvas fornecem o valor do número real $l$ em termos de $r = r_2 > 0$ para $\beta = 0,02$ . Nas curvas 1 e 2 o número médio de fótons é $\nu = 1$ , com $\vartheta_2 = 0,5$ e $\vartheta_2 = 0,9$ , respectivamente. Nas curvas similares 3 e 4 tem-se $\nu = 2$ . Em ambos os casos, para grandes valores de $r_2$ o número $l$ depende somente de $\nu$ e $\beta$ . . . . .	51
4.6	Comportamento de $l$ para diferentes valores de $\nu$ . Com a queda da temperatura (número de fótons $\nu$ ) do reservatório aumenta o número de vezes $l$ que o primeiro modo torna-se comprimido ( $l \rightarrow \infty$ quando $\nu \rightarrow 0$ ). Foi considerado $\beta = 0,02$ e $r_2 = 1,10$ . . . . .	52
4.7	Comportamento de $l$ para diferentes valores de $\beta$ . Com a queda da intensidade da razão de acoplamento entre os modos e dos modos com o reservatório $\beta$ aumenta o número de vezes $l$ que o primeiro modo torna-se comprimido ( $l \rightarrow \infty$ quando $\beta \rightarrow 0$ ). Foi considerado $\nu = 0,1$ e $\vartheta_2 = 0,5$ . . . . .	53
4.8	O comportamento no tempo ( $\tau = z\pi$ ) da compressão do primeiro modo é considerada para diferentes valores de $\beta$ . Para o estado inicial considera-se $\vartheta_1 = 1,30$ , $\vartheta_2 = 0,68$ , $r_1 = 0,13$ , $r_2 = 0,50$ tal que $\mathcal{G}_1 \simeq 2,00$ e $\mathcal{G}_2 \simeq 0,50$ com $\nu = 2$ . A linha escura corresponde a $\sigma = 1$ e a linha clara a $\sigma = -1$ . .	54
4.9	O comportamento no tempo ( $\tau = z\pi$ ) da compressão do primeiro modo é considerada para diferentes valores de $\nu$ . Para o estado inicial considera-se $\vartheta_1 = 1,30$ , $\vartheta_2 = 0,68$ , $r_1 = 0,13$ , $r_2 = 0,50$ tal que $\mathcal{G}_1 \simeq 2,00$ e $\mathcal{G}_2 \simeq 0,50$ com $\beta = 0,05$ . A linha escura corresponde a $\sigma = 1$ e a linha clara a $\sigma = -1$ . .	55
4.10	$\beta(\nu, \mathcal{G}_2)$ como uma função do número médio de excitação e compressão inicial do segundo modo para o valor fixo de $l = 1$ . . . . .	56
4.11	Comportamento da transferência de pureza no caso de estados iniciais com $\mathcal{P}_1(0, \beta) = 0,29$ e $\mathcal{P}_2(0, \beta) = 0,56$ , na ausência do reservatório ( $\beta = 0$ ). A curva azul representa a pureza do modo 1 e a curva vermelha a do modo 2. As curvas são construídas com $\sigma = 1$ e $\nu = 2$ . . . . .	57
4.12	Comportamento da pureza de cada modo no caso de estados iniciais com $\mathcal{P}_1(0, \beta) = 0,29$ e $\mathcal{P}_2(0, \beta) = 0,56$ , na presença do reservatório ( $\beta \neq 0$ ). A curva preta representa a pureza do modo 1 e a curva rosa a do modo 2. As curvas são construídas com $\beta = 0,02$ , $\sigma = 1$ e $\nu = 2$ . . . . .	58

- 
- 4.13 O comportamento no tempo ( $\tau = z\pi$ ) da medida de correlação quântica é considerado para diferentes valores de  $\beta$ . As curvas azul (1), verde (2) e preta (3) referem-se respectivamente a  $\beta = 0$ ,  $\beta = 0,01$  e  $\beta = 0,1$  com  $\vartheta_1 = 1,7$ ,  $\vartheta_2 = 0,9$ ,  $r_1 = 0,35$ ,  $r_2 = 1,1$ ,  $\nu = 2$  e  $\sigma = 1$ . A reta em 1 indica o limite superior que não pode ser atingido. . . . . 63
- 4.14 O comportamento no tempo ( $\tau = z\pi$ ) da separabilidade é considerado para diferentes valores de  $\beta$  com  $\vartheta_1 = 1,7$ ,  $\vartheta_2 = 0,9$ ,  $r_1 = 0,35$ ,  $r_2 = 1,1$  e  $\sigma = 1$  (*Note que  $\chi_s = 5,9 > 0$  com  $\beta = 0$* ). A curva azul (a) corresponde a ausência de reservatório,  $\beta = 0$  e a curva verde (b) quando  $\beta = 0,01$  (os modos estão acoplados ao reservatório) mas com o número médio de fótons igual a zero  $\nu = 0$ . As curvas rosa (c) e laranja (d) correspondem respectivamente a  $\nu = 1$  e  $\nu = 2$  com  $\beta = 0,01$ . . . . . 66
- 4.15 O comportamento no tempo ( $\tau = z\pi$ ) da separabilidade é considerado para diferentes valores de  $\beta$  com  $\vartheta_1 = 1,7$ ,  $\vartheta_2 = 0,9$ ,  $r_1 = 0,35$ ,  $r_2 = 1,1$ ,  $\sigma = 1$  e  $\nu = 2$ . A curva azul (a) corresponde a ausência de reservatório,  $\beta = 0$ , a curva rosa (b) quando  $\beta = 0,01$  e a curva laranja (c) quando  $\beta = 0,02$  ( $\beta \neq 0$  os modos estão acoplados ao reservatório). A curva verde (d) corresponde a ausência do reservatório  $\beta = 0$  mas com  $r_2 = 0,55$ . . . . . 67
- 4.16 A escala do coeficiente de separabilidade  $F = \tanh(\mathcal{Z})$  versus a escala de tempo  $z = \tau/\pi$  para  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 1$ ,  $\beta = 0,05$  e diferentes valores de  $\nu$  e  $y = \sinh^2(r)$ . Índices pares e ímpares mas curvas correspondem a  $y = 1$  e  $y = 10$ , respectivamente. Os valores de  $\nu = 0,1,000,2,585$  correspondem aos pares de curvas (1;2), (3;4) e (5;6), respectivamente. . . . . 72
- 4.17 Linhas escuras referem-se a separabilidade enquanto que linhas claras a compressão do primeiro modo. Os índices ímpares referem-se a  $\chi_s = 2,05$  e os pares a  $\chi_s = -0,17$ . . . . . 73

# Capítulo 1

## Introdução

O computador é um objeto físico e o processo computacional, seja ele efetuado por qualquer *hardware*, é um processo que obedece às leis da Física. Sendo a Mecânica Quântica uma teoria física fundamental, torna-se natural pensar em uma máquina que realize o processamento de informações num nível tal que a superposição e o emaranhamento de estados quânticos possam ser utilizados como um novo tipo de recurso operacional. Foi desta idéia, formalizada por Deutsch num artigo em 1985 [1], que surgiu uma nova área de pesquisa que reúne a Matemática, a Física, e as Ciências da Computação, conhecida por Computação Quântica.

A Informação Quântica surgiu como um campo distinto de pesquisas somente a partir da segunda metade da década de 1990. Contudo, ela teve origem muito antes graças a contribuições dos precursores da Física Quântica, e especialmente em dois trabalhos fundamentais publicados em 1935: o de Schrödinger [2], no qual ele discute a possibilidade da existência, no mundo clássico, de superposições coerentes<sup>1</sup> de estados classicamente distintos (discussão associada ao paradoxo chamado de “gato de Schrödinger”, o qual trata da possibilidade de ser encontrada uma superposição dos estados vivo e morto); e o de Einstein, Podolski e Rosen [3], no qual os autores discutem diversos aspectos relacionados com estados emaranhados ou entrelaçados<sup>2</sup>, em que sistemas separados espacialmente guardam correlações quânticas, dando origem a efeitos não locais.

---

<sup>1</sup>Os estados puros (superposições coerentes) possuem um vetor de estado  $|\psi\rangle$ , que permite saber em que estado o sistema se encontra. Quando não é possível saber em que estado o sistema se encontra, diz-se que ele é uma mistura estatística (superposição incoerente), pois existe probabilidade  $p_i$  do sistema estar no estado  $|\psi_i\rangle$  de uma base ortonormal  $\{|\psi_i\rangle\}$ .

<sup>2</sup>do inglês entangled states.

---

Os computadores quânticos baseiam-se em estados emaranhados de um grande número de subsistemas [4–7]. Um obstáculo ainda existente para a realização prática desses dispositivos é o fenômeno da decoerência, proveniente da interação destes sistemas com o ambiente, o que resulta em uma rápida destruição das características quânticas, impedindo a realização da computação. A decoerência implica a degradação dos efeitos de interferência quântica, manifestando-se na existência de superposição quântica, devido à interação com o ambiente [8]. Este é exatamente o mesmo fenômeno que impede a existência do “gato de Schrödinger”, pois, superposições coerentes de estados classicamente distintos são rapidamente destruídas, de modo que as características quânticas da superposição desaparecem, dando lugar a uma mistura estatística clássica [9].

A teoria de Informação Quântica é muito importante para a compreensão dos processos quânticos envolvidos no processamento, transmissão e armazenamento da informação quântica. A implementação de processos, bem como a transmissão e controle da informação quântica em sistemas físicos realistas devem considerar os efeitos do acoplamento dos sistemas de interesse com o meio ambiente. Supondo a existência de um reservatório térmico, representando o ambiente, que pode interagir com o sistema quântico, como a transferência ou o armazenamento da informação podem ser afetados pela existência desse reservatório térmico?

Um exemplo físico usual de sistemas quânticos de variáveis contínuas é formado por microcavidades acopladas tendo seu campo eletromagnético modelado por modos bosônicos [10]. Tem sido estudado o problema da troca de informação quântica ideal (sem considerar o efeito do ambiente), medidas de correlação quântica e propriedades quânticas (compressão, pureza) no modelo de modos acoplados, descritos por operadores Hamiltonianos Hermitianos<sup>3</sup> quadráticos [10–13].

Contudo, na literatura também é avaliada a importância em considerar os efeitos do ambiente sempre que o objetivo trata-se de entender fenômenos quânticos mais realistas e precisos envolvidos nas interações mecânicas dos modos acoplados. O efeito do ambiente, modelado por reservatórios térmicos, para uma ampla classe de propriedades quânticas de um sistema quântico bosônico é um problema bastante conhecido [14–22].

Há trabalhos interessantes no estudo de modos acoplados na presença do ambiente. Na

---

<sup>3</sup>Um operador  $A$  é chamado Hermitiano ou auto-adjunto se ele é igual ao seu operador adjunto, ou seja,  $A = A^\dagger$ .



---

referência [23] são consideradas as propriedades da dinâmica quântica de duas cavidades acopladas onde há um acoplamento com um reservatório. Um esquema geral para o controle da decoerência foi discutido num modelo de dois osciladores dissipativos acoplados [24,25]. O comportamento da compressão num sistema de um oscilador acoplado forçado foi considerado na referência [26] onde, no regime perturbativo, mostrou que o grau de compressão dos modos independe da taxa de amortecimento do oscilador harmônico. Na referência [27] é apresentado como a interação com o ambiente influencia o comportamento dinâmico do emaranhamento para dois modos comprimidos no estado de vácuo acoplados a um reservatório térmico.

Trabalhar os métodos analíticos para o tratamento de sistemas quânticos com dissipação, analisar a relação entre emaranhamento e troca de propriedades quânticas, bem como os efeitos do ambiente nas propriedades quânticas gerais de sistemas acoplados, em se considerando estados iniciais Gaussianos<sup>4</sup>, são os objetivos a serem alcançados neste trabalho.

Para atingir tais objetivos organizou-se esta dissertação da seguinte forma: no capítulo 2 são revisados alguns aspectos fundamentais dos efeitos do ambiente nas propriedades de informação quântica em um sistema composto por um único modo eletromagnético.

No capítulo 3 discute-se o sistema composto por duas cavidades acopladas modeladas por osciladores harmônicos ou modos eletromagnéticos interagindo com o ambiente representado por um reservatório térmico. Aplica-se um método geral para Hamiltonianos quadráticos [28] a fim de determinar a evolução da matriz densidade do sistema linear por meio do propagador da Função de Wigner [29].

No capítulo 4 determina-se a evolução temporal da matriz não simetrizada dos momentos de segunda ordem para o caso de estados Gaussianos gerais. São apresentadas as propriedades de estados que são utilizadas para examinar o processo da transmissão de informação: compressão e pureza. Foi analisado o efeito dos parâmetros do reservatório no processo da troca de informações entre os dois modos acoplados<sup>5</sup>, bem como nas propriedades da correlação quântica por meio de critério apropriado. O problema da troca de informação quântica e das medidas de correlação quântica é estudado neste capítulo.

---

<sup>4</sup>Em estados Gaussianos inicialmente não há correlação entre os modos e dos modos com o reservatório.

<sup>5</sup>Microcavidades acopladas, com seu campo eletromagnético quantizado, formam um exemplo usual de sistema de duas partes com variáveis contínuas quânticas [30].

---

No capítulo 5 são apresentadas as conclusões sobre o trabalho e apresentadas as perspectivas futuras criadas a partir deste estudo.

# Capítulo 2

## Sistemas dissipativos em Mecânica

### Quântica

Sistemas dissipativos são aqueles em que ocorrem perdas de energia, massa ou até mesmo informação no decorrer do tempo devido à interação com o meio envolvente do sistema considerado. Estas perdas representam um importante papel na física e em geral elas não podem ser evitadas, apenas parcialmente controladas, explicando assim, a importância em tratar sistemas dissipativos. Neste capítulo será apresentada uma breve revisão da teoria quântica para um sistema dissipativo particular que consiste de um único oscilador harmônico acoplado a um reservatório térmico, composto por um número infinito de osciladores harmônicos ou modos do campo eletromagnético quantizado. Com o operador densidade, são eliminadas as variáveis do reservatório e é obtida uma equação diferencial para aquele operador densidade reduzido na representação de Schrödinger para o subsistema de interesse, o modo da cavidade.

### 2.1 O sistema acoplado ao reservatório

O propósito principal, nesta seção, é revisar algumas propriedades do oscilador harmônico quântico de frequência bem definida e a evolução temporal de um sistema quântico dissipativo. A partir da equação de Liouville, tomando o traço sob as variáveis do reservatório, é determinada uma equação diferencial de evolução temporal para o operador densidade reduzido, também chamada de equação mestra.

Em essência o sistema a ser abordado consiste de uma cavidade quântica, modelada por

um modo bosônico, em contato com o ambiente, representado por um reservatório térmico, modelado por infinitos modos bosônicos.

A cavidade é modelada por um oscilador harmônico descrito pelo Hamiltoniano definido positivo<sup>1</sup>

$$\hat{H}_A = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}, \quad (2.1)$$

onde  $\omega$  é a frequência do oscilador,  $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{a}$  são, respectivamente, os operadores de criação e aniquilação de fótons, satisfazendo a relação de comutação

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (2.2)$$

O produto  $\hat{a}^\dagger\hat{a}$  é chamado de operador número e o espectro desse operador  $N = \hat{a}^\dagger\hat{a}$  consiste em inteiros não negativos  $n = 0, 1, 2, \dots$ . O espectro do Hamiltoniano é dado por

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (2.3)$$

e os autovetores normalizados correspondentes são designados por

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

determinados a partir do estado de vácuo  $|0\rangle$  tal que  $\hat{a}|0\rangle = 0$ . Os estados (2.4) são ortogonais [31] e satisfazem às propriedades

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (2.5)$$

as quais permitem calcular elementos de matriz para qualquer variável dinâmica. Além dos estados de Fock Eq. (2.4), são de relevante importância neste estudo, os estados quânticos mais gerais como o coerente, o comprimido e o térmico [32].

O ambiente representado pelo reservatório térmico é modelado por um conjunto de infinitos osciladores harmônicos, descrito pelo Hamiltoniano

$$\hat{H}_B = \sum_{j=1}^{\infty} \hbar\omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j, \quad (2.6)$$

sendo  $\hat{b}_j^\dagger$  e  $\hat{b}_j$  respectivamente, os operadores de criação e aniquilação relativos ao  $j$ -ésimo modo do reservatório, que obedecem as relações de comutação

$$[\hat{b}_j, \hat{b}_k^\dagger] = \delta_{jk}, \quad j, k = 1 \dots \infty, \quad (2.7)$$

---

<sup>1</sup>Um operador definido positivo é representado por uma matriz real e simétrica, isto é, seus autovalores são números reais, positivos e nenhum deles é nulo

onde a notação  $\delta_{jk}$  é chamada Delta de Kronecker definida por

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (2.8)$$

O acoplamento entre o sistema e o reservatório é da forma geral  $XX_j$ , que contém termos do tipo  $\hat{a}\hat{b}_j^\dagger$ ,  $\hat{a}^\dagger\hat{b}_j$ ,  $\hat{a}^\dagger\hat{b}_j^\dagger$  e  $\hat{a}\hat{b}_j$ . Neste trabalho é utilizada a aproximação de onda-girante. Com esta aproximação restam somente os termos do tipo  $\hat{a}^\dagger\hat{b}_j$  e  $\hat{a}\hat{b}_j^\dagger$  [33]. É possível justificar a utilização de tal aproximação considerando que se não houvesse interação entre o sistema e o reservatório, os operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{b}_j$  evoluiriam no tempo, respectivamente, como  $\hat{a}(t) = \hat{a}e^{-i\omega_0 t}$  e  $\hat{b}_j(t) = \hat{b}_j e^{-i\omega_0 t}$ . Supondo que exista interação, mas que a evolução livre dos operadores não seja perturbada fortemente, os termos  $\hat{a}^\dagger\hat{b}_j$  e  $\hat{a}\hat{b}_j^\dagger$  evoluem aproximadamente como  $e^{\pm i(\omega_j - \omega_0)t}$ , que é aproximadamente igual a 1 para os modos que conservam energia ( $\omega_j \approx \omega_0$ ), enquanto que os termos  $\hat{a}^\dagger\hat{b}_j^\dagger$  e  $\hat{a}\hat{b}_j$  evoluiriam aproximadamente como  $e^{\pm i(\omega_j + \omega_0)t}$ , e portanto variariam muito rapidamente. Para tempos longos<sup>2</sup> comparados a  $\omega_0^{-1}$ , estes termos apresentariam um efeito médio aproximadamente nulo, sendo possível desprezá-los.

O sistema completo, cavidade em interação com o ambiente, é descrito pelo Hamiltoniano completo na descrição de interação, escrito como a soma de duas partes que não dependem explicitamente do tempo

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1, \quad (2.9)$$

onde  $\hat{H}_0 = \hat{H}_A + \hat{H}_B$  e  $\hat{H}_1$  é o Hamiltoniano de interação entre o sistema e o reservatório, escrito na forma

$$\hat{H}_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \hbar g_j (\hat{a}^\dagger \hat{b}_j + \hat{a} \hat{b}_j^\dagger). \quad (2.10)$$

Assim, o Hamiltoniano completo assume a forma explícita

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \sum_{j=1}^{\infty} \hbar\omega_j\hat{b}_j^\dagger\hat{b}_j + \sum_{j=1}^{\infty} \hbar g_j (\hat{a}^\dagger\hat{b}_j + \hat{a}\hat{b}_j^\dagger), \quad (2.11)$$

onde  $\omega$  é a frequência do oscilador do modo da cavidade,  $\omega_j$  a frequência do  $j$ -ésimo modo do reservatório e os  $g_j$  são parâmetros reais, constantes de acoplamento da interação entre sistema e reservatório [27]. O fator  $1/2$  em  $\hat{H}_A$  dado pela Eq. (2.1) pode ser suprimido por não ser relevante para o cálculo da evolução temporal do operador densidade.

<sup>2</sup>por exemplo, o tempo de decaimento  $\gamma^{-1}$  do modo na cavidade, onde  $\gamma$  é a constante de relaxamento

Uma questão natural para um sistema de muitas partes é definir o estado de uma única parte. Ou seja, descrever o resultado de todos os possíveis testes realizados sobre uma das partes. Neste caso consideram-se sistemas de duas partes, sem perder a generalidade, pois, é sempre possível considerar a parte de interesse como uma parte e todas as demais como a outra. Assim, denotando as variáveis do sistema por  $A$  e as do reservatório por  $B$ , todas as propriedades estatísticas do sistema-reservatório podem ser obtidas do operador densidade do sistema completo,  $\hat{\rho}_{AB}(t)$ , e as propriedades de cada parte são determinadas por meio do operador densidade reduzido obtido pela operação de traço parcial sobre a outra parte, isto é,

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B(\hat{\rho}_{AB}) = \sum_B \langle B | \hat{\rho}_{AB} | B \rangle, \quad (2.12)$$

$$\hat{\rho}_B = \text{Tr}_A(\hat{\rho}_{AB}) = \sum_A \langle A | \hat{\rho}_{AB} | A \rangle. \quad (2.13)$$

O operador  $\hat{\rho}_A$  contém toda a informação de  $A$ , e nenhuma informação sobre  $B$ . Da mesma forma que o operador  $\hat{\rho}_B$  contém toda a informação de  $B$ , e nenhuma informação sobre  $A$ .

O operador densidade satisfaz a uma equação diferencial, denominada equação de Liouville [34], que para o sistema completo é escrita na forma

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}_{AB}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}_{AB}] = \hat{H}\hat{\rho}_{AB} - \hat{\rho}_{AB}\hat{H}. \quad (2.14)$$

Dentre as descrições de Heisenberg, de Schrödinger e de interação, em geral, é conveniente trabalhar na de interação. Nessa descrição é possível introduzir um operador de evolução unitário associado somente a parte  $\hat{H}_0$  do Hamiltoniano [31]:

$$\hat{U}_0(t, t_0) \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0(t-t_0)}. \quad (2.15)$$

Assim, a dependência temporal do Hamiltoniano  $\hat{H}_{1I}(t)$  provém dos operadores  $\hat{U}_0^\dagger(t, t_0)$  e  $\hat{U}_0(t, t_0)$ , isto é<sup>3</sup>,

$$\hat{H}_{1I}(t) = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0)\hat{H}_1\hat{U}_0(t, t_0). \quad (2.16)$$

Na descrição de interação os operadores  $A_I(t)$  satisfazem a equação do movimento

$$i\hbar \frac{dA_I}{dt} = [A_I, \hat{H}_{0I}] + i\hbar \frac{\partial A_I}{\partial t}, \quad (2.17)$$

---

<sup>3</sup>foi utilizada a notação  $\hat{H}_{kI}(t)$ ,  $k = 0, 1$  para denotar o Hamiltoniano  $\hat{H}_k$  na descrição de interação.

onde  $\hat{H}_{0I}$  diz respeito apenas ao operador Hamiltoniano dos modos e do reservatório

$$\hat{H}_{0I}(t) = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{H}_0 \hat{U}_0(t, t_0). \quad (2.18)$$

Em correspondência, o vetor de estado  $|\Psi_I(t)\rangle$  satisfaz a equação

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi_I(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}_{1I} |\Psi_I(t)\rangle, \quad (2.19)$$

onde  $\hat{H}_{1I}$  é dado na Eq. (2.16) [35].

Conforme a transição realizada no apêndice (A.1), a equação de Liouville na descrição de interação é escrita na forma

$$\frac{d\hat{\sigma}_{AB}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{1I}, \hat{\sigma}_{AB}(t)] \quad (2.20)$$

onde  $\hat{\sigma}_{AB}$  é o operador densidade na descrição de interação e  $\hat{H}_{1I}$  é a parte do Hamiltoniano responsável pela interação entre o sistema e o reservatório, conforme apêndice (A.2), escrito na forma:

$$\hat{H}_{1I} = \hbar[G(t)\hat{a}^\dagger + G^\dagger(t)\hat{a}], \quad (2.21)$$

onde o tempo  $t$  é um parâmetro real e  $G(t)$  um operador, que atua apenas no espaço de estados do reservatório, dado por

$$G(t) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} g_j \hat{b}_j \exp[i(\omega - \omega_j)t]. \quad (2.22)$$

Integrando a equação de Liouville, a fim de obter o operador densidade, tem-se

$$\hat{\sigma}_{AB}(t) = \hat{\sigma}_{AB}(0) + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t [\hat{H}_{1I}(\tau), \hat{\sigma}_{AB}(\tau)] d\tau, \quad (2.23)$$

e, substituindo esse resultado de  $\hat{\sigma}_{AB}(t)$  no comutador do lado direito da equação (2.20) obtém-se a seguinte equação diferencial para o operador densidade:

$$\frac{d\hat{\sigma}_{AB}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_{1I}, \hat{\sigma}_{AB}(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t [\hat{H}_{1I}(t), [\hat{H}_{1I}(\tau), \hat{\sigma}_{AB}(\tau)]] d\tau. \quad (2.24)$$

Esta equação diferencial é exata, trata-se da equação (2.14) escrita em uma forma conveniente onde é possível identificar aproximações razoáveis. Assumindo que não há correlação entre o sistema e o reservatório no instante inicial  $t = 0$ , tem-se que  $\hat{\rho}_{AB}(0) = \hat{\sigma}_{AB}(0)$ , fatorado como

$$\hat{\sigma}_{AB}(0) = \hat{\sigma}_A(0) \otimes \hat{\sigma}_B(0), \quad (2.25)$$

onde  $\hat{\sigma}_A(0)$  e  $\hat{\sigma}_B(0)$  são os operadores densidade reduzidos no instante inicial, dados por [36]

$$\hat{\sigma}_A(0) = |s\rangle\langle s|, \quad (2.26)$$

$$\hat{\sigma}_B(0) = \frac{\prod_j \exp(-\hbar\omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j / k_B T)}{\text{Tr}_B \prod_j \exp(-\hbar\omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j / k_B T)}, \quad (2.27)$$

sendo  $k_B$  a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura do reservatório.

Com o intuito de analisar apenas as propriedades físicas do sistema, calcula-se o traço sobre as variáveis do reservatório, obtendo-se então

$$\frac{d\hat{\sigma}_A}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \text{Tr}_B[\hat{H}_{1I}(t), [\hat{H}_{1I}(\tau), \hat{\sigma}_{AB}(\tau)]] d\tau, \quad (2.28)$$

onde, para simplificar, foi eliminado o termo  $\frac{1}{i\hbar}[\hat{H}_{1I}, \hat{\sigma}_{AB}(0)]$ , assumindo que

$$\text{Tr}_B[\hat{H}_{1I}(t), \hat{\sigma}_{AB}(0)] = 0. \quad (2.29)$$

Isto é garantido se os operadores do reservatório acoplados ao sistema assumem valor zero no estado do operador densidade do reservatório no instante inicial ( $\hat{\sigma}_B(0)$ ), uma condição que sempre pode ser assumida incluindo  $\text{Tr}_B(\hat{H}_1 \otimes \hat{\sigma}_B(0))$  no Hamiltoniano do sistema [36].

O reservatório térmico é suficientemente grande de modo a ser inalterado por seu acoplamento ao sistema. Além disso, considerando que a dissipação destrói a memória do passado no sistema, e, que sistemas Markovianos dependem somente do estado presente [36], torna-se possível usar a aproximação Markoviana

$$\hat{\sigma}_{AB}(\tau) = \hat{\sigma}_A(t) \otimes \hat{\sigma}_B(0) + \mathcal{O}(2), \quad (2.30)$$

na equação (2.28). Com a aproximação Markoviana é possível escrever,

$$\begin{aligned} [\hat{H}_{1I}(t), \hat{\sigma}_A(\tau) \otimes \hat{\sigma}_B(0)] &= [\hbar(\hat{a}^\dagger \otimes G(t) + \hat{a} \otimes G^\dagger(t)), \hat{\sigma}_A(t) \otimes \hat{\sigma}_B(0)] \\ &= \hbar[(\hat{a}^\dagger \otimes G(t)), \hat{\sigma}_A(t) \otimes \hat{\sigma}_B(0)] \\ &+ \hbar[(\hat{a} \otimes G^\dagger(t)), \hat{\sigma}_A(t) \otimes \hat{\sigma}_B(0)], \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde  $G(t)$  depende linearmente de  $\hat{b}_j$  e  $\hat{b}_j^\dagger$  e

$$\text{Tr}_B\{\hat{b}_j \exp(-\hbar\omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j / K_B T)\} = 0. \quad (2.32)$$

A fim de escrever a equação (2.28) na forma explícita, foi calculado o comutador duplo no apêndice B obtendo a equação mestra do sistema na descrição de Interação [37]:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}_A}{dt} &= -i\Delta\omega[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\sigma}_A(t)] \\ &- \frac{\tilde{\gamma}}{2}(1 + \langle n \rangle)[\hat{\sigma}_A(t)\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}\hat{\sigma}_A(t) - 2\hat{a}\hat{\sigma}_A(t)\hat{a}^\dagger] \\ &- \frac{\tilde{\gamma}}{2}\langle n \rangle[\hat{\sigma}_A(t)\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_A(t) - 2\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_A(t)\hat{a}], \end{aligned} \quad (2.33)$$



onde  $\Delta\omega$  é o termo que muda ligeiramente a frequência do modo,  $\langle n \rangle$  o número médio de fótons da média térmica e  $\tilde{\gamma}$  é o parâmetro que descreve o acoplamento entre o sistema e o reservatório. Foi assumido [33]  $\tilde{\gamma} \equiv 2(A - B) = 2\pi g(\omega)^2 D(\omega)$ , com

$$A = \pi g(\omega)^2 D(\omega)(1 + \langle n(\omega) \rangle), \quad (2.34)$$

$$B = \pi g(\omega)^2 D(\omega) \langle n(\omega) \rangle, \quad (2.35)$$

$$\Delta\omega = P \int_0^\infty \frac{g(\omega_j)^2 D(\omega_j)}{\omega - \omega_j} d\omega_j, \quad (2.36)$$

sendo  $D(\omega)$  a função densidade de estados a qual converte somatória em integração,  $\sum_j \rightarrow \int D(\omega_j) d\omega_j$ , tal que  $D(\omega_j) d\omega_j$  fornece o número de osciladores com frequências no intervalo de  $\omega_j$  a  $\omega_j + d\omega_j$  e

$$\int_0^\infty d\eta \exp \pm i(\omega - \omega_j)\eta = \pi \delta(\omega - \omega_j) \pm iP\left(\frac{1}{\omega - \omega_j}\right), \quad \eta = t - \tau, \quad (2.37)$$

onde  $P$  indica o valor principal de Cauchy.

