UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS HUMANAS, LETRAS E ARTES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MESTRADO E DOUTORADO

FRANCIELE ISABELITA LOPES NOVAK

O AMBIENTE DINÂMICO GEOGEBRA PARA O DESENVOLVIMENTO DE ASPECTOS ESPECÍFICOS DA APRENDIZAGEM EM GEOMETRIA SEGUNDO RAYMOND DUVAL: OLHARES, APREENSÕES E DESCONSTRUÇÃO DIMENSIONAL

PONTA GROSSA
2018

FRANCIELE ISABELITA LOPES NOVAK

O AMBIENTE DINÂMICO GEOGEBRA PARA O DESENVOLVIMENTO DE ASPECTOS ESPECÍFICOS DA APRENDIZAGEM EM GEOMETRIA SEGUNDO RAYMOND DUVAL: OLHARES, APREENSÕES E DESCONSTRUÇÃO DIMENSIONAL

Dissertação apresentada no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual de Ponta Grossa, na linha de Pesquisa Ensino e Aprendizagem, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Celia Finck Brandt

PONTA GROSSA
2018

Novak, Franciele Isabelita Lopes

N935 O ambiente dinâmico GeoGebra para o desenvolvimento de aspectos específicos da aprendizagem em Geometria segundo Raymon Duval: olhares, apreensões e desconstrução dimensional/ Franciele Isabelita Lopes Novak. Ponta Grossa, 2018.
149 f.

Dissertação (Mestrado em Educação - Área de Concentração: Educação), Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientadora: Profa. Dra. Célia Finck Brandt.

1. Ensino e Aprendizagem. 2. Educação Matemática. 3. Teoria dos Registros de Representação Semiótica. 4. Geometria. I. Brandt, Célia Finck. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. III. T.

CDD: 510

Ficha catalográfica elaborada por Maria Luzia Fernandes Bertholino dos Santos – CRB 9/986

PPGE - UEPG

Universidade Estadual de Ponta Grossa
Programa de Pós-Graduação em Educação
Mestrado e Doutorado

UEPG

TERMO DE APROVAÇÃO

FRANCIELE ISABELITA LOPES NOVAK

O AMBIENTE DINÂMICO GEOGEBRA PARA O DESENVOLVIMENTO DE ASPECTOS ESPECÍFICOS DA APRENDIZAGEM EM GEOMETRIA SEGUNDO RAYMOND DUVAL: OLHARES, APREENSÕES E DESCONSTRUÇÃO DIMENSIONAL

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Educação, Setor de Ciências Humanas, Letras e Artes da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Orientador (a) Profª Dra. Celia Finck Brandt - UEPG

Profª Dra. Tânia Stella Bassoi - UNIOESTE

Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti - UFSC

Profª Dra. Ettiène Cordeiro Güérios - UFPR - suplente

Profª Dra. Ana Lúcia Pereira – UEPG - suplente

Ponta Grossa, 31 de julho de 2018.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço àquele que guia meus passos, minha fonte de sabedoria e força em todos os momentos! Quantas vezes recorri ao meu Amado Deus que é Pai, Filho e Espírito Santo, pedindo forças e luz para permanecer forte nessa fase da vida. Ao término dessa etapa tão importante, agradeço a Deus por estar comigo.

Nesse singelo momento de agradecer, revelo as marcas que algumas pessoas especiais deixaram em meu caminho. Sem elas não teria conseguido. Aos meus pais, Ademir e Sarita, pelo dom da vida e incentivo, mesmo de longe. Em especial, meu marido Thiago, que me amparou em toda a caminhada, demonstrando todo seu companheirismo e compreensão pelos momentos de ausências e abdicações que foram necessários para que essa etapa fosse concluída.

Minha orientadora, professora Celia, que acreditou em mim, sempre muito sábia com suas orientações. Agradeço sua disponibilidade e zelo. Com muita ternura, proporcionou condições e incentivo para que hoje a paixão pela busca de conhecimento e pela pesquisa tornassem enraizadas em meu ser.

Minhas amigas Fátima e Carine, verdadeiros presentes que o curso de mestrado me trouxe. Agradeço por compartilharem momentos de risos, expectativas, dúvidas, discussões, trabalhos e viagens a eventos. Minhas amigas que, sempre muito atenciosas e pacientes, contribuíram muito para meu amadurecimento como pesquisadora.

À Ronilze, Silmara, Regiane e Luis, que abriram as portas da escola e não mediram esforços para que esta pesquisa fosse possível. A todos os alunos que participaram das atividades, demonstraram comprometimento e entusiasmo em todas as atividades propostas. Em especial, Nataniel, que teve paciência em aceitar o teste piloto e realizar as atividades que propus.

À banca da qual muito me orgulho, professores que são para mim fontes de inspiração. Agradeço pela disponibilidade para a leitura de meu trabalho, que de maneira significativa abrilhantaram esta pesquisa com sugestões e apontamentos.

Aos demais colegas do mestrado, pelo convívio e amizade. Aos professores de minha vida, de ontem hoje e sempre, que vivenciam os desafios do saber e aprender, que contribuíram direta ou indiretamente, meu singelo agradecimento.

À Capes, pelo apoio financeiro.

Em primeiro lugar, que o fogo, a terra, a água e o ar são corpos, isso é claro para todos; tudo o que é da espécie do corpo tem profundidade. Mas a profundidade envolve, necessariamente e por natureza, a superfície; e uma superfície plana é composta a partir de triângulos.

(Platão)

NOVAK, Franciele Isabelita Lopes. **O ambiente dinâmico GeoGebra para o desenvolvimento de aspectos específicos da aprendizagem em geometria segundo Raymond Duval:** olhares, apreensões e desconstrução dimensional. 2018. 149f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ponta Grossa, 2018.

RESUMO

A geometria consiste numa área da Matemática rica em possibilidades de desenvolvimento cognitivo, porém nem sempre valorizada sob esse ponto de vista. A partir dessa constatação, a teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval (2004, 2005, 2011, 2012a, 2012b, 2013, 2015) evidencia atividades cognitivas referentes ao desenvolvimento do pensamento geométrico, servindo de amparo para possibilidades de melhoria dos processos de ensino e aprendizagem. Uma articulação da geometria com um ambiente dinâmico direciona o presente estudo na busca pela resposta ao seguinte questionamento: De que forma é possível estimular o desenvolvimento de atividades cognitivas segundo Raymond Duval com a utilização do ambiente dinâmico GeoGebra em atividades de geometria? A partir desse questionamento, o objetivo desta pesquisa consiste em apontar contribuições referentes ao uso desse ambiente dinâmico para o trabalho com a Geometria no que diz respeito ao estímulo da visualização de características envolvendo figuras geométricas, indicando quais atividades cognitivas específicas da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval foram presentes. Este estudo foi realizado com 30 alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do estado do Paraná, em que foram analisadas as produções digitais e escritas dos sujeitos no decorrer da aplicação de uma oficina, cuja temática foi a geometria, com atividades envolvendo polígonos e poliedros por meio do uso do GeoGebra. Como resultado, foi possível inferir que o dinamismo proporcionado pelo ambiente dinâmico GeoGebra foi um facilitador para a identificação de características de determinados objetos matemáticos. A escolha dos conteúdos envolvendo poliedros regulares e não regulares e a Relação de Euler, bem como a retomada de conceitos de polígonos regulares e não regulares determinaram estímulo para a desconstrução dimensional. A presença das apreensões foi identificada e os olhares icônicos mais evidenciados. Por meio do GeoGebra, as explorações das figuras geométricas são eficientes e favorecem o estabelecimento de conjecturas, consequentemente, as apreensões, olhares e a desconstrução dimensional são requisitados.

Palavras-chave: Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Geometria. Olhares. Apreensões. Desconstrução Dimensional. GeoGebra.

NOVAK, Franciele Isabelita Lopes. **The GeoGebra dynamic environment for the development of specific aspects of learning in geometry according to Raymond Duval:** looks, apprehensions and dimensional deconstruction. 2018. 149f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ponta Grossa, 2018.

ABSTRACT

Geometry consists of an area of mathematics which is rich in possibilities of cognitive development, but not always valued from this point of view. Raymond Duval's Theory of Registers of Semiotic Representations (2004, 2005, 2012, 2012a, 2012b, 2013, 2015) provides a description of cognitive activities related to the development of geometric thinking, serving as a support for possibilities of improving teaching and learning processes. An articulation of the geometry with a dynamic environment directs the present study in the search for the answer to the following question: In what way is it possible to stimulate the development of cognitive activities according to Raymond Duval using the GeoGebra dynamic environment in geometry activities? From this questioning, the objective of this research is to point out contributions referring to the use of this dynamic environment for the work with Geometry with respect to the stimulus of the visualization of characteristics involving geometric figures indicating which specific cognitive activities of the Theory of Semiotic Representation Registers of Raymond Duval were present. This study was carried out with 30 students from the eighth grade of elementary school of a public school in the state of Paraná, in which the subjects' digital and written productions were analyzed during the application of a workshop, whose theme was geometry, with activities involving polygons and polyhedra through the use of GeoGebra. As a result, it was possible to infer that the dynamism provided by the GeoGebra dynamic environment was a facilitator for the identification of characteristics of certain mathematical objects. The choice of contents involving regular and non-regular polyhedra and Euler's Relation, as well as the resumption of concepts of regular and non-regular polygons, provided a stimulus for dimensional deconstruction. The presence of the apprehensions was identified and the iconic views more evident. Through GeoGebra, the explorations of the geometric figures are efficient and favor the establishment of conjectures, consequently, the seizures, views and dimensional deconstruction are required.

Key Words: Theory of Registers of Semiotic Representations. Geometry. Views. Apprehensions.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Pares ordenados da função f(x)= x + 1 34
Quadro 2 - Análise das tarefas cognitivas requeridas para a utilização de um computador 48
Quadro 3 - Construção de uma reta e um segmento de reta no GeoGebra 56
Quadro 4 - Atividade 2.0 construção de três formas geométricas 57
Quadro 5 - Categorias para Análise Cognitiva das atividades propostas na primeira etapa da oficina: hipóteses 65
Quadro 6 - Atividade 5.2 tetraedro, pirâmide e cubo 67
Quadro 7 - Categorias para Análise Cognitiva das atividades propostas na segunda etapa da oficina 71
Quadro 8 - Quadro analítico das respostas do G1 e G2 sobre características observadas na reta e no segmento de reta 74
Quadro 9 - Respostas G2 sobre o segmento de reta 76
Quadro 10 - Quadro de análise da atividade 2.0 79
Quadro 11 - Atividade 3.0 G1 e G2 81
Quadro 12 - Análise da atividade 3.1 84
Quadro 13 - Algumas reproduções da figura de partida da atividade 3.1 86
Quadro 14 - Segunda maneira de reconfiguração realizada pela dupla B4 na atividade 3.1 87
Quadro 15 - Segunda maneira de reconfiguração realizada pela dupla B1 na atividade 3.1 87
Quadro 16 - Atividade 3.1 – algumas reproduções da figura 88
Quadro 17 - Reprodução da atividade 3.2 pelas duplas A2 e A8 89
Quadro 18 - Análise cognitiva atividade 3.2 Tangran 90
Quadro 19 - Modificação mereológica da atividade 3.2 feita por 4 duplas do segundo grupo 91
Quadro 20 - Análise da atividade 4.0 - elementos de um polígono 92
Quadro 21 - Análise da atividade 4.1 94
Quadro 22 - Análise da atividade 4.1: conjecturas sobre a medida de lados 97
Quadro 23 - Passo-a-passo para a obtenção da medida dos ângulos na atividade 4.2 99
Quadro 24 - Análise da atividade 4.2 99
Quadro 25 - Análise atividade 4.2 - quais polígonos são regulares? 101
Quadro 26 - Análise da atividade 5.0 106
Quadro 27 - Análise da atividade 5.1 109
Quadro 28 - Análise da atividade 5.2 112
Quadro 29 - Diálogo sobre a ferramenta de planificação 115
Quadro 30 - Análise da questão 6.0 116
Quadro 31 - Instruções de construção do dodecaedro na atividade 6.0 117
Quadro 32 - Articulação das apreensões nas atividades da primeira etapa da oficina 119
Quadro 33 - Articulação das apreensões nas atividades da segunda etapa da oficina 120

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Gráfico da função f(x)=x 32
Figura 2 - Representação gráfica da função f(x)= x+1 35
Figura 3 - Gráfico da função afim: f(x)=x+1 36
Figura 4 - Classificação das unidades figurais elementares 38
Figura 5 - Exemplos de diferentes organizações perceptivas das figuras 40
Figura 6 - Modificação mereológica homogênea e heterogênea de figuras geométricas 41
Figura 7 - Modificação ótica em um quadrado 41
Figura 8 - Modificação posicional com variação de orientação 42
Figura 9 - Construção esperada a partir do seguimento das instruções de construção 43
Figura 10 - Exemplo de questão que mobiliza a apreensão discursiva 43
Figura 11 - Não congruência entre enunciado e figura 44
Figura 12 - Quantos retângulos tem esta figura? 44
Figura 13 - Organograma das etapas de pré-análise de acordo com Bardin (2016, p. 126-131) 54
Figura 14 - Interface da atividade 3.0 polígonos e não polígonos 59
Figura 15 - Atividade 3.1 Reconfiguração 60
Figura 16 - Atividade 3.2 - Tangram 61
Figura 17 - Atividade 4.0 elementos de um polígono 62
Figura 18 - Atividade 4.1 - quantos lados, vértices e ângulos? 63
Figura 19 - Atividade 4.2 polígonos regulares e não regulares 64
Figura 20 - Atividade 5.0 da segunda etapa da Oficina 66
Figura 21 - Atividade 5.2 - cubo e paralelepípedo 69
Figura 22 - Atividade 6.0 - construção dos poliedros regulares 70
Figura 23 - Protocolos de construção dos sujeitos B2, B5 e B7 73
Figura 24 - Construção realizada pela pesquisadora no GeoGebra a partir das instruções de B4 78
Figura 25 - Construção realizada pela pesquisadora no GeoGebra a partir das instruções de B6 78
Figura 26 - Atividade 2 sujeito B6 80
Figura 27 - Modificação mereológica feita na Figura 7 pela dupla B5 83
Figura 28 - Interface das atividades 3.1 - Reconfiguração e 3.2 - Tangran 84
Figura 29 - Atividade 4.0 - elementos de um polígono 92
Figura 30 - Resolução da atividade 4.1 pela dupla B2 95
Figura 31 - Interface da atividade 4.2 realizada por A7 e B7 103
Figura 32 - Atividade 5.0 - Elementos de um poliedro 105
Figura 33 - Interface da atividade 5.2 111
Figura 34 - Movimentação do Tetraedro 115

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Instituições de Ensino e a quantidade de pesquisas coletadas 19
Tabela 2 - Classificação das pesquisas quanto às unidades temáticas da BNCC 20
Tabela 3 - Quantitativo de pesquisas quanto ao uso de ambientes estáticos e dinâmicos 21
Tabela 4 - Frequência de estudos no contexto de espaço e forma que se valeram do uso de algum tipo de ambiente dinâmico entre os anos 2000 até 2016 24
Tabela 5 - Nível de abrangência das dissertações, teses e artigos do bloco de conteúdos de espaço e forma que fizeram uso de ambientes dinâmicos 25

LISTA DE SIGLAS

AGD	Ambiente de Geometria Dinâmica
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
D0	Dimensão Zero
D1	Dimensão Um
D2	Dimensão Dois
D3	Dimensão Três
IBICT	Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
SCIELO	Scientific Electronic Library Online

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 15

2 UMA TRAJETÓRIA POR PESQUISAS ENVOLVENDO O USO DE AMBIENTES DINÂMICOS E A GEOMETRIA 18

3 EMBASAMENTO TEÓRICO: AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS SEGUNDO RAYMOND DUVAL 30
3.1 AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS: PRESSUPOSTOS INICIAIS 30
3.2 A GEOMETRIA SOB A ÓTICA DA TEORIA DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS 37
3.3 OS AMBIENTES INFORMATIZADOS: ALGUNS APONTAMENTOS 46

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DE COLETA, ORGANIZAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS 50
4.1 A NATUREZA DA PESQUISA E DELINEAMENTO METODOLÓGICO 50
4.2 CARACTERIZAÇÃO DOS SUJEITOS E PROCEDIMENTOS DE COLETA DE DADOS 51
4.2.1 A caracterização dos sujeitos e do ambiente escolar 51
4.2.2 Os instrumentos de coleta de dados 52
4.3 A ANÁLISE DE CONTEÚDO DE LAURENCE BARDIN (2016) 53
4.3.1 Primeiro momento: a pré-análise 54
4.3.2 Segundo momento: descrição analítica para identificação de categorias 55
4.3.3 Terceiro momento: interpretação, tratamento e análise inferencial dos dados obtidos 55
4.3.3.1 Os instrumentos de coleta: estudo preliminares 56
4.3.3.1.1 Atividades da primeira etapa da oficina 56
Atividade 1.0 - Construção de uma reta e de um segmento de reta 56
Atividade 2.0 - Construção de três formas geométricas 57
Atividades 3.0 - Polígonos e não polígonos, 3.1 - Reconfiguração e 3.2 - Tangran 58
Atividades 4.0, 4.1 e 4.2 - Os polígonos: seus elementos e classificação, polígonos regulares e não regulares 61
4.3.3.1.2 ATIVIDADES DA SEGUNDA ETAPA DA OFICINA 66
Atividades 5.0, 5.1 e 5.2 - Elementos e características dos poliedros 66
Atividades 6.0 - Poliedros regulares e a Relação de Euler 69
4.3.3.2 Interpretação dos resultados: descrição analítica e interpretações inferenciais 71
Análise da atividade 1.0 72
Análise da atividade 2.0 77
Análise da atividade 3.0 81
Análise das atividades 3.1 e 3.2 83
Análise da atividade 4.0 91
Análise da Atividade 4.1 94
Análise da Atividade 4.2 96
Análise da Atividade 5.0 104
Análise da Atividade 5.1 108

Análise da Atividade 5.2 111
Análise da Atividade 6.0 114
4.3.3.3 Uma articulação entre apreensões: Análise e interpretação das atividades 118

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 121

REFERÊNCIAS 124

APÊNDICES 130
APÊNDICE A – CADERNOS DE ATIVIDADES DA OFICINA 131

1 INTRODUÇÃO

Esse trabalho contempla a geometria e o uso do ambiente dinâmico GeoGebra, por considerar esse recurso um potencializador do desenvolvimento de questões específicas e próprias da geometria, segundo Raymond Duval. Dentre problemáticas que a envolvem, os estudos de Lorenzato (1995) e Pavanello (1993) apontam impasses, referindo-se à carência de conhecimentos dessa área da Matemática. Fatores como: a precariedade da presença da Geometria no currículo da formação docente, a promulgação de leis que concederam às escolas a liberdade de escolha para a organização do programa de disciplinas, em que o ensino de Geometria é deixado para o último período do ano letivo, além do modo como os livros didáticos organizam o conhecimento da Geometria, por vezes, desligado da realidade, caracterizam o abandono da Geometria.

Nesse cenário, outras pesquisas como as de Santos (2007), Lovis (2009), Silva (2011), Medeiros (2012) e Almouloud *et al.* (2004) procuraram, por meio de um trabalho com a formação continuada dos professores, amenizar dificuldades no ensino de Geometria, no que diz respeito às fragilidades quanto ao conhecimento docente. Em todos esses trabalhos foram oportunizadas aos professores, trocas de conhecimentos, reflexões e alternativas para o trabalho com esse conteúdo da Matemática. Outra recorrência que despertou a atenção foi que esses pesquisadores buscaram amparo dos ambientes dinâmicos, parcial ou totalmente, a fim de proporcionar capacitação dos professores para o uso de recursos tecnológicos e alternativas para o ensino dessa área da Matemática tão rica e, por vezes, não valorizada.

Por se tratar de uma fonte de conhecimento importante, a geometria é um campo em que “o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.”. (BRASIL, 1998, p. 51). Aliada às considerações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a concepção de Lorenzatto (1995, p. 06) sobre a Geometria reforça a escolha do estudo em contemplar essa temática, pois “aqueles que procuram um facilitador de processos mentais, encontrarão na Geometria o que precisam: prestigiando o processo de construção do conhecimento, a Geometria valoriza o descobrir, o conjecturar e o experimentar.”.

Para o desenvolvimento do pensamento geométrico, segundo os pressupostos de Raymond Duval (2004, 2012b), há a presença de diferentes atividades cognitivas, denominadas de: apreensões (perceptiva, sequencial, operatória e discursiva), olhares (botânico, agrimensor, construtor e inventor) e também desconstrução dimensional (incluindo as dimensões: 0D (pontos) para 1D (retas, segmentos) ou para 2D (superfícies) e vice-versa).

Entende-se que todo o processo de mobilização das atividades cognitivas descritas por Duval (2004, 2012b) pode ser facilitado com a articulação de determinados recursos didáticos. Dentre esses recursos, se considerou pertinente a utilização dos ambientes dinâmicos, pois de acordo com Gravina *et al.* (2010, p. 38), “são ferramentas que oferecem régua e compasso virtuais, permitindo a construção de figuras geométricas a partir das propriedades que as definem.”. Dentre algumas características, a possibilidade de exploração das figuras ao arrastá-las, modificá-las ou reordená-las por meio do *mouse,* consiste num ponto positivo em relação à figura geométrica estática, em que ações como as mencionadas podem ser feitas, mas com um custo de tempo elevado.

Ao voltar o olhar para o ambiente dinâmico GeoGebra em relação às possibilidades de aprendizagem da Geometria, o presente estudo questiona: De que forma é possível estimular o desenvolvimento de atividades cognitivas segundo Raymond Duval com a utilização do ambiente dinâmico GeoGebra em atividades de geometria? Em contrapartida, a questão norteadora, suscita um desmembramento de outras questões:

1) O trabalho com esse ambiente dinâmico envolvendo conteúdos de geometria permite a desconstrução dimensional de figuras referente a: dimensão zero (D0) (para pontos), dimensão um (D1) (referente as retas ou segmentos), dimensão D2 (relativa à superfícies) e dimensão três (D3) (referente a volumes)?
2) Que tipo de olhares poderão ser contemplados nas atividades de Geometria propostas no GeoGebra?
3) Como pode ser oportunizada a atividade cognitiva voltada para o desenvolvimento das apreensões perceptiva, sequencial, operatória e discursiva com o uso dos ambientes dinâmicos?
4) O desenvolvimento da atividade cognitiva relacionada às modificações figurais (mereológica, posicional e ótica), característico da apreensão operatória, é favorecido pelo uso do ambiente dinâmico GeoGebra?

Para responder a todas as inquietações, a presente pesquisa objetiva, de maneira geral, apontar contribuições referentes ao uso do ambiente dinâmico para o trabalho com a Geometria no que diz respeito ao estímulo da visualização de características envolvendo figuras geométricas, indicando quais atividades cognitivas específicas da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval foram presentes. Especificamente, são considerados relevantes, os demais objetivos a seguir:

- \- Indicar se atividades de Geometria no ambiente dinâmico inibem ou facilitam o reconhecimento das unidades figurais de uma figura geométrica.
- \- Delinear o desenvolvimento dos olhares: botanista, agrimensor, construtor e inventor na resolução de atividades propostas no ambiente dinâmico.
- \- Evidenciar a ocorrência das apreensões perceptiva, operatória, discursiva e sequencial em atividades propostas em um ambiente dinâmico.

Para a realização deste estudo, foi proposta uma oficina de geometria com o uso do ambiente dinâmico *GeoGebra* para alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual do município de Ponta Grossa – PR. Optou-se pela escolha desse ambiente dinâmico por constituir-se de um software gratuito e compatível com os sistemas operacionais *Linux* e *Windows*, o que o caracterizou como um ambiente dinâmico de fácil acesso. As atividades propostas nesse ambiente dinâmico tratam de estímulos às observações necessárias para compreensão de conceitos envolvendo características da reta, segmento de reta, polígonos, polígonos regulares e não regulares, poliedros regulares e não regulares e da Relação de Euler. Não foram contempladas situações problemas que suscitassem heurística de resolução. As atividades são, portanto, ponto de partida para o desenvolvimento da compreensão de conceitos e de contato com o GeoGebra.