A equação mestra traz toda a informação estatística do sistema de interesse e ainda tem duas importantes propriedades: (a) é Hermitiana, isto é,  $\hat{\sigma}_A^\dagger(t) = \hat{\sigma}_A(t)$ ; (b) o operador densidade reduzido é normalizado, ou seja,  $\text{Tr}_A \hat{\sigma}_A(t) = 1$  para todos os tempos  $t$ .

## 2.2 Transição para a descrição de Schrödinger

É sempre possível escrever a equação mestra do sistema (2.33) na descrição de Schrödinger, fazendo a transição conforme será apresentado a seguir.

Seja o operador densidade do sistema, na descrição de Schrödinger escrito na forma,

$$\hat{\rho}_1(t) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_A t\right\} \hat{\sigma}_A(t) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_A t\right\}, \quad (2.38)$$

e realizando a derivada de (2.38) em relação ao tempo obtém-se

$$\frac{d\hat{\rho}_1(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \hat{H}_A \hat{\rho}_1(t) + \frac{i}{\hbar} \hat{\rho}_1(t) \hat{H}_A + \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_A t\right\} \frac{d\hat{\sigma}_A(t)}{dt} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_A t\right\}. \quad (2.39)$$

Substituindo na Eq. (2.39) a equação para o operador  $\hat{\sigma}_1(t)$  dada na Eq. (2.33), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_1(t)}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} \hat{H}_A \hat{\rho}_1(t) + \frac{i}{\hbar} \hat{\rho}_1(t) \hat{H}_A - \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_A t\right\} i\Delta\omega [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\sigma}_A(t)] \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_A t\right\} \\ &- \frac{\tilde{\gamma}}{2} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_A t\right\} (1 + \langle n \rangle) [\hat{\sigma}_A(t) \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_A(t) - 2\hat{a} \hat{\sigma}_A(t) \hat{a}^\dagger] \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_A t\right\} \\ &- \frac{\tilde{\gamma}}{2} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_A t\right\} \langle n \rangle [\hat{\sigma}_A(t) \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_A(t) - 2\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_A(t) \hat{a}] \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_A t\right\}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

A equação (2.40) pode assumir a forma explícita aplicando a propriedade distributiva à direita e à esquerda, em relação aos termos exponenciais  $\exp\{\pm \frac{i}{\hbar} \hat{H}_1 t\}$ . Neste caso, usando o índice  $S$  para indicar que o operador está na descrição de Schrödinger, da mesma forma que o índice  $I$  indica a descrição de interação, e sendo a equação de transição dada por

$$A_S = \exp\{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_A t\} A_I \exp\{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_A t\}, \quad (2.41)$$

e ainda, tendo que  $\exp\{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_A t\} \exp\{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_A t\} = \exp\{-\frac{i}{\hbar} (\hat{H}_A - \hat{H}_A) t\} = 1$  torna-se possível escrever a Eq. (2.40) na forma

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_1}{dt} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_A, \hat{\rho}_1] &= -i\Delta\omega [\hat{a}_S^\dagger \hat{a}_S, \hat{\rho}_1(t)] \\ &- \frac{\tilde{\gamma}}{2} (1 + \langle n \rangle) [\hat{\rho}_1(t) \hat{a}_S^\dagger \hat{a}_S + \hat{a}_S^\dagger \hat{a}_S \hat{\rho}_1(t) - 2\hat{a}_S \hat{\rho}_1(t) \hat{a}_S^\dagger] \\ &- \frac{\tilde{\gamma}}{2} \langle n \rangle [\hat{\rho}_1(t) \hat{a}_S \hat{a}_S^\dagger + \hat{a}_S \hat{a}_S^\dagger \hat{\rho}_1(t) - 2\hat{a}_S^\dagger \hat{\rho}_1(t) \hat{a}_S]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Na Eq. (2.42) tem-se a equação mestra do sistema composto por um único modo acoplado a um reservatório térmico na descrição de Schrödinger. Tanto os resultados da Eq. (2.42) quanto os da Eq. (2.33) conduzem às mesmas conclusões estatísticas das grandezas físicas a respeito das propriedades dinâmicas do sistema que descrevem. O valor médio de um observável na descrição de interação é escrito na forma,

$$\langle A_I \rangle = \text{Tr}(A_I \hat{\sigma}_A(t)), \quad (2.43)$$

e na descrição de Schrödinger, a partir das equações (2.38) e (2.41), tem-se

$$\begin{aligned} \langle A_S \rangle &= \text{Tr}(A_S \hat{\rho}_1(t)) \\ &= \text{Tr}(\exp\{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_A t\} A_I \exp\{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_A t\} \exp\{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_A t\} \hat{\sigma}_A(t) \exp\{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_A t\}) \\ &= \text{Tr}(\exp\{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_A t\} A_I \hat{\sigma}_A(t) \exp\{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_A t\}). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Pela propriedade cíclica do traço  $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA)$  tem-se para a equação (2.44),

$$\begin{aligned} \langle A_S \rangle &= \text{Tr}(\exp\{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_A t\} \exp\{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_A t\} A_I \hat{\sigma}_A(t)) \\ &= \text{Tr}(A_I \hat{\sigma}_A(t)). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Portanto, da Eq. (2.43) e Eq. (2.45) tem-se finalmente que

$$\langle A_I \rangle = \langle A_S \rangle, \quad (2.46)$$

ou seja, para um observável qualquer  $A$ , seu valor médio é o mesmo nas descrições de interação e de Schrödinger.

## 2.3 Valor esperado de quantidades físicas

O valor esperado é um dos conceitos mais relevantes da teoria de probabilidade e tem um importante papel na física. Neste trabalho ele será utilizado para determinar os elementos da matriz de covariâncias, a partir dos quais torna-se possível determinar as medidas de correlação quântica. Por exemplo, no sentido ilustrativo, o cálculo do valor esperado  $\langle \hat{a}^\dagger \rangle(t)$  é realizado a partir da operação de traço parcial

$$\langle \hat{a}^\dagger \rangle(t) = \text{Tr}_A(\hat{\sigma}_A(t)\hat{a}_I^\dagger(t)), \quad (2.47)$$

sendo  $\hat{a}_I^\dagger(t)$  o operador de criação na descrição de interação, dado por

$$\hat{a}_I^\dagger(t) = \exp(i\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}t)\hat{a}^\dagger\exp(-i\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}t) = \hat{a}^\dagger\exp(i\omega t). \quad (2.48)$$

Derivando a Eq. (2.47) em relação ao tempo, encontra-se

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \hat{a}^\dagger \rangle(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}[\text{Tr}_A(\sigma_A(t)\hat{a}^\dagger(t))\exp(i\omega t)] \\ &= \text{Tr}_A\left[\frac{\partial\sigma_A(t)}{\partial t}\hat{a}^\dagger\exp(i\omega t) + i\omega\sigma_A(t)\hat{a}^\dagger\exp(i\omega t)\right], \end{aligned} \quad (2.49)$$

e usando a forma da equação mestra dada no apêndice (B.14) torna-se possível escrever a equação diferencial como

$$\frac{d\langle \hat{a}^\dagger \rangle(t)}{dt} = i(\omega + \Delta\omega)\langle \hat{a}^\dagger \rangle(t) - (A - B)\langle \hat{a}^\dagger \rangle(t), \quad (2.50)$$

cujas soluções são dadas [36] na forma

$$\langle \hat{a}^\dagger \rangle(t) = \langle \hat{a}^\dagger \rangle(0)\exp[i(\omega + \Delta\omega)t]\exp\left(-\frac{\tilde{\gamma}}{2}t\right). \quad (2.51)$$

Usando o mesmo procedimento também é possível encontrar o valor esperado de um produto de operadores como por exemplo  $\langle \hat{a}^\dagger\hat{a} \rangle(t)$ , em que a equação diferencial bem como sua solução são dadas, respectivamente, por:

$$\frac{d\langle \hat{a}^\dagger\hat{a} \rangle(t)}{dt} = -\tilde{\gamma}(\langle \hat{a}^\dagger\hat{a} \rangle(t) - \langle n \rangle), \quad (2.52)$$

$$\langle \hat{a}^\dagger\hat{a} \rangle(t) = \langle \hat{a}^\dagger\hat{a} \rangle(0)\exp(-\tilde{\gamma}t) + \langle n \rangle[1 - \exp(-\tilde{\gamma}t)]. \quad (2.53)$$

A partir de  $\langle \hat{a} \rangle(t)$  e  $\langle \hat{a}^\dagger\hat{a} \rangle(t)$  determina-se todas as propriedades físicas para estados Gaussianos, os de interesse para o estudo que seguirá. Uma interessante propriedade é que  $\langle \hat{a}^\dagger\hat{a} \rangle(t) |_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \langle n \rangle$ , a qual tem a seguinte interpretação: Ao longo do tempo, o oscilador

em contato com o banho térmico adquire temperatura com o mesmo número médio de fótons que a média térmica.

A partir do valor esperado dos operadores de criação e aniquilação

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q - ip), \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q + ip), \quad (2.54)$$

onde  $q$  e  $p$  são as componentes de quadratura do campo eletromagnético dadas pelas relações inversas

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad p = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger), \quad (2.55)$$

é possível calcular a posição e o momento médio do oscilador, cujos resultados são respectivamente

$$\langle q \rangle(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}[\langle \hat{a} \rangle(t) + \langle \hat{a}^\dagger \rangle(t)], \quad \langle p \rangle(t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}[-\langle \hat{a} \rangle(t) + \langle \hat{a}^\dagger \rangle(t)], \quad (2.56)$$

que podem também ser escritos como

$$\begin{aligned} \langle q \rangle(t) &= \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \left[ \langle q \rangle(0) \cos \omega t + \frac{\langle p \rangle(0)}{\omega} \text{sen} \omega t \right], \\ \langle p \rangle(t) &= \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \left[ -\omega \langle q \rangle(0) \text{sen} \omega t + \langle p \rangle(0) \cos \omega t \right]. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Finalmente, assumindo um estado inicial de incerteza mínima, é possível mostrar que

$$\Delta p \Delta q = \frac{\hbar}{2} \{1 + 2\langle n \rangle [1 - \exp(-\gamma t)]\}. \quad (2.58)$$

O resultado dado na Eq. (2.58) mostra que para  $t \rightarrow \infty$ ,  $\Delta p \Delta q \rightarrow \frac{1}{2}\hbar[1 + 2\langle n \rangle]$  que representa o produto de incerteza para um fóton térmico com frequência  $\omega$ .

Realizado este estudo preliminar para o sistema de um modo em contato com o reservatório torna-se possível generalizar estes resultados para o caso de um sistema composto por dois modos acoplados em contato com o reservatório térmico, conforme será apresentado no capítulo seguinte, a fim de entender-se o efeito do reservatório na transferência de informação de um modo para outro.

# Capítulo 3

## Efeito da dissipação na Informação Quântica

Neste capítulo é realizada uma generalização do estudo feito no capítulo anterior, sendo agora considerado os efeitos do ambiente nas propriedades de informação quântica em dois modos bosônicos acoplados interagindo com dois reservatórios térmicos independentes a temperaturas distintas. Mostra-se como um método alternativo baseado no Hamiltoniano quadrático não Hermitiano pode ser aplicado para determinar a evolução temporal da função de Wigner.

### 3.1 Teoria quântica de sistemas dissipativos

Nesta seção o objetivo principal é entender o processo de transferência de informação em sistemas quânticos dissipativos. No contexto de sistemas dissipativos [38], as propriedades quânticas de duas microcavidades acopladas interagindo com o ambiente podem ser estudadas com o auxílio do operador Hamiltoniano escrito como [35]

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{k=1}^2 \hbar\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \sum_{j,k=1}^{\infty,2} \hbar\varpi_{k,j} \hat{b}_{k,j}^\dagger \hat{b}_{k,j} + \sum_{j,k=1}^{\infty,2} g_{k,j} (\hat{a}_k^\dagger \hat{b}_{k,j} + \hat{a}_k \hat{b}_{k,j}^\dagger) \\ & + \xi \hat{a}_1 \hat{a}_2 + \mu \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + \mu^* \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \xi^* \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger, \end{aligned} \quad (3.1)$$

sendo que de agora em diante será considerado um sistema de unidades onde  $\hbar = 1$ .

Este operador Hamiltoniano descreve dois modos quânticos distintos acoplados em contato com os seus respectivos reservatórios térmicos. Na Eq. (3.1) os operadores bosônicos  $\hat{a}_k$  e  $\hat{a}_k^\dagger$  são os operadores de aniquilação e criação relativos ao  $k$ -ésimo modo do campo

eletromagnético com a frequência  $\omega_k$  no interior da  $k$ -ésima cavidade. Os operadores  $\hat{b}_{k,j}$  e  $\hat{b}_{k,j}^\dagger$  são os operadores de aniquilação e criação relativos aos infinitos modos do  $k$ -ésimo reservatório com frequência  $\varpi_{k,j}$ . Para o propósito desse trabalho é suficiente considerar somente modos acoplados na aproximação de onda-girante ( $\xi = \xi^* = 0$ ) com a constante de acoplamento complexa  $\mu$  sendo o termo responsável pela troca de informação entre os modos [13].

Toda a informação estatística do sistema pode ser obtida do operador densidade total,  $\hat{\rho}_{AB}(t)$ . Em analogia à seção (2.1) os índices  $A$  e  $B$  referem-se, respectivamente ao sistema de modos acoplados (12) e aos reservatórios ( $R_1 R_2$ ). Assim o operador densidade total  $\hat{\rho}_{AB}(t)$  satisfaz à equação de Liouville do sistema completo escrita na forma

$$i \frac{d\hat{\rho}_{AB}(t)}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}_{AB}(t)]. \quad (3.2)$$

Com a condição inicial de o sistema estar desacoplado, isto é, na ausência de correlação quântica, é possível decompor o sistema como um produto de estados gerais, descrevendo sistemas separáveis, ou seja,

$$\hat{\rho}_{AB}(t) = \hat{\rho}_A(t) \otimes \hat{\rho}_B(t).$$

Análogo ao estudo do sistema composto por um único modo acoplado ao reservatório, é considerado que o reservatório grande o suficiente de modo a ser inalterado por seu acoplamento com o sistema, tornando possível usar a aproximação Markoviana,

$$\hat{\rho}_{AB}(\tau) \simeq \hat{\rho}_A(t) \otimes \hat{\rho}_B(0),$$

sendo  $\hat{\rho}_A$  o operador densidade reduzido descrito por

$$\hat{\rho}_A(t) = \text{Tr}_B(\hat{\rho}_{AB}), \quad (3.3)$$

que está relacionado com  $\hat{\rho}_{AB}$  pela operação chamada traço parcial sobre as variáveis do reservatório. O operador densidade reduzido  $\hat{\rho}_A$  contém toda a informação relativa ao sistema de dois modos sob efeito do reservatório térmico. O operador densidade reduzido na descrição de interação é escrito como

$$\hat{\sigma}_{AB} = \exp\{i\hat{H}_S t\} \hat{\rho}_{AB} \exp\{-i\hat{H}_S t\}, \quad (3.4)$$

onde  $\hat{H}_S$  é o Hamiltoniano do sistema sem levar em consideração o termo de interação do reservatório com o sistema (modos bosônicos interagentes), na aproximação de onda-

girante, dado por

$$\hat{H}_S = \sum_{k=1}^2 \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \sum_{j,k=1}^{\infty,2} \varpi_{k,j} \hat{b}_{k,j}^\dagger \hat{b}_{k,j} + \mu \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + \mu^* \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2. \quad (3.5)$$

Derivando a Eq. (3.4) em relação ao tempo e multiplicando pela constante  $i$  obtém-se

$$\begin{aligned} i \frac{d\hat{\sigma}_{AB}(t)}{dt} &= i \frac{d}{dt} (e^{i\hat{H}_S t} \hat{\rho}_{AB} e^{-i\hat{H}_S t}) \\ &= -\hat{H}_S e^{i\hat{H}_S t} \hat{\rho}_{AB} e^{-i\hat{H}_S t} + e^{i\hat{H}_S t} \hat{\rho}_{AB} e^{-i\hat{H}_S t} \hat{H}_S + e^{i\hat{H}_S t} i \frac{d}{dt} \hat{\rho}_{AB} e^{-i\hat{H}_S t} \\ &= [\hat{\sigma}_{AB}(t), \hat{H}_S] + e^{i\hat{H}_S t} [\hat{H}, \hat{\rho}_{AB}(t)] e^{-i\hat{H}_S t} \\ &= [\hat{\sigma}_{AB}(t), \hat{H}_S - \hat{F}], \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde  $\hat{F}$  é o operador Hamiltoniano completo do sistema na descrição de interação. Isto é,

$$\hat{F} = \hat{H}_S + \hat{H}_{1I} + \hat{H}_{2I}, \quad (3.7)$$

sendo  $\hat{H}_{kI}$  a parte do Hamiltoniano responsável pela interação entre o  $k$ -ésimo modo e seu respectivo reservatório, escrito na forma

$$\hat{H}_{kI} = \sum_j^\infty g_{k,j} (\hat{a}_k^\dagger \hat{b}_{k,j} + \hat{a}_k \hat{b}_{k,j}^\dagger). \quad (3.8)$$

Assim, torna-se possível reescrever a equação de Liouville (3.6) na forma,

$$i \frac{d\hat{\sigma}_{AB}(t)}{dt} = [\hat{H}_{1I} + \hat{H}_{2I}, \hat{\sigma}_{AB}(t)], \quad (3.9)$$

de onde, análogo ao procedimento feito para um modo apenas, é possível escrever

$$\hat{H}_{1I} + \hat{H}_{2I} = \hat{a}_1 G_1^\dagger(t) + \hat{a}_1^\dagger G_1(t) + \hat{a}_2 G_2^\dagger(t) + \hat{a}_2^\dagger G_2(t), \quad (3.10)$$

sendo  $G_k(t)$  o operador associado ao espaço do  $k$ -ésimo reservatório, dado por

$$G_k(t) \equiv \sum_j^\infty g_{k,j} \hat{b}_{k,j} \exp[i(\omega_k - \varpi_{k,j})t]. \quad (3.11)$$

Integrando a equação de Liouville (3.9) obtém-se

$$\hat{\sigma}_{AB}(t) = \hat{\sigma}_{AB}(0) + \frac{1}{i} \int_0^t [\hat{H}_{1I}(t') + \hat{H}_{2I}(t'), \hat{\sigma}_{AB}(t')] dt', \quad (3.12)$$

e combinando a Eq. (3.9) com a Eq. (3.12) tem-se,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}_{AB}(t)}{dt} &= \frac{1}{i} [\hat{H}_{1I} + \hat{H}_{2I}, \hat{\sigma}_{AB}(0)] \\ &\quad - \int_0^t [\hat{H}_{1I}(t) + \hat{H}_{2I}(t), [\hat{H}_{1I}(t') + \hat{H}_{2I}(t'), \hat{\sigma}_{AB}(t')]] dt'. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Tomando o traço sobre as variáveis do reservatório a fim de obter a informação somente do sistema, ( $\hat{\sigma}_{12}(t) \equiv \hat{\sigma}_A(t)$ ) tem-se

$$\frac{d\hat{\sigma}_{12}(t)}{dt} = - \int_0^t \text{Tr}_{R_1 R_2} [\hat{H}_{1I}(t) + \hat{H}_{2I}(t), [\hat{H}_{1I}(t') + \hat{H}_{2I}(t'), \hat{\sigma}_{AB}(t')]] dt'. \quad (3.14)$$

Em (3.14) foi assumido que,

$$\text{Tr}_{R_1 R_2} [\hat{H}_{1I} + \hat{H}_{2I}, \hat{\sigma}_{AB}(0)] = 0, \quad (3.15)$$

pois, em  $t = 0$  não há correlação entre os sistemas e o reservatório. O comutador duplo da Eq. (3.14) pode ser escrito na forma explícita como

$$\begin{aligned} & [\hat{H}_{1I}(t) + \hat{H}_{2I}(t), [\hat{H}_{1I}(t') + \hat{H}_{2I}(t'), \hat{\sigma}_{AB}(t')]] = [\hat{H}_{1I}(t), [\hat{H}_{1I}(t'), \hat{\sigma}_{AB}(t')]] \\ & + [\hat{H}_{1I}(t), [\hat{H}_{2I}(t'), \hat{\sigma}_{AB}(t')]] + [\hat{H}_{2I}(t), [\hat{H}_{1I}(t'), \hat{\sigma}_{AB}(t')]] + [\hat{H}_{2I}(t), [\hat{H}_{2I}(t'), \hat{\sigma}_{AB}(t')]], \end{aligned}$$

de modo que torna-se possível reescrever a Eq. (3.14) como

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}_{12}(t)}{dt} = & - \int_0^t \text{Tr}_{R_1 R_2} [\hat{H}_{1I}(t), [\hat{H}_{1I}(t'), \hat{\sigma}_{AB}(t')]] dt' - \int_0^t \text{Tr}_{R_1 R_2} [\hat{H}_{1I}(t), [\hat{H}_{2I}(t'), \hat{\sigma}_{AB}(t')]] dt' \\ & - \int_0^t \text{Tr}_{R_1 R_2} [\hat{H}_{2I}(t), [\hat{H}_{1I}(t'), \hat{\sigma}_{AB}(t')]] dt' - \int_0^t \text{Tr}_{R_1 R_2} [\hat{H}_{2I}(t), [\hat{H}_{2I}(t'), \hat{\sigma}_{AB}(t')]] dt'. \end{aligned}$$

que se reduz à forma

$$\frac{d\hat{\sigma}_{12}(t)}{dt} = - \int_0^t \text{Tr}_{R_1 R_2} [\hat{H}_{1I}(t), [\hat{H}_{1I}(t'), \hat{\sigma}_{AB}(t')]] - \int_0^t \text{Tr}_{R_1 R_2} [\hat{H}_{2I}(t), [\hat{H}_{2I}(t'), \hat{\sigma}_{AB}(t')]].$$

Procedendo de forma similar no estudo do sistema de um modo obtém-se a equação mestra para o sistema de dois modos acoplados, cada um dos quais acoplado ao seu reservatório térmico distinto (número médio de fótons  $\langle n_k \rangle$ ) na forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}_{12}(t)}{dt} = & -i\Delta\omega_1 [\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1, \hat{\sigma}_{12}(t)] - \frac{\tilde{\gamma}_1}{2} (1 + \langle n_1 \rangle) (\hat{\sigma}_{12}(t) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{\sigma}_{12}(t) - 2\hat{a}_1 \hat{\sigma}_{12}(t) \hat{a}_1^\dagger) \\ & - \frac{\tilde{\gamma}_1}{2} \langle n_1 \rangle (\hat{\sigma}_{12}(t) \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{\sigma}_{12}(t) - 2\hat{a}_1^\dagger \hat{\sigma}_{12}(t) \hat{a}_1) \\ & - i\Delta\omega_2 [\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2, \hat{\sigma}_{12}(t)] - \frac{\tilde{\gamma}_2}{2} (1 + \langle n_2 \rangle) (\hat{\sigma}_{12}(t) \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \hat{\sigma}_{12}(t) - 2\hat{a}_2 \hat{\sigma}_{12}(t) \hat{a}_2^\dagger) \\ & - \frac{\tilde{\gamma}_2}{2} \langle n_2 \rangle (\hat{\sigma}_{12}(t) \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{\sigma}_{12}(t) - 2\hat{a}_2^\dagger \hat{\sigma}_{12}(t) \hat{a}_2). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Se os reservatórios térmicos são idênticos, ambos estão à mesma temperatura, com o mesmo número médio de fótons  $\langle n_1 \rangle = \langle n_2 \rangle = \langle n \rangle$ . Se estão igualmente acoplados aos seus respectivos modos, tem-se  $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2 = \tilde{\gamma}$ . Em resumo, no caso geral, a equação mestra



padrão, dada na Eq. (3.16) assume a forma compacta:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}_{12}(t)}{dt} &= - \sum_{k=1}^2 i\Delta\omega_k [\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k, \hat{\sigma}_{12}(t)] - \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{\tilde{\gamma}_k}{2} (1 + \langle n_k \rangle) (\hat{\sigma}_{12}(t) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{\sigma}_{12}(t)) \right. \\ &\quad \left. - 2\hat{a}_k \hat{\sigma}_{12}(t) \hat{a}_k^\dagger + \frac{\tilde{\gamma}_k}{2} \langle n_k \rangle (\hat{\sigma}_{12}(t) \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_{12}(t) - 2\hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_{12}(t) \hat{a}_k) \right\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Assim, a equação (3.17) é a equação mestra padrão para um caso particular de um sistema quântico composto de dois modos do campo eletromagnético acoplados, na aproximação de onda girante, modelados por osciladores harmônicos quânticos e interagindo com reservatórios térmicos distintos, com seus respectivos números médios de fótons  $\langle n_k \rangle$  com constantes de relaxação  $\tilde{\gamma}_k$  distintas, na descrição de Interação.

## 3.2 Transição para a descrição de Schrödinger

Utilizando o procedimento análogo ao feito para o sistema composto por um único modo será realizada a transição da equação mestra na descrição de interação para a descrição de Schrödinger. Seja o operador densidade do sistema, na descrição de Schrödinger escrito na forma,

$$\hat{\rho}_{12}(t) = \exp\{-i\hat{H}_{12}t\} \hat{\sigma}_{12}(t) \exp\{i\hat{H}_{12}t\}, \quad (3.18)$$

onde,  $\hat{H}_{12}$  é a parte do Hamiltoniano responsável pela troca de informação entre os modos, na aproximação de onda girante, escrito na forma

$$\hat{H}_{12} = \sum_{k=1}^2 \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \mu \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + \mu^* \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2. \quad (3.19)$$

Realizando a derivada de (3.18) em relação ao tempo obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_{12}(t)}{dt} &= -i\hat{H}_{12}\hat{\rho}_{12}(t) + i\hat{\rho}_{12}(t)\hat{H}_{12} + \exp\{-i\hat{H}_{12}t\} \frac{d}{dt} \hat{\sigma}_{12}(t) \exp\{i\hat{H}_{12}t\} \\ &= -i[\hat{H}_{12}, \hat{\rho}_{12}(t)] + \exp\{-i\hat{H}_{12}t\} \frac{d}{dt} \hat{\sigma}_{12}(t) \exp\{i\hat{H}_{12}t\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Substituindo a equação (3.17) no termo correspondente do lado direito da equação (3.20), usando o fato que

$$\exp\{-i\hat{H}_{12}t\} \exp\{i\hat{H}_{12}t\} = 1,$$

e ainda, que a transição da descrição de Schrödinger para descrição de Interação é feita por meio de

$$A_S = \exp\{-i\hat{H}_{12}t\} A_I \exp\{i\hat{H}_{12}t\},$$

onde  $A_S$  representa o operador na descrição de Schrödinger e  $A_I$  representa o mesmo operador na descrição de Interação, obtém-se, análogo ao resultado da Eq. (2.42) referente ao sistema composto por apenas um modo,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_{12}(t)}{dt} + i[\hat{H}_{12}, \hat{\rho}_{12}(t)] = & - \sum_{k=1}^2 i\Delta\omega_k [\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k, \hat{\rho}_{12}(t)] - \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{\tilde{\gamma}_k}{2} (1 + \langle n_k \rangle) (\hat{\rho}_{12}(t) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right. \\ & \left. + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{\rho}_{12}(t) - 2\hat{a}_k \hat{\rho}_{12}(t) \hat{a}_k^\dagger) + \frac{\tilde{\gamma}_k}{2} \langle n_k \rangle (\hat{\rho}_{12}(t) \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \hat{\rho}_{12}(t) - 2\hat{a}_k^\dagger \hat{\rho}_{12}(t) \hat{a}_k) \right\}. \end{aligned}$$

Substituindo o Hamiltoniano  $\hat{H}_{12}$  dado em (3.19), torna-se possível reescrever a equação mestra na forma explícita

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_{12}(t)}{dt} + \sum_{k=1}^2 i(\omega_k + \Delta\omega_k) [\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k, \hat{\rho}_{12}(t)] = & -i[\mu^* \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \mu \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger, \hat{\rho}_{12}(t)] \\ & - \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{\gamma_k}{2} (1 + \langle n_k \rangle) (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{\rho}_{12}(t) + \hat{\rho}_{12}(t) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - 2\hat{a}_k \hat{\rho}_{12}(t) \hat{a}_k^\dagger) \right. \\ & \left. + \frac{\gamma_k}{2} \langle n_k \rangle (\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \hat{\rho}_{12}(t) + \hat{\rho}_{12}(t) \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger - 2\hat{a}_k^\dagger \hat{\rho}_{12}(t) \hat{a}_k) \right\}. \quad (3.21) \end{aligned}$$

A fim de simplificar a notação, fazendo  $\frac{\tilde{\gamma}_k}{2} = \gamma_k$  e  $\langle n_k \rangle = \nu_k$  tem-se finalmente a equação mestra na descrição de Schrödinger escrita como [35]:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_{12}(t)}{dt} + \sum_{k=1}^2 i(\omega_k + \Delta\omega_k) [\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k, \hat{\rho}_{12}(t)] = & -i[\mu^* \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \mu \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger, \hat{\rho}_{12}(t)] \\ & - \sum_{k=1}^2 \left\{ \gamma_k (1 + \nu_k) (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{\rho}_{12}(t) + \hat{\rho}_{12}(t) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - 2\hat{a}_k \hat{\rho}_{12}(t) \hat{a}_k^\dagger) \right. \\ & \left. + \gamma_k \nu_k (\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \hat{\rho}_{12}(t) + \hat{\rho}_{12}(t) \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger - 2\hat{a}_k^\dagger \hat{\rho}_{12}(t) \hat{a}_k) \right\}, \quad (3.22) \end{aligned}$$

Sendo o objetivo entender a troca de informação de dois modos, a princípio de frequências distintas, primeiramente são considerados os dois modos ressonantes, tendo como condição de troca a ressonância, de forma que assim o termo  $\Delta\omega_k$  não é relevante por somente mudar ligeiramente a frequência do modo, podendo ser negligenciado e ainda, considera-se a condição de ressonância  $\omega_1 = \omega_2 = 1$ <sup>1</sup>.

Todas as propriedades estatísticas do sistema acoplado ao reservatório podem ser obtidas do operador densidade de dois modos,  $\hat{\rho}_{12}(t)$  e as propriedades de cada modo por meio do operador densidade reduzido de cada modo,  $\rho_k(t)$ ,  $k = 1, 2$ .

<sup>1</sup>consideram-se estas frequências unitárias para simplificar as fórmulas.

### 3.3 Propagador da função de Wigner

Uma alternativa à descrição do problema feita por meio do operador densidade e da equação mestra é a utilização de representações deste mesmo operador no espaço de fase. Contudo, em Mecânica Quântica o conceito de espaço de fase fica problemático. Devido ao princípio de incerteza de Heisenberg não se pode definir uma distribuição de probabilidade propriamente dita para um sistema quântico.