A pesquisa é de natureza qualitativa, cuja abordagem consistiu num estudo de caso, pois compreende a análise da produção de um grupo determinado de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual da cidade de Ponta Grossa – PR. Os instrumentos de coleta dos dados empíricos foram atividades propostas em arquivos digitais salvos nos computadores e atividades escritas solicitadas no decorrer da oficina, bem como anotações da pesquisadora e gravações de áudio. Para um melhor encaminhamento do estudo, como metodologia de análise, escolheram-se os subsídios teóricos da proposta de Bardin (2016).

O presente estudo está organizado em 4 capítulos, de modo que, no primeiro, é apresentada uma trajetória das pesquisas envolvendo a Geometria e/ou ambientes dinâmicos. No segundo capítulo, são mencionados os subsídios teóricos da teoria dos Registros de Representação Semiótica, segundo Raymond Duval. No terceiro capítulo, apresentam-se a natureza e a abordagem metodológica, bem como os procedimentos metodológicos de coleta, organização e análise dos dados. Por fim, o quarto capítulo destina-se às análises, resultados obtidos e discussões.

2 UMA TRAJETÓRIA POR PESQUISAS ENVOLVENDO O USO DE AMBIENTES DINÂMICOS E A GEOMETRIA

Para que fosse possível situar em que cenário se encontra este estudo, um levantamento de pesquisas já existentes foi realizado. A trajetória de busca contou com base de dados que possuem credibilidade no meio acadêmico. Foram consultados: o banco de dissertações e teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), o site Portal Domínio Público, a Scientific Electronic Library Online (Biblioteca Científica Eletrônica em Linha - SCIELO), a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) associada ao banco de dados do Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia (IBICT), alguns portais de instituições de Ensino Superior, além de artigos publicados em periódicos e eventos da área.

As palavras-chave utilizadas para o levantamento de dados referiram-se à geometria, ambientes dinâmicos e Representações Semióticas, porém, outras palavras-chave foram acrescentadas, a fim de permitir o acesso a mais trabalhos pertinentes para a presente pesquisa, como por exemplo: apreensão perceptiva, apreensão operatória, registro figural, reconfiguração, *software* e tecnologia.

Romanowski e Ens (2006, p.45) explicam que “para o estabelecimento de categorias da tipologia de temas, é importante a realização de consulta a outros estudos semelhantes de modo aproximar e harmonizar as novas categorias com as anteriores.”. Ao ampliar a busca pelo uso de palavras-chave que envolvessem tanto a geometria quanto a teoria de Raymond Duval e também os ambientes dinâmicos, a coleta compreendeu um total de 52 dissertações entre os anos 1997 até 2016, 10 teses entre 2001 até 2015, 24 artigos publicados em periódicos e 14 comunicações científicas. O período de publicações dos artigos e comunicações científicas está compreendido entre os anos de 2004 até 2017.

Um levantamento inicial, feito com a pretensão de verificar em qual região predomina-se o quadro de pesquisas de mestrado e doutorado, é apresentado na Tabela 1, a seguir, que caracteriza esse quantitativo, bem como em quais instituições de ensino as pesquisas foram realizadas e a qual região do Brasil pertencem.

Tabela 1 - Instituições de Ensino e a quantidade de pesquisas coletadas

Região do Brasil	Instituição de Ensino	Tipo de pesquisa		Quantidade por região
		Dissertação	Tese	
Centro-Oeste	Universidade Federal de Goiás	1	0	1
Nordeste	Universidade Federal de Alagoas	2	0	7
	Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)	1	0	
	Universidade Estadual do Ceará (UECE)	1	0	
	Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)	1	1	
	Universidade Federal do Ceará	1	0	
Sudeste	Universidade Anhanguera de São Paulo	2	0	28
	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC-MG)	1	0	
	Universidade Bandeirante de São Paulo	1	0	
	Universidade Estadual Paulista	1	0	
	Universidade Federal de Ouro Preto	1	0	
	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)	17	5	
Sul	Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)	6	0	26
	Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)	4	2	
	Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)	3	0	
	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUC/RS)	2	0	
	Centro Universitário Univates (RS)	1	0	
	Universidade do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul-UNIJUÍ	1	0	
	Universidade Estadual de Londrina (UEL)	1	0	
	Universidade Estadual de Maringá (UEM)	1	3	
	Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG)	1	0	
	Universidade Luterana do Brasil (ULBRA)	1	0	
Total geral		51	11	

Fonte: A autora

A partir dos dados da Tabela 1, foi possível constatar que uma quantidade significativa das pesquisas é desenvolvida tanto na região Sudeste quanto na região Sul do Brasil. Este indicativo corrobora com o estudo de Sena e Dorneles (2013) sobre um panorama das teses cujos temas trataram do ensino de geometria entre os anos de 1991 até 2001, que indicou o Sudeste como o local geográfico de maior concentração de estudos da área. Essa constatação serviu como um dos indicativos para a realização dessa pesquisa na cidade de Ponta Grossa – PR, pois não foi encontrado nesse município um estudo que contemplasse a temática proposta.

Para critério de organização, optou-se por classificar as pesquisas quanto às unidades temáticas propostas na Base Nacional Comum Curricular (2017) caracterizadas em: números, álgebra, grandezas e medidas, geometria e estatística e probabilidade. Tal atitude foi tomada devido a algumas das pesquisas coletadas não tratarem da Geometria, mas contemplarem algumas das palavras-chave utilizadas como fonte de pesquisa nos bancos de dados.

A seguir, na Tabela 2, é apresentada a predominância em relação às unidades temáticas da BNCC, utilizadas como categorias de análise nas teses, dissertações e artigos.

Tabela 2 - Classificação das pesquisas quanto às unidades temáticas da BNCC

Conteúdos estruturantes	Teses	Dissertações	Artigos
Números	0	3	0
Álgebra[1]	3	12	4
Grandezas e medidas	0	6	0
Geometria	7	28	31
Estatística e probabilidade	0	3	1
Total	**10**	**52**	**36**

Fonte: A autora

De 38 trabalhos da modalidade artigo, não foram categorizados em unidades temáticas da BNCC dois artigos, pois um deles tratou de um resgate histórico da semiótica e a importância da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DIONÍZIO; BRANDT, 2012). O outro artigo de Pontes, Brandt e Nunes (2017) apresentou um estado da arte a respeito de trabalhos que se subsidiaram da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

Dos 6 (seis) trabalhos categorizados como grandezas e medidas, mesmo tendo como foco o estabelecimento de conjecturas em relação a medidas de perímetro, área e volume, todos se articulam com a geometria. Os PCN, ao abordarem o bloco de conteúdos de Grandezas e Medidas, salientam que “o trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades, etc.” (BRASIL, 1998, p.51). Nos trabalhos de Bento (2010), Buratto (2006) e Facco (2003), por exemplo, a abordagem de medidas de área é totalmente atrelada ao uso de figuras geométricas.

Na unidade temáticas das grandezas e medidas, se lançou um olhar mais atento à pesquisa de Assumpção (2015), realizada com alunos de uma escola da rede estadual de ensino do Rio Grande do Sul, na cidade de Toropi. O estudo, por meio dos procedimentos metodológicos da engenharia didática, trouxe respostas para o seguinte questionamento: “Uma abordagem dinâmica pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem de geometria para

[1] A BNCC estabelece que a unidade temática Números compreende o “conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades.” (BNCC, 2017, p. 266). Enquanto que a unidade temática Álgebra visa a utilização de modelos matemáticos para a representação e análise de regularidades e relações quantitativas entre grandezas por meio do uso de letras e outros símbolos. (BNCC, 2017, p. 267-268).

alunos do 7º ano do E.F. relativa aos conceitos de perímetro e área de polígonos, à luz da teoria dos registros de representação semiótica?". (ASSUMPÇÃO, 2015, p. 21).

Como resultado, Assumpção (2015) apontou como facilitador e eficaz o uso do ambiente dinâmico G*eoGebra* para a exploração heurística das figuras geométricas e para o desenvolvimento dos processos visuais envolvendo as atividades com o uso do registro figural. Salienta o entusiasmo dos alunos com o uso dos ambientes dinâmicos e também que "o processo de reconfiguração de figuras planas por meio da decomposição e composição foi visto por eles de modo natural, facilitando neste momento, a dedução das fórmulas envolvendo o cálculo da área de algumas figuras planas.". (ASSUMPÇÃO, 2015, p. 207).

Os trabalhos que foram categorizados na unidade temática de Tratamento da Informação apresentaram similitudes em relação ao aporte teórico, pois todos valeram-se da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (LIMA, 2014; GESSER, 2012; ESTEVAM, 2010; FLORES; MORETTI, 2005). Estevam (2010, p. 52), por exemplo, justifica a importância dessa teoria, pois "não se pode negar a funcional contribuição da Teoria de Registros de Representação Semiótica para a Educação Estatística, em razão da compreensão dos aspectos cognitivos envolvidos no processo".

Dando continuidade na trajetória pelas pesquisas, foi verificado um número expressivo de pesquisas categorizadas nas unidades temáticas de álgebra e de geometria. De posse dessa análise, optou-se pela visita aos trabalhos dessas categorias, num primeiro momento, a fim de verificar a predominância quanto ao uso de ambientes estáticos ou dinâmicos.

Para tanto, na Tabela 3, a seguir, o quantitativo de estudos relativos a esse critério é apresentado:

Tabela 3 - Quantitativo de pesquisas quanto ao uso de ambientes estáticos e dinâmicos

Unidades temáticas	**Ambientes Estáticos**			**Ambientes Dinâmicos**		
	Teses	Dissertações	Artigos	Teses	Dissertações	Artigos
Geometria	3	6	9	4	22	22
Álgebra	0	0	0	3	12	3
Total	**3**	**7**	**11**	**7**	**34**	**25**

Fonte: A autora

De acordo com a Tabela 3, dentre as pesquisas visitadas quanto o uso dos ambientes dinâmicos, basicamente relacionados ao uso de algum tipo de *software,* são exploradas em maior número tanto as unidades temáticas de álgebra quanto de geometria. Em relação à álgebra, Cargnin (2013, p. 26) destaca a opção por utilizar ambientes dinâmicos, pois “potencializa a compreensão do conceito, uma vez que possibilita a observação e comparação de um mesmo objeto em pelo menos três registros diferentes: gráfico, numérico e algébrico, além da língua natural.”. A possibilidade de representar os objetos matemáticos por meio de diferentes registros é relevante inclusive quanto se trata da geometria.

A seguir, serão focalizadas as pesquisas em geometria, convenientes para reflexões sobre a temática proposta nesse trabalho. Alguns apontamentos de estudos que se inseriram na categoria dos ambientes estáticos foram considerados relevantes.

Um estudo de caso sobre construções geométricas por alunos do ensino superior do curso de Licenciatura em Desenho e Plástica da Universidade Federal de Pernambuco foi feito por Almeida (2007). A pesquisadora identificou dificuldades frequentes, por parte dos alunos, em empregar os princípios relativos a lugar geométrico para a resolução de problemas envolvendo as construções geométricas por meio de ambientes estáticos como papel e lápis.

Na pesquisa de Almeida (2007), foi constatado ainda que “praticamente todos os sujeitos envolvidos na pesquisa não conseguiram elaborar um argumento que justifique as estratégias adotadas na resolução de um problema; limitavam-se a descrever a ordem dos traçados feitos.” (ALMEIDA, 2007, p. 311). A pesquisadora sugere como alternativa para amenizar a situação que, em pesquisas futuras, ocorra um trabalho por meio de recursos didáticos como os materiais manipuláveis ou ambientes dinâmicos, pois, em seu estudo, “não foi abordada a questão das influências das ferramentas adotadas nos traçados no desenvolvimento do pensamento e do conhecimento em geometria.” (ALMEIDA, 2007, p. 313).

Considera-se que o ambiente em que se explora um determinado conteúdo matemático, seja ele estático, por meio do papel e lápis ou dinâmico, como o *GeoGebra*, pode influenciar o modo como os saberes são apropriados. Com base nesse pressuposto, a presente pesquisa pretende apontar contribuições referentes ao uso do ambiente dinâmico para o trabalho com a Geometria.

A pesquisa de Oliveira (2016), fundamentada na Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval, utilizou como temática a atividade cognitiva da reconfiguração para os processos de ensino e aprendizagem da geometria. Ao trabalhar com alunos do quinto ano dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, por meio de uma sequência didática, apontou resultados positivos para a aquisição de conhecimentos geométricos por parte dos sujeitos.

Ferreira (2016) apresentou o tema da prova e demonstração em geometria, especificamente envolvendo os quadriláteros. Apontou que “as propriedades dos quadriláteros permitem trabalhar demonstrações e abordar diversos conteúdos de geometria plana. Além disso, por ser considerado elementar, é um tópico pouco explorado na graduação." (FERREIRA, 2016, p. 23-24). Elegeu como metodologia a engenharia didática e subsidiou-se na Teoria das Representações Semióticas. Dentre os resultados, elencou a tomada de consciência dos alunos quanto às limitações da apreensão perceptiva, em que a realização da interpretação discursiva da figura é necessária para que ocorra um entendimento quanto ao estatuto das figuras geométricas, dos axiomas e dos teoremas e suas definições.

Silva, A. B. (2014), Ordem (2010) e Kluppel (2012), em seus estudos documentais, trataram da análise de livros didáticos com o amparo teórico das Representações Semióticas de Raymond Duval. Kluppel (2012) analisou a geometria dos livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental, de uma forma abrangente e apontou lacunas existentes no modo como a geometria é apresentada quanto aos aspectos da teoria das Representações Semióticas.

Silva, A. B. (2014) estabeleceu o foco de seu estudo no modo como os triângulos são apresentados nos livros didáticos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Salientou que, embora o triângulo seja uma figura simples, "esconde uma surpreendente riqueza de propriedades geométricas e de aplicações práticas, estabelecidas ao longo da evolução desse saber." (SILVA, A. B. 2014, p. 10). A pesquisadora apontou, dentre os resultados, que a presença de situações em que era requerida a atividade cognitiva da conversão, específica da teoria de Raymond Duval, ocorreu de modo insuficiente, nos livros didáticos que analisou.

Ordem (2014) analisou como os livros didáticos de Moçambique apresentam a organização matemática e didática dos triângulos, em relação ao conteúdo de prova e demonstração. Concluiu de maneira semelhante à pesquisa de Silva, A. B. (2014) que a atividade de conversão não é muito explorada, além de relatar que a reconfiguração presente nas figuras não está organizada para produzir argumentos que poderiam instigar a identificação de regularidades, bem como as demonstrações envolvendo os triângulos.

Kummer e Moretti (2017), Piroli (2012) e Bolda (1997) enfatizaram, em suas pesquisas, a importância da visualização para a geometria, amparando-se na Teoria das Representações Semióticas. Piroli (2012), por meio de um estudo de caso, explorou as relações entre as apreensões em geometria e as capacidades de percepção visual em um conjunto de atividades em ambientes estáticos sobre percepção, movimentação e posição de uma figura geométrica, aplicado aos alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Bolda (1997), ao trabalhar uma sequência didática com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, destacou que sua intenção foi por meio de "um conhecimento matemático levar o aluno a adquirir uma capacidade de visualização." (BOLDA, 1997, p. 22), justificando a preferência por não ter escolhido um conteúdo específico de geometria. Kummer e Moretti (2017, p. 101) comentam que:

> Atividades relacionadas à apreensão perceptiva do objeto, a visualização, a imagem, o raciocínio, a construção geométrica e a análise destes processos cognitivos utilizados pelo aprendiz, de forma individual e conjuntural na construção de conceitos geométricos, são fundamentais.

Piroli (2012) e Bolda (1997) também destacaram a necessidade de considerar a importância de desenvolver nos alunos habilidades visuais para melhores resultados quanto à aprendizagem da geometria. Piroli (2012) acrescentou que “cabe ao professor selecionar atividades que contemplem tanto apreensões quanto capacidades, de maneira que essa integração se dê de forma efetiva”. (PIROLI, 2012, p. 123).

A partir da análise dos trabalhos de Kummer e Moretti (2016), Piroli (2012) e Bolda (1997), compreendeu-se que a presente pesquisa, ao investigar as contribuições dos ambientes dinâmicos para a aprendizagem da Geometria, deve considerar a visualização como inseparável de qualquer atividade geométrica.

Ainda nessa trajetória, na categoria que se refere ao uso dos ambientes dinâmicos, observou-se em que período esses tipos de recursos foram mais predominantes.

Por meio da Tabela 4, a seguir, é apresentada a frequência do número de pesquisas relativas ao bloco de conteúdos de espaço e forma, cujo período está entre os anos 2000 até 2016.

Tabela 4 - Frequência de estudos no contexto de espaço e forma que se valeram do uso de algum tipo de ambiente dinâmico entre os anos 2000 até 2016

Período	Dissertações	Teses	Artigos
2000-2004	1	1	0
2004-2008	2	0	2
2008-2012	8	1	0
2012-2016	12	2	20
Total	**23**	**4**	**22**

Fonte: A autora

Identifica-se na Tabela 4 que, a partir de 2008, o número de pesquisas que fizeram uso de algum tipo de ambiente dinâmico cresceu consideravelmente. Uma possibilidade para este indicativo pode ser o aumento da popularidade de ambientes dinâmicos como o *GeoGebra* e o *Cabri Géomètre*.

Um levantamento anterior, feito por Amaral e Frango (2014) em dissertações brasileiras sobre o uso do software *GeoGebra* no ensino de funções, até o ano de 2012, destaca dentre as razões para o aumento do número de pesquisas com uso desse ambiente dinâmico a partir do ano de 2009 "pode ser explicado pelo motivo de que só recentemente a população mais carente e escolas de ensino médio no Brasil, puderam ter um acesso maior a computadores". (AMARAL; FRANGO, 2014, p. 98).

Em relação aos estudos compreendidos na unidade temática Geometria, questionaram-se quais foram os apontamentos feitos pelas pesquisas já realizadas quanto à utilização dos ambientes dinâmicos para o ensino e aprendizagem da Geometria.

Optou-se por adentrar pelo caminho do quantitativo de 49 pesquisas distribuídas em dissertações, teses e artigos que envolviam a unidade temática da geometria com o uso de algum tipo de ambiente dinâmico.

A seguir, na Tabela 5, é mostrado o nível de abrangência dos estudos selecionados.

Tabela 5 - Nível de abrangência das dissertações, teses e artigos do bloco de conteúdos de espaço e forma que fizeram uso de ambientes dinâmicos

Nível de abrangência	Dissertações	Teses	Artigos
Anos iniciais do Ensino Fundamental	2	0	0
Anos finais do Ensino Fundamental	3	0	3
Ensino Médio	9	1	4
Formação Profissional	5	1	7
Ensino Superior	4	2	6
Não especifica	0	0	2
Total	**23**	**4**	**22**

Fonte: A autora

Grande parte das dissertações se voltou para a Educação Básica, em um total de 14 trabalhos. Em relação aos anos iniciais do Ensino Fundamental, por exemplo, a pesquisa de Pereira (2012) procurou, por meio de um estudo de caso, compreender qual contribuição um Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD) proporciona para a identificação de propriedades e relações entre figuras planas, elegendo como sujeito alunos do quarto ano do Ensino Fundamental. Utilizou como subsídio a teoria de Van Hiele e apresentou dentre os resultados que,

> [...] com o recurso ao AGD, GeoGebra, nomeadamente a possibilidade de visualizar uma mesma construção de diversas formas, juntamente com a reflexão surgida por meio da discussão no grupo, os alunos avançaram no raciocínio geométrico tendo ido além do nível visual. (PEREIRA, 2012, p. 141)

Em relação aos anos finais do ensino fundamental, dentre as pesquisas, os estudos de Santos (2012) e Carvalho (2011) utilizaram como sujeito alunos do nono ano do Ensino Fundamental.

Santos (2012, p. 10) argumenta que sua pesquisa visou "possibilitar aos alunos do nono ano do ensino fundamental reforçar conceitos prévios e construir novos conceitos sobre o tema Semelhança de Triângulos.". O estudo amparado na teoria de Van Hiele, por meio de uma sequência didática, consistiu no emprego de duas etapas para coleta de dados. Na coleta de dados, foi elaborado um questionário sobre a semelhança de triângulos que poderia ser resolvido com o uso de régua e compasso. Posteriormente, as mesmas questões eram resolvidas com o uso do ambiente dinâmico GeoGebra. Apresentou como resultado que a apropriação dos conceitos trabalhados foi facilitada pelo uso do ambiente de geometria dinâmica.

Carvalho (2011) propôs, em sua pesquisa, um estudo de caso com uma sequência didática aliada ao uso da lousa digital e do software *Cabri Géomètre 3D* para alunos do nono ano. Como subsídio teórico, optou pela teoria de Vygotsky e de Polya sobre a resolução de problemas. Carvalho (2011, p. 24) salientou como motivo investigar "as ações que professor e alunos do nono ano podem mobilizar em situações de resolução de problemas de geometria espacial utilizando o software Cabri 3D e a lousa digital.". Desta forma, a pesquisa de Carvalho (2011) apresentou alternativas para o estudo de geometria sobre o conteúdo de prismas, além de ter pontuado que "apenas a utilização do software não significa a obtenção do êxito por parte dos alunos, sendo necessária a mobilização do saber docente do professor para mediar os processos cognitivos que ocorrem com os alunos." (CARVALHO, 2011, p. 111).

Halberstadt (2015) e Silva, R. S. (2014), por meio da metodologia da Engenharia Didática, em que ambas pesquisas foram subsidiadas pela teoria das Representações Semióticas, identificaram problemáticas envolvendo os alunos do ensino médio, como por exemplo, que "apresentam dificuldade em compreender e manipular objetos da geometria analítica tais como retas, circunferências, elipses.". (HALBERSTADT, 2015, p. 14). Silva, R. S. (2014) acrescenta ainda que os alunos, ao chegarem no Ensino Médio, sentem dificuldades em articular a álgebra e a geometria e que, no entanto, nesta fase escolar "os estudantes são levados a relacionar os conhecimentos de geometria e álgebra." (SILVA, R. S., 2014, p. 21).

Halberstadt (2015) utilizou como ambiente dinâmico o software grafEc para trabalhar conceitos de geometria analítica como reta, ponto e parábola. Constatou que "essa ferramenta possibilitou aos alunos diferentes experimentações, haja vista que realizavam conjecturas, avaliavam-nas, testavam-nas, reavaliavam-nas ou refutavam-nas." (HALBERSTADT, 2015, p. 164).

Silva, R. S. (2014) optou pelo objeto matemático, o estudo da reta, por meio do ambiente dinâmico GeoGebra. Concluiu que, do ponto de vista matemático e cognitivo, a utilização desse recurso contribuiu para a aquisição de conhecimento sobre a reta por parte dos alunos, além de ter facilitado e acelerado os processos cognitivos específicos da teoria das Representações Semióticas. Outra pesquisa, de Moran (2015), com professores dos Anos Finais do Ensino Fundamental sobre as potencialidades de materiais manipuláveis, expressões gráficas e *softwares* de geometria dinâmica, salientou que os registros produzidos pelos *softwares* de geometria facilitam o raciocínio dedutivo aliado ao tratamento figural.

Em virtude do número pouco expressivo de trabalhos sobre geometria com o uso dos ambientes dinâmicos, envolvendo como sujeitos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, se elegeu como critério que os sujeitos desta pesquisa estivessem cursando este nível de ensino.