No entanto, existem funções que têm propriedades semelhantes às encontradas nas distribuições de probabilidades no espaço de fase, que são as chamadas distribuições de quasi-probabilidades [39] que têm sido úteis como instrumento de cálculo em Mecânica Quântica. A primeira distribuição de quasi-probabilidade, chamada de função de Wigner, foi introduzida na Mecânica Quântica por Wigner em 1932 [40, 41].

A função de Wigner é adequada como uma distribuição quântica no espaço de fase para descrever os efeitos nos observáveis de quadratura que podem surgir da teoria quântica e estatística clássica. Ela se comporta parcialmente como uma distribuição de probabilidade clássica; permite calcular medidas quantitativas, tais como valor médio e variância das quadraturas na maneira clássica. Por outro lado, em contraste com a distribuição de probabilidade clássica, a função de Wigner pode ser negativa [42].

De maneira geral, as probabilidades negativas na função de Wigner podem ser interpretadas como um aspecto “essencialmente quântico” do sistema. Para estados de duas partículas livres, Bell [43] sugeriu que a existência de probabilidades negativas seria uma condição suficiente para a não-localidade.

A função de Wigner contém toda a informação a respeito do estado quântico, assim como o operador densidade, e é definida a partir do operador densidade  $\hat{\rho}$ , pela transformação

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx/\hbar} \langle q - \frac{x}{2} | \hat{\rho} | q + \frac{x}{2} \rangle dx, \quad (3.23)$$

onde  $|q + \frac{x}{2}\rangle$  é um auto-estado do operador posição  $\hat{x}$  com autovalor  $q + \frac{x}{2}$ . Em termos de  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  tem-se [44]

$$W(\alpha, \alpha^*) = 2\text{Tr}[\hat{\rho} \hat{D}(\alpha, \alpha^*) e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{\rho} \hat{D}^{-1}(\alpha, \alpha^*)], \quad (3.24)$$

com o operador deslocamento  $\hat{D}(\alpha, \alpha^*)$  dado por [45]

$$\hat{D}(\alpha, \alpha^*) = e^{(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})}, \quad (3.25)$$

sendo  $\alpha$  um número complexo arbitrário e  $|\alpha\rangle$  é o estado coerente gerado pela aplicação de  $\hat{D}(\alpha, \alpha^*)$  no estado de vácuo,  $|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha, \alpha^*)|0\rangle$ .

Como principais propriedades da função de Wigner destacam-se a obtenção das distribuições de probabilidade marginais a partir da integração da função de Wigner

$$P(q) = \langle q|\hat{\rho}|q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp W(q, p), \quad P(p) = \langle p|\hat{\rho}|p\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dq W(q, p), \quad (3.26)$$

e o cálculo do valor médio de operadores simétricos de forma semelhante às integrais clássicas no espaço e fase

$$\langle \hat{O}(\hat{q}, \hat{p})_{sim} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{O}(\hat{q}, \hat{p})_{sim}) = \int \int dq dp W(q, p) O(q, p). \quad (3.27)$$

Além de ser um valioso instrumento de visualização e cálculo, a função de Wigner é importante também nos processos experimentais de reconstrução dos estados quânticos. Medidas indiretas da função de Wigner já foram realizadas em campos eletromagnéticos [46, 47] e também em íons [48, 49] e a primeira proposta de medida direta da função de Wigner em cavidades [50] foi realizada experimentalmente [51].

Como a função de Wigner é definida a partir do operador densidade, a equação que governa sua dinâmica pode ser obtida a partir da equação mestra. Para tanto, basta utilizar algumas relações entre os operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  aplicados a  $\hat{\rho}$  e os operadores diferenciais aplicados à função de Wigner [52]:

$$i) \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \rightarrow (\alpha^* + \frac{1}{2} \partial_\alpha) W(\alpha), \quad (3.28)$$

$$ii) \hat{a}^\dagger \hat{\rho} \rightarrow (\alpha^* - \frac{1}{2} \partial_\alpha) W(\alpha), \quad (3.29)$$

$$iii) \hat{a} \hat{\rho} \rightarrow (\alpha + \frac{1}{2} \partial_{\alpha^*}) W(\alpha), \quad (3.30)$$

$$iv) \hat{\rho} \hat{a} \rightarrow (\alpha - \frac{1}{2} \partial_{\alpha^*}) W(\alpha). \quad (3.31)$$

Aplicando as relações (3.28)-(3.31) à equação mestra, obtém-se a chamada equação de Fokker-Plank para a função de Wigner que, neste caso, é dada em termos de  $\alpha$  e  $\alpha^*$  por

$$\partial_t W = \frac{\gamma}{2} (2 + \alpha \partial_\alpha + \alpha^* \partial_{\alpha^*} + \partial_{\alpha, \alpha^*}^2) W, \quad (3.32)$$

ou em termos de  $x$  e  $p$  por

$$\partial_t W = \frac{\gamma}{2} (2 + x \partial_x + p \partial_p + \frac{\hbar}{2m\nu} \partial_{x^2}^2 + \frac{\hbar m \nu}{2} \partial_{p^2}^2) W. \quad (3.33)$$

Os termos com derivada primeira são chamados de termos de arrasto enquanto que os que contém derivada segunda são conhecidos como termos de difusão. Os primeiros

representam um deslocamento da função de Wigner no espaço de fase e estão associados à existência de dissipação. Já os termos difusivos estão associados com os fenômenos de flutuação [52].

As soluções para a equação mestra do sistema (3.22) apresentam determinadas dificuldades matemáticas por tratar-se de uma equação de operadores. A fim de simplificá-las é possível realizar a transformação integral, similar à transformada de Fourier definindo a função de Wigner [53] escrita como

$$W(p_1, p_2, x_1, x_2) = \int d\zeta_1 d\zeta_2 \exp \left[ i \sum_{i=1}^2 p_i \zeta_i \right] \left\langle x_1 - \frac{\zeta_1}{2}, x_2 - \frac{\zeta_2}{2} \left| \hat{\rho}_{12} \right| x_1 + \frac{\zeta_1}{2}, x_2 + \frac{\zeta_2}{2} \right\rangle, \quad (3.34)$$

que é, como já foi apresentado, uma função de quasi-probabilidade, no sentido que admite valores negativos. Ela satisfaz a equação diferencial parcial, chamada equação de Fokker-Planck escrita na forma geral

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} (\mathcal{A} \mathbf{y} W) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \mathcal{D} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} W, \quad (3.35)$$

onde  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} = (\frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})$  e  $\mathbf{y} = (\mathbf{p}, \mathbf{x}) = (p_1, p_2, x_1, x_2)$  são as componentes de quadraturas do campo eletromagnético quantizado. A partir das correspondências entre os formalismos

$$i) \mathbf{y} \hat{\rho} \rightarrow (\mathbf{y} - \frac{i}{2} \Sigma \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}) W(\mathbf{y}), \quad (3.36)$$

$$ii) \hat{\rho} \mathbf{y} \rightarrow (\mathbf{y} + \frac{i}{2} \Sigma \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}) W(\mathbf{y}), \quad (3.37)$$

similar aos ao estudo feito com as relações (3.28)-(3.31), obtém-se nas componentes de quadratura  $\mathbf{y} = (\mathbf{p}, \mathbf{x})$ , a matriz  $\mathcal{A}$  e a não-Hermitiana  $\mathcal{D}$  para o sistema (3.1) que são escritas na forma:

$$\mathcal{A} = \left\| \begin{array}{cccc} -\gamma & \mu_1 & -1 & \mu_0 \\ -\mu_1 & -\gamma & \mu_0 & -1 \\ 1 & -\mu_0 & -\gamma & \mu_1 \\ -\mu_0 & 1 & -\mu_1 & -\gamma \end{array} \right\|, \quad (3.38)$$

$$\mathcal{D} = \left\| \begin{array}{cccc} \gamma(\nu + \frac{1}{2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(\nu + \frac{1}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(\nu + \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma(\nu + \frac{1}{2}) \end{array} \right\|, \quad (3.39)$$

sendo  $\mu_0 = \mathbf{Re}(\mu)$  e  $\mu_1 = \mathbf{Im}(\mu)$ . Assim, a equação de Fokker-Planck (3.35) para o sistema de dois modos ressonantes ( $\omega_1 = \omega_2 = 1$ ) acoplados ao reservatório assume a forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial p_1} ([\gamma p_1 + x_1 - \mu_0 x_2 - \mu_1 p_2] W) + \frac{\partial}{\partial p_2} ([\gamma p_2 + x_2 - \mu_0 x_1 + \mu_1 p_1] W) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_1} ([\gamma x_1 - p_1 + \mu_0 p_2 - \mu_1 x_2] W) + \frac{\partial}{\partial x_2} ([\gamma x_2 - p_2 + \mu_0 p_1 + \mu_1 x_1] W) \\ &+ \gamma \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \sum_{i=1}^2 \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial p_i^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Estabelecida a equação de Fokker-Planck para a função de Wigner (3.40) na representação das coordenadas, é possível aplicar os métodos gerais de sistemas com Hamiltonianos quadráticos [54] com determinadas modificações devido à não-Hermiticidade do Hamiltoniano eficaz  $\hat{\mathcal{H}}$ . Assim, escreve-se a equação (3.35) na forma

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}W, \quad (3.41)$$

com o operador  $\hat{\mathcal{H}}$  dado por

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{z}} \mathbf{B} \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{C} \hat{\mathbf{z}} - \frac{1}{2} \mathbf{Tr} \mathbf{A}, \quad (3.42)$$

onde foi utilizada a notação matricial:

$$\hat{\mathbf{z}} = \left\| \begin{array}{c} \partial/\partial \mathbf{y} \\ \mathbf{y} \end{array} \right\|, \quad \mathbf{B} = \left\| \begin{array}{cc} 2\mathcal{D} & -\mathcal{A} \\ -\tilde{\mathcal{A}} & 0 \end{array} \right\|, \quad \mathbf{C} = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\|. \quad (3.43)$$

O elemento  $\mathbf{B}$  é uma matriz simétrica  $4N \times 4N$  e o propagador associado à equação (3.42) pode ser calculado segundo o método de operador de integrais do movimento definido segundo Dodonov e Man'ko em [54]. Apresenta-se, como um elemento dinâmico fundamental, o operador  $\hat{\mathbf{Z}}(t)$  atuando como um “invariante quântico”. Este é definido por

$$\hat{\mathbf{Z}}(t) = \hat{U}(t) \hat{\mathbf{z}} \hat{U}^{-1}(t) = \Lambda(t) \hat{\mathbf{z}} + \Delta(t),$$

onde  $\Lambda(t)$  e  $\Delta(t)$  satisfazem as equações diferenciais

$$\frac{d\Lambda(t)}{dt} = -\Lambda(t) \Sigma \mathbf{B}, \quad \frac{d\Delta(t)}{dt} = -\Lambda(t) \Sigma \mathbf{C}, \quad (3.44)$$

com suas respectivas condições iniciais

$$\Lambda(0) = E_{4N}, \quad \Delta(0) = \mathbf{0}_{4N}, \quad (3.45)$$

sendo  $E_{4N}$  a matriz identidade e  $\mathbf{0}_{4N}$  a matriz nula de ordem  $4N$ , com  $\Sigma_{\alpha,\beta} = i[y_\alpha, y_\beta]$ .

A fim de simplificar os cálculos pode-se escrever a matriz  $\Lambda(t)$  na forma de uma matriz bloco composta por quatro matrizes de ordem  $2N$ ,

$$\Lambda(t) = \left\| \begin{array}{cc} \lambda_1(t) & \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) & \lambda_4(t) \end{array} \right\|, \quad (3.46)$$

em que as equações para as matrizes  $\lambda_k(t)$  fornecem a dinâmica necessária para descrever as propriedades quânticas do sistema quântico acoplado dissipativo e são escritas na forma [28]

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_4(t)}{dt} &= -\lambda_4(t)\mathcal{A}(t), \quad \lambda_1(t) = \tilde{\lambda}_4^{-1}(t), \\ \lambda_3(t) &= \left[ 2 \int_0^t \lambda_4(\tau)\mathcal{D}(\tau)\tilde{\lambda}_4(\tau) \right] \tilde{\lambda}_4^{-1}(t). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Encontra-se  $\lambda_2(t) \equiv 0$  da equação  $\frac{d\lambda_2(t)}{dt} = -\lambda_2(t)\mathcal{A}(t)$  com a condição inicial  $\lambda_2(0) = 0$  [55].

Em analogia ao método dos Invariantes Quânticos para sistemas quadráticos fechados, a função de Wigner evolui no tempo segundo a equação

$$W(\mathbf{q}; t) = \int G(\mathbf{q}; \mathbf{q}'; t) W(\mathbf{q}'; t=0) d\mathbf{q}, \quad (3.48)$$

onde  $\mathbf{q} = (p_1, p_2, x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{q}' = (p'_1, p'_2, x'_1, x'_2)$  e o propagador  $G(\mathbf{q}; \mathbf{q}'; t)$ , em termos das matrizes  $\lambda_k$ , é dado na forma geral [28]

$$G(\mathbf{q}; \mathbf{q}'; t) = (2\pi)^{-N} [\det(\lambda_4\lambda_3^{-1})]^{1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} \mathbf{q} \lambda_3^{-1} \lambda_4 \mathbf{q} + \mathbf{q} \lambda_3^{-1} \mathbf{q}' - \frac{1}{2} \mathbf{q}' \lambda_1 \lambda_3^{-1} \mathbf{q}' \right], \quad (3.49)$$

também conhecido como função de Green, responsável pela evolução temporal da função de Wigner. Para o sistema de dois modos acoplados em contato com um único reservatório a matriz  $\lambda_1$  é dada por

$$\lambda_1 = \exp(-\gamma t) \left\| \begin{array}{cccc} Cc & Ss_- & Cs & -Sc_- \\ Ss_+ & Cc & -Sc_+ & Cs \\ -Cs & Sc_- & Cc & Ss_- \\ Sc_+ & -Cs & Ss_+ & Cc \end{array} \right\|, \quad (3.50)$$

sendo

$$C = \cos(\tau), \quad S = \sin(\tau), \quad c = \cos t, \quad s = \sin t, \quad (3.51)$$

$$s_{\pm} = \sin(t \pm \phi), \quad c_{\pm} = \cos(t \pm \phi), \quad (3.52)$$

onde  $t$  é a escala de tempo associada ao sistema e  $\tau$  é uma escala de “tempo lento” adimensional (no limite  $\varrho \ll 1$ ) dado por

$$\tau = \varrho t = \sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2} t, \quad \mu_0 = \varrho \cos(\phi), \quad \mu_1 = \varrho \sin(\phi), \quad (3.53)$$

sendo  $\varrho$  a medida da intensidade do acoplamento entre os modos,  $\phi$  a fase de acoplamento,  $\mu_0$  e  $\mu_1$ , respectivamente, a parte real e a imaginária da constante de acoplamento complexa  $\mu$ .

As demais matrizes  $\lambda_k$  são dadas por

$$\lambda_2 = \mathbf{0}_4, \quad (3.54)$$

$$\lambda_3 = \gamma(2\nu + 1)\sinh(\gamma t)\exp(\gamma t)\lambda_1, \quad (3.55)$$

$$\lambda_4 = \exp(2\gamma t)\lambda_1, \quad (3.56)$$

onde  $\mathbf{0}_4$  representa a matriz nula de ordem 4.

Com as matrizes  $\lambda_k(t)$  determinadas é escrito o propagador (3.49) na forma explícita

$$\begin{aligned} G(\mathbf{q}; \mathbf{q}'; t) &= \frac{1}{4}(2\pi)^{-N} \sqrt{\frac{e^{4\gamma t}}{\sinh^4(\gamma t)\zeta^4}} \exp\{-4(p_1^2 + p_2^2 + x_1^2 + x_2^2)\zeta^3 \sinh^3(\gamma t)e^{\gamma t} \\ &- 4(p_1'^2 + p_2'^2 + x_1'^2 + x_2'^2)\zeta^3 \sinh^3(\gamma t)e^{-\gamma t} + 4[2(p_1'x_1 + p_2'x_2 - p_1x_1' - p_2x_2')Cs \\ &+ 2(p_1p_1' + p_2p_2' + x_1x_1' + x_2x_2')Cc + 2(p_1x_2' - p_2x_1')Sc_+ + 2(p_1p_2' + x_1x_2')Ss_+ \\ &+ 2(p_2x_1' - p_1x_2)Sc_- + 2(p_2p_1' + x_2x_1')Ss_-]\zeta^3 \sinh(\gamma t)^3\}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

onde, para simplificar a notação foi assumido que  $\zeta = \gamma(\nu + \frac{1}{2})$ .

Com o propagador acima, considerando diferentes tipos de estados é possível analisar o comportamento da função de Wigner e descrever o efeito do reservatório nas propriedades estatísticas do sistema [56]. Essa análise está sendo realizada e será apresentada em trabalhos futuros. Com a função de Wigner pode-se determinar o operador densidade reduzido  $\hat{\rho}_{12}$ , fazendo a anti-transformada dada em (3.34).

Dessa forma é possível observar que o problema de resolver uma equação diferencial de operadores, a equação mestra dada em (3.22), a fim de obter informações estatísticas do sistema de interesse, resume-se a encontrar o propagador  $G(\mathbf{q}; \mathbf{q}'; t)$  dado em (3.49). Nota-se que este trata-se de uma Gaussiana, podendo assim ser completamente determinado pelos primeiros e segundos momentos. Como na Estatística é sempre possível utilizar uma variável padronizada, em que o primeiro momento é nulo (média igual a zero), então é possível resolver o problema determinando os segundos momentos, no caso especial de estados Gaussianos, com função de Wigner Gaussiana. Assim, no capítulo seguinte será apresentado um método baseado na evolução temporal dos segundos momentos.

Aqui foram apresentadas as matrizes  $\lambda_k$  para o caso de dois modos acoplados em contato com reservatórios idênticos. Como perspectiva futura, pode-se considerar esse estudo para



o caso do sistema composto por dois modos, cujo acoplamento dependa explicitamente do tempo, com cada um dos modos acoplado ao seu respectivo reservatório, com temperatura arbitrária.

# Capítulo 4

## Efeito do reservatório nas propriedades quânticas

Na ausência do reservatório, ocorre uma periodicidade na troca de estados quânticos entre os modos. O sistema se separa ou desemaranha em instantes bem definidos de tempo dependendo da intensidade de acoplamento entre os modos [57]. Neste capítulo é analisado, de forma simplificada, o efeito do reservatório nas propriedades de cada um dos modos e nas medidas de correlação entre eles. Estuda-se como a presença do reservatório, fracamente acoplado ao sistema de dois modos, influencia a transferência de compressão e pureza entre os modos, considerando a solução exata da matriz das covariâncias para o caso especial de estados Gaussianos.

### 4.1 Evolução do operador densidade

Esta seção é dedicada aos problemas relacionados à evolução de estados quânticos no específico, mas importante, caso quando o operador Hamiltoniano do sistema assume uma forma arbitrária quadrática com respeito aos operadores de quadratura ou operadores bosônicos de aniquilação e de criação. Considerando o sistema com  $N = 2$  graus de liberdade descrito em termos dos  $2N = 4$  operadores bosônicos  $\hat{z}_1 = \hat{a}_1, \hat{z}_2 = \hat{a}_2, \hat{z}_3 = \hat{a}_1^\dagger, \hat{z}_4 = \hat{a}_2^\dagger$ , combinados no vetor  $\hat{\mathbf{z}} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger)$ , os comutadores entre esses operadores em  $\hat{\mathbf{z}}$  assumem valores constantes:

$$[\hat{z}_\alpha, \hat{z}_\beta] = \hat{\Xi}_{\alpha\beta} = -\hat{\Xi}_{\beta\alpha}, \quad (4.1)$$

tal que os coeficientes  $\hat{\Xi}_{\alpha\beta}$  formam uma matriz anti-simétrica  $\Xi$  de ordem  $2N \times 2N$  dada por

$$\Xi = \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{E}_2 \\ -\mathbf{E}_2 & 0 \end{vmatrix}, \quad (4.2)$$

onde  $\mathbf{E}_2$  é a matriz identidade de segunda ordem.

A equação mestra (3.22) é um caso particular de uma equação de evolução linear geral para o operador densidade reduzido  $\hat{\rho}_{12}(t)$  que contém somente combinações quadráticas do operador  $\hat{\mathbf{z}}$ . Isto é,

$$\frac{d\hat{\rho}_{12}(t)}{dt} = \hat{\mathbf{z}}L\hat{\mathbf{z}}\hat{\rho}_{12}(t) + \hat{\rho}_{12}(t)\hat{\mathbf{z}}R\hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{z}}K\hat{\rho}_{12}(t)\hat{\mathbf{z}}, \quad (4.3)$$

onde  $L$ ,  $R$  e  $K$  são matrizes que devem obedecer as restrições impostas pelas propriedades do operador estatístico. Em particular, a hermiticidade de  $\hat{\rho}_{12}(t)$  leva às identidades

$$L = \tilde{S}R^\dagger S, \quad R = \tilde{S}L^\dagger S, \quad K = \tilde{S}K^\dagger S, \quad (4.4)$$

sendo que  $\tilde{S}$  indica a transposição da matriz  $S$ , a qual descreve a transformação dos operadores  $\hat{z}_\alpha$  sob a conjugação Hermitiana, isto é,

$$\hat{z}_\alpha^\dagger = S_{\alpha\beta}\hat{z}_\beta. \quad (4.5)$$

Como consequência de  $\mathbf{Tr} \hat{\rho}(t) = 1$ , tem-se que

$$L + R + \tilde{K} = 0. \quad (4.6)$$

Correspondente à equação mestra (3.22) é possível introduzir uma matriz não simetrizada de momentos de segunda ordem (segundos momentos),  $M = \|M_{\alpha\beta}\|$ ,  $M_{\alpha\beta} = \mathbf{Tr}(\hat{\rho}_{12}\hat{z}_\alpha\hat{z}_\beta)$ , escrita na forma

$$M = \begin{vmatrix} \langle \hat{a}_1\hat{a}_1 \rangle & \langle \hat{a}_1\hat{a}_2 \rangle & \langle \hat{a}_1\hat{a}_1^\dagger \rangle & \langle \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger \rangle \\ \langle \hat{a}_2\hat{a}_1 \rangle & \langle \hat{a}_2\hat{a}_2 \rangle & \langle \hat{a}_2\hat{a}_1^\dagger \rangle & \langle \hat{a}_2\hat{a}_2^\dagger \rangle \\ \langle \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 \rangle & \langle \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 \rangle & \langle \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1^\dagger \rangle & \langle \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger \rangle \\ \langle \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 \rangle & \langle \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 \rangle & \langle \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1^\dagger \rangle & \langle \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2^\dagger \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{vmatrix}, \quad (4.7)$$

que satisfaz a equação diferencial matricial [28]

$$\frac{dM}{dt} = AM + M\tilde{A} + \Xi\tilde{K}\Xi. \quad (4.8)$$

A matriz bloco  $A$ , nas componentes bosônicas, é escrita como

$$A = \Xi(L - \tilde{R}). \quad (4.9)$$

Da equação de Fokker-Planck (3.40) encontra-se explicitamente as matrizes  $L$ ,  $K$  e  $R$  escritas, respectivamente, como:

$$L = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & -\frac{i\bar{\omega}}{2} - \gamma\nu & -\frac{i\mu}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{i\mu^*}{2} & -\frac{i\bar{\omega}}{2} - \gamma\nu \\ -\frac{i\bar{\omega}}{2} - \varsigma & -\frac{i\mu^*}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{i\mu}{2} & -\frac{i\bar{\omega}}{2} - \varsigma & 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad (4.10)$$

$$K = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 2\varsigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\varsigma \\ 2\gamma\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\gamma\nu & 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad (4.11)$$

$$R = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \frac{i\bar{\omega}}{2} - \gamma\nu & \frac{i\mu}{2} \\ 0 & 0 & \frac{i\mu^*}{2} & \frac{i\bar{\omega}}{2} - \gamma\nu \\ \frac{i\bar{\omega}}{2} - \varsigma & \frac{i\mu^*}{2} & 0 & 0 \\ \frac{i\mu}{2} & \frac{i\bar{\omega}}{2} - \varsigma & 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad (4.12)$$

onde  $\varsigma = \gamma(1 + \nu)$ . Considera-se o caso especial de estados Gaussianos, em que inicialmente não há correlação entre os modos e dos modos com o reservatório; o operador densidade total está fatorado na forma  $\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$ , onde  $\hat{\rho}_k$  é o operador densidade reduzido do  $k$ -ésimo modo, isto é,  $\hat{\rho}_1 = \text{Tr}_2(\hat{\rho})$  e  $\hat{\rho}_2 = \text{Tr}_1(\hat{\rho})$ , nesse instante inicial. Para esses estados Gaussianos foi utilizada a seguinte parametrização dos momentos de segunda ordem não simetrizados nos estados iniciais Gaussianos do  $k$ -ésimo modo (assumindo que  $\langle \hat{a}_k \rangle = 0$  e  $\vartheta_k$  é o parâmetro térmico do estado no instante inicial) [10]:

$$\langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle = \eta_k - \frac{1}{2} = \vartheta_k \cosh(2r_k) - \frac{1}{2}, \quad (4.13)$$

$$\langle \hat{a}_k^2 \rangle = \alpha_k = \vartheta_k \sinh(2r_k) \exp(iv_k). \quad (4.14)$$

Os parâmetros  $\vartheta_k$  determinam a pureza inicial de cada subsistema,  $\mathcal{P}_k = (2\vartheta_k)^{-1}$ , quando os parâmetros  $r_k$  fornecem o grau inicial de compressão,  $\mathcal{G}_k = 2\vartheta_k \exp(-2r_k)$  e o parâmetro  $v_k$  age como uma fase arbitrária. Supondo que  $r_k \geq 0$ , considera-se que inicialmente as quadraturas comprimidas estão nas “coordenadas”. A desigualdade  $\vartheta_k \geq 1/2$  deve ser verificada devido a relação de incerteza de Schrödinger–Robertson [58, 59].

No instante inicial, quando não há interação entre os modos e dos modos com o reser-

vatório, a matriz  $M$ , dada em (4.7), pode ser escrita como

$$M_0 = \begin{pmatrix} \langle a_1^2 \rangle & 0 & \langle a_1 a_1^\dagger \rangle & 0 \\ 0 & \langle a_2^2 \rangle & 0 & \langle a_2 a_2^\dagger \rangle \\ \langle a_1^\dagger a_1 \rangle & 0 & \langle a_1^{\dagger 2} \rangle & 0 \\ 0 & \langle a_2^\dagger a_2 \rangle & 0 & \langle a_2^{\dagger 2} \rangle \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Com as relações (4.13) e (4.14) determina-se os elementos da matriz  $M_0$  explicitamente na forma

$$M_0 = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \sinh(2r_1) e^{iv_1} & 0 & \vartheta_1 \cosh(2r_1) + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \vartheta_2 \sinh(2r_2) e^{iv_2} & 0 & \vartheta_2 \cosh(2r_2) + \frac{1}{2} \\ \vartheta_1 \cosh(2r_1) - \frac{1}{2} & 0 & \vartheta_1 \sinh(2r_1) e^{-iv_1} & 0 \\ 0 & \vartheta_2 \cosh(2r_2) - \frac{1}{2} & 0 & \vartheta_2 \sinh(2r_2) e^{-iv_2} \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

É possível resolver exatamente a equação (4.8) cuja solução apresenta os elementos da diagonal  $M_{ii}$ ,

$$M_{11} = M_{33}^* = e^{-2\beta\tau} (\alpha_1 C^2 - \alpha_2 S^2 e^{-2i\phi}) e^{-2it}, \quad (4.17)$$

$$M_{22} = M_{44}^* = e^{-2\beta\tau} (\alpha_2 C^2 - \alpha_1 S^2 e^{2i\phi}) e^{-2it}, \quad (4.18)$$

e os elementos fora da diagonal  $M_{ij}$ ,

$$M_{12} = M_{34}^* = -ie^{-2\beta\tau} SC (\alpha_1 e^{i\phi} + \alpha_2 e^{-i\phi}) e^{-2it}, \quad (4.19)$$

$$M_{13} = e^{-2\beta\tau} (\vartheta_1 R_1 C^2 + \vartheta_2 R_2 S^2 + K/2) + \frac{1}{2}, \quad (4.20)$$

$$M_{14} = M_{23}^* = ie^{-2\beta\tau} SC (\vartheta_1 R_1 - \vartheta_2 R_2) e^{-i\phi}, \quad (4.21)$$

$$M_{24} = e^{-2\beta\tau} (\vartheta_1 R_1 S^2 + \vartheta_2 R_2 C^2 + K/2) + \frac{1}{2}. \quad (4.22)$$

Nas equações acima o símbolo  $*$  significa o complexo conjugado e foram introduzidas as seguintes definições:

$$\zeta = \varrho e^{i\phi}, \quad \beta = \gamma/\varrho, \quad \varrho = \sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2}, \quad R_k = \cosh(2r_k), \quad (4.23)$$

$$K(\tau) = (2\nu + 1) (e^{2\beta\tau} - 1), \quad \tau = \varrho t, \quad (4.24)$$

$$S(\tau) = \text{sen}(\tau), \quad C(\tau) = \text{cos}(\tau). \quad (4.25)$$

Note que o coeficiente  $\beta = \gamma/\varrho$  é a razão das intensidades de acoplamento entre os modos  $\varrho$  e dos modos com reservatório  $\gamma$ . Os outros elementos da matriz  $M$  podem ser obtidos

com a ajuda das relações

$$M_{ij} - M_{ji} = \begin{cases} 0, & \text{se } i + j \text{ ímpar} \\ 1, & \text{se } i + j \text{ par } (i < j). \end{cases} \quad (4.26)$$

As equações (4.19) e (4.21) mostram que o sistema torna-se totalmente desacoplado no instante

$$\tau_{ex}^{(n)} = \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.27)$$

Determinados os elementos da matriz  $M$ , a qual satisfaz a equação diferencial matricial dada em (4.8), é possível considerar as propriedades de correlações dos estados iniciais Gaussianos na dinâmica do sistema. Na ausência de dissipação ( $\beta = 0$ ), valores pares de  $n$  correspondem ao retorno para o estado inicial, enquanto valores ímpares correspondem à troca total das características estatísticas entre os dois modos [11, 12].