Em outras pesquisas, cujo nível de abrangência foi o da formação profissional, ocorreu uma evidente preocupação em relação ao comportamento dos professores quanto ao uso dos ambientes dinâmicos. Por exemplo, o estudo feito por Medeiros (2012) com professoras de uma escola da rede estadual da cidade de Sombrio/SC questionou: "de que forma professores de Matemática se apropriam do *software* GeoGebra para trabalhar com mosaicos e transformações geométricas?". (MEDEIROS, 2012, p. 13). Outra pesquisa com enfoque no uso de um ambiente dinâmico foi a de Santos (2010), cujo questionamento era: "quais são as possibilidades e dificuldades de professores de Matemática ao utilizarem o *software* GeoGebra em atividades que envolvem o Teorema de Tales?" (SANTOS, 2010, p. 30).

A pesquisa de Medeiros (2012) adotou como procedimento metodológico princípios da Engenharia Didática e amparou-se na teoria Sócio-Histórica, presente na obra de Vygotsky e na teoria de Raymond Duval sobre os Registros de Representação Semiótica. Apontou como resultado que os sujeitos exploraram o *software* GeoGebra de maneira significativa, reconhecendo a importância de seu uso para facilitar o ensino da geometria, pois o ambiente dinâmico oferece recursos que o lápis e o papel não dispõem, como, por exemplo, a possibilidade de arrastar uma figura sem que as suas propriedades se alterem.

Santos (2010) descreveu sua pesquisa como sendo de caráter qualitativo, com a aplicação de uma sequência didática, para quatro professoras dos Anos Inicias do Ensino Fundamental da rede pública do Estado de São Paulo. Como subsídio teórico, considerou o estudo das apreensões propostas por Raymond Duval na teoria das Representações Semióticas, o trabalho de Chevallard sobre a transposição didática e a pesquisa de Balacheff relacionada à transposição informática. Apontou, dentre os resultados, que "professores com maior segurança nos conteúdos matemáticos tendem a explorar melhor as potencialidades do software." (SANTOS, 2010, p. 137).

Em relação à segurança dos professores, quanto aos conteúdos de Geometria, Almouloud *et al.* (2004, p. 99) apontam, dentre alguns impasses como:

> [...] em relação à formação dos professores, que esta é muito precária quando se trata de geometria, pois os cursos de formação inicial não contribuem para que façam uma reflexão mais profunda a respeito do ensino e da aprendizagem dessa área da matemática.

Silva, Santana e Barreto (2012) relatam que, dentre os sujeitos participantes de seu estudo, professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, alguns apresentaram dificuldades nos conteúdos sobre Geometria, como, por exemplo, a diferenciação entre quadrado e retângulo e, além disso, limitações quanto ao acesso e compreensão das possibilidades de uso das tecnologias para o ensino da Matemática, como os ambientes dinâmicos.

Silva, Santana e Barreto (2012) apontam que, quanto à limitação do uso desse tipo de recurso, essa "dificuldade pode estar relacionada ao fato de que é possível encontrar professores com grande experiência na docência que tiveram sua formação pautada em uma cultura em que o computador aparecia como uma figura distante do seu cotidiano." (SILVA; SANTANA; BARRETO, 2012, p. 28). Diante dessa constatação, o estudo proposto por Silva, Santana e Barreto (2012) tratou de uma análise das contribuições de um ambiente dinâmico para a elaboração de conceitos geométricos por professoras dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, numa escola do município de Fortaleza – CE.

Por meio de uma sequência didática e subsidiada pela Teoria das Representações Semióticas, a pesquisa de Silva, Santana e Barreto (2012) apontou que ocorreram dificuldades em relação à exploração do ambiente dinâmico, mas que das atividades que foram finalizadas, a análise indicou que ocorreram melhorias quanto às apreensões perceptiva e operatória, particulares da teoria das Representações Semióticas. Outro ponto a se destacar desta análise foi a opção do uso da malha quadriculada, recurso presente no ambiente dinâmico, em que esta "foi a ferramenta mais utilizada pelas docentes durante a orientação para a construção de figuras geométricas. Não foi possível explorar com mais afinco as funções de "mover" e "deslocar figuras". (SILVA; SANTANA; BARRETO, 2012, p. 34).

Nessa trajetória em que alguns estudos foram visitados, se observou a necessidade de mais pesquisas cujas análises envolvam como sujeito alunos dos anos finais do Ensino

Fundamental. Além disso, referente à Geometria Espacial, nas pesquisas analisadas, apenas um pequeno número de trabalhos tratou dessa temática. Constatou-se que o uso de algum tipo de ambiente dinâmico no contexto da Geometria Espacial nas pesquisas de Almeida e Kallef (2016); Bettin, Leivas e Pretto (2016); Borsoi (2016); Souza (2014); Palles (2013); Carvalho (2011) e Moreira (2004). No entanto, apenas o estudo de Carvalho (2011) elegeu como sujeito alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Delineou-se essa temática, a fim de considerar, por meio de um ponto de vista cognitivo, a possibilidade das especificidades descritas na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, em relação à aprendizagem de Geometria, por meio do ambiente dinâmico GeoGebra, serem contempladas por alunos dos anos finais do Ensino Fundamental.

No capítulo a seguir, será apresentado o subsídio teórico com foco em algumas das especificidades da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

3 EMBASAMENTO TEÓRICO: AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS SEGUNDO RAYMOND DUVAL

Esta pesquisa considera que a teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval (2004, 2005, 2011, 2012a, 2012b, 2013) é um subsídio importante para a interpretação de processos cognitivos presentes na aprendizagem em Matemática. Este pesquisador mostra que o modo de compreender a Matemática está diretamente ligado às Representações Semióticas.

Duval (2013) explica que as Representações Semióticas dizem respeito às atividades da face oculta da Matemática, aquelas em que são analisados os gestos intelectuais dos alunos. A análise desses gestos intelectuais favorece a aprendizagem da face exposta da Matemática que é relativa aos conteúdos presentes no currículo escolar.

Num primeiro momento, são apresentados os pressupostos iniciais da Teoria das Representações Semióticas. Em seguida, acrescentam-se na base teórica as considerações de Raymond Duval no tocante à Geometria e quanto ao uso das tecnologias no ensino de Matemática.

3.1 AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS: PRESSUPOSTOS INICIAIS

Uma Representação Semiótica, de acordo com Duval (2004), é verificada quando o sujeito evoca algo que está ausente para si próprio ou então comunica uma ideia por meio de sinais ou signos. Signo é toda marca ou sinal que obedece regras referentes a cada sistema semiótico específico, por exemplo, a língua natural é um sistema semiótico, em que a formação das palavras obedece à regras específicas.

Duval (2004) justifica que as Representações Semióticas são muito importantes para interpretação da aprendizagem da Matemática, do ponto de vista cognitivo, pois o indivíduo necessita da coordenação de diferentes sistemas de Representações Semióticas que indiquem um mesmo objeto matemático. Para expressar os conceitos matemáticos, se faz uso de diferentes sistemas semióticos, como por exemplo: os números em sua escrita decimal, fracionária ou binária, as expressões algébricas, os enunciados de problemas em língua natural.

Por exemplo, o numeral 12 e a palavra doze representam o mesmo objeto matemático, porém, por meio de registros diferentes pertencentes a sistemas semióticos diferentes. O primeiro registro é composto pela escrita indo-arábica na qual os algarismos são justapostos, sendo que, nesse caso, o algarismo 1 representa uma dezena e o algarismo 2 representa duas unidades. Enquanto que a palavra doze possui, na sua formação, o emprego de sufixos e prefixos oriundos de deformações de outras palavras utilizadas no idioma brasileiro, para representar as quantidades de 0 (zero) até 9 (nove), em que "do" é uma deformação da palavra dois e "ze" é uma deformação da palavra dez (KLUPPEL 2012, p. 34-35).

Duval (2004) denomina de *semiósis* a apreensão ou a produção de uma representação, e de *noésis* a apreensão conceitual do objeto matemático. Pode-se afirmar, nesse sentido, que não há *noésis* sem *semiósis*, ou seja, "não há *noésis* sem o recurso a uma pluralidade ao menos potencial de sistemas semióticos, recurso que implica a coordenação desses sistemas semióticos por parte do próprio sujeito." (DUVAL, 2004, p.16). É pela *semiósis* que se regulam as condições para a assimilação da *noésis.*

Para que uma Representação Semiótica não cumpra apenas a função de comunicação, pois estaria reduzida a um código, Duval (2012, p. 271-272, grifos nossos) denomina de Registro de Representação Semiótica quando numa determinada representação cumprem-se três funções cognitivas: formação, tratamento e conversão. Estas três funções estão diretamente relacionadas com a *semiósis.*

O significado de um Registro de Representação Semiótica, para Duval (2011), é de valor teórico, em que as funções cognitivas que se cumprem atuam para a tomada de consciência e para a aquisição de conhecimento. A seguir, descrevem-se cada uma das três funções cognitivas de um Registro de Representação Semiótica.

A formação pode ser compreendida como a "**seleção de um certo número de caracteres de um conteúdo** percebido, imaginado ou já representado em função de possibilidades de representação própria ao **registro escolhido**.*"*. (DUVAL, 2004, p.44, tradução nossa, grifos do autor). Em outras palavras, a formação é a compreensão de que, em um determinado sistema semiótico, os signos utilizados reproduzem uma mensagem. Por exemplo, em Matemática, o seguinte registro $x+2=5$ é uma escrita algébrica que representa uma equação. A identificação deste registro como sendo uma equação cumpre a função de formação.

O tratamento consiste em efetuar modificações do registro no interior do mesmo sistema semiótico, de maneira consciente, para obter uma determinada resposta. Conforme afirma Duval (2004, p. 46, tradução nossa, grifos do autor), "um tratamento é uma **transformação de representação interna a um** registro de representação ou a um sistema.". No exemplo dado anteriormente, o tratamento do registro de representação seria feito da seguinte maneira:

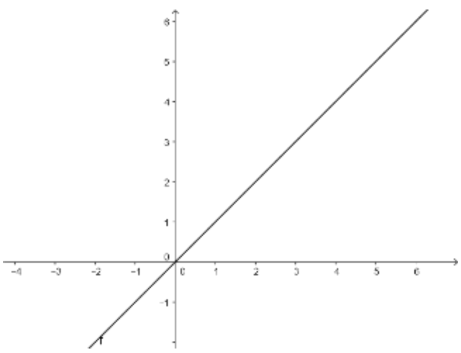
$$x + 2 = 5$$
$$x + 2 – 2 = 5 - 2$$
$$x = 3$$

O registro inicial x + 2 = 5 recebe uma transformação passando ao registro final de x = 3. Esta transformação acontece obedecendo às regras próprias do sistema semiótico das expressões algébricas para o caso das equações.

A conversão é uma função cognitiva na qual ocorre a mudança de determinado objeto matemático de um sistema semiótico para outro em que em ambos ele está representado. “A conversão de uma representação é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial.”. (DUVAL, 2012b, p. 272).

Por exemplo, a função f(x)=x é também representada pelo gráfico da Figura 1, a seguir:

Figura 1 - Gráfico da função f(x)=x



Fonte: A autora

Outro exemplo seria escrever “x > 0” e “um número positivo”. As duas representações pertencentes a sistemas semióticos diferentes (linguagem algébrica e linguagem natural) representam o mesmo intervalo de números.

Duval (2004) pontua que a atividade de conversão é difícil para a maioria dos alunos. O reconhecimento de um objeto matemático por diferentes registros é menos espontâneo e necessita de uma interpretação global de variáveis cognitivas pertinentes.

A capacidade de coordenação entre os sistemas semióticos que representam um mesmo objeto matemático sofre a influência do fenômeno da congruência, que não permite a conversão quase imediata das representações. De acordo com Brandt (2005, p. 72), “é esse fenômeno que pode explicar os sucessos ou os insucessos dos alunos frente às questões que implicam uma mudança de sistema semiótico de representação, dependendo da congruência ou não-congruência.”. A congruência entre registros, pertencentes a sistemas semióticos, precisa atender a três critérios que, de acordo com Duval (2004, p. 52-53, tradução nossa), são:

1. A correspondência semântica dos signos em relação aos seus referentes.
2. A univocidade semântica terminal, que significa não mais que uma interpretação da representação inicial para a representação de chegada.
3. A ordem dentro das unidades que compõem cada uma das representações.

Pode-se citar como exemplo de congruência entre as representações o seguinte problema:

Tenho duas flores. Ganhei mais quatro. Quantas flores tenho no total?

O enunciado do problema, cuja representação semiótica é a língua natural, permite a representação por um outro sistema semiótico que pode ser a seguinte expressão numérica:

$$+2 + 4 = +6$$

Pode-se verificar a correspondência semântica das palavras “tenho” e “ganhei” como sendo verbos que são portadores de uma informação semântica, neste caso, uma quantidade positiva. A mesma correspondência para as palavras “duas” e “quatro” que são portadoras de informações numéricas. A univocidade semântica terminal é verificada na passagem do enunciado para a representação numérica. Pelo enunciado, não é possível mais de uma interpretação, ou seja, está evidente que se trata de uma adição. A ordem dentro das unidades que compõem cada uma das representações é a sequência que se tem pelo enunciado do problema para a montagem da solução numérica. Já não é o caso de:

Tenho algumas flores e João tem oito flores, duas a mais do que eu. Quantas flores eu tenho?

$$8 - 2 = 6$$

Nesse exemplo, não existe univocidade semântica terminal, pois a palavra “mais” não indica a retirada que foi efetuada para obtenção da solução. No entanto, essa questão pode ser fonte de dificuldade para os alunos e levar ao erro na produção da seguinte sentença: $8 + 2 = 10$.

Em outro exemplo, pode-se observar que não existe a mesma ordem das unidades significantes.

Tenho algumas flores. Ganhei outras 2. Fiquei com 8. Quantas flores eu tinha?

Nesse caso, a sentença numérica *8 – 2 = ?*, que responde a questão, não obedece a ordem dos elementos na sentença na língua natural. Com outra estratégia de resolução (a do complemento), não se garante a mesma ordem: *2 + ? = 8*

Para o caso de problemas em que está presente a não-congruência, é necessário levar em consideração as variáveis cognitivas pertinentes. Duval (2004, p. 58 - 59) exemplifica com o caso da conversão entre uma escrita algébrica para sua forma gráfica e a operação inversa, a conversão da forma gráfica para escritura algébrica. Na primeira situação, os alunos possuem facilidade em partir da escritura algébrica para a forma gráfica por delimitarem valores para a variável, obtendo, assim, pares de números. Estes pares de números representam as coordenadas que formarão o desenho do gráfico.

Um exemplo que pode ilustrar a situação é proposto a seguir:

Seja f(x) = x +1. Desenhe o gráfico que representa esta mesma função.

Usualmente, os alunos montam um quadro de valores, obtendo pares ordenados para o desenho do gráfico, conforme é demonstrado no Quadro 1, a seguir:

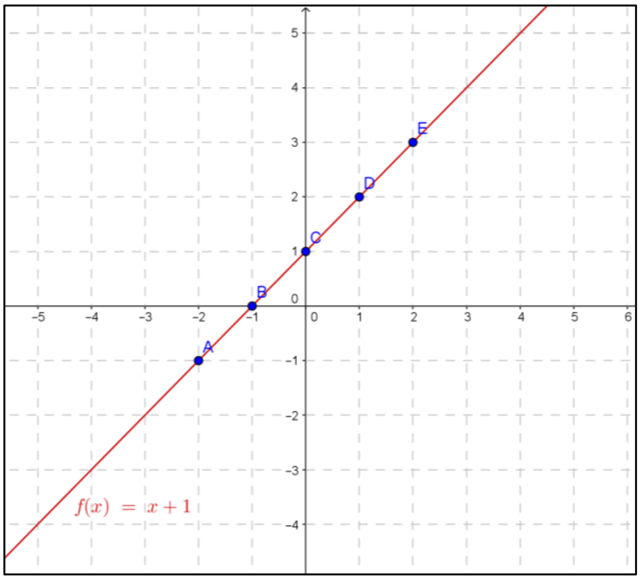
Quadro 1 - Pares ordenados da função f(x)= x + 1

Valor de x	**Valor de** y**, quando f(x)=x+1**	**Par ordenado (x, y)**
-2	-1	(-2, -1)
-1	0	(-1, 0)
0	1	(0, 1)
1	2	(1, 2)
2	3	(2, 3)

Fonte: A autora

Em seguida, é feita a marcação no plano cartesiano. Na Figura 2, a seguir, , os pontos A, B, E, D e E representam os pares ordenados do Quadro 1. Após a marcação dos pontos, o gráfico da função f(x)= x+1 é traçado, e a função é representada por uma reta:

Figura 2 - Representação gráfica da função f(x)= x+1



Fonte: A autora

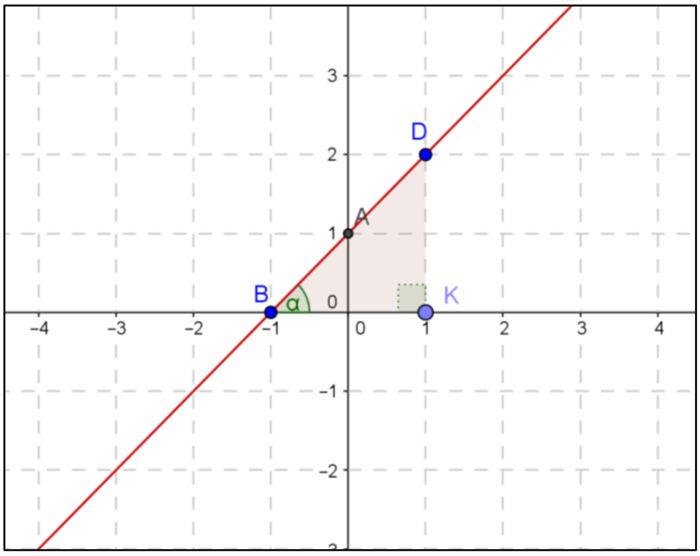
A dificuldade na conversão inversa, para o caso das funções, em que por meio do gráfico deve-se chegar à escritura algébrica, ocorre quando não se conhecem as variáveis pertinentes que influenciam a representação gráfica. Duval (2004, p. 60, tradução nossa) explica que "o aluno que não discrimina essas variáveis, é como se fosse cego para a conversão inversa àquela que se ensina habitualmente.". Para obter a escritura algébrica a partir de um gráfico, é necessário observar, por exemplo, os eixos e os valores visuais que influenciam a representação gráfica.

Retomando o exemplo anterior, é necessário verificar que a função, quando apresentada pelo gráfico de uma reta, que não é perpendicular ao eixo das abscissas (eixo x) e que quando não cruza os pontos de origem do plano cartesiano, é uma função afim.

O formato de uma função afim é dado pela expressão f(x)= ax +b, (a $\in \mathbb{R}$ e b $\in \mathbb{R}$), que possui como variáveis pertinentes os coeficientes a e b.

É necessário que o aluno compreenda que o coeficiente b, chamado de coeficiente linear, representa o ponto em que o gráfico da função intercepta o eixo y, no exemplo da Figura 3, a seguir, o gráfico da função intercepta o eixo y no ponto 1, neste caso, o valor do coeficiente linear b é 1.

Figura 3 - Gráfico da função afim: f(x)=x+1



Fonte: A autora

Além disso, para saber qual função é representada pelo gráfico da Figura 3, é necessário determinar o valor do coeficiente a. Este coeficiente é chamado de coeficiente angular e está associado à inclinação da reta que representa o gráfico da função. O valor deste coeficiente pode ser obtido observando dois pontos pertencentes à reta, no exemplo da figura, os pontos B e D. Estes pontos podem ser prolongados até o ponto K, formando um triângulo retângulo, conforme mostra a Figura 3. Como o coeficiente angular, chamado de a, coincide com o ângulo α do triângulo BDK, pode-se obter seu valor numérico utilizando a razão trigonométrica da tangente ($a = \text{tg}\alpha = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}}$). Os valores numéricos dos catetos são obtidos pela diferença entre os pares cartesianos representados pelos dois pontos. No exemplo dado, pela diferença entre os pontos B= (-1,0) e D= (1, 2) obtém-se o valor do coeficiente angular:

$$a = \text{tg}\ \alpha = \frac{2 - 0}{1 - (-1)} = \frac{2}{2} = 1$$

Desta forma, a função afim representada pelo gráfico das Figuras 2 e 3 em seu formato algébrico é dada por f(x) = ax +b, em que a = 1 e b=1, sendo assim, f(x) = x + 1.

Pelo exemplo anterior, foi possível verificar a afirmação de Duval (2004, p. 58 – 59) no que diz respeito à dificuldade que os alunos enfrentam em efetuar a conversão para problemas não-congruentes, pois foi necessário ter conhecimento das variáveis cognitivas pertinentes, no caso, os coeficientes da função afim. Essa abordagem é diferente da abordagem ponto a ponto e, por essa razão, deve ser valorizada, pois se refere a uma interpretação qualitativa das unidades significativas pertinentes.

O domínio de um objeto matemático depende da coordenação dos registros de representação, da capacidade em discriminar o representante do representado. Duval (2004, p. 77, tradução nossa, grifos do autor) explica que esta capacidade pode ser desenvolvida em sala de aula com a organização de uma situação de aprendizagem que permita **“explorar todas as variações possíveis de uma representação em um registro, fazendo a previsão, ou a observação de variações concomitantes das representações em outro registro.”.** Ao explorar as variações de representações possíveis de determinado objeto matemático, se contribui para que o aluno não confunda o objeto matemático com a sua representação.

3.2 A GEOMETRIA SOB A ÓTICA DA TEORIA DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

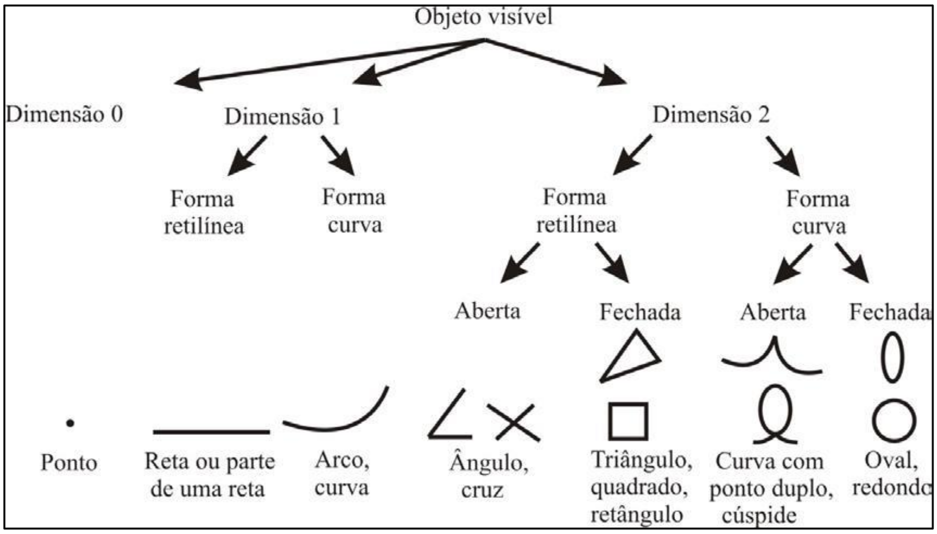
A aprendizagem em Geometria, considerando os pressupostos de Duval (2004, p. 155-183, 2005, 2011, 2012a, 2012b), é analisada de modo particular, sendo considerada mais exigente, pois “solicita o gesto, a linguagem e o olhar” (DUVAL, 2005, p. 06, tradução nossa). Essas características podem ser fontes de dificuldades no que diz respeito tanto ao ensino quanto à aprendizagem desse campo da Matemática. Dentre considerações feitas por esse autor, uma das mais pertinentes é de que a Geometria depende da coordenação simultânea de tratamento de dois tipos de Registros de Representação Semiótica: o registro discursivo, em língua natural e o registro figural.