Este trabalho enfatiza que as expressões para os elementos da matriz das covariâncias dependentes do tempo fornecem soluções exatas da equação (4.8) e, conservam-se para valores arbitrários dos parâmetros  $\zeta$ ,  $\gamma$  e  $\nu$ . Por outro lado, no limite  $t \rightarrow \infty$  e para  $\gamma > 0$ , todos os elementos se tornam zero, com exceção dos elementos  $M_{13}(\infty) = M_{24}(\infty) = \nu + 1$  e  $M_{31}(\infty) = M_{42}(\infty) = \nu$ , que correspondem ao estado de equilíbrio dos osciladores desacoplados. Assim, este modelo de dissipação, baseado na equação mestra “padrão” (3.22), tem significado físico somente para osciladores fracamente acoplados com  $|\zeta| \ll 1$ , uma limitação considerada natural para o problema de troca de estados quânticos [11, 12].

## 4.2 Transferência de compressão

O grau de compressão<sup>1</sup> em cada modo é melhor, e de maneira mais simples, caracterizado pelos *coeficientes invariantes de compressão* [32] (ou coeficiente de “compressão principal” [60]) segundo a equação

$$\mathcal{S}_k = 1 + 2\langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle - 2|\langle \hat{a}_k^2 \rangle|, \quad (4.28)$$

que nada mais é, que duas vezes o valor mínimo das variações das componentes de quadratura da família dos operadores  $\hat{a}e^{i\delta}$ , onde o parâmetro  $\delta$  varia no intervalo  $0 \leq \delta < 2\pi$  (tal que

---

<sup>1</sup>do inglês squeezing

$\mathcal{S}_k = 1$  para estados coerentes e  $\mathcal{S}_k < 1$  se o estado é comprimido). Combinando as equações (4.13) e (4.14) com (4.28), obtém-se a fórmula

$$\mathcal{S}_k(0) \equiv \mathcal{G}_k = 2\vartheta_k \exp(-2r_k), \quad (4.29)$$

que esclarece o significado físico do coeficiente  $r_k$  [61]. Usando as soluções (4.17)-(4.22) na equação (4.28), encontra-se as seguintes relações para a dependência temporal do coeficiente de compressão no primeiro e no segundo modo, respectivamente:

$$\mathcal{S}_1(\tau, \beta) = e^{-2\beta\tau}[\mathcal{S}_1(\tau) + K(\tau)], \quad (4.30)$$

$$\mathcal{S}_2(\tau, \beta) = e^{-2\beta\tau}[\mathcal{S}_2(\tau) + K(\tau)], \quad (4.31)$$

onde  $\mathcal{S}_1(\tau)$  e  $\mathcal{S}_2(\tau)$  são os coeficientes de compressão na ausência do reservatório ( $\beta = 0$ ) [57], escritos nas formas

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1(\tau) &= 2 \left[ \vartheta_1 \cosh(2r_1)C^2 + \vartheta_2 \cosh(2r_2)S^2 - \left( \vartheta_1^2 \sinh^2(2r_1)C^4 + \vartheta_2^2 \sinh^2(2r_2)S^4 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\sigma\vartheta_1\vartheta_2 \sinh(2r_1)\sinh(2r_2)C^2 S^2 \right)^{1/2} \right], \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2(\tau) &= 2 \left[ \vartheta_2 \cosh(2r_2)C^2 + \vartheta_1 \cosh(2r_1)S^2 - \left( \vartheta_2^2 \sinh^2(2r_2)C^4 + \vartheta_1^2 \sinh^2(2r_1)S^4 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\sigma\vartheta_1\vartheta_2 \sinh(2r_1)\sinh(2r_2)C^2 S^2 \right)^{1/2} \right], \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde  $\sigma = \cos(2\phi)$ .

De acordo com as equações (4.30) e (4.31) há uma diferença significativa no comportamento do sistema que depende do número médio de fótons  $\nu$ , ou seja, da temperatura do reservatório e ainda, do coeficiente  $\beta = \gamma/\rho$ , isto é, da razão da intensidade de acoplamento entre os modos e dos modos com o reservatório. Na ausência do reservatório ( $\beta = 0$ ), se apenas um modo está comprimido no instante inicial, isto é,  $\mathcal{G}_1 = 2\vartheta_1 e^{-2r_1} > 1$  e  $\mathcal{G}_2 = 2\vartheta_2 e^{-2r_2} < 1$ , é natural observar a transferência de compressão entre os modos acoplados: o primeiro modo torna-se comprimido um número infinito de vezes durante a evolução, conforme observa-se na figura (4.1).

Contudo, se for considerado o efeito do reservatório térmico sobre o sistema ( $\beta \neq 0$ ), a compressão no sistema acoplado, como uma propriedade não clássica, tende a desaparecer. Verifica-se uma modificação no padrão de troca de compressão que se observa no caso sem dissipação. No caso de um reservatório a uma temperatura finita, o modo inicialmente comprimido permanece em um estado comprimido um número finito de vezes. De forma

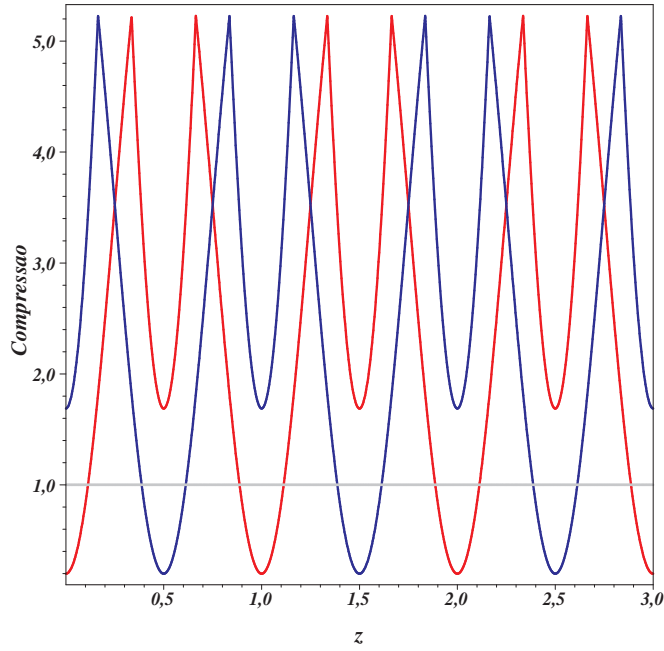


Figura 4.1: Comportamento da transferência de compressão no tempo ( $\tau = z\pi$ ) no caso de um único modo comprimido ( $\mathcal{G}_1 > 1$  e  $\mathcal{G}_2 < 1$ ) e na ausência do reservatório ( $\beta = 0$ ). A curva azul representa o modo 1 (num estado inicial não comprimido), a curva vermelha representa o modo 2 (num estado inicial comprimido) e a curva cinza o estado coerente. As curvas são construídas com  $\sigma = 1$ ,  $r_1 = 0,35$ ,  $r_2 = 1,10$ ,  $\vartheta_1 = 1,7$ ,  $\vartheta_2 = 0,9$  e  $\nu = 2$ .

similar o modo inicialmente não comprimido torna-se comprimido. Este comportamento está ilustrado na figura (4.2).

Supondo inicialmente o primeiro modo num estado não comprimido com  $\mathcal{G}_1 > 1$  e o segundo em estado comprimido com  $\mathcal{G}_2 < 1$ . No instante de tempo  $\tau_{ex}^{(n)}$ , dado pela equação (4.27) tem-se, para  $n$  ímpar,

$$\mathcal{S}_1(\tau_{ex}^{(n)}, \beta) = e^{-n\pi\beta} \mathcal{G}_2 + (2\nu + 1)(1 - e^{-n\pi\beta}), \quad (4.34)$$

$$\mathcal{S}_2(\tau_{ex}^{(n)}, \beta) = e^{-n\pi\beta} \mathcal{G}_1 + (2\nu + 1)(1 - e^{-n\pi\beta}), \quad (4.35)$$

e quando  $n$  é par

$$\mathcal{S}_1(\tau_{ex}^{(n)}, \beta) = e^{-n\pi\beta} \mathcal{G}_1 + (2\nu + 1)(1 - e^{-n\pi\beta}), \quad (4.36)$$

$$\mathcal{S}_2(\tau_{ex}^{(n)}, \beta) = e^{-n\pi\beta} \mathcal{G}_2 + (2\nu + 1)(1 - e^{-n\pi\beta}). \quad (4.37)$$

Esses resultados mostram explicitamente como a compressão dos modos desacoplados pode ser recuperada. Aqui é possível identificar um limite superior para o número de vezes  $n$



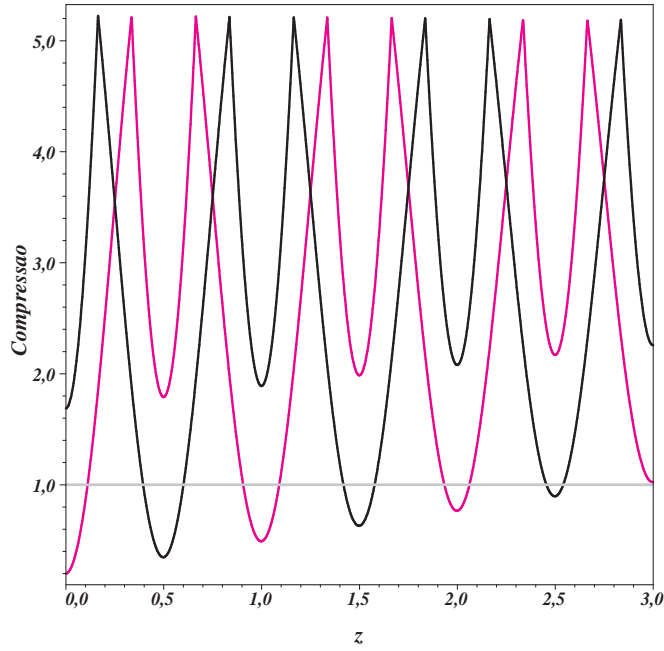


Figura 4.2: Comportamento da transferência de compressão no tempo ( $\tau = z\pi$ ) no caso de um único modo comprimido ( $\mathcal{G}_1 > 1$  e  $\mathcal{G}_2 < 1$ ) e na presença do reservatório ( $\beta \neq 0$ ). A curva preta representa o modo 1 (num estado inicial não comprimido), a curva rosa representa o modo 2 (num estado inicial comprimido) e a curva cinza o estado coerente. As curvas são construídas com  $\beta = 0,01$ ,  $\sigma = 1$ ,  $r_1 = 0,35$ ,  $r_2 = 1,10$ ,  $\vartheta_1 = 1,7$ ,  $\vartheta_2 = 0,9$  e  $\nu = 2$ .

onde o primeiro modo, inicialmente em estado não comprimido, torna-se comprimido. Dessa idéia, implementada somente para  $n$  ímpar e pela imposição da equação (4.34) a condição  $\mathcal{S}_1(\tau, \beta) < 1$ , encontra-se, conforme determinado no apêndice (C), um limite superior para  $n$  como sendo um inteiro ímpar menor que o número real  $l$  (solução da equação  $\mathcal{S}_1(\tau, \beta) = 1$ ):

$$n \leq l = \frac{1}{\pi\beta} \ln \left[ \frac{2\nu + 1 - \mathcal{G}_2}{2\nu} \right]. \quad (4.38)$$

Assim o número  $n$  define o valor  $s$ , por meio da relação

$$s = \frac{n + 1}{2}, \quad (4.39)$$

como o número de vezes que o sistema se desacopla com o primeiro modo em um estado comprimido:  $s$  é número de vezes que se transfere compressão para o primeiro modo. Estes resultados são similares os vistos em [62] para um sistema de ion-cavidade. A figura (4.3) ilustra valores de  $l$  em termos de  $\vartheta_2$  do segundo modo. É possível ver que o valor de  $l$

decrece monotonicamente com o aumento de  $\vartheta_2$  para um dado  $\beta$ ; o grau de pureza inicial do segundo modo decrece, o número  $l$  torna-se pequeno e conseqüentemente  $s$ .

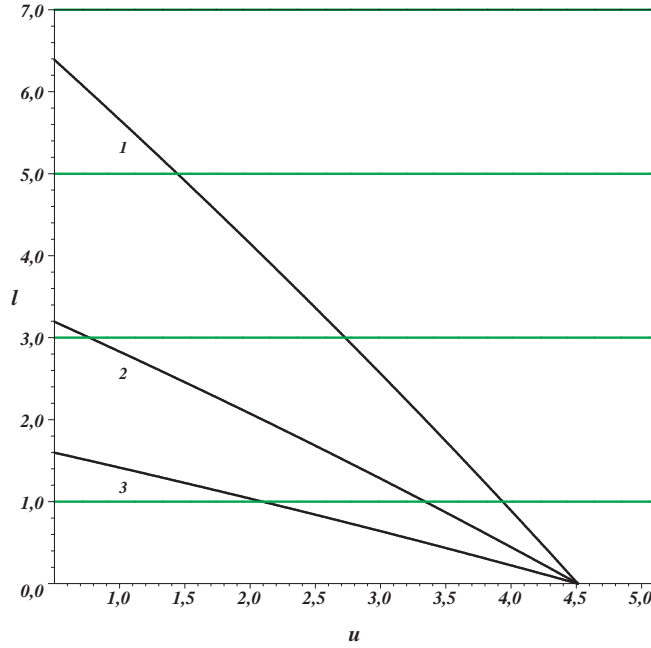


Figura 4.3: As curvas 1, 2 e 3 fornecem os valores de um número real  $l$  em termos de  $u = \vartheta_2 > 1/2$  com pureza  $\mathcal{P}_2 = (2\vartheta_2)^{-1}$ , respectivamente para  $\beta = 0,01$ ,  $\beta = 0,02$  e  $\beta = 0,04$ . Quanto menor é o valor de  $\beta$  maior é o número de vezes que o primeiro modo permanece comprimido. Todas as curvas são construídas com  $r_2 = 1,10$  e  $\nu = 2$ .

A figura (4.4) mostra o comportamento da compressão do primeiro modo  $\mathcal{G}_1$  no tempo para diferentes valores de  $\beta$ . O estado inicial do segundo modo é caracterizado por  $\vartheta_2 = 0,9$  e  $r_2 = 1,1$  com  $\mathcal{G}_2 \approx 0,2$ . Na curva 2 ( $\beta = 0,01$ ) identifica-se quando o primeiro modo desacopla-se do segundo modo (em  $\tau = n\pi/2$ ,  $n = 1, 3, 5$ ) com  $\mathcal{S}_1 < 1$ ; isto acontece três vezes ( $s = 3$ ) de acordo com o resultado da figura (4.3), uma vez que  $5 = n \leq l \simeq 5,8$ .

Na figura (4.5),  $l$  é determinado por diferentes valores de  $r_2$  considerando diferentes números médios de fótons  $\nu$ , e no caso do estado inicial para o segundo modo puro e misto.

Para valores fixos de  $\nu$  e  $\mathcal{G}_2$ , a possibilidade de transferir compressão do segundo modo para o primeiro desaparece se o coeficiente relativo ao acoplamento  $\beta$  vai a infinito. Por outro lado, para os valores fixos de  $\beta$  e  $\mathcal{G}_2$ , o primeiro modo não pode ficar comprimido se a temperatura é grande o bastante (mesmo se  $\mathcal{G}_2 \rightarrow 0$ ), sendo que para  $\nu \gg 1$  a equação

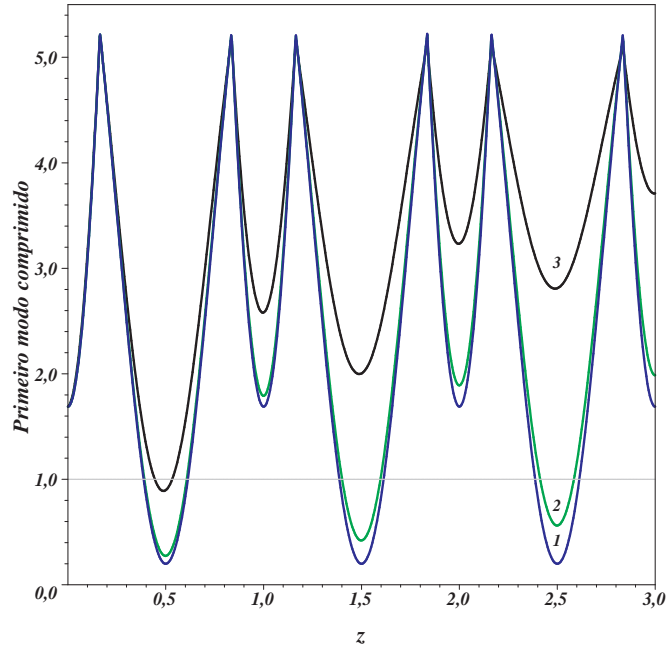


Figura 4.4: O comportamento no tempo ( $\tau = z\pi$ ) da compressão do primeiro modo é considerado para diferentes valores de  $\beta$ . As curvas azul (1), verde (2) e preta (3), referem-se respectivamente a  $\beta = 0$ ,  $\beta = 0,01$  e  $\beta = 0,02$  com  $\vartheta_1 = 1,7$ ,  $\vartheta_2 = 0,9$ ,  $r_1 = 0,35$ ,  $r_2 = 1,1$ ,  $\nu = 2$  e  $\sigma = 1$ .

(4.38) toma a seguinte forma simplificada:

$$l = \frac{1 - \mathcal{G}_2}{2\pi\beta\nu}. \quad (4.40)$$

É interessante observar que  $l$  tende a valores elevados quando  $\nu$  tende a valores extremamente pequenos, conforme observa-se na figura (4.6). Isto é, o número de vezes que o primeiro modo, inicialmente em estado não comprimido, torna-se comprimido é maior se a temperatura do reservatório for menor. Também se observa que  $l$  vai a infinito quando  $\beta$  vai a zero, conforme figura (4.7). Ou seja, número de vezes que o primeiro modo, inicialmente em estado não comprimido, torna-se comprimido também é maior se a razão da intensidade de acoplamento entre os modos e dos modos com o reservatório for menor.

Uma dependência típica do coeficiente de compressão no “tempo lento” ( $\tau$ ) é apresentada na figura (4.8) para diferentes valores de  $\beta$  e para valores de fase de acoplamento  $\sigma = \pm 1$ . Observa-se que para  $\sigma = 1$  a curva é contínua, no entanto apresenta picos e para  $\sigma = -1$  ela é contínua e derivável em todos os instantes.

Na figura (4.9) também é apresentada a dependência do coeficiente de compressão no

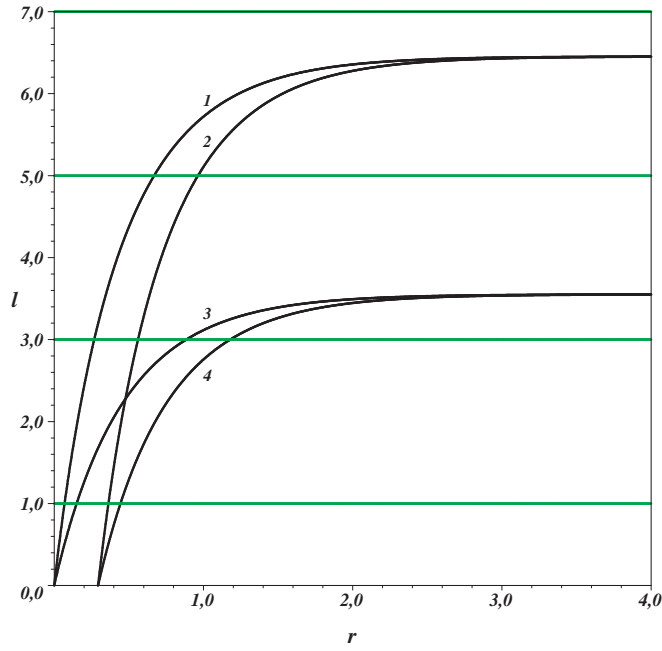


Figura 4.5: Todas as curvas fornecem o valor do número real  $l$  em termos de  $r = r_2 > 0$  para  $\beta = 0.02$ . Nas curvas 1 e 2 o número médio de fótons é  $\nu = 1$ , com  $\vartheta_2 = 0,5$  e  $\vartheta_2 = 0,9$ , respectivamente. Nas curvas similares 3 e 4 tem-se  $\nu = 2$ . Em ambos os casos, para grandes valores de  $r_2$  o número  $l$  depende somente de  $\nu$  e  $\beta$ .

“tempo lento” ( $\tau$ ), mas agora para diferentes temperaturas do reservatório  $\nu$  e valores de fase de acoplamento  $\sigma = \pm 1$ .

A superfície apresentada na figura (4.10) mostra a dependência  $\beta(\nu, \mathcal{G}_2)$  para o valor fixo de  $l = 1$ . Esta superfície define a fronteira entre os parâmetros  $\nu$ ,  $\mathcal{G}_2$  e  $\beta$  tal que é possível haver troca de compressão ou não.

O caso do reservatório a temperatura nula,  $\nu = 0$ , é diferente, porque a troca de compressão pode acontecer para qualquer valor grande da variável tempo e para qualquer valor grande do coeficiente de acoplamento, embora o valor absoluto da diferença negativa  $\mathcal{S}_1(\tau_{ex}^{(n)}, \beta) - 1$  vá assintoticamente a zero. A razão disto é que o estado estacionário assintótico neste caso coincide com o estado fundamental, que é puro do ponto de vista da estatística quântica. Talvez, este resultado signifique que o modelo baseado na equação (3.22) com  $\nu = 0$  é simples demais e não descreve todos os detalhes do comportamento do sistema físico em baixas temperaturas de forma adequada [8, 14].

Análogo a análise do efeito do reservatório nas propriedades de compressão dos modos, é interessante considerar o efeito do reservatório na pureza de cada um dos modos bosônicos.

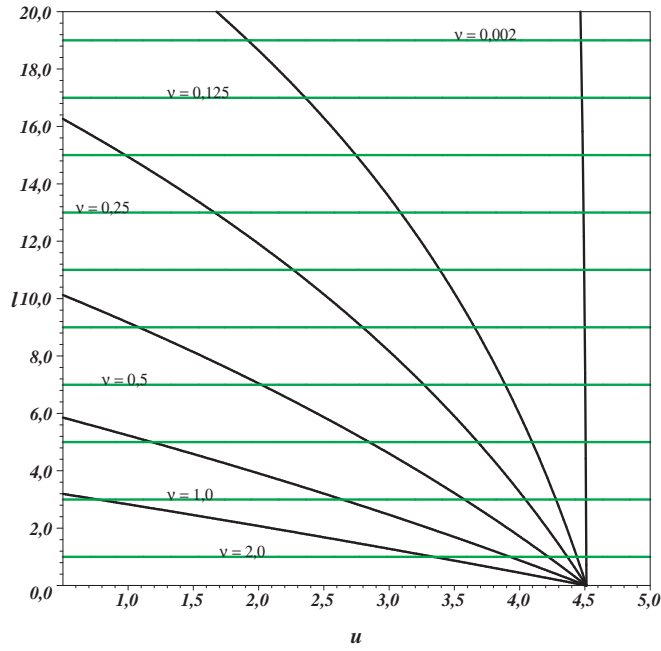


Figura 4.6: Comportamento de  $l$  para diferentes valores de  $\nu$ . Com a queda da temperatura (número de fótons  $\nu$ ) do reservatório aumenta o número de vezes  $l$  que o primeiro modo torna-se comprimido ( $l \rightarrow \infty$  quando  $\nu \rightarrow 0$ ). Foi considerado  $\beta = 0,02$  e  $r_2 = 1,10$ .

Contudo, para determinar o comportamento dos coeficientes de pureza de cada um dos modos, considera-se o problema em uma formulação mais conveniente, a das componentes de quadraturas dos modos bosônicos.

### 4.3 Propriedades de correlação entre os modos

Para estudar a dinâmica de correlação entre os modos, é conveniente introduzir as covariância de quadratura real e simétrica

$$q_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} \langle \hat{q}_\alpha \hat{q}_\beta + \hat{q}_\beta \hat{q}_\alpha \rangle,$$

onde  $q_\alpha$  são as componentes do vetor tetra-dimensional  $\mathbf{q} = (\hat{x}_1, \hat{p}_1, \hat{x}_2, \hat{p}_2)$ , escritos explicitamente no apêndice (D). Uma vez assumidos  $\langle \hat{a}_k \rangle = 0$ , todos os valores médios dos operadores de quadratura são iguais a zero,  $\langle q_\alpha \rangle = 0$ . Dois modos bosônicos, descritos em termos dos operadores de aniquilação e criação  $\hat{a}_k$  e  $\hat{a}_k^\dagger$  podem ser representados por meio dos operadores Hermitianos nas componentes de quadratura, de acordo com a de-

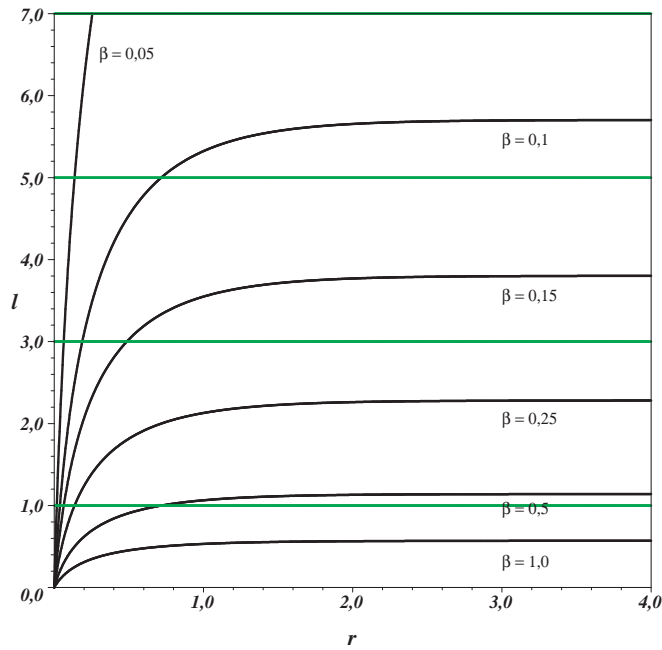


Figura 4.7: Comportamento de  $l$  para diferentes valores de  $\beta$ . Com a queda da intensidade da razão de acoplamento entre os modos e dos modos com o reservatório  $\beta$  aumenta o número de vezes  $l$  que o primeiro modo torna-se comprimido ( $l \rightarrow \infty$  quando  $\beta \rightarrow 0$ ). Foi considerado  $\nu = 0, 1$  e  $\vartheta_2 = 0, 5$ .

composição

$$\hat{a}_k = (\omega_k \hat{x}_k + i \hat{p}_k) / \sqrt{2\omega_k} \quad k = 1, 2. \quad (4.41)$$

Para simplificar, pode-se combinar a covariância real  $q_{\alpha\beta}$  em uma matriz de covariâncias  $\mathcal{Q}$  de ordem  $4 \times 4$ , dividida em blocos de ordem  $2 \times 2$  como segue:

$$\mathcal{Q} = \|q_{\alpha\beta}\| = \begin{vmatrix} \mathcal{Q}_{11} & \mathcal{Q}_{12} \\ \mathcal{Q}_{21} & \mathcal{Q}_{22} \end{vmatrix}, \quad (4.42)$$

onde  $\mathcal{Q}_{jk}$  é igual sua transposta, isto é,  $\mathcal{Q}_{kj} = \tilde{\mathcal{Q}}_{kj}$ . Para estados Gaussianos, a entropia de von Neumann  $\mathcal{V} = -\text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho})$  e a *pureza quântica*  $\mathcal{P} = \text{Tr}(\hat{\rho}^2)$  de um sistema completo, descrito pelo operador estatístico  $\hat{\rho}$ , e seus subsistemas, descritos pelo operador estatístico densidade reduzido da forma  $\hat{\rho}_1 = \text{Tr}_2(\hat{\rho})$ , podem ser expressos em termos dos determinantes  $D_0 = \det \mathcal{Q}$  e  $D_{ij} = \det \mathcal{Q}_{ij}$  [54, 63], onde  $\det \mathcal{Q}_{kk}$  e  $\det \mathcal{Q}_{12}$  podem ser escritos em duas formas equivalentes:

$$\det \mathcal{Q}_{kk} = \langle x_k^2 \rangle \langle p_k^2 \rangle - \frac{1}{4} \langle x_k p_k + p_k x_k \rangle^2 = \frac{1}{4} \langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \rangle^2 - |\langle \hat{a}_k^2 \rangle|^2, \quad (4.43)$$

$$\det \mathcal{Q}_{12} = \langle x_1 x_2 \rangle \langle p_1 p_2 \rangle - \langle x_1 p_2 \rangle \langle p_1 x_2 \rangle = |\langle \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rangle|^2 - |\langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle|^2. \quad (4.44)$$

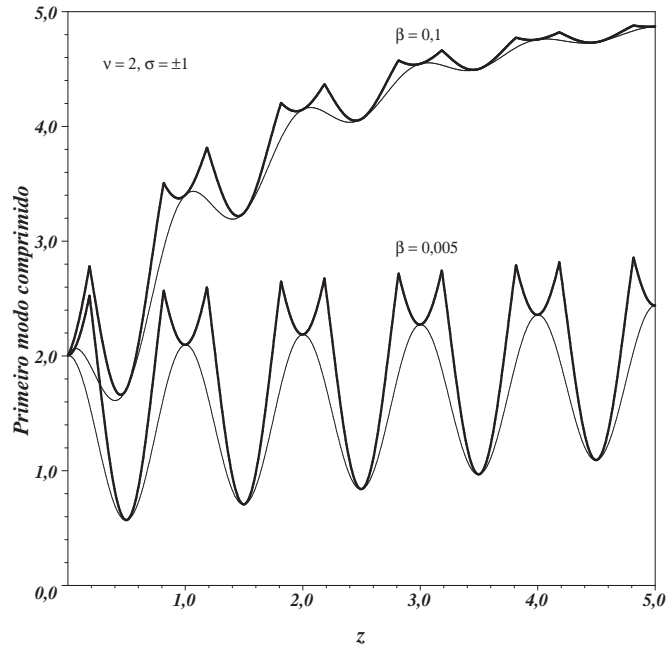


Figura 4.8: O comportamento no tempo ( $\tau = z\pi$ ) da compressão do primeiro modo é considerada para diferentes valores de  $\beta$ . Para o estado inicial considera-se  $\vartheta_1 = 1,30$ ,  $\vartheta_2 = 0,68$ ,  $r_1 = 0,13$ ,  $r_2 = 0,50$  tal que  $\mathcal{G}_1 \simeq 2,00$  e  $\mathcal{G}_2 \simeq 0,50$  com  $\nu = 2$ . A linha escura corresponde a  $\sigma = 1$  e a linha clara a  $\sigma = -1$ .

Em termos dos modos bosônicos verifica-se para o determinante  $D_{kk}$  a forma

$$D_{kk} = \det \mathcal{Q}_{kk} = \langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + 1/2 \rangle^2 - |\langle \hat{a}_k^2 \rangle|^2. \quad (4.45)$$

Portanto, os determinantes da matriz  $\mathcal{Q}$  e de suas matrizes bloco da diagonal  $\mathcal{Q}_{kk}$  estão relacionados com as purezas do sistema todo e seus subsistemas de acordo com as equações [61]

$$\mathcal{P} \equiv \text{Tr} \hat{\rho}^2 = (16 \det \mathcal{Q})^{-1/2}, \quad (4.46)$$

$$\mathcal{P}_k \equiv \text{Tr} \hat{\rho}_k^2 = (4 \det \mathcal{Q}_{kk})^{-1/2}. \quad (4.47)$$

Então, as quantidades  $D_0$  e  $D_{kk}$  também podem apresentar as características da entropia e serem interpretadas como os volumes efetivos do espaço de fase [54, 64–66]. A partir das soluções  $M_{i,j}$  da matriz (4.7) (formas explícitas em (4.17)-(4.22)) determina-se a forma explícita dos elementos da matriz  $\mathcal{Q}$  (apêndice D). Dessa forma, para o sistema de dois modos acoplados a um único reservatório obtém-se para os determinantes  $D_0$ ,  $D_{12}$  e  $D_{11}$  os seguintes resultados:

$$D_0(\tau, \beta) = e^{-8\beta\tau} \left[ \vartheta_1^2 \vartheta_2^2 + K(\tau) \vartheta_1 \vartheta_2 (\vartheta_1 R_2 + \vartheta_2 R_1) + \frac{1}{4} K^2(\tau) (\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 R_1 R_2) \right]$$

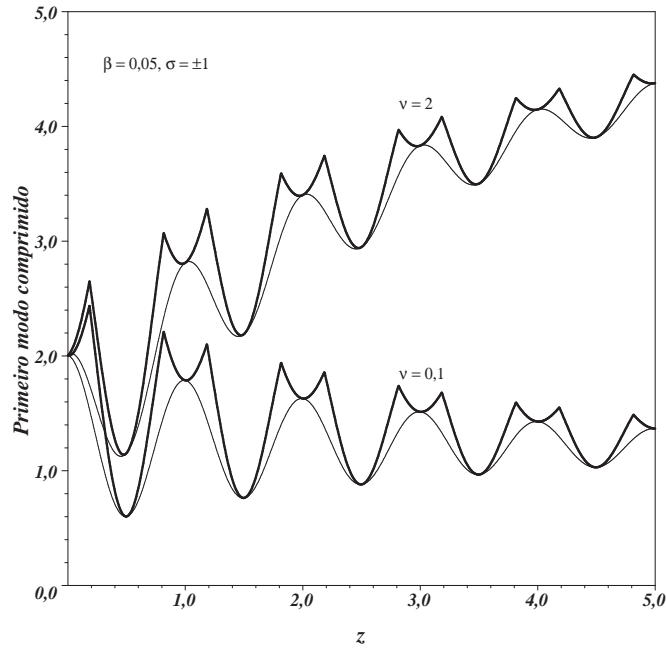


Figura 4.9: O comportamento no tempo ( $\tau = z\pi$ ) da compressão do primeiro modo é considerada para diferentes valores de  $\nu$ . Para o estado inicial considera-se  $\vartheta_1 = 1,30$ ,  $\vartheta_2 = 0,68$ ,  $r_1 = 0,13$ ,  $r_2 = 0,50$  tal que  $\mathcal{G}_1 \simeq 2,00$  e  $\mathcal{G}_2 \simeq 0,50$  com  $\beta = 0,05$ . A linha escura corresponde a  $\sigma = 1$  e a linha clara a  $\sigma = -1$ .

$$+ 4\vartheta_1\vartheta_2 + \frac{1}{4}K^3(\tau) (\vartheta_1 R_1 + \vartheta_2 R_2) + \frac{1}{16}K^4(\tau)], \quad (4.48)$$

$$D_{12}(\tau, \beta) = e^{-4\beta\tau} \left( \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 - 2\vartheta_1\vartheta_2\chi^{(+)} \right) S^2 C^2, \quad (4.49)$$

$$D_{11}(\tau, \beta) = e^{-4\beta\tau} \left[ \vartheta_1^2 C^4 + \vartheta_2^2 S^4 + 2\vartheta_1\vartheta_2\chi^{(+)} S^2 C^2 + K(\tau) (\vartheta_1 R_1 C^2 + \vartheta_2 R_2 S^2) + \frac{1}{4}K^2(\tau) \right], \quad (4.50)$$

onde tem-se  $\chi^{(\pm)}$  escrito na forma

$$\chi^{(\pm)} = \cosh(2r_1) \cosh(2r_2) \pm \sigma \sinh(2r_1) \sinh(2r_2). \quad (4.51)$$

O coeficiente  $D_{22}(\tau, \beta)$  pode ser obtido fazendo-se a troca de índices  $1 \rightleftharpoons 2$ .

A partir da relação dada em (4.47), pode-se determinar os coeficientes de pureza de ambos os modos de acordo com as equações

$$\mathcal{P}_1(\tau, \beta) = \frac{1}{\sqrt{4D_{11}(\tau, \beta)}}, \quad (4.52)$$

$$\mathcal{P}_2(\tau, \beta) = \frac{1}{\sqrt{4D_{22}(\tau, \beta)}}. \quad (4.53)$$



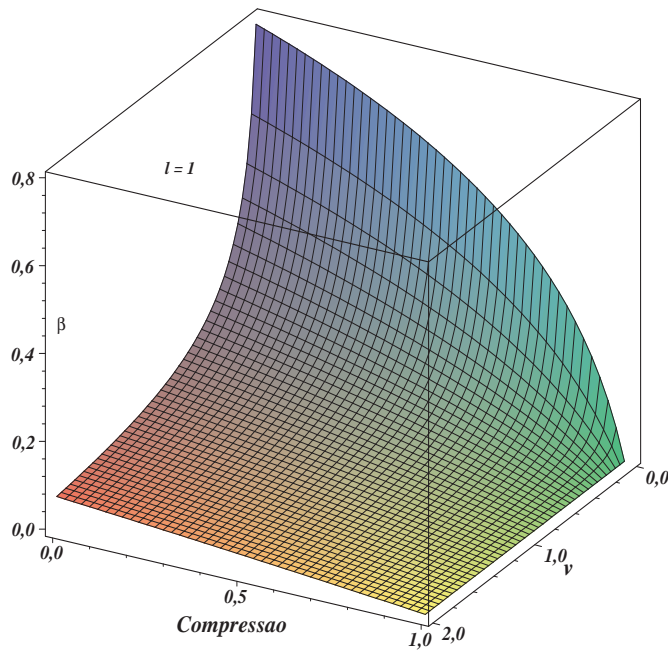


Figura 4.10:  $\beta(\nu, \mathcal{G}_2)$  como uma função do número médio de excitação e compressão inicial do segundo modo para o valor fixo de  $l = 1$ .

A partir dos coeficientes (4.52) e (4.53), pode-se ilustrar graficamente uma situação de transferência (troca) de pureza entre os modos para o caso sem dissipação. Na figura (4.11) é apresentado o comportamento da troca de pureza entre os dois modos na ausência do reservatório,  $\beta = 0$ . Observa-se uma periodicidade na transferência que ocorre um número infinito de vezes nos instantes em que o sistema desacopla. A figura (4.12) ilustra um caso particular do comportamento da pureza de cada um dos modos, na presença do reservatório  $\beta \neq 0$ . Para estados iniciais com  $\mathcal{P}_1(0, \beta) = 0,29$ ,  $\mathcal{P}_2(0, \beta) = 0,56$  e  $\nu = 2$ , observa-se uma diminuição da intensidade da pureza inicial de cada modo, levando-a para o mesmo valor limite no equilíbrio,  $\mathcal{P}_k = 0,2$ . De acordo com as equações (4.50), (4.52) e (4.53,) tem-se no equilíbrio:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{P}_k(\tau, \beta) = \frac{1}{2\nu + 1}, \quad k = 1, 2. \quad (4.54)$$

Nota-se que no caso da temperatura do reservatório nula  $\nu = 0$  o valor limite para a pureza de cada modo tende a 1; reservatório com temperatura baixa tende a “purificar” os estados de cada um dos modos na situação de equilíbrio. Este resultado é o reflexo da limitação deste modelo em baixas temperaturas. Ressalta-se que o estudo desta questão já está sendo considerado no momento.

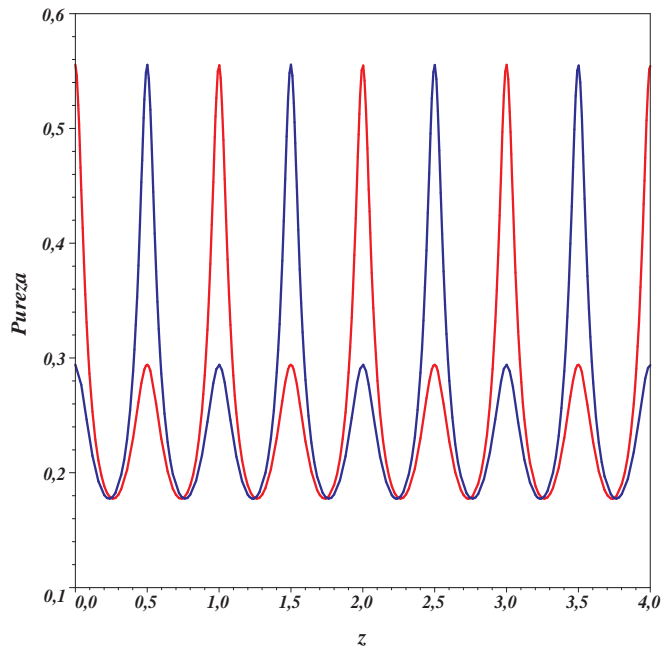


Figura 4.11: Comportamento da transferência de pureza no caso de estados iniciais com  $\mathcal{P}_1(0, \beta) = 0,29$  e  $\mathcal{P}_2(0, \beta) = 0,56$ , na ausência do reservatório ( $\beta = 0$ ). A curva azul representa a pureza do modo 1 e a curva vermelha a do modo 2. As curvas são construídas com  $\sigma = 1$  e  $\nu = 2$ .

Os coeficientes  $D_{kk}$  e o coeficiente de compressão  $S_k$ , dado em (4.28), caracterizam as propriedades estatísticas de cada um dos modos. Por outro lado, a interação entre os modos dá lugar à dependência estatística. Para estados Gaussianos toda informação nas correlações estatísticas entre os modos está contido no bloco fora da diagonal  $\mathcal{Q}_{12}$  da matriz de covariância total. Há elementos que podem ser de interesse considerar deste bloco  $2 \times 2$  [67]. O traço  $\mathcal{T}_{12}$  dado por

$$\mathcal{T}_{12} \equiv \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{Q}_{12} \mathcal{Q}_{21}) = |\langle \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rangle|^2 + |\langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle|^2, \quad (4.55)$$

associado à medida de correlação quântica e o determinante,

$$D_{12} \equiv \det \mathcal{Q}_{12} = |\langle \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rangle|^2 - |\langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle|^2, \quad (4.56)$$

relacionado a separabilidade da matriz densidade total dos modos acoplados. Para estados Gaussianos com valor médio nulo  $\langle \hat{a}_k \rangle$  o coeficiente  $\mathcal{T}_{12}$  fornece a medida de correlação entre flutuações do *número de fótons* em cada um dos modos [68]:

$$\mathcal{T}_{12} = \langle \hat{\mathcal{N}}_1 \hat{\mathcal{N}}_2 \rangle - \langle \hat{\mathcal{N}}_1 \rangle \langle \hat{\mathcal{N}}_2 \rangle, \quad \hat{\mathcal{N}}_k \equiv \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k. \quad (4.57)$$

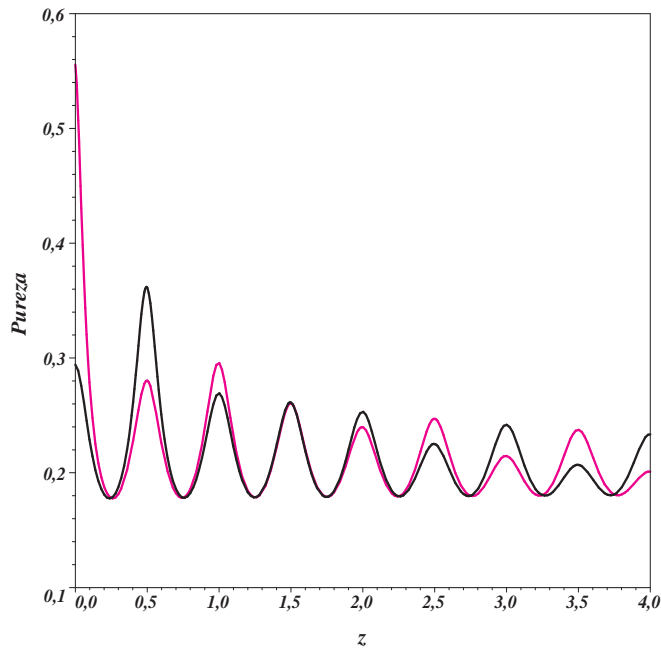


Figura 4.12: Comportamento da pureza de cada modo no caso de estados iniciais com  $\mathcal{P}_1(0, \beta) = 0,29$  e  $\mathcal{P}_2(0, \beta) = 0,56$ , na presença do reservatório ( $\beta \neq 0$ ). A curva preta representa a pureza do modo 1 e a curva rosa a do modo 2. As curvas são construídas com  $\beta = 0,02$ ,  $\sigma = 1$  e  $\nu = 2$ .

Sua dependência temporal para o caso em estudo é

$$\mathcal{T}_{12}(\tau) = e^{-4\beta\tau} [\vartheta_1^2 \cosh(4r_1) + \vartheta_2^2 \cosh(4r_2) - 2\vartheta_1\vartheta_2\chi^{(-)}] S^2 C^2. \quad (4.58)$$

Contudo, esse coeficiente não distingue entre estados separáveis e estados não separáveis, isto é, quando há ou não *emaranhamento* entre os modos. Para melhor entender essa distinção considera-se esta questão na seção seguinte.

## 4.4 Medidas de correlações quânticas

Ainda salientando a importância dos segundos momentos da teoria, no que diz respeito às questões relativas às correlações quânticas do sistema, se os dois modos do sistema em questão não estão correlacionados então todas as covariâncias cruzadas,  $\langle \hat{x}_1 \hat{x}_2 \rangle$ ,  $\langle \hat{p}_1 \hat{p}_2 \rangle$ ,  $\langle \hat{x}_1 \hat{p}_2 \rangle$ , e  $\langle \hat{x}_2 \hat{p}_1 \rangle$ , são iguais a zero. Assim, a diferença de zero em quaisquer destas covariâncias indica que os modos estão correlacionados. A recíproca não é verdadeira: há sistemas correlacionados, nos quais todas as covariâncias cruzadas de segunda ordem são

nulas. Este é o ponto fraco nessa construção, que a torna não-universal. Contudo, o conjunto de estados correlacionados com covariâncias não nulas é bastante grande, assim torna-se possível proceder. Cada covariância apenas não deve servir como uma boa medida de correlação quântica. Realmente, se os modos são representados pelos osciladores harmônicos com frequências  $\omega_k$ , então, as componentes de quadratura oscilam (na ausência de interação) como

$$\hat{x}_k(t) = \hat{x}_k(0) \cos(\omega_k t) + \hat{p}_k(0) \text{sen}(\omega_k t), \quad (4.59)$$

$$\hat{p}_k(t) = \hat{p}_k(0) \cos(\omega_k t) - \hat{x}_k(0) \text{sen}(\omega_k t), \quad (4.60)$$

de forma que os momentos de segunda ordem oscilam com as frequências  $\omega_{\pm} = \omega_2 \pm \omega_1$ . Porém, as combinações

$$\begin{aligned} A &= \langle \hat{p}_1 \hat{p}_2 \rangle + \langle \hat{x}_1 \hat{x}_2 \rangle, & B &= \langle \hat{x}_1 \hat{p}_2 \rangle - \langle \hat{p}_1 \hat{x}_2 \rangle, \\ C &= \langle \hat{x}_1 \hat{x}_2 \rangle - \langle \hat{p}_1 \hat{p}_2 \rangle, & D &= \langle \hat{x}_1 \hat{p}_2 \rangle + \langle \hat{p}_1 \hat{x}_2 \rangle, \end{aligned} \quad (4.61)$$

são transformadas da mesma maneira como as componentes dos vetores bi-dimensionais sob transformação ortogonal:

$$A(t) = A(0) \cos(\omega_- t) + B(0) \text{sen}(\omega_- t), \quad (4.62)$$

$$B(t) = B(0) \cos(\omega_- t) - A(0) \text{sen}(\omega_- t), \quad (4.63)$$

$$C(t) = C(0) \cos(\omega_+ t) + D(0) \text{sen}(\omega_+ t), \quad (4.64)$$

$$D(t) = D(0) \cos(\omega_+ t) - C(0) \text{sen}(\omega_+ t). \quad (4.65)$$

Conseqüentemente, as somas  $A^2 + B^2$  e  $C^2 + D^2$  não dependem do tempo (se a interação não ocorre). Então, a quantidade

$$F = \frac{1}{2}[A^2 + B^2 + C^2 + D^2] = \langle \hat{x}_1 \hat{x}_2 \rangle^2 + \langle \hat{p}_1 \hat{p}_2 \rangle^2 + \langle \hat{x}_1 \hat{p}_2 \rangle^2 + \langle \hat{p}_1 \hat{x}_2 \rangle^2, \quad (4.66)$$

parece ser uma boa característica de medida de correlação quântica ou emaranhamento, porque (a) é positiva, (b) não depende do tempo na ausência de interações, (c) contém todas as covariâncias cruzadas. É desejável normalizar  $F$  de alguma maneira para obter uma medida adimensional com limite superior unitário. Para encontrar o fator de normalização conveniente, é necessário reescrever as combinações (4.62)-(4.65) em termos dos operadores de criação e aniquilação:

$$A = \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rangle + \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \rangle, \quad B = i(\langle \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rangle - \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \rangle), \quad (4.67)$$

$$C = \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle + \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rangle, \quad D = i(\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rangle - \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle), \quad (4.68)$$

obtendo-se a quantidade  $F$  na forma

$$F = 2|\langle \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rangle|^2 + 2|\langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle|^2. \quad (4.69)$$

Agora, levando-se em conta que as covariâncias envolvidas devem satisfazer as desigualdades seguintes (que são os casos especiais de uma grande família das relações de incerteza generalizadas [61]):

$$\langle \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rangle \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \rangle \leq \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle, \quad (4.70)$$

$$\langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rangle \leq \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle, \quad (4.71)$$

$$\langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rangle \leq \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle. \quad (4.72)$$

As desigualdades (4.71) e (4.72) (atenção à ordem dos operadores nos lados da direita) podem ser combinadas em uma única (embora mais fraca) desigualdade

$$\langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rangle \leq \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle + \frac{1}{2} (\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle + \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle). \quad (4.73)$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} |\langle \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rangle|^2 + |\langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle|^2 &\leq 2\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle + \frac{1}{2} (\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle + \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle) \\ &= 2\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 - \frac{1}{2} (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) < 2\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2, \end{aligned} \quad (4.74)$$

onde

$$\mathcal{E}_k = \langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle + \frac{1}{2} \equiv \frac{1}{2} (\langle x_k x_k \rangle + \langle p_k p_k \rangle), \quad (4.75)$$

é a energia de flutuação do  $k$ -ésimo modo. Levando em consideração a última desigualdade em (4.74), é razoável definir um coeficiente adimensional de medida de correlação quântica como

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \left[ \frac{\langle x_1 x_2 \rangle^2 + \langle p_1 p_2 \rangle^2 + \langle x_1 p_2 \rangle^2 + \langle p_1 x_2 \rangle^2}{4\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \right]^{1/2} \\ &= \left[ \frac{|\langle \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rangle|^2 + |\langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle|^2}{2(\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle + 1/2)(\langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle + 1/2)} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Ele satisfaz a desigualdade  $0 \leq \mathcal{Y} < 1$  e o seu limite superior 1 não pode ser atingido. Usando o fator de normalização no denominador de (4.76) na forma  $4\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ , pode-se obter para alguns estados a igualdade exata  $\mathcal{Y} = 1$ . Porém, tal definição resultaria em sérios problemas para os estados cujas energias de flutuações estão perto do valor mínimo

$\mathcal{E}_{min} = 1/2$ , assim, neste caso o denominador poderia se tornar zero, de forma a poder surgir um valor indefinido. Observando a matriz covariância (4.42), nota-se que  $F = \text{Tr}(\mathcal{Q}_{12}\mathcal{Q}_{21})$ , considerando que

$$\det \mathcal{Q}_{12} = \frac{1}{2}[A^2 + B^2 - C^2 - D^2] = |\langle \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rangle|^2 - |\langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle|^2. \quad (4.77)$$

Levando em conta que  $\mathcal{E}_k = (1/2)\text{Tr}\mathcal{Q}_{kk}$ , pode-se escrever o parâmetro  $\mathcal{Y}$  na forma de matriz compacta

$$\mathcal{Y} = \left[ \frac{\text{Tr}(\mathcal{Q}_{12}\mathcal{Q}_{21})}{\text{Tr}\mathcal{Q}_{11}\text{Tr}\mathcal{Q}_{22}} \right]^{1/2}, \quad (4.78)$$

baseada nos traços dos blocos das covariâncias. Usando a relação  $2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2} \leq \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = (1/2)\text{Tr}\mathcal{Q}$ , há um outro parâmetro de medida de correlação quântica escrito como

$$\tilde{\mathcal{Y}} = \frac{\sqrt{2\text{Tr}(\mathcal{Q}_{12}\mathcal{Q}_{21})}}{\text{Tr}\mathcal{Q}}, \quad (4.79)$$

que obedece a desigualdade  $\tilde{\mathcal{Y}} \leq \mathcal{Y}$ . Na ausência de reservatório, a medida  $\tilde{\mathcal{Y}}$ , foi considerada em [13,67] como uma boa medida de “emaranhamento”, para sistemas de duas partes. Em termos dos operadores bosônicos pode ser escrita como

$$\tilde{\mathcal{Y}} = \frac{\sqrt{2(|\langle a_1 a_2^\dagger \rangle|^2 + |\langle a_1 a_2 \rangle|^2)}}{\langle a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1 \rangle}. \quad (4.80)$$

A medida (4.80) obedece a desigualdade  $0 \leq \tilde{\mathcal{Y}} < 1$  e para estados *Gaussianos* com valor médio *zero*  $\langle \hat{a}_k \rangle$ , a medida (4.80) também fornece uma boa medida de emaranhamento ou, mais apropriadamente, da intensidade de correlação quântica entre os modos acoplados; envolve as medidas de correlação entre as flutuações do *número de fótons* (4.57) em cada modo [68] e as suas energias de flutuações. Da solução da matriz das covariâncias obtida anteriormente, é possível ilustrar qual seria o comportamento das medidas (4.76) ou (4.80), sob a influência do reservatório ( $\beta \neq 0$ ). Assim, de forma explícita, tem-se para (4.80):

$$\tilde{\mathcal{Y}}(\tau, \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ \frac{[\Gamma_2 - 2\vartheta_1\vartheta_2\chi^{(-)}]^{1/2}}{\Gamma_1 + K(\tau)} \right\} |\text{sen}(2\tau)|, \quad (4.81)$$

onde  $\Gamma_k$ ,  $\chi^{(\pm)}$  e  $\sigma$  são definidos pelas relações

$$\Gamma_k = \vartheta_1^k \cosh(2k r_1) + \vartheta_2^k \cosh(2k r_2), \quad (4.82)$$

$$\chi^{(\pm)} = \cosh(2r_1) \cosh(2r_2) \pm \sigma \sinh(2r_1) \sinh(2r_1), \quad (4.83)$$

$$\sigma = \cos(2\phi). \quad (4.84)$$

O fator  $K(\tau)$  no denominador de (4.81) mostra que o efeito do reservatório nos modos acoplados é o decréscimo do máximo local desta medida de correlação. O instante  $\tau_m$  de máximo para a correlação (4.81) pode ser determinado da condição

$$\left. \frac{d\tilde{\mathcal{Y}}(\tau, \beta)}{d\tau} \right|_{\tau_m} = 0, \quad (4.85)$$

que implica na equação transcendental

$$\operatorname{tg} 2\tau_m = \frac{e^{-2\beta\tau_m}}{\beta} \left[ \frac{\Gamma_1 + K(\tau_m)}{(2\nu + 1)} \right]. \quad (4.86)$$

Então para diferentes valores de parâmetros de estados iniciais e valores de acoplamento  $\sigma$  as soluções de (4.86) definem os valores de  $\tau_m$ . Contudo, na ausência do reservatório ( $\beta = 0$ ) a medida (4.81) assume a forma

$$\tilde{\mathcal{Y}}(\tau, 0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \frac{\sqrt{\Gamma_2 - 2\vartheta_1\vartheta_2\chi^{(-)}}}{\Gamma_1} \right] |\operatorname{sen}(2\tau)|, \quad (4.87)$$

e neste caso, os modos acoplados tem seu máximo de (4.81) nos instantes de tempo  $\tau_{m_0}^{(n)}$  dados por

$$\tau_{m_0}^{(n)} = (2n + 1) \frac{\pi}{4}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.88)$$

Além disso, neste caso, a medida  $\tilde{\mathcal{Y}}(\tau_{ex}, 0) = 0$  é nula nos instantes em que o sistema desacopla, isto é, em  $\tau_{ex}^{(n)}$ . A figura (4.13) ilustra o comportamento da medida  $\tilde{\mathcal{Y}}(\tau, \beta)$  no tempo  $\tau$  para três condições diferentes de valores de  $\beta$ ; ausência de dissipação  $\beta = 0$ , reservatório fracamente acoplado  $\gamma = 0,01\rho$  e reservatório fortemente acoplado  $\gamma = 0,1\rho$ . Nota-se que quanto maior a intensidade de acoplamento dos modos com o reservatório, mais rapidamente ocorre o enfraquecimento da intensidade máxima de correlação entre modos.

Nesta seção ilustra-se brevemente o efeito do reservatório na medida de emaranhamento, anteriormente definida [11, 13, 67], aplicada a sistemas fechados e determinado a partir do conhecimento das soluções das matrizes  $\mathcal{Q}$ . Na seção seguinte é apresentado um critério de emaranhamento envolvendo a decomposição dos operadores densidade reduzidos de cada modo, que expressa a natureza da correlação dos modos interagentes (se o sistema está ou não emaranhado) num sentido puramente estatístico. Será utilizado este critério para estabelecer regras sobre valores de parâmetros de estados e do sistema, para que exista ou não emaranhamento no sistema, nos limites de validade do modelo estudado.

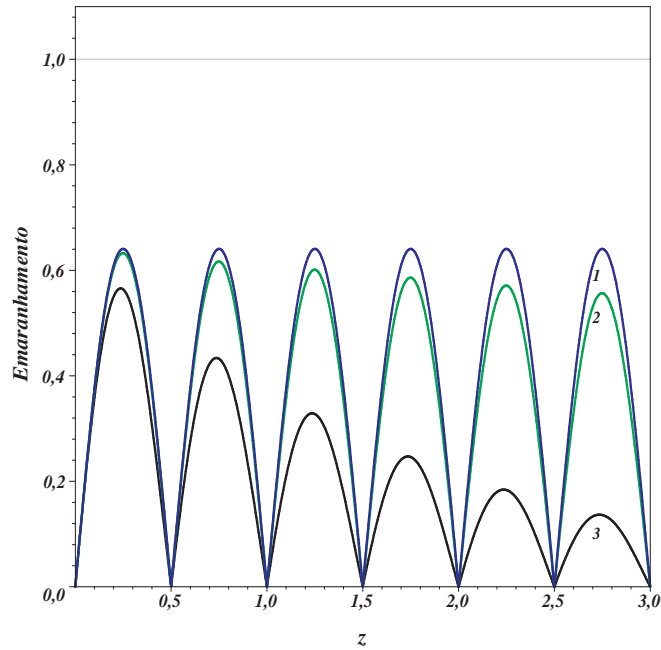


Figura 4.13: O comportamento no tempo ( $\tau = z\pi$ ) da medida de correlação quântica é considerado para diferentes valores de  $\beta$ . As curvas azul (1), verde (2) e preta (3) referem-se respectivamente a  $\beta = 0$ ,  $\beta = 0,01$  e  $\beta = 0,1$  com  $\vartheta_1 = 1,7$ ,  $\vartheta_2 = 0,9$ ,  $r_1 = 0,35$ ,  $r_2 = 1,1$ ,  $\nu = 2$  e  $\sigma = 1$ . A reta em 1 indica o limite superior que não pode ser atingido.

## 4.5 Separabilidade como critério de emaranhamento

A principal questão no problema da análise de correlação é como distinguir a correlação quântica da clássica [69, 70]. É normalmente formulado em termos do problema de separabilidade de estados de quânticos mistos, ou seja, a possibilidade de representar o operador estatístico  $\hat{\rho}_{tot}$  do sistema total como uma soma de produtos diretos de operadores estatísticos que agem em cada modo separadamente [68],

$$\hat{\rho}_{tot}(t) = \sum_i p_i \hat{\rho}_1^{(i)}(t) \otimes \hat{\rho}_2^{(i)}(t), \quad p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1, \quad (4.89)$$

em oposição a condição não separável, expressa como

$$\hat{\rho}_{tot}(t) = \sum_i p_i \hat{\rho}_{12}^{(i)}(t), \quad p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1, \quad (4.90)$$

para qualquer instante de tempo  $t > 0$ . Os operadores exponenciais Gaussianos não podem ser representados como somas finitas da forma (4.89). Porém, se for permitida a substituição da soma por uma integral, isto é, se a decomposição contínua por um número infinito de produtos entre operadores é admissível, então certas famílias de estados



Gaussianos ficam separáveis. Foi mostrado [71–74] que a separabilidade para sistemas de variáveis contínuas de estados Gaussianos é equivalente a sua “classicalidade”, no sentido de possuir uma P-distribuição de Sudarshan-Glauber bem definida. A propósito dos objetivos desse trabalho, o critério mais conveniente de separabilidade é o apresentado em [72], porque é expresso diretamente em termos dos invariantes da matriz covariância de blocos (4.42). Ou seja, o estado Gaussiano possuindo a matriz de covariância  $\mathcal{Q}$  é separável se

$$I_1 I_2 + (|I_3| - 1/4)^2 - I_4 \geq (I_1 + I_2)/4, \quad (4.91)$$

onde,

$$\begin{aligned} I_1 &= \det \mathcal{Q}_{11}, & I_2 &= \det \mathcal{Q}_{22}, & I_3 &= \det \mathcal{Q}_{12}, \\ I_4 &= \text{Tr}(\mathcal{Q}_{11} \Sigma \mathcal{Q}_{12} \Sigma \mathcal{Q}_{22} \Sigma \mathcal{Q}_{21} \Sigma), & \Sigma &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Para estados não Gaussianos a desigualdade (4.91) é a condição necessária para separabilidade [72]. Levando em conta que o termo  $I_4$ , dado pelo traço do produto de oito matrizes, está de fato incorporado no determinante da matriz das covariâncias total, devido à identidade [72]

$$\det \mathcal{Q} = I_1 I_2 + I_3^2 - I_4, \quad (4.93)$$

a condição de separabilidade (4.91) pode ser escrita em termos da matriz  $\mathcal{Q}$ . Dessa forma, introduzindo o coeficiente de separabilidade na forma [73]

$$\mathcal{Z}(\tau, \beta) = \det \mathcal{Q} + \frac{1}{16} - \frac{1}{4}(\det \mathcal{Q}_{11} + \det \mathcal{Q}_{22}) - \frac{1}{2}|\det \mathcal{Q}_{12}|. \quad (4.94)$$

e o critério de estados separáveis dado pela desigualdade  $\mathcal{Z}(\tau, \beta) \geq 0$ : se a separabilidade é positiva então diz-se que os modos interagentes estão desemaranhados, isto é, estão classicamente correlacionados.