O registro discursivo é necessário para enunciar as definições, os teoremas ou as hipóteses, enquanto que o registro figural é necessário para evidenciar propriedades que estão contidas no desenho (DUVAL, 2004). A relação entre os registros discursivo e figural acontece porque uma figura permite abordagens conceituais variadas e, para que se possa esclarecer a respeito de qual objeto matemático se trata, é indispensável a indicação verbal, desta forma, “não há desenho sem legenda.” (DUVAL, 2004, p. 168, tradução nossa).

Duval (2004) destaca que uma figura geométrica é constituída de valores dimensionais e qualitativos, denominados também de unidades figurais elementares. Essas unidades figurais elementares são qualitativas quando dizem respeito ao formato, por exemplo, linhas retas ou curvas, contornos abertos ou fechados. Uma abordagem característica da Geometria é a de trabalhar com aspectos qualitativos das figuras.

A Figura 4, a seguir, mostra a classificação de unidades figurais elementares que constituem uma figura geométrica.

Figura 4 - Classificação das unidades figurais elementares



Fonte: DUVAL (2004, p. 159)

Nesta classificação, podem-se destacar as diferentes variações que uma figura geométrica pode possuir, no que diz respeito à variação qualitativa, referente ao formato retilíneo ou curvo e também à variação dimensional, em que a dimensão 0 (0D) está relacionada com os pontos, a dimensão 1 (1D) corresponde às retas ou arcos, a dimensão 2 (2D) aos polígonos e ângulos.

Os valores dimensionais podem ser explicados pelo seguinte exemplo: ao considerar que um triângulo é uma figura de dimensão 2 (2D) que possui como unidades figurais elementares qualitativas, os segmentos de retas, essas retas possuem a dimensão 1 (1D) e os três pontos de intercessão dos segmentos de reta que formam o triângulo possuem a dimensão 0 (0D). Duval (2004, p. 159, tradução nossa, grifos do autor) explica que "**uma figura geométrica é sempre uma configuração de ao menos duas unidades figurais elementares**.". O autor complementa ainda que ao reconhecer as unidades figurativas de menor dimensão é que se manifesta a "maneira matemática de ver" uma figura geométrica (DUVAL, 2005, p. 20, tradução nossa). A maneira matemática de ver corresponde a uma mudança no que automaticamente a visualização de uma figura geométrica suscita.

A visualização de uma figura geométrica deve contemplar, segundo Duval (2011, p. 87, grifos do autor), a "[...] desconstrução dimensional das formas que reconhecemos imediatamente em outras formas que não enxergamos à primeira vista, e isso **sem que nada mude na figura afixada no monitor ou construída no papel**.*"*. Esta mudança de olhar é um salto cognitivo considerável, pois é contrária ao reconhecimento automático das formas, em que a unidade figural da dimensão superior se impõe de modo imediato à percepção (DUVAL, 2011). Duval (2005, p. 20, tradução nossa, grifos do autor) exemplifica um modo matemático de ver um poliedro ao mencionar que,

> [...] a figura de um cubo ou uma pirâmide (3D / 2D) é decomposta em uma configuração de quadrados, triângulos, etc. (unidades figurativas 2D / 2D). E os polígonos são, por sua vez, divididos em segmentos retos (unidades figurativas 1D / 2D). E as linhas, ou segmentos, podem ser divididas em *ponto*s (Unidades 0D / 2D).

A desconstrução dimensional é o pré-requisito para o entendimento de propriedades geométricas. Por exemplo, quando se menciona que determinado triângulo é formado pela união de três pontos não colineares pertencentes a um mesmo plano, por meio de segmentos de reta é requisitada a desconstrução dimensional de 2D➔0D➔1D.

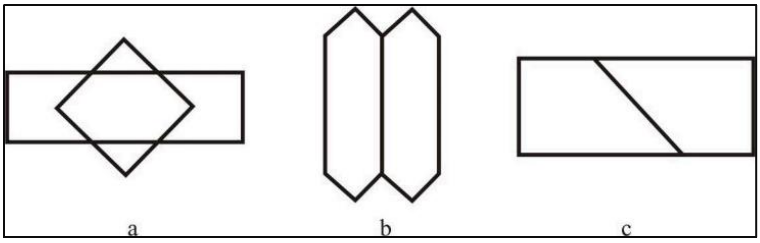
Duval (2004, 2011, 2012a, 2012b) estabelece diferentes maneiras de reconhecer a importância que as figuras e os enunciados exercem sobre a aprendizagem da Geometria, de um ponto de vista cognitivo. Essas maneiras que envolvem a compreensão das representações em Geometria são denominadas por ele de apreensões. As apreensões são distinguidas em quatro tipos: a apreensão perceptiva, a apreensão operatória, a apreensão discursiva e a apreensão sequencial.

As apreensões perceptiva e operatória são consideradas por Duval (2004) como dois níveis de apreensão das figuras geométricas que estão vinculadas com os tratamentos figurais. Esses níveis são direcionados à interpretação de uma figura geométrica no que diz respeito à seleção de alternativas que serão suscetíveis para conduzir à solução de um problema proposto. Dependendo da apreensão que se privilegia, haverá o que Duval (2004) intitula de conduta de abdução, que explorará diferentes caminhos para a solução de um problema proposto a partir da análise do enunciado de determinado problema e a realização de tratamentos figurais pertinentes ao problema proposto.

A seleção de determinadas unidades elementares de uma figura geométrica conduzirá para a realização de diferentes tipos de tratamentos que são próprios do registro figural. Os tratamentos figurais são “operações que podem ser efetuadas materialmente ou mentalmente sobre as unidades figurais em uma figura geométrica, para obter uma modificação configural desta figura.” (DUVAL, 2012b, p. 287) O tratamento figural está vinculado com “a possibilidade de modificação que surge da relação das partes com o todo, por exemplo, relações ópticas (visuais) ou posicionais de uma figura”. (DUVAL, 2004, p. 162, tradução nossa).

Na apreensão perceptiva, de maneira imediata e automática, há o “reconhecimento das diferentes unidades figurais que são discerníveis em uma figura dada”. (DUVAL, 2004, p. 162, tradução nossa). Ela é considerada como o primeiro nível de apreensão das figuras geométricas, pois “uma figura é uma organização de elementos de um campo perceptivo, não homogêneo, que constitui um objeto que se destaca deste campo.” (DUVAL, 2012a, p. 121). Considerando a análise das variações qualitativas e dimensionais, a apreensão perceptiva permite também a interpretação da forma que uma figura está organizada. As Figuras 5a, 5b e 5c ilustram diferentes maneiras de interpretação visual de uma figura:

Figura 5 - Exemplos de diferentes organizações perceptivas das figuras



Fonte: DUVAL (2012a, p. 121)

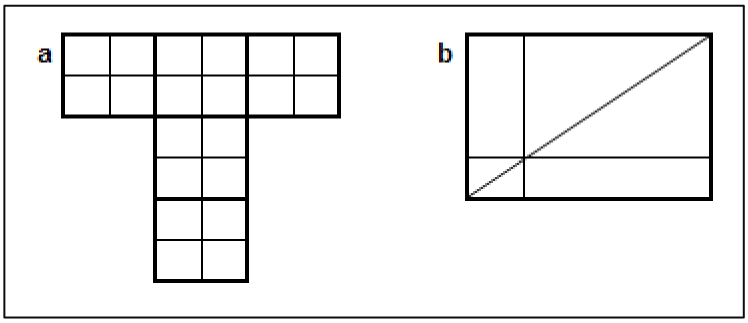
De acordo com Duval (2012a), por meio da apreensão perceptiva, a Figura 5a é composta pela superposição entre um retângulo e um quadrado, a Figura 5b de maneira imediata indica duas formas iguais com um lado em comum, enquanto a Figura 5c indica um retângulo dividido em duas partes. Isso caracteriza o que Duval (2012a) comenta, de que a apreensão perceptiva é uma atividade imediata e automática em que uma figura destaca objetos independentemente do enunciado.

Duval (2011) comenta que, ao considerar a mudança na maneira de ver uma figura, que contemple a desconstrução dimensional, esta contraria a percepção imediata que de certa maneira bloqueia o reconhecimento das demais unidades figurais. Retomando o exemplo da Figura 5a, pode ser feita outra decomposição, em que a figura pode ser formada por dois triângulos, dois pentágonos e um hexágono justapostos. Essas organizações perceptivas das figuras geométricas suscitam o outro nível de apreensão, chamado de apreensão operatória.

A apreensão operatória ocorre com uma atitude controlada e está “centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis destas modificações.” (DUVAL, 2012a, p. 125). Essa apreensão faz parte do processo heurístico de uma figura, “de descoberta da resolução do problema.” (MORETTI, BRANDT, 2015, p. 604). Uma figura geométrica pode ser modificada por meio de três maneiras diferentes: pela modificação mereológica, modificação ótica ou modificação de posição.

Quanto à modificação mereológica, Duval (2004) estabelece que é um tipo de tratamento em que uma figura é decomposta em subfiguras de dimensão 2; essas subfiguras podem ser homogêneas, de mesmo formato, ou heterogêneas, cujas subfiguras podem possuir formatos diferentes. Duval (2004, p. 170, tradução nossa) explica que as “[...] subfiguras são reorganizações perceptivas diferentes que representam algumas (ou todas) as unidades figurais elementares da figura de partida.”. O exemplo a seguir, Figura 6a e Figura 6b, ilustra essa modificação:

Figura 6 - Modificação mereológica homogênea e heterogênea de figuras geométricas

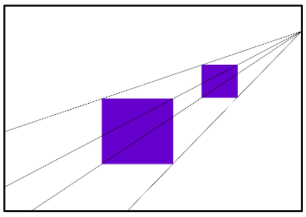


Fonte: Adaptado de DUVAL (2004, p. 165)

A figura 6a é formada por cinco quadrados e ilustra uma reconfiguração homogênea, em que as subfiguras são todas do mesmo formato. A figura 6b é um retângulo que foi decomposto de maneira heterogênea por subfiguras com formatos diferentes, triangulares, retangulares e quadrangulares.

A próxima modificação, denominada modificação ótica segundo Duval (2012b) ocorre pela variação de tamanho de uma mesma figura, conservando a forma e orientação no plano fronto – paralelo. É uma modificação que “consiste em ver em profundidade”. (DUVAL, 2004, p. 166). A figura 7 a seguir exemplifica esta modificação:

Figura 7 - Modificação ótica em um quadrado

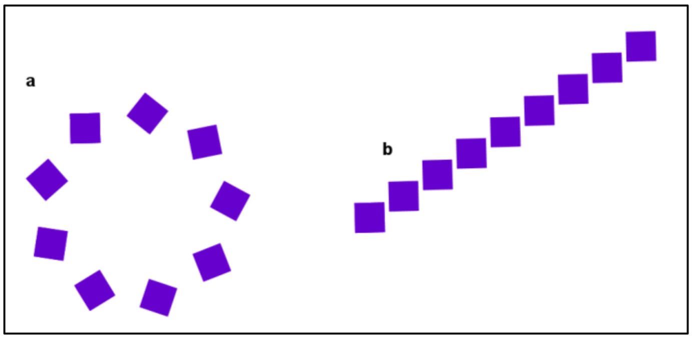


Fonte: A autora

Esta modificação favorece a compreensão do conceito de homotetia. Duval (2004, p. 167, tradução nossa) comenta que a modificação ótica, “ao permitir uma percepção em profundidade de uma representação plana, constitui a produtividade heurística do registro figural em relação com o discurso matemático tão útil para a compreensão da homotetia”.

O terceiro tipo de modificação, denominado modificação de posição, é aquele em que na figura se conservam o tamanho e a forma, porém, ocorre a variação de orientação: rotação ou translação (DUVAL, 2012b). A Figura 8, a seguir, apresenta um modelo deste tipo de modificação:

Figura 8 - Modificação posicional com variação de orientação



Fonte: A autora

A apreensão operatória, composta pelas três classes de modificações apresentadas acima, permite que as figuras geométricas cumpram a função de suporte intuitivo, favorecendo a interpretação das atividades de geometria. De acordo com Duval, (2004, p. 170, tradução nossa), "O êxito da exploração de uma figura no âmbito de um problema proposto, vai depender então da articulação entre esta apreensão operatória da figura e um manejo discursivo de inferências que mobiliza uma rede de definições e de teoremas".

A apreensão operatória neutraliza a apreensão perceptiva espontânea de uma figura. Dependendo do número, heterogeneidade e das posições das unidades figurais que compõem a figura ocorrerá um custo de tempo para a efetivação desta apreensão (DUVAL, 2004).

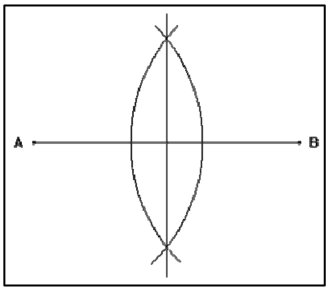
Outra apreensão, denominada de sequencial, segundo Duval (2012a, p. 120), "é explicitamente solicitada em atividades de construção ou em atividades de descrição, tendo por objetivo a reprodução de uma dada figura.". É uma apreensão verificada pelo seguimento de um passo-a-passo de uma construção geométrica. Um exemplo que pode ilustrar a apreensão sequencial é a construção da mediatriz de um segmento de reta, por meio de compasso e régua, em que os alunos precisam seguir os seguintes passos:

1. Construa um segmento $\overline{AB}$ com comprimento de 5 cm.
2. Com a ponta seca do compasso no ponto A, abra uma medida maior que a metade do segmento $\overline{AB}$ e trace um arco que intersecte (corte) o segmento $\overline{AB}$.
3. Repita o processo, mas agora pelo ponto B, utilizando a mesma medida de abertura do compasso.

4. Trace a mediatriz unindo as intersecções dos dois arcos.

De acordo com a Figura 9, a seguir, o resultado da sequência dos cinco passos de construção é apresentada:

Figura 9 - Construção esperada a partir do seguimento das instruções de construção



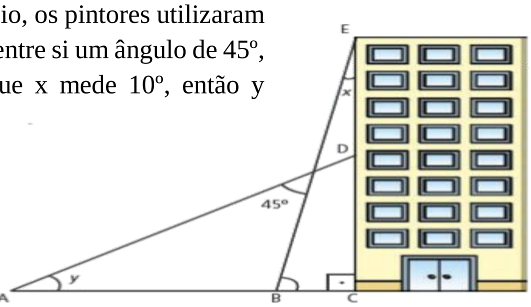
Fonte: A autora

Diferentemente da descrição de um procedimento de construção, a outra apreensão, denominada de apreensão discursiva, está relacionada com o enunciado, em que "as propriedades pertinentes e as únicas aceitáveis dependem cada vez do que é dito no enunciado como hipótese." (DUVAL, 2012a, p. 133). Consiste em compreender os elementos da construção geométrica em que o enunciado, por meio das hipóteses, determina quais pressupostos teóricos serão úteis para a resolução do problema proposto. Por exemplo, a questão a seguir proposta por Andrini e Vasconcellos (2012) menciona no enunciado valores para determinados ângulos, no entanto, implicitamente, solicita para a resolução, propriedades envolvendo a soma de ângulos internos de polígonos.

Figura 10 – Exemplo de questão que mobiliza a apreensão discursiva

Para pintar a fachada lateral de um prédio, os pintores utilizaram duas escadas, AD e BE, que formavam entre si um ângulo de 45º, conforme mostra a figura. Sabendo que x mede 10º, então y medirá:

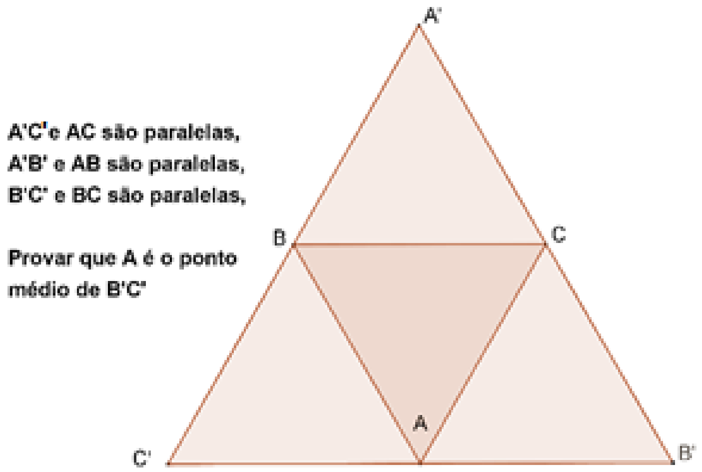
a) 25°
b) 30°
c) 35°
d) 40°



Fonte: Adaptado de Andrini e Vasconcelos (2012, p. 262)

Duval (2004) alerta para o fato de que nem sempre um enunciado relata unidades figurais automaticamente perceptíveis numa figura dada, e isso pode ocasionar dificuldades de êxito para a resolução de um problema. A Figura 11, a seguir, adaptada de Duval (2004, p. 163), mostra a não congruência entre a questão e o modo como resolvê-la. O enunciado deixa implícito que o problema admite como procedimento de resolução referência à propriedade dos paralelogramos.

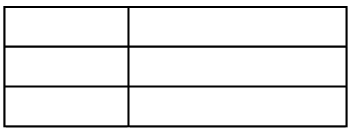
Figura 11 - Não congruência entre enunciado e figura



Fonte: Adaptado de Duval (2004, p. 163)

Além do exemplo acima, outra importante consideração feita por Duval (2004) é referente a uma congruência muito forte entre o enunciado e a figura que também ocasionou obstáculos para a resolução de um problema. A Figura 12, a seguir, ilustra a situação:

Figura 12 - Quantos retângulos tem esta figura?



Fonte: Adaptado de Duval (2004, p. 169)

A situação ilustrada pela Figura 12, num primeiro momento, impõe a visualização de um retângulo grande formado por outros retângulos pequenos. Porém, há outras possibilidades de modificação figural, não tão frequentes entre os alunos.

Na resolução de um problema de Geometria é possível que as quatro apreensões – perceptiva, operatória, sequencial e discursiva – apareçam, sendo que algumas dessas apreensões serão mais requisitadas que outras. Duval (1997, *apud* MORETTI; BRANDT, 2015, grifos nossos) destaca algumas conexões entre elas: as apreensões perceptiva e discursiva se articulam para a análise de uma **figura geométrica**. As apreensões perceptiva e operatória comandam a **visualização,** enquanto que as apreensões discursiva e sequencial articuladas exprimem como resultado a atividade da **construção geométrica**, nesta, também é requisitada a apreensão perceptiva. A **heurística** e a **demonstração** compreendem as apreensões discursiva e operatória, em que convém destacar que esta última apreensão está subalterna à apreensão perceptiva.

Como se pode observar, há uma predominância da apreensão perceptiva sobre alguns dos principais aspectos que se devem considerar para a aprendizagem da Geometria. A apreensão perceptiva está relacionada com a forma de olhar para um problema em Geometria. A partir desse pressuposto, Duval (2005, p. 09-12) leva em consideração quatro diferentes olhares para a atividade geométrica, apresentados a seguir:

- O primeiro deles é o olhar botanista, em que há o reconhecimento tanto dos contornos das formas focalizando os aspectos qualitativos quanto da nomeação dada para a figura a partir de suas características perceptivas. As atividades que privilegiam esse olhar consistem na observação de semelhanças e diferenças e não relacionam as figuras com propriedades. No entanto, este olhar é o que prepara o aluno para os demais.
- O segundo olhar é o agrimensor, cuja finalidade é trabalhar com medidas, passando de uma escala de grandeza para outra. Por exemplo, um arquiteto, ao efetuar as medidas de um cômodo em uma casa, precisa passá-las para o papel.
- O terceiro olhar é chamado de construtor, que se manifesta a partir do uso de instrumentos, como a régua não graduada, o compasso ou algum programa computacional, como por exemplo, o *software GeoGebra* para a tomada de consciência sobre uma propriedade geométrica que ocorre não apenas pela característica perceptiva. Por exemplo, para construir um quadrado, é preciso considerar que este polígono possui todos os lados iguais e todos os ângulos internos medindo 90°.
- O quarto olhar é o do inventor, em que diante de uma atividade há a necessidade de reconfiguração da figura de partida ou o acréscimo de traços, a fim de modificá-la para descobrir um procedimento de resolução de determinado problema proposto. Por exemplo, como dividir um paralelogramo para obter dois triângulos?

Os dois primeiros – botanista e agrimensor – são olhares icônicos, em que as formas que se observam podem se relacionar com objetos da realidade. Segundo Duval (2005, p. 18, tradução nossa), “a visualização não icônica é totalmente independente de qualquer enunciação explícita ou implícita. Em outras palavras, não é de modo algum subordinado ao conhecimento propriedades geométricas”. Uma visualização icônica prioriza, portanto, o reconhecimento e a diferenciação de formas.

Os outros dois olhares: construtor e inventor são caracterizados por Duval (2005) como não-icônicos, por se relacionarem diretamente a objetos matemáticos. O olhar não icônico permite a identificação de variância ou invariância de certas características presentes em uma determinada figura. Essas variações ou invariâncias são resultado de propriedades implícitas que regem as figuras geométricas.

Assim como as apreensões, esses olhares também estão presentes em atividades de Geometria e são em maior ou menor intensidade privilegiados, dependendo da atividade proposta.

3.3 OS AMBIENTES INFORMATIZADOS: ALGUNS APONTAMENTOS

Os ambientes informatizados são importantes, de tal forma que “se tornaram os ambientes que comandam tão poderosamente todos os setores da atividade humana que se adaptar à realidade e ao mundo, é hoje se adaptar às telas via utilização de softwares.” (DUVAL, 2013, p. 31).

Para Duval (2011), o computador não produz um novo tipo de registro de representação semiótica, pois as imagens que exibe são as mesmas que podem ser produzidas no papel. O autor complementa ainda que, por exemplo, para a interpretação das figuras geométricas, a necessidade de modificação mereológica ou desconstrução dimensional permanece inalterada. No entanto, o computador é visto como uma ferramenta com potencial de tratamento ilimitado e imediato, com a possibilidade de que um registro se torne manipulável, arrastando-o, rodando-o ou mesmo estendendo-o a partir de um ponto. Essa característica favorece a “exploração heurística de problemas matemáticos.” (DUVAL, 2011, p. 137).

Salazar e Almouloud (2015) fazem importantes apontamentos quanto ao tipo de registro produzido num ambiente informatizado. Denominam registro figural dinâmico o tipo de representação semiótica produzido por esses ambientes e, mais precisamente, referem-se aos registros produzidos em ambientes de Geometria dinâmica. Explicam que, ao interagir com um ambiente dinâmico, o sujeito realiza as atividades cognitivas de formação, tratamento e conversão de modo diferente.

A atividade cognitiva de formação, que para Duval (2004) é o reconhecimento de determinado objeto, recebe uma adaptação quando ocorre no ambiente de Geometria dinâmica.

Uma “formação dinâmica, se dá quando o sujeito, para representar um objeto geométrico, escolhe uma ferramenta (da barra de ferramentas) que lhe permita criar a figura desejada.” (SALAZAR; ALMOULOUD, 2015, p. 928). O sujeito faz apelo ao conhecimento de geometria que possui, aliado à escolha das ferramentas que permitirão exteriorizar aquilo que lhe veio à mente.

O tratamento, que de acordo com Duval (2004) consiste em efetuar modificações internas no mesmo sistema semiótico ao qual determinado registro pertence, ao ocorrer no ambiente dinâmico é imediato e acelerado. Salazar e Almouloud (2015, p. 930) identificam que os tipos de tratamento que um registro recebe em um ambiente dinâmico são:

> [...] mudar a posição da figura sem modificá-la (para isso, se utiliza a função de manipulação direta), mudar o comprimento dos lados da figura (aqui, se utiliza a função de arrastamento e também se pode utilizar a ferramenta de homotetia) e reconfigurar a figura (neste caso, se utiliza a função de arrastamento e outras ferramentas especificas que dependem da figura construída).

Em relação à conversão, Duval (2012) a caracteriza como a mudança de uma representação para outra em que se conserva total ou parcialmente o conteúdo da representação inicial. Esta operação cognitiva, ao ocorrer num ambiente de Geometria dinâmica, se realiza do sistema semiótico da língua natural, com a representação por meio do enunciado do problema, para a representação figural, em que se faz uso dos tratamentos dinâmicos para comprovação de conjecturas (SALAZAR; ALMOULOUD, 2015).

A partir dessas constatações, a utilização dos ambientes informatizados promove uma nova situação no ensino. Em um ambiente informatizado, há três importantes características mencionadas por Duval (2013, p. 32, grifos do autor), em que,

> A mais fascinante é o **poder de visualização** que eles oferecem em todas as áreas. A segunda é que eles constituem um meio de transformações de todas as representações produzidas na tela. Em outras palavras, eles não são somente um instrumento de cálculo cuja potência cresce de modo ilimitado, mas eles cumprem **uma função de simulação e de modelagem** que ultrapassa tudo o que podemos imaginar “mentalmente” ou realizar de modo gráfico-manual. Enfim, a produção pelos computadores é quase imediata: **um clique, e isto é obtido sobre a tela!**

Duval (2011) pontua que as atividades cognitivas necessárias de acordo com cada software estão relacionadas com o menu de comandos. O menu de comandos corresponde ao modo de controle que é feito pelo indivíduo sobre o software.

Cada item do menu de comandos exigirá ações e atividades cognitivas diferenciadas. O Quadro 2, a seguir, apresenta exemplos de ações e atividades cognitivas mobilizadas a partir do menu de comandos de maneira geral.

Quadro 2 - Análise das tarefas cognitivas requeridas para a utilização de um computador

Menu de Comandos	Ação	Atividade cognitiva mobilizada
- Uma lista de termos designando os objetos matemáticos e as operações matemáticas ou não.	- Escolher um termo para uma instrução ou compor uma sequência de várias instruções.	- Conhecimento dos termos matemáticos e decomposição da figura esperada em função da escolha dos termos do menu.
- Lugar vazio para uma equação.	- Escrever uma equação.	- Conversão automática de uma equação também já dada, ou coordenação preliminar para escolher o tipo de equação, a fim de obter o tipo de curva ou a superfície esperada.
- Uma tabela de ícones.	- Apoiar sobre um ícone	- Reconhecimento do ícone que codifica a instrução correspondente ao pedido.
- O *mouse* ou o *tablet.*	- Deslocar manualmente o *mouse.*	- Coordenação do gesto e da visão para manipular a figura obtida.

Fonte: DUVAL (2011, p. 138)

O menu de comandos influencia o que se exibirá na tela, sendo necessário atentar-se para que não ocorra uma contrariedade nos modos de ver ou formular que estão aliados às três características destacadas anteriormente. Diante disto, Duval (2011) tece algumas considerações importantes:

- - É possível elaborar uma quantidade elevada de instruções. No entanto, deve-se tomar cuidado quanto às limitações da memória mesmo atenta ou então distraída, que pode influenciar no trabalho de comparação e observação das variações que ocorrem nas representações, pois uma sequência de instruções de exibições no monitor pode ser a mesma que numa produção da fala.
- - Um *menu* favorece unicamente a entrada de um tipo de registro de representação e reproduz a mesma em outro registro. Como é necessário o desenvolvimento da coordenação de registros, é necessário que o *software* seja explorado de modo a permitir a entrada inversa dos registros.
- - Na construção de uma figura, a desconstrução dimensional acontece de modo antecipado, o que influencia a maneira de ver uma figura, pois o *menu* impõe inicialmente a decomposição das unidades figurais 0D, 1D e as subconfigurações das

> unidades figurais em 2D. "**Essa decomposição imposta pelas primitivas do menu pode ser fortemente não congruente com a maneira como o olhar vê uma possível decomposição de uma figura**.". (DUVAL, 2011, p. 138, grifos do autor).

Duval (2015) destaca que, para uma autonomia intelectual em Matemática, é necessário considerar as variáveis pertinentes, articular a representação do monitor com os enunciados, propriedades e teoremas. Considera que, com o uso do computador, as atividades matemáticas se tornam mais acessíveis e tornam as representações semióticas automáticas, o que caracteriza o recurso como inovador e interessante.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DE COLETA, ORGANIZAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

4.1 A NATUREZA DA PESQUISA E DELINEAMENTO METODOLÓGICO

Este trabalho consiste em um estudo de caso qualitativo. De acordo com Bogdan e Biklen (1994, p. 47-50), pesquisas qualitativas possuem cinco características, a saber: (a) a fonte de dados é o ambiente natural; (b) a pesquisa qualitativa é descritiva; (c) o interesse do pesquisador está mais focalizado no processo do que simplesmente no produto ou resultado; (d) os pesquisadores qualitativos tendem a analisar os dados de modo indutivo e; (e) o significado assume grande relevância neste tipo de investigação.

O presente estudo elegeu como sujeitos uma turma de 36 alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública estadual do município de Ponta Grossa – PR. A coleta de dados, feita por meio de uma oficina, foi realizada no ambiente natural dos sujeitos, o que contemplou o item (a) da pesquisa qualitativa em que "os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto." (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 48).

Por considerar como fonte de dados empíricos as produções digitais e escritas dos alunos, esta investigação assume a outra característica do estudo qualitativo, item (b), que se refere à descrição, pois todo o processo de coleta de dados diz respeito a uma descrição de acontecimentos considerados relevantes para atender o objetivo proposto, bem como uma descrição das respostas produzidas pelos sujeitos.

A terceira característica da pesquisa qualitativa refere-se a que o pesquisador dessa natureza se interessa mais pelo processo que simplesmente pelo resultado. Neste estudo, a análise dos dados pauta-se na descrição de um processo envolto em ações dos sujeitos diante do ambiente dinâmico GeoGebra, apontando em que medida foi possível identificar a mobilização de atividades cognitivas. Por esse motivo, não é pertinente para este estudo somente os resultados, mas a descrição desse processo, que, em pesquisas futuras, poderá suscitar readequações e também melhorias.

Em relação ao item (d), em que os investigadores qualitativos tendem a analisar os dados de modo indutivo, Bogdan e Biklen (1994, p. 50) complementam que "as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando". Neste estudo, ao recolher as produções dos alunos, foram agrupados traços semelhantes que consistiram em indicativos de categorias, que à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica suscitaram a elaboração de interpretações.

A última característica proposta por Bogdan e Biklen (1994) é a atribuição de significado às respostas dos sujeitos. Essa característica da pesquisa qualitativa está presente nesse estudo, pois é com foco nas produções dos sujeitos que foram propostas as significações a respeito de em que medida o uso de um ambiente dinâmico permite a mobilização das atividades cognitivas do pensamento geométrico.

A partir da explanação quanto à natureza da pesquisa, foi considerado como delineamento o estudo de caso. Uma das características do estudo de caso mencionada por Ponte (2006, p. 16) é de que esse tipo de abordagem visa "compreender a especificidade de uma dada situação ou fenômeno, para estudar os processos e as dinâmicas da prática, com vista à sua melhoria". Ao propor a articulação da geometria com o ambiente dinâmico GeoGebra para um determinado grupo de sujeitos, este trabalho caracterizou um estudo de caso específico de um fenômeno.

Outra característica do estudo de caso, segundo Triviños (1987), é de que esse tipo de abordagem visa uma compreensão aprofundada de um determinado contexto que pode instigar, por meio de seus resultados, a realização de outras pesquisas. Em virtude de a pesquisa abranger, de maneira delimitada, uma turma de alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ponta Grossa - PR, considerou-se que é possível que algumas características do contexto desses sujeitos poderão se assemelhar a outras realidades e permitir a realização de outras pesquisas que complementem o presente estudo.

4.2 CARACTERIZAÇÃO DOS SUJEITOS E PROCEDIMENTOS DE COLETA DE DADOS

4.2.1 A caracterização dos sujeitos e do ambiente escolar

Para a coleta de dados, foi ofertada uma oficina para os alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública do município de Ponta Grossa – PR. A fim de proteger a identidade dos envolvidos, optou-se por não divulgar a identificação da escola. O nível de ensino escolhido foi determinado a partir das constatações feitas na revisão de literatura que indicaram poucas pesquisas com alunos cursando esse ano de escolaridade. A turma escolhida possui 36 alunos, e, desse número, um total de 30 alunos voluntariaram-se para a participação da pesquisa mediante a entrega de um termo de consentimento assinado pelos responsáveis.

Para que fossem contemplados todos os 30 alunos, uma divisão da turma foi necessária, pois no laboratório de informática da escola um total de 9 computadores estavam funcionando. Foram constituídos 2 grupos: o primeiro grupo contou com a participação de 18 sujeitos, com 2 alunos por computador. Essas duplas do primeiro grupo foram identificadas pela letra A, seguida de números 1 até 9, a fim de diferenciá-las.

O segundo grupo teve a participação de 12 sujeitos, em que 5 duplas foram formadas e 2 alunos preferiram trabalhar individualmente. Para esses sujeitos, foi atribuída a letra B seguida dos números 1 até 7. Os sujeitos que trabalharam em duplas foram nominados por B1, B2, B3, B4 e B5. Os alunos que trabalharam sozinhos foram caracterizados como B6 e B7.

Não foi permitido pela direção da escola que a coleta de dados fosse realizada no contra turno escolar, para que não ocasionassem transtornos para as rotinas dos alunos. Desse modo, a professora da turma autorizou a realização da oficina, em que seriam coletados os dados empíricos para este estudo, durante determinado período. A oficina foi aplicada num total de 10 segundas-feiras, sempre no mesmo horário: das 10h15min até 11h40min. Esses horários correspondem a 2 horas-aula. Desse total, o grupo G1 participou de 5 sessões com 2 horas-aula em cada sessão, enquanto que o grupo G2 participou das outras 5 sessões também com 2 horas-aula cada.

4.2.2 Os instrumentos de coleta de dados

Como a inserção da pesquisadora no ambiente de coleta foi por meio da oferta de uma oficina em que se elaboraram atividades digitais e atividades escritas, convém descrever como foi proposta a coleta de dados. A oficina foi realizada em duas etapas. Na primeira etapa, trabalhou-se com a familiarização dos alunos com o GeoGebra e com a janela de visualização 2D, a partir de atividades escritas, contidas em um caderno juntamente com atividades digitais no GeoGebra, elaboradas pela pesquisadora. A segunda etapa contemplou a janela de visualização 3D do GeoGebra por meio de atividades escritas e digitais, elaboradas pela pesquisadora.

Nas atividades da primeira etapa, foram trabalhados conceitos básicos de Geometria plana. Essa etapa teve a duração de 6 horas-aula para cada um dos grupos. Na segunda etapa da oficina, foram elaboradas atividades envolvendo conceitos de Geometria Espacial com um total de 4 horas-aula para cada grupo. Quanto aos conteúdos matemáticos, especificamente, se trabalhou com as diferenças entre os polígonos regulares e não regulares, poliedros regulares e não regulares, além disso, algumas atividades contemplavam a Relação de Euler[2].

Os instrumentos relativos às atividades escritas e digitais foram a principal fonte de coleta de dados. Para as atividades escritas ou digitais elaboradas como instrumento, a partir da aplicação com o primeiro grupo, foram necessárias modificações, adequações ou mesmo exclusões de atividades, em virtude da verificação de incompreensões e desajustes contidos no próprio ambiente dinâmico[3].

Foram estabelecidos também como instrumentos de coleta os protocolos de construção[4] de cada sujeito, anotações e gravações de áudio feitas pela pesquisadora sobre acontecimentos no decorrer dos encontros que compuseram a oficina. Tanto os protocolos de construção quanto algumas notas feitas foram considerados relevantes para a busca pela resposta ao problema de pesquisa. Os registros de áudio auxiliaram para a captação de falas que foram significativos.

4.3 A ANÁLISE DE CONTEÚDO DE LAURENCE BARDIN (2016)

Como procedimento de análise dos dados, optou-se pelos subsídios teóricos da proposta de Bardin (2016). A análise de conteúdo objetiva a superação da incerteza e o enriquecimento da leitura, pois permite que um melhor esclarecimento, para além da aparência, seja estabelecido em relação aos dados coletados. Bardin (2016, p. 38) explica que "qualquer comunicação, isto é, qualquer veículo de significados de um emissor para um receptor, controlado ou não por este, deveria poder ser escrito, decifrado pelas técnicas de análise de conteúdo.". Considerou-se pertinente adotar a análise de conteúdo para guiar a interpretação dos dados porque se procura, nesse estudo, além das aparências, o estabelecimento de quais processos cognitivos foram mobilizados pela realização das atividades propostas no ambiente dinâmico GeoGebra.

---

2 A relação de Euler é um teorema geométrico relacionado a Leonhard Euler (1707-1783), que se refere aos poliedros convexos. Esse teorema estabelece que o número de vértices somado ao número de faces é igual ao número de arestas excedido em duas unidades.
Fonte: GARBI, G. G. Euler, o mestre de todos nós. In: ______. **A Rainha das Ciências:** um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010. p. 242-268.

3 Imprevistos ocorridos com o *software* GeoGebra com o uso da ferramenta denominada "inserir campo de entrada" para a digitação das respostas não permitiu que a resposta dos sujeitos ficasse salva.

4 O protocolo de construção é uma ferramenta do GeoGebra que permite verificar o passo-a-passo utilizado pelo sujeito ao construir determinado objeto matemático. O protocolo de construção permite reproduzir a construção a partir do primeiro passo ou, então, selecionando-se de determinado momento.

A análise de conteúdo se caracteriza em três momentos: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados, interpretação e inferência. A seguir, serão descritos cada um desses momentos.

4.3.1 Primeiro momento: a pré-análise

A pré-análise consiste na organização do material, por meio da "escolha dos documentos a serem submetidos à análise, a formulação das hipóteses e dos objetivos e a elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final." (BARDIN, 2016, p. 125). A fase de pré-análise é composta pelos procedimentos a seguir: leitura flutuante, escolha dos documentos, formulação de hipóteses e dos objetivos, referenciação dos índices e a elaboração dos indicadores e, por fim, a preparação do material.

O organograma proposto pela Figura 13, a seguir, explica as etapas desse primeiro momento da pré-análise adotadas nesse estudo:

Figura 13 - Organograma das etapas de pré-análise de acordo com Bardin (2016, p. 126-131)

Leitura flutuante Contato inicial com o material a ser analisado, em que, de modo livre, se deixa invadir pelas impressões.	• Optou-se, nessa fase, pela transcrição de todas as respostas numa planilha em excel a fim de facilitar a leitura flutuante dos dados coletados.
Escolha dos documentos Remete a quais documentos/instrumentos serão utilizados na análise.	• Nessa etapa, os dados empíricos consistem nas produções dos alunos nas atividades propostas. As demais fontes (gravações de áudio e anotações) serviram para complementar os indicadores de categorias.
Formulação das hipóteses e objetivos Considerações provisórias que guiam o que será analisado no material.	• Nessa fase, com base no referencial teórico, fez-se um estudo preliminar de cada atividade proposta na oficina com vistas a estabelecer as possibilidades de quais processos cognitivos poderiam ser mobilizados.
Referenciação dos índices e a elaboração dos indicadores Indicação da frequência de um tema nos documentos analisados e recortes passíveis de categorização.	• Considerou-se como índices e indicadores as respostas frequentes dadas pelos sujeitos, nas quais foram identificadas, de maneira inferencial, as especifidades dos processos cognitivos sobre a Geometria de acordo com Raymond Duval.
A preparação do material Edição e organização dos materiais para favorecer a manipulação da análise.	• Por envolver a preparação formal dos dados esse estudo envolveu a apresentação dos dados em quadros elaborados no excel em que se buscou agrupar os dados semelhantes.

Fonte: A autora.

4.3.2 Segundo momento: descrição analítica para identificação de categorias

No segundo momento da análise de conteúdo, denominado por Bardin (2016, p. 131) de “exploração do material”, se realiza a sistematização dos dados em função de critérios estabelecidos. Esta fase compreende a “aplicação sistemática das decisões tomadas.” (BARDIN, 2016, p. 131). Para essa etapa, a fim de organizar os dados coletados, foi estabelecida uma adaptação do quadro de categorizações dos aspectos cognitivos da Geometria segundo Raymond Duval, proposta por Scheifer (2017).

Essa pesquisadora, ao propor um estudo sobre as questões de geometria da Prova Brasil, à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, elaborou para as categorias de análise dos dados empíricos um quadro sistematizado contendo as especificidades do aporte teórico. Adaptar o quadro de Scheifer (2017) para esta pesquisa foi pertinente para a análise das respostas frequentes dadas pelos sujeitos por se tratar do mesmo referencial teórico. Conforme Bardin (2016, p. 131) ressalta: “esta fase, longa e fastidiosa, consiste essencialmente em operações de codificação, decomposição ou enumeração de regras previamente formuladas.”. Essa fase, por consistir na organização dos dados, subsidia a realização das inferências.

4.3.3 Terceiro momento: interpretação, tratamento e análise inferencial dos dados obtidos

O terceiro e mais importante momento é aquele em que se realiza o tratamento dos dados obtidos e a interpretação. Nessa etapa, são intensificadas as reflexões e estimativas, em que o pesquisador “pode então propor inferências e adiantar interpretações a propósito dos objetivos previstos, ou que digam respeito a outras descobertas inesperadas.” (BARDIN, 2016, p. 131). Foi contemplada, nessa fase, por meio das informações fornecidas pelas produções dos alunos, a verificação das hipóteses que visaram verificar, de modo geral, se a articulação do ambiente dinâmico GeoGebra com a Geometria favoreceu a mobilização das atividades cognitivas propostas por Raymond Duval. Para tanto, foi necessário um estudo preliminar do instrumento de coleta de dados.

Esse estudo preliminar das atividades escritas e digitais propostas no instrumento de coleta foi realizado com vistas a estabelecer quais processos cognitivos seriam necessários para as resoluções de cada atividade. Em seguida, de posse das respostas dadas pelos alunos, foi possível inferir sobre o êxito ou não dos processos cognitivos mobilizados. A seguir, apresentar-se-á o estudo preliminar das atividades.

4.3.3.1 Os instrumentos de coleta: estudo preliminares

Na primeira etapa da oficina, aplicada aos alunos do oitavo ano, foram propostas 9 atividades que envolviam conteúdos de geometria plana. Os conteúdos matemáticos contemplados foram: reta e segmento de reta, polígonos e não polígonos, polígonos regulares e não regulares. Na segunda etapa da oficina, foram aplicadas 4 atividades de Geometria Espacial, cujos conteúdos trabalhados foram: elementos e características dos poliedros, poliedros regulares e poliedros não regulares e a Relação de Euler.

4.3.3.1.1 Atividades da primeira etapa da oficina

Atividade 1.0 - Construção de uma reta e de um segmento de reta

Essa atividade introdutória foi preparada para que os alunos obtivessem um contato inicial com as ferramentas do GeoGebra. A atividade 1.0 consistia na construção de uma reta e de um segmento de reta por meio de 12 passos. Após as construções, os sujeitos precisavam responder por escrito quatro questões que diziam respeito a características observadas nas construções. A seguir, no Quadro 3, a atividade 1.0 é apresentada:

Quadro 3 - Construção de uma reta e um segmento de reta no GeoGebra

Atividade 1.0

Construção de uma reta e um segmento de reta

1- Abra o arquivo **"Atividade 1.0-reta e segmento de reta"** contida na pasta Poliedros – possiblidades com o GeoGebra.
2- Crie dois pontos A e B na janela de visualização.
3- Construa uma reta selecionando os pontos A e B. Observe que o software nomeou essa reta com a letra **f.**
4- Clique na ferramenta mover e selecione a reta que você construiu.
5- Clique com o botão direito do *mouse* em cima da reta que você construiu e clique no item propriedades.
6- Em seguida selecione a janela "cor" e escolha a cor vermelha para a sua reta e na janela "estilo" altere a espessura da reta para 5.
7- Crie outros dois pontos C e D quaisquer na tela do GeoGebra.
8- Construa um segmento de reta selecionando os pontos que você criou no passo 7.
9- Clique na ferramenta mover e selecione a semirreta que você construiu.
10- Clique com o botão direito do *mouse* no item propriedades, em cima da semirreta que você construiu clique no item propriedades.
11- Selecione a janela "cor" e escolha a cor verde para esse segmento de reta e na janela "estilo" altere a espessura do segmento de reta para 5.
12- Agora, clique na ferramenta mover e movimente os pontos das suas construções e responda:

A- Que característica você observou na reta? Explique.

___

B- Que característica você observou no segmento de reta? Explique.

____

C- O segmento de reta possui início e fim? Explique.

____

D - Como são chamados os pontos que determinam o início e o fim do segmento de reta? _______________

Fonte: A autora

Em relação a essa atividade, compreendeu-se que uma apreensão sequencial seria mobilizada, pois os sujeitos precisariam seguir um passo-a-passo para a construção de uma reta e de um segmento de reta. Por meio dos enunciados das questões A, B, C e D, a apreensão discursiva também faria necessária, pois se tratavam de direcionamentos do que seria explorado a partir da construção da reta e do segmento de reta. O olhar mobilizado nessa atividade seria o botanista, por tratar do reconhecimento de características tanto da reta quanto do segmento de reta.

Atividade 2.0 - Construção de três formas geométricas

A Atividade 2.0 solicitava que os sujeitos construíssem no GeoGebra três exemplos de figuras geométricas conhecidas por eles. Cinco questões foram feitas a partir dessa atividade. No Quadro 4, a seguir, apresenta-se a atividade 2.0:

Quadro 4 - Atividade 2.0 construção de três formas geométricas

Atividade 2.0

Construção de três formas geométricas

1- Abra o arquivo “Atividade 2.0 – formas geométricas” contida na pasta Poliedros – possiblidades com o GeoGebra.
2- Utilize a ferramenta polígono para a construção de três exemplos de formas geométricas.
3- Ao construir seu polígono você deve clicar, para terminá-lo voltar a clicar no ponto que foi criado em primeiro lugar.

Após a construção, responda as questões a seguir:

A- Qual o nome dos polígonos que você construiu?

____

B- Como se chamam os pontos utilizados para a construção desses polígonos?

____

C - Como se chamam os segmentos de retas que formaram os polígonos construídos? ____ D - Movimente os vértices do polígono que você construiu. Quando você movimenta os vértices dos polígonos que você construiu eles permanecem os mesmos polígonos? Explique. ____ E - Se você fosse ensinar um colega a construir no GeoGebra uma das formas geométricas que você obteve, qual seria o passo-a-passo que você solicitaria? Escreva nas linhas a seguir. ____

Fonte: A autora

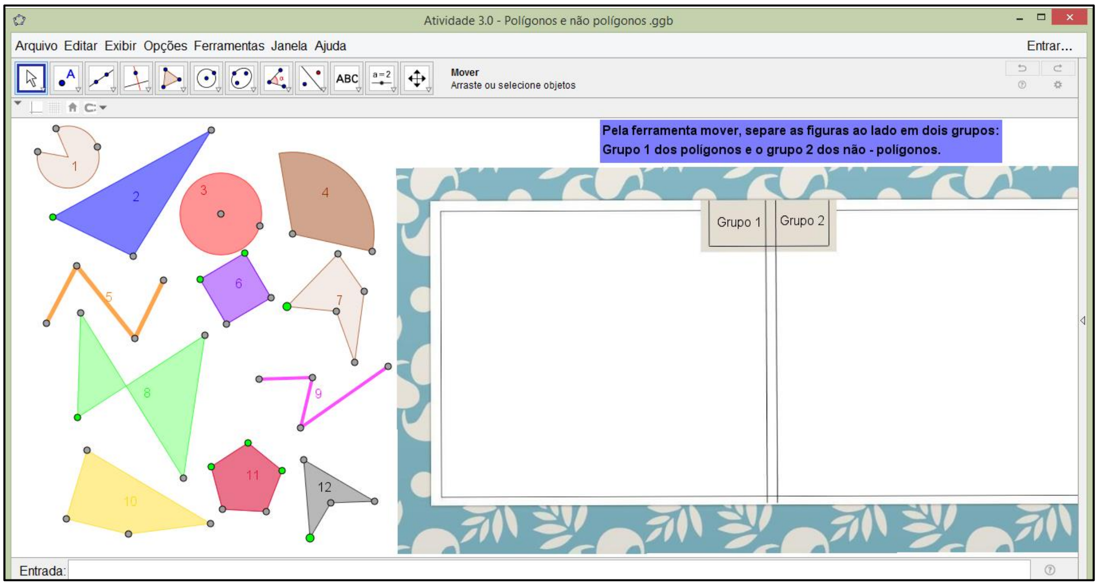
Essa atividade foi elaborada para proporcionar uma maneira diferente de olhar para as formas, contemplando uma desconstrução dimensional de acordo com Duval (2011). Ao questionar sobre os segmentos de reta e sobre os pontos o olhar dos sujeitos, foi direcionado da dimensão dois (D2) para a dimensão um (D1) e também para a dimensão zero (D0). Além da desconstrução dimensional, outra análise preliminar feita sobre as apreensões indicou a presença das apreensões sequencial, discursiva e operatória com modificação ótica. Em relação aos olhares, pretendeu-se com essa atividade inquietar os sujeitos quanto à necessidade de propriedades para garantir certas características da construção dos polígonos. Desse modo, um olhar construtor seria mobilizado.