Na ausência da dissipação, considerando as soluções das matrizes de covariâncias com  $\beta = 0$ , tem-se para a equação (4.94) o seguinte resultado:

$$\mathcal{Z}(\tau, 0) = \left(\vartheta_1^2 - \frac{1}{4}\right) \left(\vartheta_2^2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} \text{sen}^2(2\tau) \mathcal{U}(\vartheta_1, \vartheta_2), \quad (4.95)$$

onde a função  $\mathcal{U}$  está dada na forma

$$\mathcal{U}(\vartheta_1, \vartheta_2) = (\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 - 2\chi^{(+)}\vartheta_1\vartheta_2) - |(\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 - 2\chi^{(+)}\vartheta_1\vartheta_2)|. \quad (4.96)$$

Na presença de dissipação, usando as equações (4.48)-(4.50), é possível expressar o parâmetro da separabilidade (4.94) como

$$\mathcal{Z}(\tau) = \frac{1}{16}z_1(\tau)z_2(\tau)e^{-8\beta\tau} + \frac{1}{2}D_{12}(\tau) - \frac{1}{2}|D_{12}(\tau)|, \quad (4.97)$$

onde

$$z_k(\tau) = K^2(\tau) - e^{4\beta\tau} + 4\vartheta_k^2 + 4K(\tau)\vartheta_k R_k. \quad (4.98)$$

Na ausência do reservatório ( $\beta = 0$ ), se

$$\chi^{(+)} - \left(\frac{v_1^2 + v_2^2}{2v_1v_2}\right) \leq 0. \quad (4.99)$$

o sistema permanece separável todo o instante de tempo  $t > 0$ . Contudo, se a condição (4.99) não é satisfeita pelos parâmetros do sistema, a função  $\mathcal{Z}(\tau)$  assume um comportamento decrescente no intervalo  $0 < \tau < \pi/4$ , mas o estado pode permanecer *emaranhado* ( $\mathcal{Z} < 0$ ) durante algum intervalo de tempo somente se [57]

$$\chi^{(+)} - 2\vartheta_1\vartheta_2 - (8\vartheta_1\vartheta_2)^{-1} \equiv \chi_s > 0. \quad (4.100)$$

Este resultado implica em uma regra de seleção para os valores dos parâmetros do estado inicial  $\vartheta_k$  e  $r_k$  para o sistema permanecer emaranhado, em algum intervalo de tempo. O instante  $\tau_e$  da “transição de fase” de estado separável para estado não separável (emaranhado) é determinado pela equação

$$\text{tg}^2(2\tau_e) = \frac{2(\vartheta_1^2 - 1/4)(\vartheta_2^2 - 1/4)}{\vartheta_1\vartheta_2(\chi^{(+)} - \chi_e)} \quad (4.101)$$

onde  $\chi_e = 2\vartheta_1\vartheta_2 + (8\vartheta_1\vartheta_2)^{-1}$ . Nota-se que existe uma família de estados iniciais fatorados com alto grau de mistura  $\vartheta_k \gg 1/2$ , que se tornam *emaranhados* na ausência de dissipação: esta família consiste de estados muito comprimidos onde  $\mathcal{S}_k \ll 1$  com  $r_k \gg 1$ .

No caso em que há presença do reservatório ( $\beta \neq 0$ ), é possível determinar uma forma exata para o coeficiente de separabilidade a partir dos resultados das equações (4.48)-(4.50). Deste modo a equação (4.94) se reduz a

$$\mathcal{Z}(\tau, \beta) = \mathcal{Z}_0^\beta(\tau) + \frac{1}{2}D_{12}(\tau) - \frac{1}{2}|D_{12}(\tau)|, \quad (4.102)$$

com  $\mathcal{Z}_0^\beta(\tau)$  escrito como

$$\mathcal{Z}_0^\beta(\tau) = \frac{z_1(\tau)z_2(\tau)}{16}e^{-8\beta\tau}, \quad (4.103)$$

onde  $z_k(\tau) = K^2(\tau) - e^{4\beta\tau} + 4\vartheta_k^2 + 4K(\tau)\vartheta_k R_k$ . A partir da equação (4.102) pode-se verificar o efeito da dissipação no grau de correlação do sistema acoplado, para qualquer conjunto de parâmetros de estados iniciais Gaussianos, intensidade de acoplamento entre modos e intensidade de acoplamento dos modos com o reservatório. Na figura (4.14) é ilustrado o comportamento da separabilidade para alguns casos particulares. É possível observar o

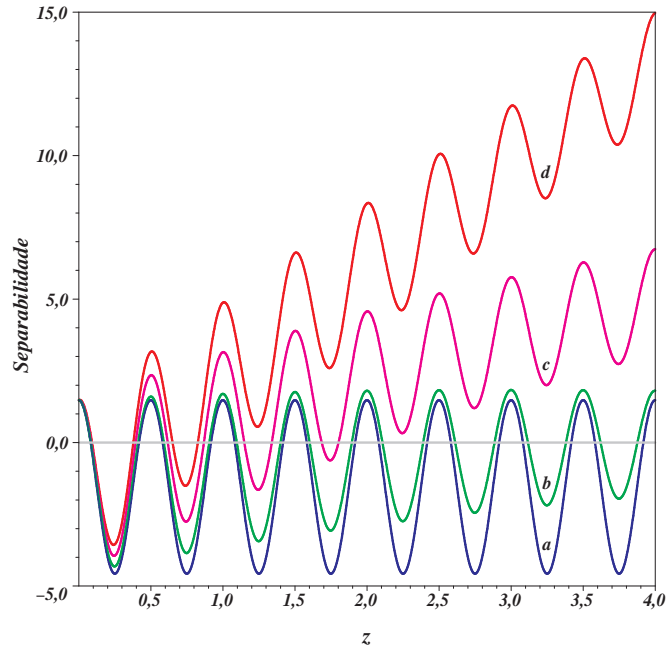


Figura 4.14: O comportamento no tempo ( $\tau = z\pi$ ) da separabilidade é considerado para diferentes valores de  $\beta$  com  $\vartheta_1 = 1,7$ ,  $\vartheta_2 = 0,9$ ,  $r_1 = 0,35$ ,  $r_2 = 1,1$  e  $\sigma = 1$  (Note que  $\chi_s = 5,9 > 0$  com  $\beta = 0$ ). A curva azul (a) corresponde a ausência de reservatório,  $\beta = 0$  e a curva verde (b) quando  $\beta = 0,01$  (os modos estão acoplados ao reservatório) mas com o número médio de fótons igual a zero  $\nu = 0$ . As curvas rosa (c) e laranja (d) correspondem respectivamente a  $\nu = 1$  e  $\nu = 2$  com  $\beta = 0,01$ .

quanto a intensidade de acoplamento com o reservatório  $\beta$ , bem como a temperatura do reservatório  $\nu$  afetam consideravelmente o sistema: o reservatório deteriora a capacidade do sistema de estabelecer quaisquer diferentes tipos de correlação quântica, em especial a capacidade de emaranhamento, conforme a critério de separabilidade de Simon. Uma análise quantitativa deste problema para situações de acoplamentos mais gerais está sendo considerada neste momento e será apresentada em trabalhos futuros. Na seção seguinte considera-se uma situação particular para o coeficiente de separabilidade, e analisa-se quantitativamente como a temperatura do reservatório afeta a capacidade de emaranhamento

no sistema.

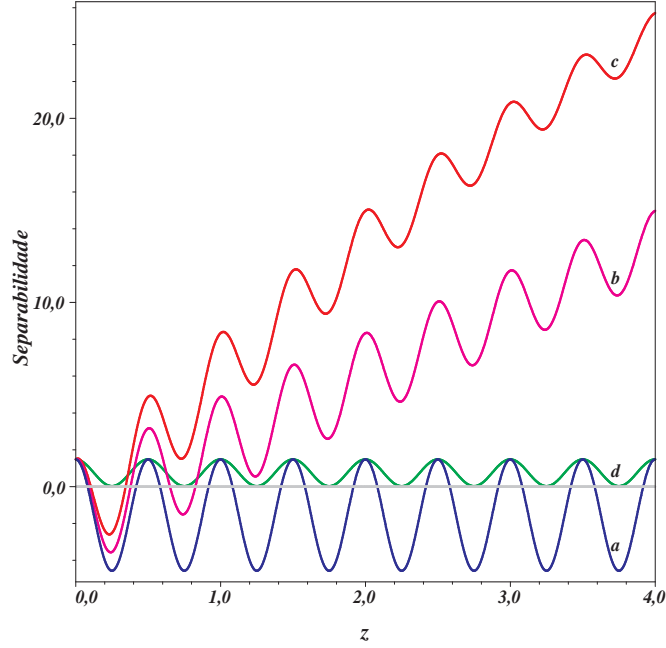


Figura 4.15: O comportamento no tempo ( $\tau = z\pi$ ) da separabilidade é considerado para diferentes valores de  $\beta$  com  $\vartheta_1 = 1,7$ ,  $\vartheta_2 = 0,9$ ,  $r_1 = 0,35$ ,  $r_2 = 1,1$ ,  $\sigma = 1$  e  $\nu = 2$ . A curva azul (a) corresponde a ausência de reservatório,  $\beta = 0$ , a curva rosa (b) quando  $\beta = 0,01$  e a curva laranja (c) quando  $\beta = 0,02$  ( $\beta \neq 0$  os modos estão acoplados ao reservatório). A curva verde (d) corresponde a ausência do reservatório  $\beta = 0$  mas com  $r_2 = 0,55$ .

## 4.6 Temperatura crítica do reservatório

Agora será apresentado como a presença e acoplamento ao reservatório térmico influenciam a possibilidade de emaranhamento. Há diferentes casos específicos, sendo que existem quatro parâmetros independentes,  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$ ,  $r_1$  e  $r_2$ , caracterizando os estados iniciais. Porém, do ponto de vista do problema do emaranhamento, o caso mais interessante ocorre quando  $\vartheta_1 \sim \vartheta_2 \gg 1$ , isto é, quando os estados iniciais fatorados estão altamente misturados, contudo eles não estão emaranhados no processo de evolução. As equações (4.83) e (4.100) sugerem que os parâmetros de compressão  $r_1$  e  $r_2$  também tenham que ser grandes (pelo menos um deles) para tornar os modos emaranhados (porque a presença do acoplamento pode deteriorar apenas a possibilidade de emaranhamento).

Supondo que os parâmetros  $r_1$  e  $r_2$  tenham a mesma ordem de magnitude, ou seja, considerando algum subconjunto de todos os possíveis estados iniciais, então a suposição  $r_1 \sim r_2 \gg 1$  resulta na relação

$$\sinh(2r_k) \approx \cosh(2r_k) = R_k \gg 1,$$

tal que

$$\chi^{(+)} \approx R_1 R_2 (1 + \sigma), \quad (4.104)$$

(sendo  $\sigma > -1$ ). Neste caso, levando em conta as equações (4.49), (4.97) e (4.98), obtém-se, com relação a valores grandes de  $\vartheta_k$  e  $R_k$ , para qualquer valor fixo de  $\tau$ , a seguinte expressão assintótica para o coeficiente de separabilidade:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \approx & \vartheta_1 \vartheta_2 R_1 R_2 e^{-4\beta\tau} [K^2 e^{-4\beta\tau} - 2(1 + \sigma)C^2 S^2] \\ & + \vartheta_1 \vartheta_2 e^{-8\beta\tau} [\vartheta_1 \vartheta_2 + K(R_1 \vartheta_2 + R_2 \vartheta_1)] + \dots, \end{aligned} \quad (4.105)$$

onde foi desprezado termos de pequena ordem de magnitude. O lado direito de (4.105) pode ser negativo, significando uma possibilidade de emaranhamento no instante  $\tau$ , somente se os termos quadrados dentro dos colchetes da primeira linha forem negativos. Devido as equações (4.24) e (4.25), isto implica limitações no número máximo de excitação  $\nu$  do reservatório:

$$2\nu + 1 < \frac{\sqrt{(1 + \sigma)/2} |\sinh(2\tau)|}{1 - \exp(-2\beta\tau)}. \quad (4.106)$$

O lado esquerdo de (4.106) pode ser escrito em termos da temperatura do reservatório  $T$  como  $\coth(\Omega/2T)$ .

Fazendo o valor máximo da função no lado direito da equação (4.106), obtém-se o valor crítico  $\nu_c(\beta)$ , tal que nenhum emaranhamento pode ocorrer a qualquer tempo para estados mistos inicialmente fatorados com  $\vartheta_1 \sim \vartheta_2$  e  $r_1 \sim r_2$ , se  $\nu > \nu_c(\beta)$ . No caso de acoplamento fraco,  $\beta \ll 1$ , os valores críticos  $\nu_c$  e  $T_c$  são dados pelas fórmulas

$$\nu_c(\beta) \approx \frac{\sqrt{(1 + \sigma)/2}}{2\beta}, \quad T_c(\beta) \approx \frac{\Omega \sqrt{(1 + \sigma)/2}}{2\beta}. \quad (4.107)$$

Além disso, o coeficiente de acoplamento também não pode ser grande, pois a desigualdade (4.106) não pode ser satisfeita, se  $\beta > \sqrt{(1 + \sigma)/2}$ , desde que  $1 + 2\nu \geq 1$ . O lado direito de (4.107) torna-se zero para  $\sigma = -1$ . Isto significa que estados iniciais altamente misturados

com  $r_1 \sim r_2$  não podem ficar emaranhados para este valor de  $\sigma$ , se  $\beta > 0$ . Neste caso é possível escolher, por exemplo,  $r_1 = 0$  mas  $r_2 = r > 0$ . Então o parâmetro  $\sigma$  torna-se irrelevante. Sob esta escolha, a equação (4.97) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\tau) &= \frac{1}{16}e^{-8\beta\tau}W_1(\tau) [W_2(\tau) + 8K(\tau)\vartheta_2\sinh^2(r)] \\ &+ S^2C^2e^{-4\beta\tau} [(\vartheta_2 - \vartheta_1)^2 - 4\vartheta_1\vartheta_2\sinh^2(r)], \end{aligned} \quad (4.108)$$

onde

$$W_j(\tau) = [K(\tau) + 2\vartheta_j]^2 - e^{4\beta\tau}. \quad (4.109)$$

Se  $\beta = 0$ , então  $K = 0$  e a condição  $\mathcal{Z} < 0$  resulta (por exemplo, para o valor máximo do produto  $SC = 1/2$  em  $\tau = \pi/4$ ) no caso especial da condição (4.100),

$$\sinh(r) > \frac{4\vartheta_2\vartheta_1 - 1}{4\sqrt{\vartheta_1\vartheta_2}}, \quad (4.110)$$

que mostra onde o emaranhamento é impossível, a menos que pelo menos um dos modos esteja inicialmente em um estado comprimido com um coeficiente de compressão grande  $r \gg 1$ .

A equação (4.108) mostra que  $\mathcal{Z}(\tau)$  pode ficar negativa para a escolha de algum valor grande do parâmetro  $r$ , somente se o coeficiente em  $\sinh^2(r)$ , no lado direito, for negativo (pois todos os outros termos no lado direito são positivos). Esta condição é equivalente a condição de positividade da quantidade

$$\mathcal{N} = 8\vartheta_1S^2C^2 - e^{-4\beta\tau}W_1K. \quad (4.111)$$

O primeiro termo (positivo) no lado direito de (4.111) depende linearmente do parâmetro  $\vartheta_1$ , visto que o segundo (negativo) depende de  $\vartheta_1$  *quadrático*, de acordo com a equação (4.109). Conseqüentemente, para alguma relação entre os parâmetros  $\beta$ ,  $\nu$  e  $\vartheta_1$  (e um  $\vartheta_2$  arbitrário), o valor de  $\mathcal{N}$  pode ser negativo, tal que o emaranhamento *nunca* pode ser encontrado, para *qualquer valor do coeficiente de compressão*.

A quantidade  $\mathcal{N}$  é positiva para os valores do parâmetro  $\vartheta_1$  pertencentes ao intervalo

$$\vartheta_- < \vartheta_1 < \vartheta_+, \quad (4.112)$$

onde

$$\vartheta_{\pm} = \frac{e^{4\beta\tau}}{2K} \left[ 2S^2C^2 - K^2e^{-4\beta\tau} \pm \sqrt{4S^4C^4 + K^2e^{-4\beta\tau} (1 - 4S^2C^2)} \right]. \quad (4.113)$$

Se a condição (4.112) é incompatível com a restrição  $\vartheta_1 \geq 1/2$ , então o emaranhamento não pode ser encontrado para qualquer valor do parâmetro  $r$ . Para  $\vartheta_+ = 1/2$  na equação (4.113), encontra-se a equação cúbica para a quantidade  $K$

$$K(K+1)^2 e^{-4\beta\tau} = K + 4S^2 C^2, \quad (4.114)$$

que é equivalente, conforme a definição (4.24), ao cubo da equação para o parâmetro  $\nu$

$$2(1-x)\nu^3 + (3-x)\nu^2 + \nu - \frac{xS^2 C^2}{(1-x)^2} = 0, \quad (4.115)$$

onde  $x = \exp(-2\beta\tau)$ . A função  $\nu_\tau(\beta)$ , que é solução da equação (4.115), fornece o valor crítico da temperatura do reservatório, acima da qual a transição ao estado emaranhado no instante  $\tau$  é impossível para qualquer valor do parâmetro de compressão, e valor fixo de  $\beta$ . Estudos numéricos mostram que  $\nu_\tau(\beta)$  está diminuindo monotonamente em função de  $\tau$  no intervalo  $0 < \tau \leq \pi/4$ . Conseqüentemente, a função  $\nu_0(\beta)$  fornece o *limite absoluto* dos valores admissíveis do número de excitação do reservatório térmico, que permite emaranhamento pelo menos para algum estado inicial fatorado (altamente comprimido). O emaranhamento *nunca* é possível (para estados iniciais fatorados) para um dado valor de  $\beta$ , se  $\nu > \nu_0(\beta)$ .

No limite  $\tau \rightarrow 0$ , a diferença  $1-x$  vai a zero, mas o último termo no lado esquerdo da equação (4.115) tende a um valor constante. Assim encontra-se a equação *quadrática*  $2\nu^2 + \nu - (2\beta)^{-2} = 0$ , cuja solução positiva fornece a forma explícita da função crítica  $\nu_0(\beta)$ :

$$\nu_0(\beta) = \frac{\sqrt{2 + \beta^2} - \beta}{4\beta} \approx \frac{1}{\beta\sqrt{8}} \approx \frac{0,35}{\beta}, \quad (4.116)$$

onde foi aproximado as fórmulas para  $\beta \ll 1$ . Este resultado concorda com (4.107) para  $\sigma = 0$ .

No caso especial  $\nu = 0$  (temperatura do reservatório nula) tem-se  $K = \exp(2\beta\tau) - 1$ , e no limite  $\beta\tau \rightarrow \infty$  obtém-se  $\tau = \tau_n = n\pi/4$  com  $n$  sendo um número ímpar grande (quando  $4S^2 C^2 = 1$ )

$$\mathcal{Z}(\tau_n) = e^{-n\beta\pi} [(\vartheta_1 + \vartheta_2 - 1)^2/4 + \sinh^2(r)\vartheta_2(\vartheta_1 - 1)].$$

Conseqüentemente, se  $1/2 < \vartheta_1 < 1$ , então o emaranhamento pode ser encontrado para um valor grande de  $n$ , escolhido um coeficiente de compressão  $r$  apropriado e *para um coeficiente de acoplamento arbitrário*  $\beta$ , sempre com  $\beta \gg 1$ . Contudo, isto pode ser novamente

um artefato do modelo, como no caso da compressão considerada na seção precedente, sem um significado físico profundo, pois observa-se que  $\mathcal{Z}(\tau_n)$  vai a zero conforme  $n \rightarrow \infty$ .

Algumas ilustrações são apresentadas na figura (4.16), onde é traçada a quantidade  $F = \tanh(\mathcal{Z})$  em função da escala de tempo variável  $z = \tau/\pi$  para diferentes valores de  $\nu$  e  $\sinh^2(r)$ , mas com valores fixos de  $\vartheta_1 = \vartheta_2$  e  $\beta$  (fazendo  $r \equiv r_2$  e  $r_1 = 0$ ). Uma vantagem de  $F$  sobre  $\mathcal{Z}$  é que  $F$  está *limitado* (assim seus traçados no gráfico parecem mais atraentes), tendo os mesmos domínios positivos e negativos como  $\mathcal{Z}$ . Pode-se ver a existência de diferentes regimes, quando o emaranhamento de estados inicialmente fatorados for possível para algum intervalo do tempo e quando ele for absolutamente impossível.

A importância de valores elevados do coeficiente de compressão inicial e o papel destrutivo da alta temperatura do reservatório são vistos claramente nos traçados do gráfico na figura (4.16). A aparente temperatura crítica  $\nu_c = 2.585$  nesta figura é menor do que o valor  $\nu_0(0.05) = 7$  dado pela equação (4.116). Isto é explicado por duas razões: não ter sido construído o gráfico para valores muito grandes de  $r$  e não ter sido considerado valores grandes dos parâmetros  $\vartheta_1 = \vartheta_2$ , porque partes não-triviais (diferentes dos valores constantes assintóticos) das linhas correspondentes podem ser demasiado perto do eixo central vertical.

Na figura (4.17) é comparado a evolução dos coeficientes de compressão e separabilidade  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{Z}$  para  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta = 1, 1$ ,  $r_1 = 0$ ,  $\nu = 1$ ,  $\beta = 0, 01$  e dois valores do parâmetro de compressão:  $r_2 = r = 1, 1$  com  $\chi_s = 2, 05$  (curvas ímpares) e  $r_2 = r = 0, 75$  com  $\chi_s = -0, 17$  (curvas pares). Os parâmetros são escolhidos de tal maneira que  $\chi_s$ , definido na equação (4.100), é negativo num caso e positivo no outro. O valor do acoplamento  $\sigma$  é irrelevante desde que  $r_1 = 0$ . Observa-se que as propriedades de separabilidade ou emaranhamento não tem nenhuma correlação visível com o comportamento do coeficiente de compressão.

Este estudo inicial cria uma série de perspectivas futuras no sentido de generalizar os cálculos para o caso de um sistema composto por dois modos cada um em contato com reservatórios distintos. Há ainda a possibilidade de generalização para um sistema com três modos acoplados em uma cadeia linear. Neste último, como seria o comportamento das propriedades dos modos extremos e a natureza do emaranhamento, quando somente o modo central está acoplado a um reservatório térmico? Essa é uma questão que será considerada num futuro próximo.



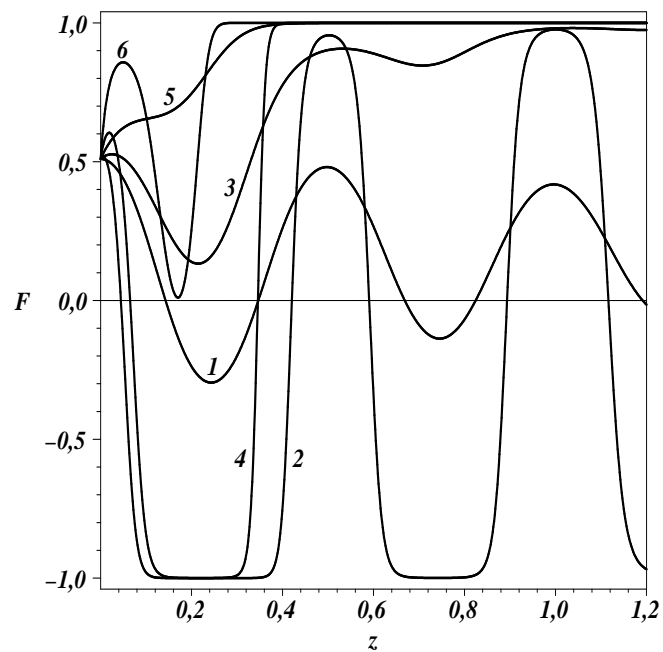


Figura 4.16: A escala do coeficiente de separabilidade  $F = \tanh(\mathcal{Z})$  versus a escala de tempo  $z = \tau/\pi$  para  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 1$ ,  $\beta = 0,05$  e diferentes valores de  $\nu$  e  $y = \sinh^2(r)$ . Índices pares e ímpares mas curvas correspondem a  $y = 1$  e  $y = 10$ , respectivamente. Os valores de  $\nu = 0,1,000,2,585$  correspondem aos pares de curvas (1;2), (3;4) e (5;6), respectivamente.

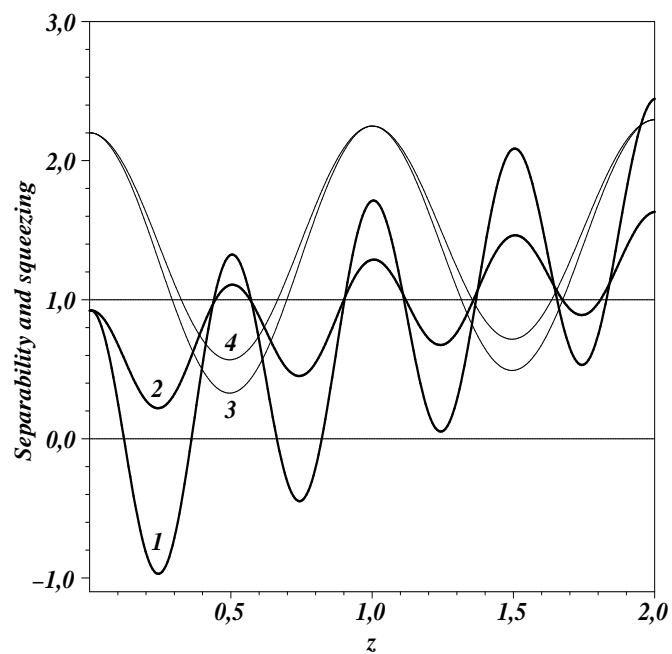


Figura 4.17: Linhas escuras referem-se a separabilidade enquanto que linhas claras a compressão do primeiro modo. Os índices ímpares referem-se a  $\chi_s = 2,05$  e os pares a  $\chi_s = -0,17$ .

# Capítulo 5

## Conclusões

Na implementação de processos em Computação Quântica bem como na transmissão e no controle da informação quântica em sistemas físicos realistas devem ser considerados os efeitos do acoplamento dos sistemas de interesse com o meio que o cerca. Nesse trabalho foi considerado um sistema composto por dois modos do campo eletromagnético em contato com o meio envolvente, representado por reservatórios térmicos. Considerou-se o estudo dos aspectos matemáticos do problema e foi observado o efeito do ambiente sobre as propriedades quânticas do sistema.

Primeiramente, a fim de revisar conceitos físicos importantes foi estudada a equação mestra de um sistema composto por um único modo do campo eletromagnético em contato com o ambiente, descrito por um reservatório térmico. Na seqüência foi generalizado o estudo para um sistema composto por dois modos do campo eletromagnético em contato com o ambiente, determinou-se sua equação mestra na representação de Schrödinger.

Para solucionar a equação mestra e obter o operador densidade reduzido, o qual fornece toda informação estatística do sistema, foi introduzida a função de Wigner. A função de Wigner é uma distribuição de quasi-probabilidade que tem propriedades semelhantes às encontradas nas distribuições de probabilidades no espaço de fase, as quais servem como alternativa à descrição do problema feita por meio do operador densidade e da equação mestra. A função de Wigner age similarmente a uma transformada de Fourier, levando o operador densidade do espaço dos operadores para o espaço das funções, com isso simplificando o trabalho do ponto de vista matemático.

Nesse trabalho o operador Hamiltoniano efetivo do sistema é não-Hermitiano, porém, sua estrutura permitiu a aplicação de métodos gerais para Hamiltonianos quadráticos,

---

escritos em termos de invariantes quânticos, com certas modificações devido à não hermiticidade. Assim, foi verificado que a função de Wigner evolui no tempo segundo um propagador conhecido por função de Green, o qual pôde ser dado em termos das matrizes que determinam o invariante quântico. Com a função de Green determinada é possível escrever a função de Wigner para diferentes estados iniciais e a partir dela determina-se o operador densidade do sistema obtendo todas as informações estatísticas de interesse. Esse estudo está sendo realizado e será apresentado em trabalhos futuros.

Ainda, a equação mestra do sistema em estudo é um caso particular de uma equação de evolução linear para o operador densidade reduzido, que contém somente a combinação quadrática de um operador dado em termos dos operadores bosônicos de criação e aniquilação. Dessa forma foi possível utilizar um método matemático alternativo para tratar sistemas quânticos com dissipação por meio de uma equação diferencial matricial, escrita em termos da matriz não simetrizada dos momentos de segunda ordem, correspondente à equação mestra. Isto porque considerou-se o caso particular de estados iniciais Gaussianos.