Atividades 3.0 - Polígonos e não polígonos, 3.1 - Reconfiguração e 3.2 - Tangran

A Atividade 3.0 foi elaborada com o propósito de que os alunos mobilizassem as apreensões discursiva e operatória, juntamente com um olhar botanista. Essa atividade continha na interface do GeoGebra diferentes formas geométricas.

A Figura 14, a seguir mostra a interface do GeoGebra com essa atividade:

Figura 14 - Interface da atividade 3.0 polígonos e não polígonos



Fonte: A autora

Os sujeitos teriam que separar, seguindo seus próprios critérios, as formas que eram polígonos das que eram não polígonos pelo uso da ferramenta mover, por meio do arrastamento. Ao efetuar esse arrastamento, compreendeu-se que, dentre as modificações da apreensão operatória, uma modificação do tipo posicional seria mobilizada, pois os sujeitos teriam que mudar de posição as figuras presentes na atividade. Para os dois grupos, foi solicitado que escrevessem quais eram as características observadas nas formas que foram consideradas polígonos, bem como as dos não polígonos. Por meio dessa questão, um olhar botanista seria requerido devido à necessidade da observação dos formatos de cada uma das figuras apresentadas na interface do GeoGebra, de acordo com a Figura 14.

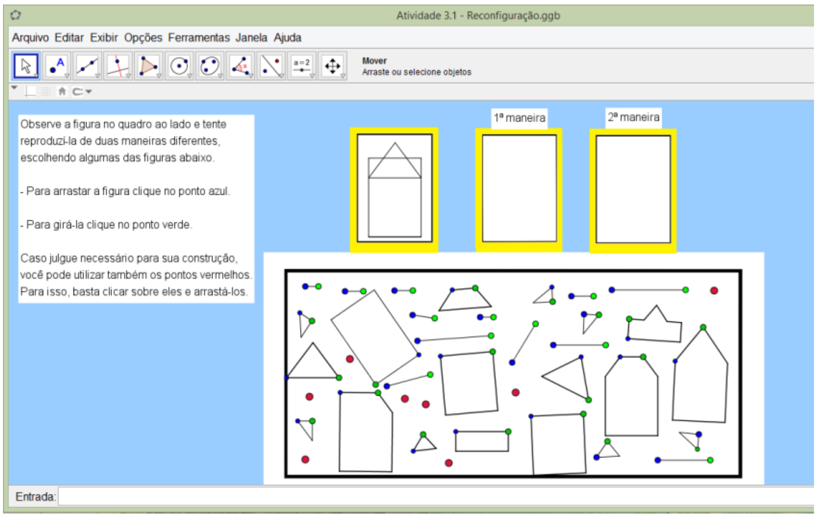
Foi acrescentado, depois da aplicação com o primeiro grupo, outras duas questões, em que os sujeitos precisariam responder por escrito. A primeira questão indagava se era possível efetuar a transformação de algumas das figuras separadas no grupo dos não polígonos para um polígono por meio do movimento dos vértices. A segunda questão sobre essa atividade solicitava a tentativa contrária da anterior, questionava-se a possibilidade de um polígono ser transformado em um não polígono pelo movimento dos vértices.

Ao efetuar tanto o segundo quanto o terceiro questionamento sobre a atividade 3.0, duas apreensões poderiam ser mobilizadas: a apreensão discursiva e a apreensão operatória, com modificação posicional. Compreendeu-se também que um olhar inventor poderia se manifestar, pois os sujeitos foram desafiados a verificar a possibilidade de transformações dos não polígonos em polígonos e vice-versa.

A atividade 3.1, denominada de reconfiguração, foi adaptada do trabalho de Assumpção (2015) e solicitava que os sujeitos reproduzissem, de duas maneiras distintas, uma determinada figura. Para isso, teriam que optar por outras formas disponíveis em um quadro.

A Figura 15, a seguir, mostra a interface da atividade 3.1.

Figura 15 - Atividade 3.1 Reconfiguração



Fonte: Adaptada de Assumpção (2015)

Por meio dessa atividade, compreendeu-se que, dentre as quatro apreensões, seriam requeridas com maior intensidade a perceptiva e a operatória com modificação mereológica e posicional. A apreensão operatória com a modificação mereológica se manifestaria com a decomposição em subfiguras da figura a ser reproduzida. A modificação posicional seria requerida no momento em que os sujeitos precisassem arrastar e girar as formas geométricas disponíveis no quadro para a reprodução da figura inicial.

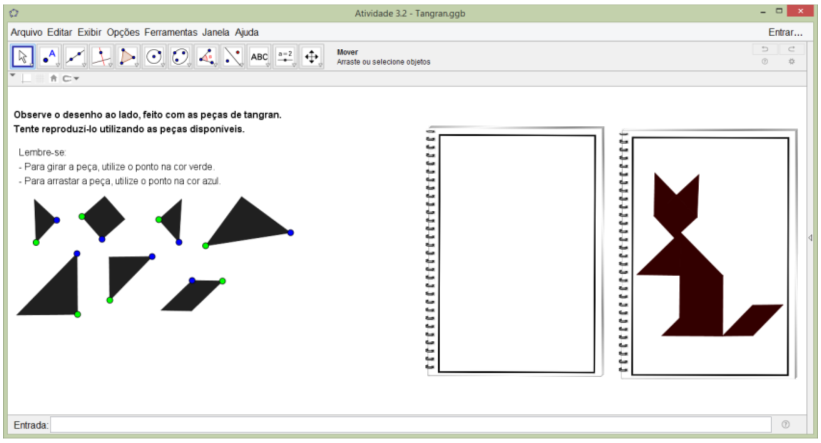
A apreensão perceptiva mobilizaria a identificação de quais formas compunham a figura que seria reproduzida. Atrelada a essa identificação das formas, considerou-se a manifestação de um olhar botanista.

Foi constatado que nessa atividade 3.1 poderia haver a ocorrência de uma desconstrução dimensional. Essa possibilidade foi considerada, pois a desconstrução dimensional de duas dimensões para uma dimensão (2D➔1D) ou de duas dimensões para uma dimensão e para a dimensão zero (2D➔1D➔0D) poderia se manifestar em virtude da disponibilização de segmentos de reta e pontos para a reprodução da figura inicial.

A outra atividade, denominada de atividade 3.2 – Tangram, foi elaborada para que os sujeitos, por meio do arrastamento das peças do Tangram elaborado no GeoGebra, tentassem reproduzir um determinado desenho.

Na Figura 16, a seguir, é mostrada a atividade 3.2 - Tangram após a alteração:

Figura 16 - Atividade 3.2 - Tangram



Fonte: A autora

De acordo com análise preliminar, a atividade 3.2 mobilizaria as apreensões perceptiva e operatória, porque os sujeitos precisariam identificar formatos do desenho, além de precisarem decompô-lo em subfiguras. Os tipos de modificações seriam a mereológica e posicional, em que os sujeitos precisariam decompor o desenho em subfiguras e por meio do arrastamento das peças dos Tangran, ou melhor, da modificação posicional dessas peças, deveriam reproduzi-lo. O olhar requerido para essa atividade foi o botanista, pois para a resolução dessa atividade era necessário o reconhecimento dos formatos que compunham o desenho, sem a necessidade de propriedades geométricas.

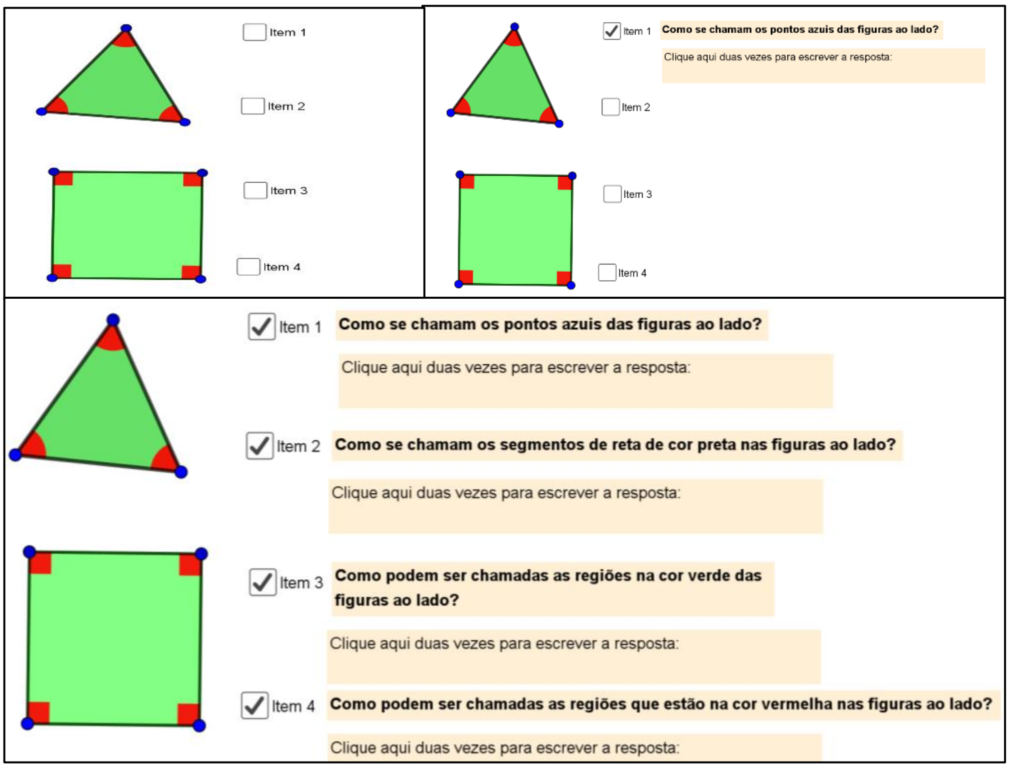
Atividades 4.0, 4.1 e 4.2 – Os polígonos: seus elementos e classificação, polígonos regulares e não regulares

Esse grupo contendo três atividades tinha o propósito de permitir que os alunos, além de conferir quais principais elementos que formam um polígono, diferenciassem os polígonos regulares dos polígonos não regulares. Outro propósito era proporcionar uma compreensão da classificação e nomenclatura de alguns polígonos. Esses propósitos foram considerados por servirem de embasamento para as atividades da segunda etapa da oficina em que se trabalharia com a geometria espacial, especificamente, com os poliedros.

A atividade 4.0 solicitava respostas escritas na interface do GeoGebra sobre quais elementos compunham um polígono. Ao clicar em cada item, uma questão aparecia na tela do GeoGebra.

A Figura 17, a seguir, mostra uma sequência de como foi composta essa atividade:

Figura 17 - Atividade 4.0 elementos de um polígono



Fonte: A autora

Para responder cada um dos itens, os sujeitos precisavam clicar com o *mouse* duas vezes sobre o quadro na cor salmão, para que uma caixa de texto fosse exibida. A mensagem *clique duas vezes para escrever a resposta* era apagada e substituída pela resposta.

O item 1 da atividade 4.0 perguntava que nome era dado para os pontos na cor azul dos polígonos. O item 2 questionava que nome era atribuído para os segmentos na cor preta que compunham os polígonos. O item 3 questionava como poderiam ser chamadas as regiões na cor verde dos polígonos. O item 4 indagava como se chamavam as regiões na cor vermelha dos polígonos.

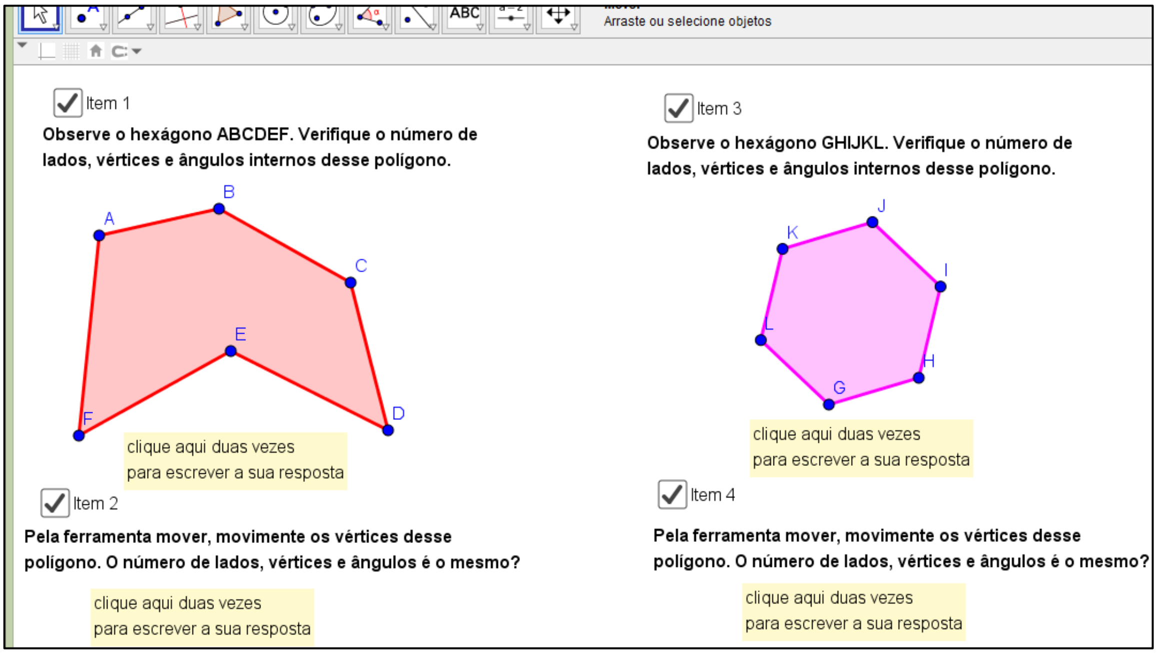
Por meio dessa atividade, foi considerado que as apreensões perceptiva e discursiva seriam mobilizadas. A apreensão discursiva por meio dos enunciados de cada item, em que os sujeitos eram direcionados a focalizarem determinados elementos dos polígonos. A apreensão perceptiva manifestada pela identificação dos elementos que compunham cada polígono. Devido a atividade 4.0 exigir a identificação de certos elementos de um polígono, o olhar requerido nessa atividade seria o botanista.

Outra constatação a respeito dessa atividade é a desconstrução dimensional, que, embora atrelada somente ao reconhecimento dos elementos de um polígono, se fez presente. Justifica-se quando, por exemplo, em um dos itens se questionou sobre que nome era atribuído aos segmentos de reta que compunham os polígonos, em que uma desconstrução de duas dimensões para uma dimensão (2D➔1D) é solicitada.

A atividade 4.1 – quantos vértices, lados e ângulos, ao ser aberta pelos sujeitos, trazia a possibilidade para clicar em 4 itens. Ao selecionar cada item, partes da atividade eram exibidas.

A seguir, pela Figura 18, essa atividade é apresentada:

Figura 18 - Atividade 4.1 - quantos lados, vértices e ângulos?



Fonte: A autora

Os itens 1 e 2 da atividade 4.1 focalizavam um hexágono irregular, enquanto que os itens 3 e 4 diziam respeito a um hexágono regular. Essa atividade foi elaborada a fim de proporcionar compreensão de que a quantidade de lados, vértices e ângulos é o que origina a nomenclatura dos polígonos. Após essa atividade, a pesquisadora apresentou outros polígonos para complementar e explicar essa particularidade em relação à nomenclatura.

Para a atividade 4.1, seriam necessárias as apreensões perceptiva, discursiva e operatória. A apreensão perceptiva para a identificação dos formatos e características de cada hexágono. A apreensão discursiva para o direcionamento do que se solicitava para essa atividade. A apreensão operatória com modificação ótica, se manifestaria nos itens 2 e 4, pois era requerido que os sujeitos movimentassem os vértices dos hexágonos a fim de observarem características de cada um dos hexágonos.

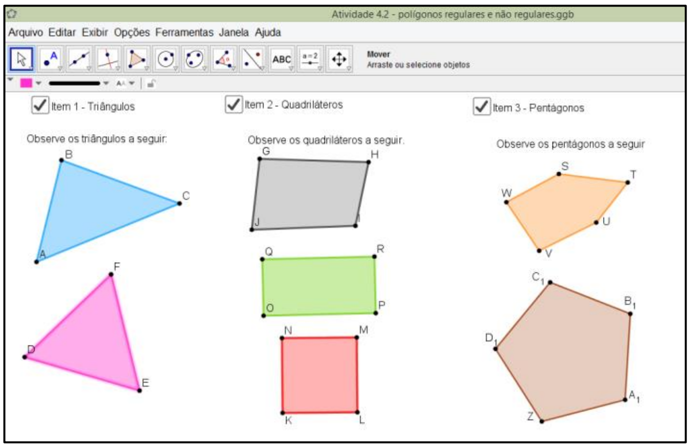
Foi compreendido que, em virtude da observação do número de lados, vértices ou ângulos serem critério para a nomenclatura dos polígonos, o olhar que se manifestaria seria o botanista, ao ser exigido o reconhecimento desse critério.

A desconstrução dimensional foi também mobilizada de 2D➔1D➔0D➔2D, pois se apresentavam dois hexágonos; em seguida, se questionava a quantidade de lados e vértices, e, por fim, a quantidade de ângulos em cada um deles.

A atividade 4.2 – polígonos regulares e não regulares, apresentava na interface do GeoGebra três itens. O primeiro item exibia dois triângulos, o segundo item exibia três quadriláteros e o terceiro item, dois pentágonos.

Na Figura 19, a seguir, é mostrada a interface do GeoGebra com essa atividade.

Figura 19 - Atividade 4.2 polígonos regulares e não regulares



Fonte: A autora

No caderno entregue, os sujeitos recebiam instruções para medir tanto os lados quanto os ângulos em cada um dos itens por meio das ferramentas do GeoGebra. Em cada grupo de polígonos medidos, eram solicitadas respostas escritas sobre a observação de características e diferenças observadas em relação às medidas dos lados e ângulos, após a movimentação de cada polígono. Por fim, foi questionado sobre quais figuras tratavam-se de polígonos regulares e quais características esses polígonos possuíam.

Por meio da atividade 4.2, poderiam ser mobilizadas em maior ou menor grau todas as apreensões. A apreensão sequencial se manifestaria no seguimento do passo-a-passo para o trabalho com as ferramentas de medição do GeoGebra. A apreensão perceptiva para a identificação dos formatos das figuras e a apreensão discursiva que direcionava o que se observaria em cada item da atividade. A apreensão operatória com modificação ótica, no momento que os sujeitos teriam que movimentar as figuras para observarem o que aconteceria com as medidas dos lados e dos ângulos.

Em relação aos olhares, se compreendeu que o do construtor poderia ser solicitado. Em virtude da verificação de propriedades implícitas que poderiam ser percebidas no momento em que os sujeitos efetuassem as medidas tanto dos lados quanto dos ângulos e tivessem de movimentar cada polígono. Dentre os polígonos contidos na atividade 4.1, em cada item era apresentado um polígono regular. O item 1 com um triângulo equilátero, o item 2 com um quadrado e o no item 3 um pentágono regular.

A desconstrução dimensional estaria presente ao solicitar a medida dos lados dos polígonos. Assim, de duas dimensões que consistem cada polígono, direcionar-se-ia os olhares para a dimensão um em relação à medida dos lados (2D➔1D).

Após a análise preliminar das atividades da primeira etapa da oficina, foi estabelecido um quadro síntese adaptado de Scheifer (2017).

Quadro 5 - Categorias para Análise Cognitiva das atividades propostas na primeira etapa da oficina: hipóteses

Indicador da Atividade Cognitiva	Índices		1.0	2.0	3.0	3.1	3.2	4.0	4.1	4.2
Configuração Global (variáveis qualitativas)	Desconstrução Dimensional			X		X		X	X	X
Evolução dos olhares	Olhar icônico	Botanista	X		X	X	X	X	X	
		Agrimensor								
	Olhar não icônico	Construtor		X						X
		Inventor			X					
Apreensão dos registros figurais	Perceptiva			X		X	X	X	X	X
	Operatória	Modificação Mereológica				X	X			
		Modificação Ótica		X					X	X
		Modificação Posicional			X	X	X			
	Discursiva		X	X	X			X	X	X
	Sequencial		X	X						X

Fonte: Adaptado de Scheifer (2017)

Por meio do Quadro 5, foi possível sistematizar as possibilidades relativas a uma das atividades elaboradas em relação aos aspectos cognitivos.

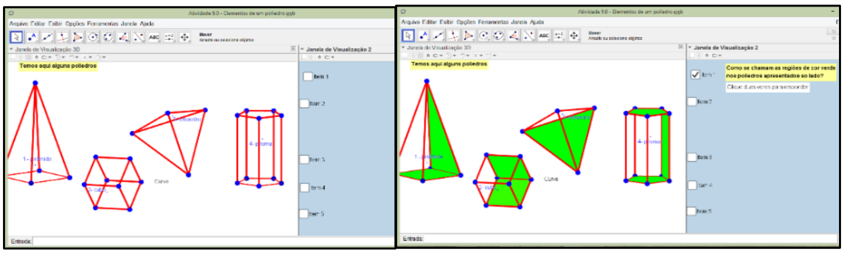
A seguir, é apresentada a análise preliminar das atividades elaboradas para a segunda etapa da oficina.

4.3.3.1.2 Atividades da segunda etapa da oficina

Atividades 5.0, 5.1 e 5.2– Elementos e características dos poliedros

A primeira atividade em que se trabalhou com a Geometria Espacial continha 4 diferentes poliedros. Alguns deles eram regulares e outros não. Na interface do GeoGebra, ao clicarem em cada item, os sujeitos precisavam responder aos questionamentos. Na figura 20, a seguir, a interface dessa atividade é apresentada:

Figura 20 - Atividade 5.0 da segunda etapa da Oficina



Fonte: A autora

Ao clicar no item 1 da atividade 5.0 apresentada na Figura 20, se questionava sobre qual nome era atribuído para os elementos que ficavam na cor verde nos poliedros apresentados. Na sequência dos itens, se questionava o nome dado às linhas vermelhas e aos pontos na cor azul. Outra pergunta feita foi a respeito do formato das faces de cada poliedro.