Com a solução da equação diferencial matricial, foram determinados os coeficientes de compressão e pureza do sistema de interesse. Foi analisada a influência da presença do reservatório sobre esses coeficientes, permitindo concluir que na ausência do reservatório ( $\beta = 0$ ), se apenas um modo está comprimido no instante inicial, isto é,  $\mathcal{G}_1 > 1$  e  $\mathcal{G}_2 < 1$ , a transferência de compressão entre os modos acoplados ocorre de forma que o primeiro modo torna-se comprimido um número infinito de vezes durante a evolução. Contudo, se for considerado o efeito do reservatório térmico sobre o sistema ( $\beta \neq 0$ ), a compressão no sistema acoplado, como uma propriedade não clássica, tende a desaparecer. Há uma modificação no padrão de troca de compressão que se observa no caso sem dissipação. No caso de um reservatório a uma temperatura finita, o modo inicialmente comprimido permanece em um estado comprimido um número finito de vezes. De forma similar o modo inicialmente não comprimido torna-se comprimido. Também foram determinadas as vezes em que o estado quântico dos modos permanece comprimido com  $\mathcal{S}_k(\tau, \beta)$  assumindo um valor menor que um ( $\mathcal{S}_k(\tau, \beta) = 1$ , estado coerente) quando o tempo vai a infinito e para ambos os modos  $\mathcal{S}_k(\tau \rightarrow \infty, \beta) \rightarrow (2\nu + 1)$ .

Análogo ao caso do coeficiente de compressão foi analisado o efeito do reservatório no coeficiente de pureza. Foi apresentado o comportamento da troca de pureza entre os dois modos na ausência do reservatório ( $\beta = 0$ ), observando uma periodicidade na transferência

---

que ocorre um número infinito de vezes nos instantes em que o sistema desacopla. Também é apresentado um caso particular do comportamento da pureza de cada um dos modos na presença do reservatório ( $\beta \neq 0$ ), observando uma diminuição da intensidade da pureza inicial de cada modo, levando-a para o mesmo valor limite no equilíbrio.

Finalizando o trabalho analisa-se a partir do critério de separabilidade de Simon aplicado a sistemas de variáveis contínuas como a presença do reservatório afeta a capacidade de emaranhamento do sistema. Os resultados obtidos são aplicados ao caso particular de estados Gaussianos tanto os mistos como puros. Considera-se as expressões exatas para valores arbitrários de parâmetros de estados iniciais  $(\vartheta_1, \vartheta_2, r_1, r_2)$ . No entanto, os resultados finais considerados são para o caso particular de estados iniciais com o mesmo grau de pureza  $\vartheta_1 = \vartheta_2$ , mas diferentes coeficientes de compressão, em particular  $r_1 = 0$  e  $r_2 = r > 0$ .

Portanto, foi estudado a influência do ambiente na dinâmica da transferência de compressão e emaranhamento entre dois modos acoplados de um oscilador, usando a equação mestra padrão e considerando a aproximação de onda girante no acoplamento entre os modos. De forma a obter expressões explícitas exatas para os coeficientes de compressão e de separabilidade, que caracterizam o grau de compressão de cada modo e o grau de emaranhamento entre eles. Estes coeficientes são funções simples dos momentos estatísticos da segunda ordem das componentes da quadratura.

Se a temperatura do reservatório é exatamente igual a zero, então as transferências de compressão e o emaranhamento podem ocorrer um número infinito de vezes para qualquer valor do coeficiente de acoplamento, desde que o grau inicial de compressão pelo menos de um dos modos é grande bastante. Entretanto, para toda a temperatura finita isto pode ocorrer somente um número finito de vezes. Este número depende do grau de compressão inicial, o chamado coeficiente de acoplamento  $\beta$  e do número médio de equilíbrio das excitações no reservatório  $\nu$ . Além disso, para todo o coeficiente de acoplamento positivo  $\beta$ , existe os valores críticos  $\nu_c^{(s)}$  e  $\nu_c^{(e)}$ , tal que nem transferência de compressão nem o emaranhamento se torna possível se  $\nu > \nu_c^{(s,e)}$ , para arbitrários estados iniciais fatorados (Gaussiano, no exemplo do emaranhamento), isto é, para qualquer grau inicial de compressão e qualquer pureza inicial dos estados.

Para um pequeno acoplamento,  $\beta \ll 1$ , ambos os valores críticos são inversamente proporcionais a  $\beta$ , com coeficientes numéricos diferentes. Em particular, foi encontrado o valor

---

exato  $\nu_c^{(s)} = (2\pi\beta)^{-1}$  e formas aproximadas da função  $\nu_c^{(e)}$ . No limite de acoplamento fraco têm-se  $\nu_c^{(e)} \approx 2\nu_c^{(s)}$ . Conseqüentemente, a impossibilidade de emaranhamento implica a impossibilidade de transferência de compressão (pelo menos para famílias restritas dos estados considerados como exemplos neste trabalho). Contudo, embora o grau de compressão dos estados iniciais influencie na possibilidade de emaranhamento sob críticos regimes, não foi encontrada nenhuma correlação explícita entre a dinâmica de compressão em cada modo e “as transições de fase” de um estado separável para um estado emaranhado, quando tais transições podem acontecer.

Como perspectivas futuras ficam a generalização desse estudo para o caso de um sistema composto por dois modos do campo eletromagnético em contato com reservatórios distintos e ainda para o caso de um sistema composto por três modos do campo eletromagnético, observando o comportamento do modo central.

Com o estudo realizado é possível identificar instantes em que os modos do sistema permanecem comprimidos, e quanto o ambiente representado pelo reservatório térmico influi no sistema, permitindo a aplicação desses resultados a estudos gerais da teoria de Informação Quântica possibilitando, talvez um dia, a realização prática dos computadores quânticos.

# Referências Bibliográficas

- [1] D. Deutsch, *Quantum theory, the Church-Turing Principle and the universal quantum computer*. Proc. R. Soc. Lond. A **400**, 97 (1985).
- [2] E. Schrödinger, *Die gegenwärtige situation in der Quantenmechanik*. Naturwissenschaften **23**, 807-812; 823-828; 844-849 (1935). Tradução para o inglês de J. D. Trimmer, Proc. Am. Phys. Soc. **124**, 3235 (1980).
- [3] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen, *Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete?*. Physical Review **47**, 777 (1935).
- [4] D.P. DiVincenzo, *Quantum computing*. Science **270**, 255 (1995).
- [5] A. Ekert e R. Josza, *Quantum computation and Shor's factoring algorithm*. Rev. Mod. Phys. **68**, 733 (1996).
- [6] J. Preskill, *Trapped plasmas with a single sign of charge*. Physics Today **52**, 24 (1999).
- [7] F. L. Semião da Silva, *Computação Quântica: o algoritmo de Deutsch e o Paralelismo Quântico*. Revista Physicae **3**, 1 (2002).
- [8] V. V. Dodonov, S. S. Mizrahi e A. L. de Souza Silva, *Decoherence and thermalization dynamics of a quantum oscillator*. J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **2**, 271 (2000).
- [9] V. V. Dodonov *et al.*, *Decoherence and transfer of quantum states of field modes in a one-dimensional cavity with an oscillating boundary*. J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **7**, S468 (2005).
- [10] A. S. M. de Castro e V. V. Dodonov, *Purity and squeezing exchange between coupled bosonic modes*. Phys. Rev. A **73**, 065801 (2006).

- [11] A. S. M. de Castro e V. V. Dodonov, *Squeezing exchange and entanglement between resonantly coupled modes*. J. Russ. Laser Res. **23**, 93 (2002).
- [12] A. S. M. de Castro e V. V. Dodonov, *Quantum state exchange between coupled modes*. J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt. **4**, S191 (2002).
- [13] A. S. M. de Castro e V. V. Dodonov, *Covariance measures of intermode correlation and inseparability for continuous variable quantum systems*. J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt. **5**, S593 (2003).
- [14] F. Haake e R. Reibold, *Strong Damping and Low Temperature Anomalies for the Harmonic Oscillator*. Phys. Rev. A **32**, 2462 (1985).
- [15] P. Schramm e H. Grabert, *Effect of dissipation on squeezed quantum fluctuations*. Phys. Rev. A **34**, 4515 (1986).
- [16] N. Lu, *Effects of dissipation on photon statistics and the lifetime of a pure number state*. Phys. Rev. A **40**, 1707 (1989).
- [17] S. L. Braunstein, *Damping of quantum superpositions*. Phys. Rev. A **45**, 6803 (1992).
- [18] P. Goetsch, R. Graham e F. Haake, *Schrödinger cat states and single runs for the damped harmonic oscillator*. Phys. Rev. A **51**, 136 (1995).
- [19] V. Bužek, A. Vidiella-Barranco e P. L. Knight, *Superpositions of coherent states: Squeezing and dissipation*. Phys. Rev. A **45**, 6570 (1992).
- [20] H. Svensmark e K. Flensberg, *Squeezing of thermal and quantum fluctuations: universal features*. Phys. Rev. A **47**, R23 (1993).
- [21] P. Marian e T. A. Marian, *Squeezed states with thermal noise. II. Damping and photon counting*. Phys. Rev. A **47**, 4487 (1993).
- [22] A. Isar, A. Sandulescu e W. Scheid, *Purity and decoherence in the theory of a damped harmonic oscillator*. Phys. Rev. E **60**, 6371 (1999).
- [23] H. Zoubi, M. Orenstien e A. Ron, *Dissipations in coupled quantum systems*. Phys. Rev. A **67**, 063813 (2003).



- [24] M. A. de Ponte, M. C. de Oliveira e M. H. Y. Moussa, *Decoherence in a system of strongly coupled quantum oscillators. I. Symmetric network*. Phys. Rev. A **70**, 022324 (2004).
- [25] M. A. de Ponte, M. C. de Oliveira e M. H. Y. Moussa, *Decoherence in a system of strongly coupled quantum oscillators. II. Central-oscillator network*. Phys. Rev. A **70**, 022325 (2004).
- [26] Hyunchul Nha, *Squeezing effect in a driven coupled-oscillator system: A dual role of damping*. Phys. Rev. A **67**, 023801 (2003).
- [27] J. S. Prauzner-Bechcicki, *Two-mode squeezed vacuum state coupled to the common thermal reservoir*. J. Phys. A: Math. Gen. **37** L173 (2004).
- [28] V. V. DODONOV, *Parametric excitation and generation of nonclassical states in linear media*. In: V. V. Dodonov; V. I. Man'ko. (Org.), *Theory of Non-classical States of Light*. London: Taylor e Francis, p. 153-218, (2003).
- [29] H. Risken, *The Fokker-Planck equation: methods of solution and applications*. Second Edition, Springer, New York, (1989).
- [30] H. Zoubi, M. Orenstien e A. Ron, *Coupled microcavities with dissipation*. Phys. Rev. A **62**, 033801 (2000).
- [31] A. F. R. de Toledo Piza, *Mecânica Quântica*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, (2003).
- [32] V.V. Dodonov, *Nonclassical states in quantum optics: a squeezed review of the first 75 years*. J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 4, R1-R33, (2002).
- [33] M. Orsag, *Quantum Optics including noise reduction, trapped ions, quantum trajectories and decoherence*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2000).
- [34] R. R. Puri, *Mathematical methods of Quantum Optics*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2001).
- [35] W. H. Louissel, *Radiation and noise in Quantum Electronics*. McGraw-Hill, New York, (1964).

- [36] H. Carmichael, *An open systems approach to Quantum Optics*. Lecture Presented at the Université Libre de Bruxelles, (1991).
- [37] Yan YJ, Xu RX, *Quantum mechanics of dissipative systems*. Annual Review of Physical Chemistry **56**: 187 (2005).
- [38] U. U. Weiss, *Quantum dissipative systems*. Series in Modern Condensed Matter Physics Vol. **2**, World Scientific, (1993).
- [39] W. Vogel e D. G. Welsch, *Lectures on quantum optics*, Berlin: Akademie Verlag, (1994); C. W. Gardiner, *Quantum noise*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1991).
- [40] E. Wigner, *On the quantum correction for thermodynamic equilibrium*. Phys. Rev. **40**, 749 (1932).
- [41] M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully e E. P. Wigner, *Distribution functions in physics: fundamentals*. Phys. Rep. **106**, 121 (1984).
- [42] S. L. Braunstein e P. van Loock, *Quantum information with continuous variables*. Reviews of Modern Physics, Vol. **77**, 513 (2005).
- [43] J. S. Bell, *EPR correlations and EPW distributions, in Speakable and Unsayable in QM*. Cambridge U. Press, p.196-200, (1987).
- [44] K. E. Cahil e R. J. Glauber, *Ordered expansions in boson amplitude operators*. Phys. Rev. **177**, 1857 (1969).
- [45] D. F. Walls e G. J. Milburn, *Quantum Optics*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1995).
- [46] D. T. Smithey, M. Beck e M. G. Raymer, *Measurement of the Wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography: Application to squeezed states and the vacuum*. Phys. Rev. Lett. **70**, 1244 (1993).
- [47] G. Breitenbach *et al.*, *Squeezed vacuum from a monolithic optical parametric oscillator*. J. Opt. Soc. Am. B **12**, 2304 (1995).

- [48] D. Leibfried, D. M. Meekhof, B. E. King, C. Monroe, W. M. Itano e D. J. Wineland, *Experimental determination of the motional quantum state of a trapped atom*. Phys. Rev. Lett. **77**, 4281 (1996).
- [49] D. Leibfried, D. M. Meekhof, B. E. King, C. Monroe, W. M. Itano e D. J. Wineland, *Shadows and mirrors: reconstructing quantum states of atom motion*. Phys. Today **51** No. 4, 22 (1998).
- [50] L. G. Lutterbach e L. Davidovich, *Method for direct measurement of the Wigner Function in cavity QED and ion traps*. Phys. Rev. Lett. **78**, 2547 (1997).
- [51] P. Bertet *et al.*, *Direct measurement of the Wigner Function of a one-photon Fock State in a cavity*. Phys. Rev. Lett. **89**, 200402 (2002).
- [52] P. M. Radmore, S. M. Barnett, *Methods in theoretical quantum optics*. Oxford: Oxford University Press, (1997).
- [53] U. Leonhardt, *Measuring the Quantum State of Light*. Cambridge Study in modern optics, Cambridge University Press (1997).
- [54] V. V. Dodonov e V. I. Man'ko, in *Group Theory, Gravitation and Elementary Particle Physics*. Proceedings of the Lebedev Physics Institute, **167**, edited by A. A. Komar, Nova Science, Commack, NY, (1987), p. 7;  
V. V. Dodonov e V. I. Man'ko, *Integrals of motion of pure and mixed quantum states*. Physica A **94**, 403 (1978).
- [55] A. S. M. de Castro e V. V. Dodonov; *Squeezing Exchange And Entanglement Between Resonantly Coupled Modes*. Journal of Russian Laser Research, Vol. **23**, No. 2, (2002).
- [56] V. V. Dodonov, M. B. Renó; *Classicality and anticlassicality measures of pure and mixed quantum states*. Physics Letters A **308**, 249, (2003).
- [57] A. S. M. de Castro e V. V. Dodonov *The Wigner function of non-classical and classical states under dissipation*. Phys. Rev. A **296**, 73, 065801 (2006).
- [58] E. Schrodinger, *Zum Heisenbergschen unschärfepprinzip*. Ber. Kgl. Akad. Wiss. Berlin **24**, 296 (1930).

- [59] H. P. Robertson, *A general formulation of the uncertainty principle and its classical interpretation*. Phys. Rev. **35**, 667 (1930).
- [60] A. Lukš, V. Peřinová e Z. Hradil, *Principal squeezing*. Acta Phys. Polon. A, **74**, 713 (1988).
- [61] V. V. Dodonov, V. I. Man'ko, *in*: M.A. Markov (Ed.), *Invariants and the evolution of nonstationary quantum systems*. Proceedings of the Lebedev Physics Institute, Vol. **183**, edited by A. A. Komar, Nova Science, Commack, NY, p. 3. (1989).
- [62] R. Rangel e N Zagury, *Squeezing generation, revivals and entanglement in a cavity-ion system in contact with a thermal reservoir*. J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt. **7**, S628 (2005).
- [63] G. S. Agarwal, *Entropy, the Wigner Distribution Function, and the approach to equilibrium of a system of coupled harmonic oscillators*. Phys. Rev. A **3**, 828 (1971).
- [64] A. L. Rivera, N. M. Atakishiyev, S. M. Chumakov, e K. B. Wolf, *Evolution under polynomial Hamiltonians in quantum and optical phase spaces*. Phys. Rev. A **55**, 876 (1997).
- [65] V. V. Dodonov, *Universal integrals of motion and universal invariants of quantum systems*. J. Phys. A **33**, 7721 (2000).
- [66] V. V. Dodonov e O. V. Man'ko, *Universal invariants of quantum-mechanical and optical systems*. J. Opt. Soc. Am. A **17**, 2403 (2000).
- [67] V. V. Dodonov, A. S. M. de Castro e S. S. Mizrahi, *Covariance entanglement measure for two-mode continuous variables system*. Phys. Lett. A **296**, 73 (2002).
- [68] A. V. Dodonov, V. V. Dodonov e S. S. Mizrahi, *Separability dynamics of two-mode gaussian states in parametric conversion and amplification*. J. Phys. A **38**, 683 (2005).
- [69] R. I. A. Davis, R. Delbourgo e P. D. Jarvis, *Integrity bases for local invariants of composite quantum systems: Corrigendum*. J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 1895 (2000).
- [70] L. Henderson e V. Vedral, *Classical, quantum and total correlations*. J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 6899 (2001).

- [71] L-M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac e P. Zoller, *Inseparability Criterion for Continuous Variable Systems*. Phys. Rev. Lett. **84**, 2722 (2000).
- [72] R. Simon, *Peres-Horodecki separability criterion for continuous variable systems*. Phys. Rev. Lett. **84**, 2726 (2000).
- [73] P. Marian, T. A. Marian e H. Scutaru, *Inseparability of mixed two-mode Gaussian states generated with a  $SU(1,1)$  interferometer*. J. Phys. A **34**, 6969 (2001).
- [74] B-G. Englert e K. Wodkiewicz, *Separability of two-party Gaussian states*. Phys. Rev. A **65**, 054303 (2002).
- [75] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*. New York: Wiley, (1973).

# Apêndice A

## Descrição de interação

### A.1 Equação de Liouville

Na descrição de Heisenberg, o operador densidade é escrito na forma

$$\hat{\sigma}_{AB} = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{\rho}_{AB} \hat{U}_0(t, t_0) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(t - t_0)\right\} \hat{\rho}_{AB} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(t - t_0)\right\}. \quad (\text{A.1})$$

Realizando a derivada de (A.1) em relação ao tempo obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\sigma}_{AB} &= \left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0\right) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(t - t_0)\right\} \hat{\rho}_{AB} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(t - t_0)\right\} \\ &+ \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(t - t_0)\right\} \frac{d}{dt} \hat{\rho}_{AB} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(t - t_0)\right\} \\ &+ \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(t - t_0)\right\} \hat{\rho}_{AB} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(t - t_0)\right\} \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0\right). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Multiplicando por  $i\hbar$  e simplificando a notação,

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\sigma}_{AB} &= -\hat{H}_0 \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{\rho}_{AB} \hat{U}_0(t, t_0) + \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}_{AB} \hat{U}_0(t, t_0) \\ &+ \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{\rho}_{AB} \hat{U}_0(t, t_0) \hat{H}_0. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Substituindo a equação de Liouville dada em (2.14) por:

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}_{AB}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}_{AB}] = \hat{H} \hat{\rho}_{AB} - \hat{\rho}_{AB} \hat{H}, \quad (\text{A.4})$$

em (A.3) encontra-se,

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\sigma}_{AB} &= -\hat{H}_0 \hat{\sigma}_{AB} + \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{H} \hat{\rho}_{AB} \hat{U}_0(t, t_0) - \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{\rho}_{AB} \hat{H} \hat{U}_0(t, t_0) + \hat{\sigma}_{AB} \hat{H}_0 \\ &= [\hat{\sigma}_{AB}, \hat{H}_0] + \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{H} \hat{U}_0(t, t_0) \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{\rho}_{AB} \hat{U}_0(t, t_0) \\ &- \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{\rho}_{AB} \hat{U}_0(t, t_0) \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{H} \hat{U}_0(t, t_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\hat{\sigma}_{AB}, \hat{H}_0] + \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{H} \hat{U}_0(t, t_0) \hat{\sigma}_{AB} - \hat{\sigma}_{AB} \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{H} \hat{U}_0(t, t_0) \\
&= [\hat{\sigma}_{AB}, \hat{H}_0] + [\hat{F}, \hat{\sigma}_{AB}] \\
&= [\hat{\sigma}_{AB}, \hat{H}_0 - \hat{F}], \tag{A.5}
\end{aligned}$$

onde denota-se por  $\hat{F}$  o Hamiltoniano total na descrição de interação, cuja dependência temporal provém dos operadores  $\hat{U}_0^\dagger$  e  $\hat{U}_0$ , isto é,

$$\begin{aligned}
\hat{F} &= \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{H} \hat{U}_0(t, t_0) \\
&= \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) (\hat{H}_0 + \hat{H}_1) \hat{U}_0(t, t_0) \\
&= \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{H}_0 \hat{U}_0(t, t_0) + \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{H}_1 \hat{U}_0(t, t_0) \\
&= \hat{H}_0 + \hat{H}_{1I}. \tag{A.6}
\end{aligned}$$

De modo que a equação de Liouville na descrição de interação (A.5) é dada na forma simplificada por

$$\frac{d}{dt} \hat{\sigma}_{AB} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{1I}, \hat{\sigma}_{AB}]. \tag{A.7}$$

## A.2 Hamiltoniano

Sendo  $\hat{H}_{1I}$  a parte do Hamiltoniano, na descrição de interação, responsável pela interação entre o sistema e reservatório, escrito na forma,

$$\hat{H}_{1I} = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(t - t_0)\right\} \hat{H}_1 \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(t - t_0)\right\}. \tag{A.8}$$

É conveniente fazer  $t_0 = 0$ , de modo a obter a forma simplificada

$$\hat{H}_{1I} = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t\right\} \hat{H}_1 \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t\right\}. \tag{A.9}$$

Combinando o Hamiltoniano dado em (2.11) por:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{j=1}^{\infty} \hbar\omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + \sum_{k=1}^{\infty} \hbar g_k (\hat{a}^\dagger \hat{b}_k + \hat{a} \hat{b}_k^\dagger), \tag{A.10}$$

com (A.9), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{1I} &= \exp(i\omega t \hat{a}^\dagger \hat{a} + i \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j t \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j) \sum_{k=1}^{\infty} \hbar g_k (\hat{a}^\dagger \hat{b}_k + \hat{a} \hat{b}_k^\dagger) \\
&\times \exp(-i\omega t \hat{a}^\dagger \hat{a} + i \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j t \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j). \tag{A.11}
\end{aligned}$$

Para continuar essa simplificação há que se considerarem os teoremas apresentados a seguir.

### A.2.1 Teoremas

#### Teorema 1

Se  $A$  e  $B$  são dois operadores que não comutam então [75]

$$\exp(\alpha A)B \exp(-\alpha A) = B + \alpha[A, B] + \frac{\alpha^2}{2!}[A, [A, B]] + \dots \quad (\text{A.12})$$

Prova: Seja

$$f_1(\alpha) = \exp(\alpha A)B \exp(-\alpha A). \quad (\text{A.13})$$

Então, pode-se expandir  $f_1$  em série de Taylor em torno da origem. A derivada primeira de (A.13) é obtida por

$$f_1'(\alpha) = \exp(\alpha A)(AB - BA) \exp(-\alpha A), \quad (\text{A.14})$$

de forma que para  $\alpha = 0$  tem-se  $f_1'(0) = [A, B]$ . Similarmente

$$f_1''(\alpha) = \exp(\alpha A)(A[A, B] - [A, B]A) \exp(-\alpha A) \quad (\text{A.15})$$

tal que para  $\alpha = 0$  tem-se  $f_1''(0) = [A, [A, B]]$ . Assim, a expansão em série de Taylor é escrita na forma

$$f_1(\alpha) = f_1(0) + \alpha f_1'(0) + \frac{\alpha^2}{2!} f_1''(0) + \dots \quad (\text{A.16})$$

ou ainda,

$$\exp(\alpha A)B \exp(-\alpha A) = B + \alpha[A, B] + \frac{\alpha^2}{2!}[A, [A, B]] + \dots \quad (\text{A.17})$$

Um caso particular é quando  $[A, B] = c$ , onde  $c$  é uma constante. Então,

$$\exp(\alpha A)B \exp(-\alpha A) = B + \alpha c, \quad (\text{A.18})$$

neste caso  $\exp(\alpha A)$  age como um operador deslocamento.

#### Teorema 2

##### A Relação Baker-Campbell-Hausdorff

Sejam  $A$  e  $B$  dois operadores que não comutam tal que:

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0. \quad (\text{A.19})$$



Então,

$$\begin{aligned}\exp(\alpha(A+B)) &= \exp(\alpha A) \exp(\alpha B) \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}[A, B]\right) \\ &= \exp(\alpha B) \exp(\alpha A) \exp\left(\frac{\alpha^2}{2}[A, B]\right).\end{aligned}\tag{A.20}$$

Prova: Seja

$$f_2(\alpha) = \exp(\alpha(A+B)) = \exp(\alpha A) \exp(\alpha B).\tag{A.21}$$

Então,

$$\frac{f_2(\alpha)}{d\alpha} = (A + \exp(\alpha A)B \exp(-\alpha A))f_2(\alpha) = (A + B + \alpha[A, B])f_2(\alpha),\tag{A.22}$$

onde é aplicado o teorema anterior. Também da definição de  $f_2(\alpha)$ , é possível escrever

$$\begin{aligned}\frac{f_2(\alpha)}{d\alpha} &= \exp(\alpha A)A \exp(\alpha B) + \exp(\alpha A) \exp(\alpha B)B \\ &= \exp(\alpha A) \exp(\alpha B)[\exp(-\alpha B)A \exp(\alpha B) + B] \\ &= f_2(\alpha)(A + B + \alpha[A, B])\end{aligned}\tag{A.23}$$

Comparando (A.22) e (A.23), é fácil ver que  $f_2(\alpha)$  comuta com  $(A + B + \alpha[A, B])$ . Assim, integrando obtém-se

$$\begin{aligned}f_2(\alpha) &= \exp\left\{(A+B)\alpha + \frac{\alpha^2}{2}[A, B]\right\} = \exp(\alpha(A+B)) \exp\left(\frac{\alpha^2}{2}[A, B]\right) \\ &= \exp(\alpha A) \exp(\alpha B) \exp\left(\frac{\alpha^2}{2}[A, B]\right),\end{aligned}\tag{A.24}$$

comparando com (A.20) tem-se o resultado desejado.

### Teorema 3

#### Transformação de Similaridade

$$\exp(\alpha A)f(B)\exp(-\alpha A) = f(\exp(\alpha A)B\exp(-\alpha A)).\tag{A.25}$$

Prova: Iniciando com a identidade

$$\begin{aligned}[\exp(\alpha A)B\exp(-\alpha A)]^n &= \exp(\alpha A)B\exp(-\alpha A)\exp(\alpha A)B\exp(-\alpha A)\dots \\ &= \exp(\alpha A)B^n\exp(-\alpha A).\end{aligned}\tag{A.26}$$

E seguindo o raciocínio, o teorema 3 segue para qualquer função  $f(B)$  que pode ser expandida em uma série de potência.