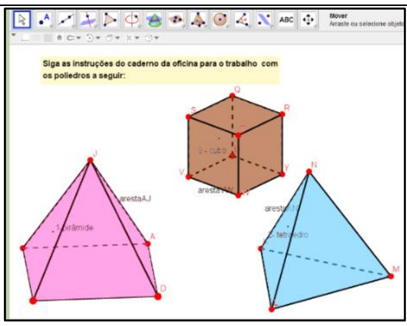
Por meio dessa atividade a apreensão perceptiva e discursiva poderiam ser mobilizadas. A apreensão discursiva por meio dos enunciados da atividade, que indicava o nome de cada poliedro e também direcionava a apreensão perceptiva que se mobilizaria por meio da observação dos poliedros. Além dessas apreensões, a apreensão operatória com modificação ótica também poderia ser requisitada, pois, os sujeitos poderiam movimentar tanto os vértices quanto a tela para melhor observarem os poliedros.

Nessa atividade, compreendeu-se que a desconstrução dimensional de 3D➔ 2D➔1D➔0D estaria presente no momento em que se solicitasse a observância tanto das faces (em 2D) quanto das arestas (em 1D) e também dos vértices (0D). Nessas atividades, o olhar predominante seria o do botanista.

A atividade 5.2 apresentava, na interface do GeoGebra, dois poliedros regulares (hexaedro e tetraedro) e um poliedro não regular (pirâmide de base quadrada). Por meio de instruções contidas no caderno de atividades, os alunos precisavam complementar as construções e responder alguns questionamentos, como, por exemplo, sobre o número de faces que se encontravam para formar a aresta ou sobre o número de arestas que se encontravam em determinado vértice.

O Quadro 6, a seguir, mostra a atividade 5.1, sua interface no GeoGebra, juntamente com as instruções contidas no caderno entregue aos alunos.

Quadro 6 - Atividade 5.2 tetraedro, pirâmide e cubo

<table>
<tr><td colspan="2">Interface da atividade no GeoGebra</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Instruções dadas via material impresso</td></tr>
<tr><td>1- Pinte de verde, as faces que se encontram na aresta AJ da pirâmide.
2- Pinte de amarelo, as faces que se encontram na aresta KN do tetraedro.
3- Pinte de azul, as faces que se encontram na aresta VW do cubo.

Quantas faces você pintou:

Na pirâmide: ____ No tetraedro: ____ No cubo:_____

Responda as questões a seguir:
A- Como é formada a aresta de um poliedro?
____
B-Qual elemento do poliedro está diretamente relacionado com a aresta?
____

Agora siga as instruções:

1- Escolha uma cor de sua preferência, e pinte todas as arestas que se encontram no vértice J da pirâmide.
Quantas arestas você pintou no vértice J da pirâmide? _____</td><td>Escolha uma cor de sua preferência, e pinte todas as arestas que se encontram no vértice N do tetraedro.

Quantas arestas você pintou no vértice N do tetraedro? _____

O número de arestas que se encontram nos demais vértices do tetraedro é o mesmo que do vértice N?

____

Escolha uma cor de sua preferência, e pinte todas as arestas que se encontram no vértice Y do cubo.

Quantas arestas você pintou no vértice Y do cubo? _____

O número de arestas que se encontram nos demais vértices do cubo é o mesmo que do vértice Y?

____
<hr>Agora, responda as seguintes questões:</td></tr>
</table>

A - O número de arestas que se encontram nos demais vértices da pirâmide é o mesmo que do vértice J?	A- Como é formado o vértice de um poliedro? ______________________________________ B-Qual elemento do poliedro está diretamente relacionado com ele? ______________________________________ C – Há algum poliedro regular nessa atividade?

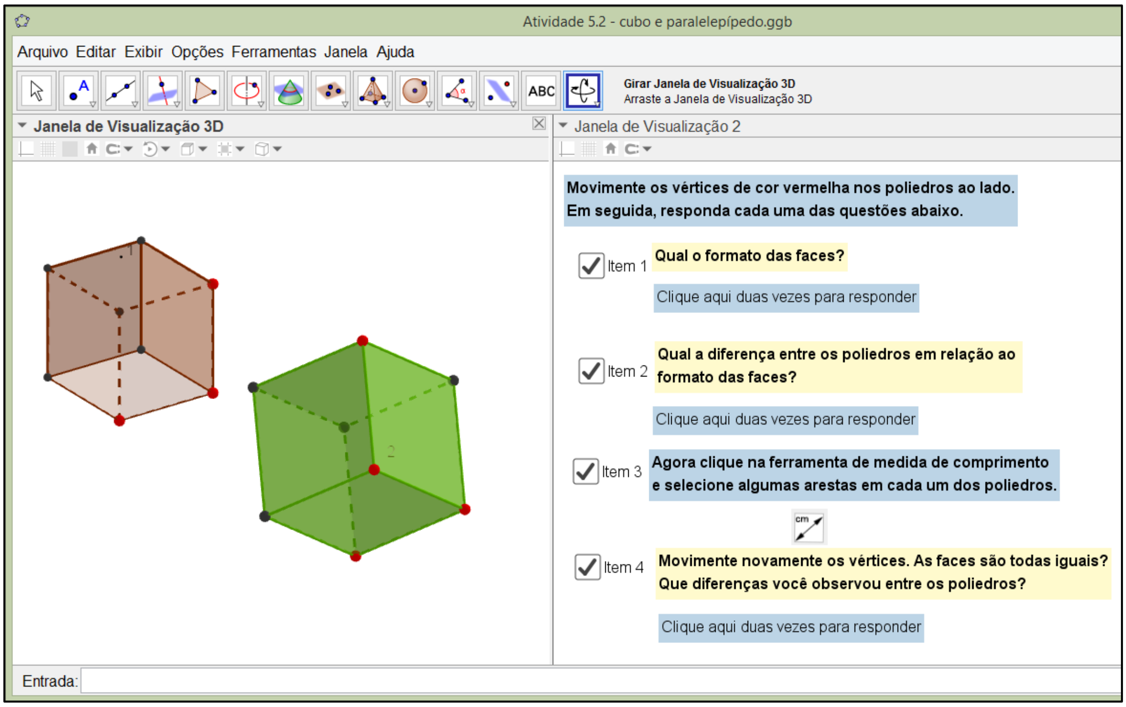
Fonte: A autora

Por meio dessa atividade, as 4 apreensões estariam presentes. A apreensão perceptiva para a verificação de características dos poliedros apresentados. A apreensão discursiva para conduzir a realização do exercício, aliada à apreensão sequencial, pois os alunos precisariam seguir um passo-a-passo para complementar as construções, pintando de outras cores determinados elementos dos poliedros. A apreensão operatória com modificação ótica poderia ser requisitada, pois os alunos precisariam movimentar os poliedros para melhor realizarem as atividades.

Em relação aos olhares, foi entendido que o botanista estaria presente devido à atividade estar focalizada na identificação de características dos poliedros, como o número de faces articuladas em determinadas arestas dos poliedros. Ao voltar o olhar para o número de faces, entendeu-se que a desconstrução dimensional também seria mobilizada. Em virtude de se solicitarem observações em elementos de dimensões inferiores aos poliedros representados na interface do GeoGebra.

A outra atividade, número 5.2, continha um cubo e um paralelepípedo, seguida de um quadro com opções para clicar em 4 itens. Cada item continha questionamentos ou instruções que conduziriam observações frente aos poliedros apresentados. Por meio da figura a seguir, essa atividade é apresentada:

Figura 21 - Atividade 5.2 - cubo e paralelepípedo



Fonte: A autora

Essa atividade poderia mobilizar as 4 apreensões. Ao trabalhar com movimentação dos vértices dos poliedros, a apreensão operatória com modificação ótica estaria presente. A apreensão perceptiva e discursiva para o estabelecimento de conjecturas em relação aos questionamentos feitos.

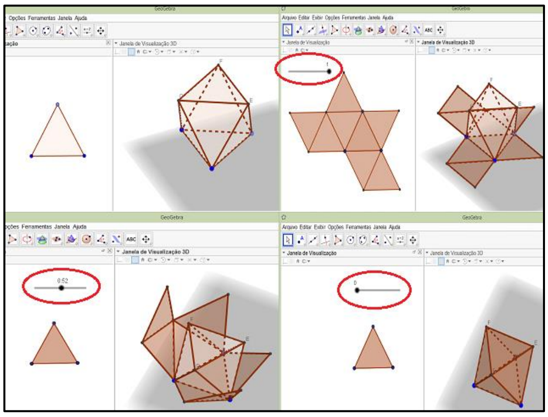
A percepção traria à tona um olhar botanista que diferenciaria o poliedro regular do não regular. Ao se questionar sobre as faces e vértices, uma desconstrução de 3D➔2D➔0D seria também mobilizada.

Atividades 6.0 - Poliedros regulares e a Relação de Euler

A atividade 6.0 tratava-se da construção dos cinco poliedros regulares (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro) no GeoGebra. Cada poliedro seria construído e salvo em arquivos separados. Para a realização dessa atividade, uma tabela precisaria ser preenchida indicando o número de faces, vértices e arestas de cada um dos poliedros e também qual o formato das faces de cada um deles. Além disso, foi proposta para essa atividade a utilização da ferramenta de planificação do GeoGebra para que auxiliasse os alunos em suas conjecturas.

Na Figura 22, a seguir, uma pequena sequência da construção de um dos poliedros regulares é apresentada. A ferramenta controle deslizante está circulada em vermelho. Ao movimentá-la, o poliedro ficava planificado ou poderia ser reconstruído.

Figura 22 - Atividade 6.0 - construção dos poliedros regulares



Fonte: A autora

Nessa atividade, as apreensões perceptiva, sequencial e operatória seriam requisitadas. A apreensão sequencial seria necessária para que, por meio das instruções contidas no caderno da oficina, fosse possível a construção de cada poliedro regular. A apreensão operatória com modificação mereológica e/ou ótica também poderia ser manifestada. A modificação mereológica no momento em que se movimentasse o controle deslizante, em que poderiam ser verificadas subfiguras que constituem cada poliedro. A modificação ótica se manifestaria no momento em que a movimentação dos vértices do poliedro ou mesmo da janela de visualização fossem efetuadas, de modo a mudar o poliedro de posição e de tamanho, para observação e contagem das faces, arestas e vértices.

A apreensão perceptiva também seria mobilizada seguida da manifestação do olhar construtor. Esse olhar justifica-se devido à necessidade de reconhecimento das propriedades que se mantêm, mesmo com o movimento do poliedro regular construído. A apreensão perceptiva essencial para a verificação tanto dos formatos que constituíam cada face dos poliedros quanto da quantidade de vértices, arestas e faces. Ao solicitar a quantidade desses elementos a desconstrução dimensional de 3D➔2D➔1D➔0D estaria presente nessa atividade.

Ainda em relação à atividade 6.0, alguns questionamentos, em que as respostas por escrito seriam solicitadas, foram realizados. Esses questionamentos incluiriam: a explicação de como teria sido realizada a contagem das faces, arestas e vértices; a percepção ou não de algum tipo de regularidade quanto às quantidades de faces, vértices e arestas obtidas; e, a solicitação de que se efetuasse a soma dos vértices e faces de cada poliedro e se comparasse com o número de arestas.

Após a realização dessa atividade, a Relação de Euler seria apresentada, juntamente com a explicação de suas particularidades.

A partir da verificação preliminar das atividades da segunda etapa da oficina, foi estabelecido outro quadro síntese, exibido a seguir:

Quadro 7 - Categorias para Análise Cognitiva das atividades propostas na segunda etapa da oficina

Indicador da Atividade Cognitiva	Índices		5.0	5.1	5.2	6.0
Configuração Global (variáveis qualitativas)	Desconstrução Dimensional		X		X	
Evolução dos olhares	Olhar icônico	Botanista	X	X	X	
		Agrimensor				
	Olhar não icônico	Construtor				X
		Inventor				
Apreensão dos registros figurais	Perceptiva		X	X	X	X
	Operatória	Modificação Mereológica				X
		Modificação Ótica		X	X	X
		Modificação Posicional				
	Discursiva		X	X	X	X
	Sequencial			X	X	X

Fonte: Adaptado de Scheifer (2017)

Outra possibilidade verificada no quadro de Scheifer (2017) foi a respeito da articulação entre as apreensões. Conforme Duval (1997, *apud* MORETTI; BRANDT, 2015) destaca: a figura geométrica é resultado da apreensão perceptiva e discursiva; visualização quando se trata das apreensões perceptiva e operatória; construção geométrica em que as apreensões perceptiva, discursiva e sequencial estão articuladas; e, heurística e demonstração em que a conexão é entre as apreensões discursiva e operatória. A articulação das apreensões foi proposta na etapa final da interpretação dos dados obtidos.

4.3.3.2 Interpretação dos resultados: descrição analítica e interpretações inferenciais

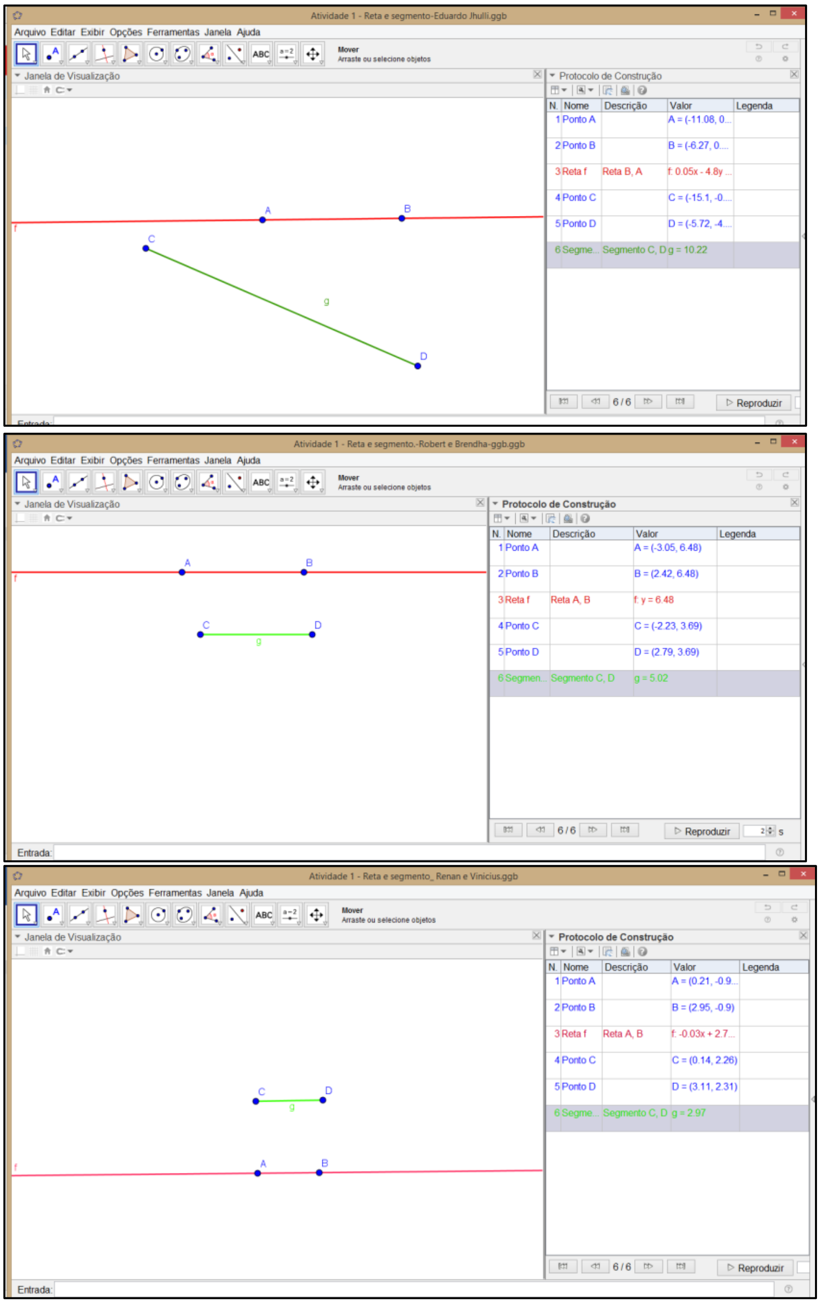
Na fase de interpretação e inferências da análise de conteúdo, segundo Bardin (2016, p. 132), "o analista, tendo à sua disposição resultados significativos e fiéis, pode então propor inferências e adiantar interpretações a propósito dos objetivos previstos – ou que digam respeito a outras descobertas inesperadas.”. De posse dos dados empíricos e com base na análise preliminar feita sobre cada atividade, foi possível estabelecer a interpretação sobre as atividades cognitivas mobilizadas a partir das respostas dos sujeitos. Nesses apontamentos, serão apresentadas as análises de todas as atividades da oficina.

Análise da atividade 1.0

A atividade 1.0 contou com a presença de todos os sujeitos, tanto do primeiro grupo, quanto do segundo grupo. Nessa atividade, foi proposta a construção de uma reta e de um segmento de reta a partir de instruções dadas. Pela análise preliminar, era esperado que, a partir das instruções de construção, a apreensão sequencial seria mobilizada. Foram consultados os protocolos de construção em que se constatou que todas as duplas obtiveram êxito ao construir tanto a reta quanto o segmento de reta. Desse modo, a apreensão sequencial foi inerente à realização da atividade 1.0.

Na Figura 23, os protocolos de construção de 3 duplas são exibidos para ilustrar o passo-a-passo seguido para a construção da reta e do segmento de reta.

Figura 23 - Protocolos de construção dos sujeitos B2, B5 e B7



Fonte: A autora

Os protocolos de construção do Geogebra mostraram a realização de seis passos para a construção da reta e do segmento de reta. Nos dois primeiros passos, os sujeitos criaram dois pontos. No terceiro passo a reta foi construída. No quarto e quinto passo, outros dois pontos foram construídos; e, por fim, no sexto passo, o segmento de reta foi criado. Pelo protocolo de construção foi possível constatar que as ferramentas utilizadas pelos sujeitos foram as indicadas pela atividade.

A partir da construção de uma reta e de um segmento de reta, alguns questionamentos foram realizados, em que as respostas foram dadas de maneira escrita[5] pelos sujeitos. Essas questões eram referentes a características observadas a partir do movimento tanto da reta quanto do segmento de reta.

O Quadro 8, a seguir, mostra a análise das respostas mais frequentes, dadas pelos grupos, sobre as características observadas na reta e no segmento de reta a partir do movimento:

Quadro 8 - Quadro analítico das respostas do G1 e G2 sobre características observadas na reta e no segmento de reta

Questões elaboradas	**Respostas apresentadas**	**Duplas**	**D.D.[6]**	**Apreensões[7]**						**Olhares[8]**			
				P.	**D.**	**S.**	**O.**			**B.**	**A.**	**C.**	**I.**
							Mer.	**Otc.**	**Pos.**				
Que característica você observou na reta? Explique.	A reta é infinita.	A1, A2, A4, A5, B1, B3, B4 e B5		X	X					X			
	A reta liga os pontos A e B	A3, A7, A9 e B2	X	X	X					X			
	A reta se movimenta e se modifica	B6, B7		X	X				X	X			
Que característica você observou no Segmento de Reta? Explique.	O segmento de reta possui início e fim	A1, A2, A4, A5, A6, A9, B1, B3, B4, B5 e B7	X	X	X					X			
	O segmento de reta liga os pontos E F	A3, A7 e B2	X	X	X					X			
	O segmento de reta se modifica	A8 e B6		X	X			X	X	X			

Fonte: A autora

A similitude de respostas permitiu a elaboração de três grupos de respostas para cada questão, indicadas no Quadro 8, anterior. No grupo de respostas, *a reta se movimenta e se modifica*, em que as duplas B6 e B7 foram caracterizadas, por escreverem suas respostas com a menção do movimento, se compreendeu que as apreensões perceptiva e operatória com modificação posicional se sobressaíram. Para Duval (2012b), a modificação posicional consiste em rotacionar e/ou deslocar uma figura em relação ao seu ambiente fronto paralelo. Por meio

---

5 As respostas escritas dos alunos serão transcritas no corpo do texto e estarão entre aspas e em itálico. Os grupos de respostas frequentes, serão transcritos no texto somente em itálico.

6 *D. D*. Desconstrução Dimensional.

7 Os nomes das apreensões foram abreviados para facilitar a disposição dos dados: P refere-se à apreensão perceptiva, D à apreensão discursiva, O para apreensão operatória e S para a apreensão sequencial. As modificações, referentes à apreensão operatória também foram abreviadas, de modo que *Mer* refere-se à modificação mereológica, *Otc* modificação ótica e *Pos*. para modificação posicional.

8 Do mesmo modo os nomes dos olhares também foram abreviados: *B* para olhar botanista, *A* para olhar agrimensor, *C* para olhar construtor e *I* para olhar inventor.

da ferramenta mover do GeoGebra, era possível deslocar a reta construída e estabelecer conjecturas a respeito. Embora as duplas não tenham detalhado quais modificações observaram ao movimentarem a reta, infere-se poderia se tratar da modificação em relação ao deslocamento da reta.

No grupo de respostas sobre o segmento de reta, em que *o segmento de reta se modifica* foi acrescentado no quadro de análise, além da modificação posicional, a modificação ótica. Segundo Duval (2012b), a modificação ótica é aquela em que há a variação do tamanho, mas com a conservação da forma. O segmento de reta, por meio da ferramenta mover, poderia ter seu tamanho alterado sem descaracterizá-lo quanto à sua forma. O que possivelmente foi percebido pelas duplas A8 e B6. Por exemplo, B6 respondeu que o segmento de reta "*toda vez que eu movo, o número muda de acordo com que eu mexo".* A palavra *número* dada na resposta dessa dupla possivelmente seja a respeito da medida do segmento de reta.

Outra atividade cognitiva presente nos grupos de respostas, *a reta liga os pontos A e B, o segmento de reta possui início e fim* e *o segmento de reta liga os pontos E F* indicaram a presença da desconstrução dimensional. Embora a análise preliminar da atividade 1.0 não mencionasse a presença dessa atividade cognitiva, as respostas dadas pelas duplas A3 e A7, por exemplo, de que "*A reta liga os pontos A e B*", ou então, "*que os pontos que se ligam e formam a reta*", reforçaram a inferência de que a desconstrução dimensional esteve presente.

No grupo de respostas, *a reta não tem início nem fim* algumas duplas acrescentaram características singulares. Por exemplo, a dupla B4 quando menciona que a reta "*Não tem início e nem fim, ela não é torta*", outra resposta dada por outra dupla, B5, de que "*a reta não tem nem início e nem fim, as cores, as espessuras".* Em relação ao segmento de reta, por exemplo, no grupo de respostas: *o segmento de reta liga os pontos E e F,* a dupla A7 escreveu que "*Ele liga o ponto E e F e é inclinado com a coloração azulada*". Por meio de respostas como essas, foi possível inferir que a apreensão perceptiva se impôs efetivamente e que características do ambiente dinâmico podem ter corroborado para respostas como as das duplas B5 e A7, que indicaram a percepção de cores.

A característica dinâmica do GeoGebra, em que os objetos matemáticos podem ser configurados com cores ou espessuras diversas, pode ter sido um atrativo que chamou demasiadamente a atenção dos alunos. Essa constatação precisou ser considerada para que não se sobressaíssem observações que diziam respeito às configurações em detrimento das propriedades matemáticas das figuras construídas no ambiente dinâmico.

Outra constatação que reforçou a presença da desconstrução dimensional diz respeito às respostas dadas sobre o segmento de reta. Foram realizados, ainda nessa atividade 1.0, questionamentos adicionais para o segundo grupo. Esses questionamentos eram se o segmento de reta possuía início e fim e também como se chamavam os pontos que determinavam as suas extremidades. No Quadro 9, a seguir, uma análise das respostas é apresentada.