### A.2.2 Aplicação dos teoremas em $\hat{H}_{1I}$

Usando as identidades  $N = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ ,  $N_j = \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j$ ,  $\alpha = i\omega t$  e  $\beta_j = i\omega_j t$  em (A.11) dada por:

$$\hat{H}_{1I} = \exp(i\omega t \hat{a}^\dagger \hat{a} + i \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j t \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j) \sum_{k=1}^{\infty} \hbar g_k (\hat{a}^\dagger \hat{b}_k + \hat{a} \hat{b}_k^\dagger) \exp(-i\omega t \hat{a}^\dagger \hat{a} + i \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j t \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j),$$

tem-se

$$\hat{H}_{1I} = \exp(\alpha N + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j N_j) \sum_{k=1}^{\infty} \hbar g_k (\hat{a}^\dagger \hat{b}_k + \hat{a} \hat{b}_k^\dagger) \exp(-\alpha N - \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j N_j), \quad (\text{A.27})$$

onde

$$\exp(\alpha N + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j N_j) = \exp(\alpha N) \exp(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j N_j) = \exp(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j N_j) \exp(\alpha N), \quad (\text{A.28})$$

assim torna-se possível escrever o Hamiltoniano na forma

$$\begin{aligned} \hat{H}_{1I} &= \exp(\alpha N) \exp(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j N_j) \sum_{k=1}^{\infty} \hbar g_k (\hat{a} \hat{b}_k^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{b}_k) \exp(-\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j N_j) \exp(-\alpha N) \\ &= \exp(\alpha N) [\hbar \sum_{k=1}^{\infty} g_k (\hat{a} \exp(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j N_j) \hat{b}_k^\dagger \exp(-\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j N_j) \\ &\quad + \hat{a}^\dagger \exp(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j N_j) \hat{b}_k \exp(-\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j N_j))] \exp(-\alpha N). \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Como há dois espaços vetoriais ( $V_a \otimes V_b$ ) são válidas as relações:

$$\exp(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j N_j) \hat{b}_k^\dagger \exp(-\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j N_j) = \hat{b}_k^\dagger \exp(\beta_k) = \hat{b}_k^\dagger \exp(i\omega_k t); \quad (\text{A.30})$$

$$\exp(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j N_j) \hat{b}_k \exp(-\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j N_j) = \hat{b}_k \exp(-\beta_k) = \hat{b}_k \exp(-i\omega_k t); \quad (\text{A.31})$$

$$\exp(\alpha N) \hat{a}^\dagger \exp(-\alpha N) = \hat{a}^\dagger \exp(\alpha) = \hat{a}^\dagger \exp(i\omega t); \quad (\text{A.32})$$

$$\exp(\alpha N) \hat{a} \exp(-\alpha N) = \hat{a} \exp(\alpha) = \hat{a} \exp(i\omega t). \quad (\text{A.33})$$

O espaço do campo e do somatório são distintos. Assim

$$\begin{aligned} \hat{H}_{1I} &= \sum_{j=1}^{\infty} \hbar g_j \left\{ \hat{a}^\dagger \hat{b}_j \exp[i(\omega - \omega_j)t] + \hat{a} \hat{b}_j^\dagger \exp[-i(\omega - \omega_j)t] \right\} \\ &= \hbar [G(t) \hat{a}^\dagger + G^\dagger(t) \hat{a}], \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

onde  $t$  é um parâmetro real e  $G(t)$  o operador que atua apenas no espaço dos estados do reservatório dado por:

$$G(t) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} g_j \hat{b}_j \exp[i(\omega - \omega_j)t]. \quad (\text{A.35})$$

# Apêndice B

## Comutador duplo

Usando a suposição de Markov, dada por,

$$\hat{\sigma}_{AB}(\tau) = \hat{\sigma}_A(t) \otimes \hat{\sigma}_B(0) \quad (\text{B.1})$$

tem-se que para o sistema em questão

$$\hat{\sigma}_{AB}(\tau) = \hat{\sigma}_A(t) \otimes \hat{\sigma}_B(0) \in V_1 \otimes V_2 \quad (\text{B.2})$$

assim,

$$\begin{aligned} [\hat{H}_{1I}(\tau), \hat{\sigma}_{AB}(\tau)] &= [\hbar(G(\tau)\hat{a}^\dagger + G^\dagger(\tau)\hat{a}), \hat{\sigma}_A(\tau) \otimes \hat{\sigma}_B(0)] \\ &= \hbar\{[\hat{a}^\dagger G(\tau), \hat{\sigma}_A(\tau)\hat{\sigma}_B(0)] + [\hat{a}G^\dagger(\tau), \hat{\sigma}_A(\tau)\hat{\sigma}_B(0)]\} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Considerando  $\hat{z}$  o comutador duplo de (2.28) obtém-se,

$$\begin{aligned} \hat{z} &= [\hat{H}_{1I}(t), [\hat{H}_{1I}(\tau), \hat{\sigma}_{AB}(\tau)]] = -\hbar^2\{[\hat{a}^\dagger G(t), [\hat{a}^\dagger G(\tau), \hat{\sigma}_A(\tau)\hat{\sigma}_B(0)]] \\ &+ [\hat{a}^\dagger G(t), [\hat{a}G^\dagger(\tau), \hat{\sigma}_A(\tau)\hat{\sigma}_B(0)]] + [\hat{a}G^\dagger(t), [\hat{a}^\dagger G(\tau), \hat{\sigma}_A(\tau)\hat{\sigma}_B(0)]] \\ &+ [\hat{a}G^\dagger(t), [\hat{a}G^\dagger(\tau), \hat{\sigma}_A(\tau)\hat{\sigma}_B(0)]]\} = \hbar^2(\hat{z}_{++} + \hat{z}_{+-} + \hat{z}_{-+} + \hat{z}_{--}) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

com

$$\begin{aligned} \hat{z}_{++} &= \sum_{k,l=1}^{\infty, \infty} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_A(\tau) \mu_l(t) \mu_k(\tau) \hat{b}_l \hat{b}_k \hat{\sigma}_B(0) - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_A(\tau) \hat{a}^\dagger \mu_l(t) \mu_k(\tau) \hat{b}_l \hat{\sigma}_B(0) \hat{b}_k \\ &\quad - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_A(\tau) \hat{a}^\dagger \mu_l(t) \mu_k(\tau) \hat{b}_k \hat{\sigma}_B(0) \hat{b}_l + \hat{\sigma}_A(\tau) \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \mu_l(t) \mu_k(\tau) \hat{\sigma}_B(0) \hat{b}_k \hat{b}_l, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} \hat{z}_{+-} &= \sum_{k,l=1}^{\infty, \infty} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_A(\tau) \mu_l(t) \mu_k^*(\tau) \hat{b}_l \hat{b}_k^\dagger \hat{\sigma}_B(0) - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_A(\tau) \hat{a} \mu_l(t) \mu_k^*(\tau) \hat{b}_l \hat{\sigma}_B(0) \hat{b}_k^\dagger \\ &\quad - \hat{a} \hat{\sigma}_A(\tau) \hat{a}^\dagger \mu_l(t) \mu_k^*(\tau) \hat{b}_k^\dagger \hat{\sigma}_B(0) \hat{b}_l + \hat{\sigma}_A(\tau) \hat{a} \hat{a}^\dagger \mu_l(t) \mu_k^*(\tau) \hat{\sigma}_B(0) \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_l, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned}\hat{z}_{-+} &= \sum_{k,l=1}^{\infty,\infty} \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_A(\tau)\mu_l^*(t)\mu_k(\tau)\hat{b}_l^\dagger\hat{b}_k\hat{\sigma}_B(0) - \hat{a}\hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a}^\dagger\mu_l^*(t)\mu_k(\tau)\hat{b}_l^\dagger\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_k \\ &\quad - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a}\mu_l^*(t)\mu_k(\tau)\hat{b}_k\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_l^\dagger + \hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a}^\dagger\hat{a}\mu_l^*(t)\mu_k(\tau)\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_k\hat{b}_l^\dagger,\end{aligned}\quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned}\hat{z}_{--} &= \sum_{k,l=1}^{\infty,\infty} \hat{a}\hat{a}\hat{\sigma}_A(\tau)\mu_l^*(t)\mu_k^*(\tau)\hat{b}_l^\dagger\hat{b}_k^\dagger\hat{\sigma}_B(0) - \hat{a}\hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a}\mu_l^*(t)\mu_k^*(\tau)\hat{b}_l^\dagger\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_k^\dagger \\ &\quad - \hat{a}\hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a}\mu_l^*(t)\mu_k^*(\tau)\hat{b}_k^\dagger\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_l^\dagger + \hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a}\hat{a}\mu_l^*(t)\mu_k^*(\tau)\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_k^\dagger\hat{b}_l^\dagger\end{aligned}\quad (\text{B.8})$$

e assumindo,

$$G(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \hat{b}_k, \quad G^\dagger(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^* \hat{b}_k^\dagger \quad (\text{B.9})$$

encontra-se,

$$\begin{aligned}[\hat{a}^\dagger G(\tau), \hat{\sigma}_A(\tau)\hat{\sigma}_B(0)] &= \hat{a}^\dagger G(\tau)\hat{\sigma}_A(\tau)\hat{\sigma}_B(0) - \hat{\sigma}_A(\tau)\hat{\sigma}_B(0)\hat{a}^\dagger G(\tau) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_A(\tau)\mu_k(\tau)\hat{b}_k\hat{\sigma}_B(0) - \hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a}^\dagger\mu_k(\tau)\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_k\end{aligned}\quad (\text{B.10})$$

assim,

$$\begin{aligned}\hat{z}_{++} &= [\hat{a}^\dagger G(t), [\hat{a}^\dagger G(\tau), \hat{\sigma}_A(\tau)\hat{\sigma}_B(0)]] \\ &= \sum_{k,l=1}^{\infty,\infty} \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_A(\tau)\mu_l(t)\mu_k(\tau)\hat{b}_l\hat{b}_k\hat{\sigma}_B(0) - \sum_{k,l=1}^{\infty,\infty} \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a}^\dagger\mu_l(t)\mu_k(\tau)\hat{b}_l\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_k \\ &\quad - \sum_{k,l=1}^{\infty,\infty} \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a}^\dagger\mu_l(t)\mu_k(\tau)\hat{b}_k\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_l + \sum_{k,l=1}^{\infty,\infty} \hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\mu_l(t)\mu_k(\tau)\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_k\hat{b}_l\end{aligned}$$

Analogamente determina-se  $\hat{z}_{+-}$ ,  $\hat{z}_{-+}$  e  $\hat{z}_{--}$  de forma a ser possível escrever (B.4) como

$$\begin{aligned}\hat{z} &= [\hat{H}_{II}(t), [\hat{H}_{II}(\tau), \hat{\sigma}_{AB}(\tau)]] \\ &= \hbar^2 \left\{ \sum_{k,l=1}^{\infty,\infty} \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_A(\tau)\mu_l(t)\mu_k(\tau)\hat{b}_l\hat{b}_k\hat{\sigma}_B(0) - \sum_{k,l=1}^{\infty,\infty} \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a}^\dagger\mu_l(t)\mu_k(\tau)\hat{b}_l\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_k \right. \\ &\quad - \sum_{k,l=1}^{\infty,\infty} \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a}^\dagger\mu_l(t)\mu_k(\tau)\hat{b}_k\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_l + \sum_{k,l=1}^{\infty,\infty} \hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\mu_l(t)\mu_k(\tau)\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_k\hat{b}_l \\ &\quad + \sum_{k,l=1}^{\infty,\infty} \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\sigma}_A(\tau)\mu_l(t)\mu_k^*(\tau)\hat{b}_l\hat{b}_k^\dagger\hat{\sigma}_B(0) - \sum_{k,l=1}^{\infty,\infty} \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a}\mu_l(t)\mu_k^*(\tau)\hat{b}_l\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_k^\dagger \\ &\quad - \sum_{k,l=1}^{\infty,\infty} \hat{a}\hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a}^\dagger\mu_l(t)\mu_k^*(\tau)\hat{b}_k^\dagger\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_l + \sum_{k,l=1}^{\infty,\infty} \hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a}\hat{a}^\dagger\mu_l(t)\mu_k^*(\tau)\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_k^\dagger\hat{b}_l \\ &\quad + \sum_{k,l=1}^{\infty,\infty} \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_A(\tau)\mu_l^*(t)\mu_k(\tau)\hat{b}_l^\dagger\hat{b}_k\hat{\sigma}_B(0) - \sum_{k,l=1}^{\infty,\infty} \hat{a}\hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a}^\dagger\mu_l^*(t)\mu_k(\tau)\hat{b}_l^\dagger\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_k \\ &\quad \left. - \sum_{k,l=1}^{\infty,\infty} \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a}\mu_l^*(t)\mu_k(\tau)\hat{b}_k\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_l^\dagger + \sum_{k,l=1}^{\infty,\infty} \hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a}^\dagger\hat{a}\mu_l^*(t)\mu_k(\tau)\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_k\hat{b}_l^\dagger \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k,l=1}^{\infty,\infty} \hat{a}\hat{\sigma}_A(\tau)\mu_l^*(t)\mu_k^*(\tau)\hat{b}_l^\dagger\hat{b}_k^\dagger\hat{\sigma}_B(0) - \sum_{k,l=1}^{\infty,\infty} \hat{a}\hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a}\mu_l^*(t)\mu_k^*(\tau)\hat{b}_l^\dagger\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_k^\dagger \\
& - \sum_{k,l=1}^{\infty,\infty} \hat{a}\hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a}\mu_l^*(t)\mu_k^*(\tau)\hat{b}_k^\dagger\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_l^\dagger + \sum_{k,l=1}^{\infty,\infty} \hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a}\hat{a}\mu_l^*(t)\mu_k^*(\tau)\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_k^\dagger\hat{b}_l^\dagger\}. \quad (\text{B.11})
\end{aligned}$$

Com as propriedades de traço:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_2(\hat{b}_l^\dagger\hat{b}_k\hat{\sigma}_B(0)) &= \text{Tr}_2(\hat{b}_k\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_l^\dagger) = \text{Tr}_2(\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_l^\dagger\hat{b}_k) = \delta_{lk} \langle n_k \rangle; \\
\text{Tr}_2(\hat{b}_l\hat{b}_k\hat{\sigma}_B(0)) &= \text{Tr}_2(\hat{b}_l^\dagger\hat{b}_k^\dagger\hat{\sigma}_B(0)) = 0; \\
\text{Tr}_2(\hat{b}_k\hat{b}_l^\dagger\hat{\sigma}_B(0)) &= \text{Tr}_2(\hat{b}_l^\dagger\hat{b}_k^\dagger\hat{\sigma}_B(0)) = 0; \\
\text{Tr}_2(\hat{b}_k\hat{b}_l^\dagger\hat{\sigma}_B(0)) &= \text{Tr}_2(\hat{b}_l^\dagger\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_k) = \text{Tr}_2(\hat{\sigma}_B(0)\hat{b}_k\hat{b}_l^\dagger) = (1 + \langle n_k \rangle)\delta_{kl}; \\
\text{Tr}_2(\hat{\sigma}_B(t)) &= 1; \\
\text{Tr}_1(\hat{\sigma}_A(t)) &= 1. \quad (\text{B.12})
\end{aligned}$$

é possível escrever

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_B[\hat{H}_{1I}(t), [\hat{H}_{1I}(\tau), \hat{\sigma}_{AB}(\tau)]] &= \hbar^2 \sum_{k=1}^{\infty} \{(1 + \langle n_k \rangle)[\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\sigma}_A(\tau) - 2\hat{a}\hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a}^\dagger\hat{a}] \\
&+ \langle n_k \rangle [-2\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a} + \hat{\sigma}_A(\tau)\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_A(\tau)]\}. \quad (\text{B.13})
\end{aligned}$$

Assim, a equação mestra 2.28 assume a forma

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\sigma}_A}{dt} &= -i\Delta\omega[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\sigma}_A(t)] + A[\hat{a}, \hat{\sigma}_A(t)\hat{a}^\dagger] + A[\hat{a}\hat{\sigma}_A(t), \hat{a}^\dagger] \\
&+ B[\hat{a}^\dagger, \hat{\sigma}_A(t)\hat{a}] + B[\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_A(t), \hat{a}], \quad (\text{B.14})
\end{aligned}$$

onde

$$A = \pi g(\omega)^2 D(\omega)(1 + \langle n(\omega) \rangle), \quad (\text{B.15})$$

$$B = \pi g(\omega)^2 D(\omega) \langle n(\omega) \rangle, \quad (\text{B.16})$$

$$\Delta\omega = P \int_0^\infty \frac{g(\omega_j)^2 D(\omega_j)}{\omega - \omega_j} d\omega_j, \quad (\text{B.17})$$

sendo  $D(\omega)$  a função densidade que converte  $\sum_j \rightarrow \int D(\omega_j) d\omega_j$ , e

$$\int_0^\infty d\eta \exp \pm i(\omega - \omega_j)\eta = \pi\delta(\omega - \omega_j) \pm iP\left(\frac{1}{\omega - \omega_j}\right) \quad (\text{B.18})$$

onde  $\eta = t - \tau$ .

A forma padrão da equação mestra (B.14) na descrição de interação é

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\sigma}_A}{dt} &= -i\Delta\omega[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\sigma}_A(t)] \\
&- \frac{\tilde{\gamma}}{2}(1 + \langle n_k \rangle)[\hat{\sigma}_A(t)\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\sigma}_A(t) - 2\hat{a}\hat{\sigma}_A(t)\hat{a}^\dagger] \\
&- \frac{\tilde{\gamma}}{2}\langle n_k \rangle [\hat{\sigma}_A(t)\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_A(t) - 2\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_A(t)\hat{a}]. \quad (\text{B.19})
\end{aligned}$$

---

A temperatura nula, o sistema possui um número médio de fótons nulo, isto é,  $T = 0$ ,  $\langle n_k \rangle = 0$  e  $\Delta\omega \approx 0$ , neste caso obtém-se a forma simplificada

$$\frac{d\hat{\sigma}_A}{dt} = -\frac{\tilde{\gamma}}{2}[\hat{\sigma}_A(t)\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\sigma}_A(t) - 2\hat{a}\hat{\sigma}_A(t)\hat{a}^\dagger] \quad (\text{B.20})$$

sendo,

$$\tilde{\gamma} = 2(A - B) = 2\pi g(\omega_j)^2 D(\omega_j). \quad (\text{B.21})$$

# Apêndice C

## Análise da medida de correlação

### C.1 Um dos modos não-comprimido e outro comprimido

Supondo a condição de apenas um dos modos estar inicialmente comprimido, ou seja,

$$\begin{aligned} S_1(0, \beta) &= 2v_1 e^{-2r_1} > 1 \\ S_2(0, \beta) &= 2v_2 e^{-2r_2} < 1 \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

se  $\beta = 0$ , isto é, se o sistema não estiver acoplado ao reservatório na ausência de dissipação:

$$S_1(\tau, 0) = 2(\beta_1 \cos^2 \tau + \beta_2 \sin^2 \tau) - 2(\eta_1^2 \cos^4 \tau + \eta_2^2 \sin^4 \tau - 2\sigma\eta_1\eta_2 \cos^2 \tau \sin^2 \tau)^{1/2} \quad (\text{C.2})$$

$$S_2(\tau, 0) = 2(\beta_2 \cos^2 \tau + \beta_1 \sin^2 \tau) - 2(\eta_2^2 \cos^4 \tau + \eta_1^2 \sin^4 \tau - 2\sigma\eta_1\eta_2 \cos^2 \tau \sin^2 \tau)^{1/2} \quad (\text{C.3})$$

a troca de compressão entre os modos ocorre em  $\tau = \tau_{ex}$  quando:

$$S_1(\tau_{ex}, 0) = S_2(0, 0) \quad (\text{C.4})$$

o modo 1 assume identidade do modo 2

$$S_2(\tau_{ex}, 0) = S_1(0, 0) \quad (\text{C.5})$$

o modo 2 assume identidade do modo 1 ou seja, quando

$$\tau_{ex} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (\text{C.6})$$

Em  $Y_{12}(\tau_{ex}, 0) = 0$  o sistema desemaranha, assim tem-se que:

$$\text{sen}(2\tau_{ex}) = \text{sen}\left(2\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = \text{sen}(2n\pi) \cos \pi + \cos(2n\pi) \text{sen} \pi = 0, \forall n \quad (\text{C.7})$$

Sendo

$$S_1(\tau_{ex}, \beta) = e^{-2\beta\tau} S_1(\tau, 0) + (2\nu + 1)(1 - e^{-2\beta\tau}) \quad (\text{C.8})$$

e

$$S_2(\tau_{ex}, \beta) = e^{-2\beta\tau} S_2(\tau, 0) + (2\nu + 1)(1 - e^{-2\beta\tau}) \quad (\text{C.9})$$

obtem-se que

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} S_1(\tau, \beta) &= (2\nu + 1) \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} S_2(\tau, \beta) &= (2\nu + 1) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Com dissipação, isto é, com o sistema acoplado ao reservatório,  $\beta \neq 0$ , em  $\tau = \tau_{ex}$  tem-se

$$\begin{aligned} S_1(\tau_{ex}, \beta) &= e^{-2\beta\tau_{ex}} S_1(\tau_{ex}, 0) + (2\nu + 1)(1 - e^{-2\beta\tau_{ex}}) \\ S_2(\tau_{ex}, \beta) &= e^{-2\beta\tau_{ex}} S_2(\tau_{ex}, 0) + (2\nu + 1)(1 - e^{-2\beta\tau_{ex}}) \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{aligned} S_1(\tau_{ex}, \beta) &= e^{-2\beta\tau_{ex}} S_2(0, 0) + (2\nu + 1)(1 - e^{-2\beta\tau_{ex}}) \\ S_2(\tau_{ex}, \beta) &= e^{-2\beta\tau_{ex}} S_1(0, 0) + (2\nu + 1)(1 - e^{-2\beta\tau_{ex}}) \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

nos instantes  $\tau_{ex}$  tem-se:

$$\begin{aligned} S_1(\tau_{ex}, \beta) &= e^{-2\beta\tau_{ex}} 2v_2 e^{-2r_2} + (2\nu + 1)(1 - e^{-2\beta\tau_{ex}}) \\ S_2(\tau_{ex}, \beta) &= e^{-2\beta\tau_{ex}} 2v_1 e^{-2r_1} + (2\nu + 1)(1 - e^{-2\beta\tau_{ex}}) \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

onde

$$\tau_{ex} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi; n \in Z^+ \quad (\text{C.14})$$

Assim,

$$\begin{aligned} S_1(\tau_{ex}, \beta) &< 1 \\ 2v_2 e^{-2(\beta\tau_{ex} + r_2)} + (2\nu + 1)(1 - e^{-2\beta\tau_{ex}}) &< 1 \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$



com

$$\begin{aligned} z &= 2\nu + 1, \\ \xi &= e^{-2\beta\tau_{ex}}, \\ \mathcal{G}_2 &= 2\nu_2 e^{-2r_2} < 1 \end{aligned} \tag{C.16}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2\xi + z(1 - \xi) &< 1 \\ (\mathcal{G}_2 - z)\xi + z &< 1 \\ (z - \mathcal{G}_2)\xi &> z - 1 \\ \xi &> \frac{z - 1}{z - \mathcal{G}_2} \\ e^{-2\beta\tau_{ex}} &> \frac{z - 1}{z - \mathcal{G}_2} \\ -2\beta\tau_{ex} &> \ln \frac{z - 1}{z - \mathcal{G}_2} \\ \tau_{ex} &< -\frac{1}{2\beta} \ln \frac{z - 1}{z - \mathcal{G}_2} = \frac{1}{2\beta} \ln \frac{z - \mathcal{G}_2}{z - 1} \end{aligned} \tag{C.17}$$

sendo que

$$z - \mathcal{G}_2 > z - 1 \tag{C.18}$$

uma vez que  $\mathcal{G}_2 < 1$  Assim,

$$\begin{aligned} (n + \frac{1}{2})\pi &< \frac{1}{2\beta} \ln \frac{2\nu + 1 - \mathcal{G}_2}{2\nu} \\ n &< \frac{1}{2\beta\pi} \ln \frac{2\nu + 1 - \mathcal{G}_2}{2\nu} - \frac{1}{2}, (\beta, \nu \neq 0) \end{aligned} \tag{C.19}$$

No limite de temperatura nula,  $\nu = 0$ , sendo

$$\ln \frac{2\nu + 1 - \mathcal{G}_2}{2\nu} = \ln \frac{2\nu}{2\nu} \left[ 1 + \frac{1}{2\nu} - \frac{\mathcal{G}_2}{2\nu} \right] \tag{C.20}$$

tem-se

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \ln \frac{2\nu + 1 - \mathcal{G}_2}{2\nu} = \infty \tag{C.21}$$

Como  $n < \infty$  então há finitos intervalos de tempos nos quais o modo 1 assume um valor de  $S_1 < 1$ . Há  $n + 1$  valores de tempos para os quais  $S_1(\tau, \beta) < 1$  e há  $n + 1$  intervalos de tempo nos quais  $S_1(\tau, \beta) < 1$ .

# Apêndice D

## Matriz M

### D.1 Elementos da matriz das covariâncias

Sendo os elementos definidos por

$$q_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \langle q_\alpha q_\beta + q_\beta q_\alpha \rangle \quad (\text{D.1})$$

e a matriz  $\mathcal{Q} = \|q_{\alpha\beta}\|$  da forma  $q = (\hat{x}_1; \hat{p}_1; \hat{x}_2; \hat{p}_2)$  onde,

$$\hat{x}_k = \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger) \quad \hat{p}_k = \frac{\sqrt{2}}{2i} (\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger) \quad (\text{D.2})$$

com as relações inversas,

$$\hat{a}_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x}_k + i\hat{p}_k) \quad \hat{a}_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x}_k - i\hat{p}_k) \quad \hat{x}_k^\dagger = \hat{x}_k \quad \hat{p}_k^\dagger = \hat{p}_k \quad (\text{D.3})$$

de forma que

$$\mathcal{Q} = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{vmatrix}. \quad (\text{D.4})$$

Cujos elementos são dados por:

$$q_{11} = \frac{1}{2} \langle (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger)^2 \rangle \quad (\text{D.5})$$

$$q_{12} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{2i} (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger) (\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger) + \frac{1}{2i} (\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger) (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger) \right\rangle \quad (\text{D.6})$$

$$q_{13} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{2} (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger) (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger) + \frac{1}{2} (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger) (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger) \right\rangle \quad (\text{D.7})$$

$$q_{14} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{2i} (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger) (\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger) + \frac{1}{2i} (\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger) (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger) \right\rangle \quad (\text{D.8})$$

$$q_{21} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{2i} (\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger) (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger) + \frac{1}{2i} (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger) (\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger) \right\rangle \quad (D.9)$$

$$q_{22} = -\frac{1}{2} \left\langle (\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger)^2 \right\rangle \quad (D.10)$$

$$q_{23} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{2i} (\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger) (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger) + \frac{1}{2i} (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger) (\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger) \right\rangle \quad (D.11)$$

$$q_{24} = -\frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{2} (\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger) (\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger) + \frac{1}{2} (\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger) (\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger) \right\rangle \quad (D.12)$$

$$q_{31} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{2} (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger) (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger) + \frac{1}{2} (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger) (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger) \right\rangle \quad (D.13)$$

$$q_{32} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{2i} (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger) (\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger) + \frac{1}{2i} (\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger) (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger) \right\rangle \quad (D.14)$$

$$q_{33} = \frac{1}{2} \left\langle (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger)^2 \right\rangle \quad (D.15)$$

$$q_{34} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{2i} (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger) (\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger) + \frac{1}{2i} (\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger) (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger) \right\rangle \quad (D.16)$$

$$q_{41} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{2i} (\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger) (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger) + \frac{1}{2i} (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger) (\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger) \right\rangle \quad (D.17)$$

$$q_{42} = -\frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{2} (\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger) (\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger) + \frac{1}{2} (\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger) (\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger) \right\rangle \quad (D.18)$$

$$q_{43} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{2i} (\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger) (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger) + \frac{1}{2i} (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger) (\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger) \right\rangle \quad (D.19)$$

$$q_{44} = -\frac{1}{2} \left\langle (\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger)^2 \right\rangle. \quad (D.20)$$

Escrevendo os elementos  $q_{\alpha\beta}$  na forma explícita tem-se

$$q_{11} = \frac{1}{2} \left( \langle \hat{a}_1^2 \rangle + \langle \hat{a}_1^{\dagger 2} \rangle + 2 \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \frac{1}{2} \rangle \right) \quad (D.21)$$

$$q_{12} = \frac{1}{2i} \left( \langle \hat{a}_1^2 \rangle - \langle \hat{a}_1^{\dagger 2} \rangle \right) \quad (D.22)$$

$$q_{13} = \frac{1}{2} \left( \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle + \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rangle + \langle \hat{a}_2 \hat{a}_1^\dagger \rangle + \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rangle \right) \quad (D.23)$$

$$q_{14} = \frac{1}{2i} \left( \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle + \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \rangle - \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rangle - \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rangle \right) \quad (D.24)$$

$$q_{21} = \frac{1}{2i} \left( \langle \hat{a}_1^2 \rangle - \langle \hat{a}_1^{\dagger 2} \rangle \right) \quad (D.25)$$

$$q_{22} = -\frac{1}{2} \left( \langle \hat{a}_1^2 \rangle + \langle \hat{a}_1^{\dagger 2} \rangle - 2 \langle \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger + \frac{1}{2} \rangle \right) \quad (D.26)$$

$$q_{23} = \frac{1}{2i} \left( \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle + \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rangle - \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \rangle - \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rangle \right) \quad (D.27)$$

$$q_{24} = -\frac{1}{2} \left( \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle + \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rangle - \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rangle - \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \rangle \right) \quad (D.28)$$

$$q_{31} = \frac{1}{2} \left( \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle + \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rangle + \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \rangle + \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rangle \right) \quad (D.29)$$

$$q_{32} = \frac{1}{2i} \left( \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle - \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \rangle + \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rangle - \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rangle \right) \quad (D.30)$$

$$q_{33} = \frac{1}{2} \left( \langle \hat{a}_2^2 \rangle + \langle \hat{a}_2^{\dagger 2} \rangle + 2 \langle \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger + \frac{1}{2} \rangle \right) \quad (D.31)$$

$$q_{34} = \frac{1}{2i} \left( \langle \hat{a}_2^2 \rangle - \langle \hat{a}_2^{\dagger 2} \rangle \right) \quad (D.32)$$

$$q_{41} = \frac{1}{2i} \left( \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle + \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \rangle - \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rangle - \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rangle \right) \quad (D.33)$$

$$q_{42} = -\frac{1}{2} \left( \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle - \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \rangle - \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rangle + \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rangle \right) \quad (D.34)$$

$$q_{43} = \frac{1}{2i} \left( \langle \hat{a}_2^2 \rangle - \langle \hat{a}_2^{\dagger 2} \rangle \right) \quad (D.35)$$

$$q_{44} = -\frac{1}{2} \left( \langle \hat{a}_2^2 \rangle + \langle \hat{a}_2^{\dagger 2} \rangle - 2 \langle \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger + \frac{1}{2} \rangle \right). \quad (D.36)$$

## D.2 Relação entre os elementos $q_{\alpha\beta}$ e $M_{\alpha\beta}$

A matriz  $M$ , cujos elementos são escritos em termos dos operadores bosônicos assume a forma

$$M = \begin{pmatrix} \langle \hat{a}_1 \hat{a}_1 \rangle & \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle & \langle \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger \rangle & \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rangle \\ \langle \hat{a}_2 \hat{a}_1 \rangle & \langle \hat{a}_2 \hat{a}_2 \rangle & \langle \hat{a}_2 \hat{a}_1^\dagger \rangle & \langle \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger \rangle \\ \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle & \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \rangle & \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1^\dagger \rangle & \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rangle \\ \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \rangle & \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle & \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1^\dagger \rangle & \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix}, \quad (D.37)$$

onde a relação entre os elementos  $q_{\alpha\beta}$  e  $m_{\alpha\beta}$  é dada por:

$$q_{11} = \frac{1}{2} (M_{11} + M_{33} + 2M_{13} + 1) \quad (D.38)$$

$$q_{12} = \frac{1}{2i} (M_{11} - M_{33}) \quad (D.39)$$

$$q_{13} = \frac{1}{2} (M_{12} + M_{32} + M_{14} + M_{34}) \quad (D.40)$$

$$q_{14} = \frac{1}{2i} (M_{12} + M_{32} - M_{14} - M_{34}) \quad (D.41)$$

$$q_{21} = \frac{1}{2i} (M_{11} - M_{33}) \quad (D.42)$$

$$q_{22} = -\frac{1}{2} (M_{11} + M_{33} - 2M_{13} - 1) \quad (D.43)$$

$$q_{23} = \frac{1}{2i} (M_{12} - M_{32} + M_{14} - M_{34}) \quad (D.44)$$

$$q_{24} = -\frac{1}{2} (M_{12} - M_{32} - M_{14} + M_{34}) \quad (D.45)$$

$$q_{31} = \frac{1}{2} (M_{12} + M_{32} + M_{14} + M_{34}) \quad (D.46)$$

$$q_{32} = \frac{1}{2i} (M_{12} - M_{32} + M_{14} - M_{34}) \quad (D.47)$$

$$q_{33} = \frac{1}{2} (M_{22} + M_{44} + 2M_{24} + 1) \quad (D.48)$$

$$q_{34} = \frac{1}{2i} (M_{22} - M_{44}) \quad (D.49)$$

$$q_{41} = -\frac{1}{2i} (M_{12} + M_{32} - M_{14} - M_{34}) \quad (D.50)$$

$$q_{42} = -\frac{1}{2}(M_{12} - M_{32} - M_{14} + M_{34}) \quad (\text{D.51})$$

$$q_{43} = \frac{1}{2i}(M_{22} - M_{44}) \quad (\text{D.52})$$

$$q_{44} = -\frac{1}{2}(M_{22} + M_{44} - 2M_{24} - 1). \quad (\text{D.53})$$