Quadro 9 - Respostas G2 sobre o segmento de reta

Questões elaboradas	**Respostas apresentadas**	**Duplas**	**D.D.**	**Apreensões**				**Olhares**			
				P	**D**	**O**	**S**	**B**	**A**	**C**	**I**
O segmento de reta possui início e fim?	Sim	B1, B3, B4, B5, B6 e B7	X	X				X			
	Não	B2		X				X			
Como são chamados os pontos que determinam o início e o fim do segmento?	Pontos A e B / C e D	B1, B2, B4, B5	X	X	X			X			
	Pontos inicial e final	B3, B6	X	X	X			X			
	Vértices	B7	X	X	X			X			

Fonte: A autora

Os registros escritos pelas duplas B1, B5 e pelo sujeito B7 que, dentro do grupo de respostas *sim* que o segmento de reta possuía início e fim, relatam que esse objeto matemático *"[...]começa em um ponto e termina em outro*", "*Na primeira ponta é o início e a última o final*" e também *"[...]o início é a letra D e o final é a letra C*". O que também corresponde a uma desconstrução dimensional de 1D→0D, em que do segmento de reta, os olhares se voltaram para os extremos determinados pelos pontos. Ao determinarem como deveriam se chamar os pontos extremos do segmento em duas categorias do Quadro 9, anterior, foi possível estabelecer outra inferência.

A presença das apreensões perceptiva e discursiva nessa atividade foi constatada quando os alunos, ao reconhecerem, determinaram, por meio de uma designação, nomes aos pontos que determinam o início e o fim do segmento de reta. Por exemplo, as duplas B1, B2, B4 e B5 chamaram de A e B ou C e D os pontos das extremidades do segmento de reta. A verificação do olhar botanista na atividade 1.0, qual de acordo com Duval (2005), se refere quando se identificam formatos e características visuais de contorno de um objeto matemático, pôde ser evidenciada e confirmada pelos dados empíricos, por exemplo, a resposta da dupla A2 de que *"[...] a reta não tem fim e só acaba porque não tem mais espaço na tela"*, ou, então ,a dupla B4 quando pontua que o segmento de reta é finito porque *"Ele é um segmento, uma réplica da* *reta, por isso é menor.”.* Aliada ao olhar botanista, se compreende que a apreensão perceptiva esteve fortemente presente em toda essa atividade 1.0.

Análise da atividade 2.0

A análise da atividade 2.0 foi realizada com os dados empíricos somente do grupo 2 por meio de respostas escritas, em virtude de um imprevisto com o primeiro grupo, em que a pesquisadora criou um campo de texto no GeoGebra, pela ferramenta chamada campo de entrada, no qual os alunos poderiam digitar suas respostas. No entanto, ao fazerem isso, as respostas não ficaram salvas. Assumpção (2015, p. 152) constatou o mesmo problema técnico no GeoGebra, que “o arquivo gravado pelos alunos não armazenou as resoluções.”. A pesquisadora explica ainda que o motivo para esse imprevisto está relacionado à não vinculação de comandos para essa ferramenta do GeoGebra.

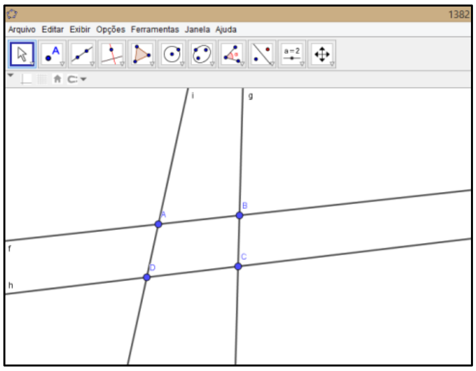
A atividade 2.0 solicitava que os alunos construíssem três exemplos de formas geométricas planas que lhes eram familiares. Das cinco duplas que compunham o segundo grupo, um total de quatro informou ter construído um triângulo, um quadrado e um retângulo. Um dos dois sujeitos que trabalharam individualmente também indicou que construiu os mesmos polígonos.

Nessa atividade, os questionamentos a respeito das construções foram: qual o nome atribuído aos pontos necessários para a construção dos polígonos; como se chamavam os segmentos de reta que formavam os polígonos; se quando o polígono era movimentado ele permaneceria o mesmo polígono; e, como eles ensinariam outro colega a construir os polígonos no GeoGebra.

A última questão em que se pedia para os alunos descreverem um passo-a-passo de construção para outro colega mobilizaria a apreensão sequencial, a qual, segundo Duval (2012b), é solicitada tanto em atividades de construção com também em atividades de descrição de instruções para uma construção. Como se trabalhou no ambiente dinâmico, as instruções fornecidas pelas duplas foram singulares. Por exemplo, a dupla B4 escreveu três instruções: *“1º fazer um ponto inicial, 2º fazer uma reta, 3º fazer outros pontos na sequência, 4º ligar as retas com os pontos”*. É possível inferir que a dupla construiria uma figura geométrica plana por meio de pontos e segmentos de reta, mas pelas instruções dadas talvez não fosse totalmente compreensível.

A Figura 24, a seguir, ilustra o resultado obtido no GeoGebra pela pesquisadora, a partir das instruções dadas por B4:

Figura 24 - Construção realizada pela pesquisadora no GeoGebra a partir das instruções de B4

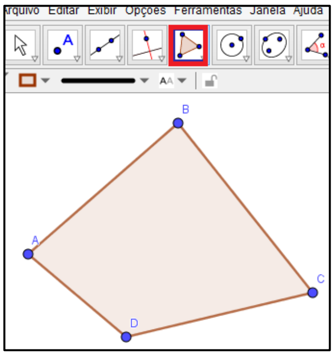


Fonte: A autora

Outras instruções, como da dupla B5: "no bloco da barra de ferramentas, selecionar e então desenhar na janela de visualização o polígono, começando por um vértice e terminando clicando nele.". Novamente, pelas instruções fornecidas, não seria possível saber qual ferramenta se escolheria para tal construção. O sujeito B6, por sua vez, escreveu: "eu falaria para ir no triângulo com três linhas clicar nele e clicar no polígono, daí eu mandava ligar cada ponto com o outro.". O que possivelmente B6 chamou de triângulo com três linhas é a ferramenta polígono que possui como ícone um triângulo.

A Figura 25, a seguir, ilustra o resultado das instruções de B6, ao considerar a ferramenta polígono do GeoGebra, em destaque na cor vermelha:

Figura 25 - Construção realizada pela pesquisadora no GeoGebra a partir das instruções de B6



Fonte: A autora

Quando a atividade se referiu ao seguimento de instruções, os alunos apresentaram compreensões satisfatórias, pois todos conseguiram construir figuras geométricas. Por outro lado, com exceção do sujeito B6, nenhuma das demais instruções foi elaborada de maneira completa pelos sujeitos. Foi possível constatar que a elaboração de instruções de construção no GeoGebra exigiu muito esforço das duplas. Esse resultado indica uma lacuna que se refere à apreensão sequencial, que segundo Duval (2012a) refere-se a instruções ou descrições de construções geométricas.

Em relação aos outros questionamentos realizados nessa atividade, um quadro de análise foi elaborado. A seguir, no Quadro 10, estão contempladas respostas que emergiram em relação às nomenclaturas dadas aos pontos e segmentos de reta que compunham as figuras construídas, bem como sobre o que as duplas observavam a partir do movimento das figuras.

Quadro 10 - Quadro de análise da atividade 2.0

Questões elaboradas	**Respostas apresentadas**	**Duplas**	**D.D.**	**Apreensões**						**Olhares**			
				P.	**D.**	**S.**	**O.**			**B.**	**A.**	**C.**	**I.**
							Mer.	**Otc.**	**Pos.**				
Como se chamam os pontos utilizados para a construção desses polígonos?	Vértices	B1 e B5	X	X	X					X			
	A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K	B2, B4, B6 e B7	X	X	X					X			
	Pontas	B5	X	X	X					X			
Como se chamam os segmentos de reta que formaram os polígonos que você construiu?	Lados	B5, B6 e B7	X	X	X					X			
	Arestas	B3 e B4	X	X	X					X			
	Outras	B1, B2	X	X	X					X			
Quando você movimenta os vértices dos polígonos que você construiu, eles permanecem os mesmos polígonos? Explique	Sim	B3		X	X			X	X	X			
	Não	B1, B2, B5, B7		X	X			X	X	X			
	Sim/não	B6, B4		X	X			X	X	X			

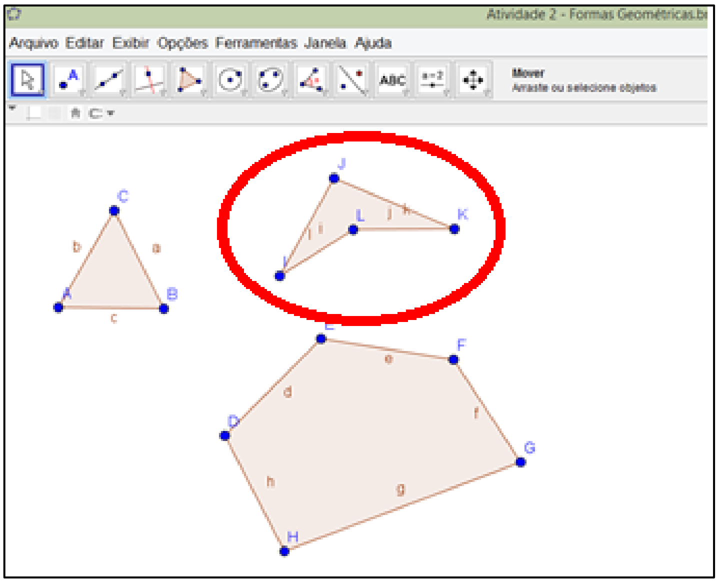
Fonte: A autora

Por meio das questões *como se chamam os pontos utilizados para a construção desse polígono e da questão como se chamam os segmentos de reta que formaram os polígonos que você construiu*, quando as duplas precisaram observar os vértices das figuras construídas, bem como os lados de cada figura, compreendeu-se que a desconstrução dimensional de 2D➔0D➔1D foi mobilizada. A apreensão discursiva se manifestou quando as duplas, guiadas pelos enunciados, precisaram determinar as nomenclaturas dadas aos elementos das figuras construídas.

A apreensão perceptiva esteve presente quando os sujeitos, ao construírem os polígonos, associaram respectivos nomes às figuras. Por exemplo, a construção do triângulo foi unânime em todos os arquivos. Outra constatação, sobre a questão: *Quando você movimenta os vértices dos polígonos que você construiu, eles permanecem os mesmos polígonos*, foi que as duplas que apresentaram as respostas *não* e *sim/não* sabiam que, ao movimentarem construções nomeadas de quadrado e de retângulo, não permaneciam as mesmas. Por exemplo, o sujeito B6, que trabalhou individualmente, informou ter construído um retângulo, e ao movimentá-lo constatou que *"Não, ele vira outra coisa"*.

Na Figura 26, a seguir, em que o quadrilátero chamado por B6 de retângulo foi movimentado e adquiriu um formato não familiar, é possível inferir que a apreensão perceptiva esteve presente porque ele soube que, depois de movimentá-la, não se tratava de um retângulo.

Figura 26 - Atividade 2 sujeito B6



Fonte: A autora

Uma constatação não prevista para a atividade 2.0 foi quanto à verificação dos olhares. A intenção era suscitar o olhar construtor no momento em que algumas das figuras construídas pelos sujeitos fossem movimentadas. Segundo Duval (2005), esse olhar se manifesta quando há o entendimento que uma propriedade geométrica, como a que se trata da construção do quadrado, não é somente de caráter perceptivo.

Quando grande parte dos sujeitos indicou que construíra um quadrado, porém nenhuma das construções conservava as características do quadrado[9], foi possível constatar que respostas como: *"O triangulo sim, o quadrado depende do movimento"* (DUPLA B4) estiveram somente no nível perceptivo. Nenhuma resposta dada pelos sujeitos indicou que compreendiam propriedades para a construção seja do quadrado ou então do retângulo. Por esse motivo, a atividade 2.0 mobilizou somente o olhar botanista, em que características num nível perceptivo foram mais evidenciadas.

---

9 As características principais dessa figura geométrica são: a igual medida para os quatro lados e que a medida de cada um dos quatro ângulos internos seja de 90º.

Análise da atividade 3.0

A atividade 3.0 era composta por diferentes formas geométricas na interface do GeoGebra, as quais os sujeitos precisariam reorganizá-las, segundo critérios próprios, em dois grupos. No primeiro grupo, seriam arrastadas as figuras que eram polígonos, e no segundo grupo, as figuras que não eram polígonos. Em seguida, foi questionado sobre quais características foram atribuídas para os polígonos e quais características foram atribuídas para os não-polígonos[10]. Duas questões adicionais foram acrescentadas na aplicação dessa atividade para o segundo grupo de sujeitos, sobre a possibilidade de transformação de um polígono em não – polígono e vice-versa.

Do primeiro grupo de sujeitos, estiveram presentes 8 das 9 duplas, enquanto que, do segundo grupo de sujeitos, 4 das 5 duplas e os 2 alunos que trabalharam individualmente também participaram da atividade 3.0.

No Quadro 11, a seguir, a análise das respostas sobre as características dos polígonos e dos não-polígonos é apresentada:

Quadro 11 - Atividade 3.0 G1 e G2

Questões elaboradas	Respostas apresentadas	Duplas	D.D.	Apreensões						Olhares			
				P.	D.	S.	O.			B.	A.	C.	I.
							Mer.	Otc.	Pos.				
Quais características possuem as figuras que você separou no grupo dos polígonos?	Fechados por segmentos de reta que não se cruzam	A1, A4, A5, B4, B5	X	X	X				X	X			
	Fechados por segmentos de reta	A2, A6, A7	X	X	X				X	X			
	Outras	A8, A9, B1,B2,B6 e B7		X					X	X			
Quais características você observou no grupo dos não polígonos?	São redondos, alguns não fechados e podem se cruzar	A2, A4, A5 e B5		X	X				X	X			
	Formas arredondadas e podem se cruzar	A1, A7, A9		X	X				X	X			
	Formas arredondadas e não fechadas	A6, B4		X	X				X	X			
	Arredondadas e não tem vértices	A8, B6	X	X	X				X	X			
	Outras	B1 e B7		X					X	X			

Fonte: A autora

[10] É importante ressaltar que a pesquisadora apresentou brevemente as características dos polígonos e dos não polígonos em um encontro anterior. A atividade 3.0 foi utilizada com o intuito de verificar se os alunos lembrariam quais características diferenciavam um polígono de um não polígono.

O Quadro 11, anterior, mostra que, em relação aos polígonos, emergiram três tipos de respostas. A primeira recorrência de respostas chamada de *fechados por segmentos de reta que não se cruzam* representa as conjecturas mais completas dadas pelas duplas. A segunda recorrência, sobre os polígonos de que *são fechados por segmentos de reta*, consistiu de respostas que mencionaram apenas essa característica dos polígonos. Por fim, foi acrescentado o item *outras*, que se refere às respostas dadas que não poderiam ser relacionadas nem entre si nem às respostas anteriores. O mesmo critério foi seguido para as repostas sobre os não polígonos.

Em relação às respostas dadas sobre as características dos não polígonos, foram estabelecidos quatro grupos. O primeiro grupo de respostas, chamado de: *são redondos, alguns não fechados e podem se cruzar*, consistiu das respostas que contemplaram todas essas características. O segundo, terceiro e quarto grupos de respostas sobre os não polígonos contemplou aquelas que mencionaram até duas características diferentes. Foi estabelecido um grupo de respostas chamado de *outras* para contemplar as respostas incoerentes ou incompreensíveis sobre as características dos não polígonos.

A atividade 3.0 estava totalmente relacionada à apreensão perceptiva, bem como ao olhar botanista. Conforme Duval (2012a) explica, a apreensão perceptiva é imediata e automática e o olhar botanista conduz o sujeito a interpretar formatos e reconhecê-los. Quando os sujeitos mencionaram características do que consideravam polígonos ou não polígonos, tanto essa apreensão quanto esse olhar estiveram presentes.

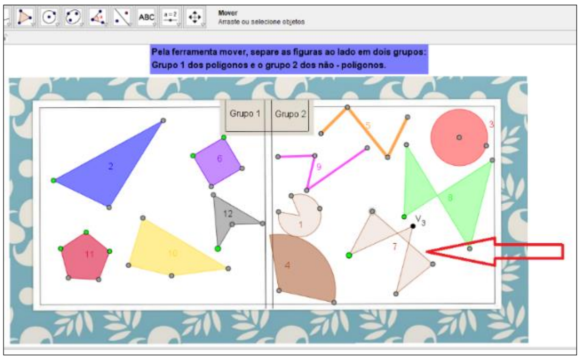
Foi possível constatar que a apreensão discursiva também foi mobilizada, pois, de acordo com Duval (2012a), essa apreensão está relacionada com o que é dito no enunciado em relação a uma figura. No caso da questão 3.0 foi mencionado que se tratavam de não polígonos e polígonos que precisavam ser reorganizados em dois grupos. Todos os sujeitos compreenderam o enunciado da questão e estabeleceram conjecturas sobre critérios considerados para a reorganização das figuras presentes na atividade.

A apreensão operatória com modificação posicional foi contemplada na atividade 3.0, quando os sujeitos precisaram mudar de posição as figuras presentes na atividade. Segundo Duval (2012a), na modificação posicional, não se altera o tamanho e a forma da figura, somente ocorre a variação de orientação. Essa modificação esteve totalmente presente com o primeiro grupo de sujeitos, pois nenhum alterou a forma e o tamanho das figuras. Uma diferença para o segundo grupo de sujeitos em relação a essa modificação foi constatada, ao solicitar a possibilidade de transformação dos polígonos em não polígonos.

Ao solicitar essa ação, se compreendeu que uma modificação mereológica foi mobilizada, embora não prevista na análise preliminar. Segundo Duval (2004, p. 170, tradução nossa), a modificação mereológica compreende “reorganizações perceptivas diferentes que representam algumas (ou todas) as unidades figurais elementares da figura de partida.”. A atividade 3.0 para o segundo grupo de sujeitos solicitou que, em uma das questões, se efetuassem tentativas de modificação nas figuras a fim de transformá-las em formas diferentes.

A Figura 27, a seguir, mostra a modificação mereológica feita pela dupla B5, que está indicada pela flecha vermelha:

Figura 27 - Modificação mereológica feita na Figura 7 pela dupla B5



Fonte: A autora

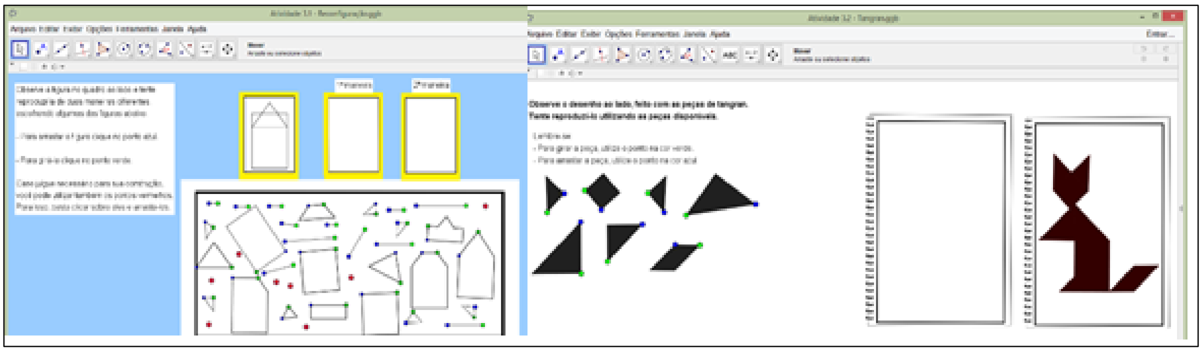
Num primeiro momento, a figura que os sujeitos reconfiguraram se tratava de um polígono, mas com o arrastamento do vértice V3 foi reorganizada e transformada em um não polígono, o que evidenciou a mobilização da apreensão operatória com modificação mereológica. Outra imprevisibilidade foi a desconstrução dimensional. Por meio de respostas em relação aos polígonos em que as duplas A4, A6, A7, respectivamente, conjecturam que dentre características, estão “*Contorno fechado e formado por segmentos de reta e não se cruzam*”, “*São fechados, são formados por segmento de reta*” “*Que os polígonos são fechados por segmentos de retas*”, permitem afirmar que os sujeitos, a partir de figuras de duas dimensões, passam a identificar dimensões inferiores de 2D para 1D.

Análise das atividades 3.1 e 3.2

A atividade 3.1, chamada de Reconfiguração, mostrava na interface do GeoGebra uma figura, a qual precisaria ser reorganizada de duas maneiras diferentes. Essa atividade foi aplicada em conjunto com a atividade 3.2, chamada de Tangran, em que um desenho foi montado a partir das peças desse quebra-cabeças e precisaria ser reproduzido novamente.

Conforme a Figura 28, a seguir, a interface dessas duas atividades é apresentada:

Figura 28 - Interface das atividades 3.1 - Reconfiguração e 3.2 - Tangran



Fonte: A autora

Nessas atividades, foi construído pela pesquisadora figuras geométricas que poderiam ser arrastadas pelo clique nos pontos de cor azul ou giradas a partir do clique nos pontos de cor verde. Do primeiro grupo de alunos que as realizaram, estiveram presentes 8 duplas. Quanto ao segundo grupo, todos estiveram presentes.

Para cada uma dessas atividades, um quadro de análise foi elaborado. Diferentemente dos quadros anteriores, em que se apresentou grupos de respostas escritas dadas pelos alunos, foi realizada uma descrição de como as figuras foram reproduzidas.

O Quadro 12, a seguir, apresenta a análise a partir das maneiras de reprodução da figura da atividade 3.1, chamada de Reconfiguração:

Quadro 12 - Análise da atividade 3.1

Enunciado da Atividade		**Maneiras de reprodução das figuras**		**Duplas**	**D.D.**	**Apreensões**						**Olhares**			
						P.	**D.**	**S.**	**O.**			**B.**	**A.**	**C.**	**I.**
									Mer.	**Otc.**	**Pos.**				
Observe a figura no quadro ao lado e tente reproduzi-la de **duas maneiras** diferentes, escolhendo algumas das figuras abaixo. - Para arrastar a figura clique no ponto azul. - Para girá-la clique no ponto verde. Caso julgue necessário para sua construção, você pode utilizar também os pontos vermelhos. Para isso, basta clicar sobre eles e arrastá-los.	1ª tentativa	Sobreposição de duas ou mais figuras	Correta	A1, A4, A5, A6, A9, B2, B3, B4 e B7	X*[11]	X			X		X	X			
			Incorreta	A2, A8		X			X		X	X			
		Sobreposição e justaposição de duas ou mais figuras	Correta	B1, B5	X*	X			X		X	X			
			Incorreta	A7, B6		X			X		X	X			

11 X* Esse símbolo indica que a desconstrução dimensional foi presente nas reproduções das figuras de algumas duplas. Essas reproduções serão mostradas no decorrer do texto.

Continua

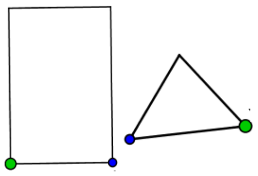
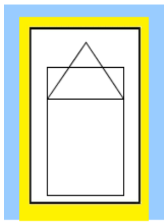
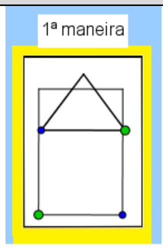
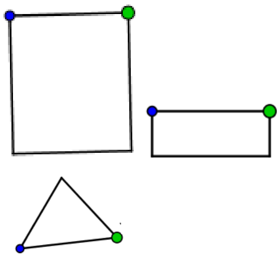
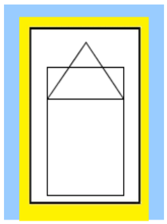
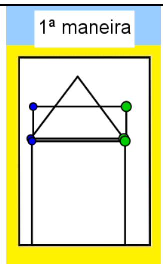
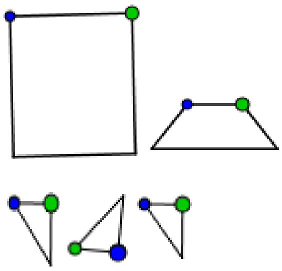
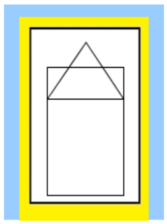
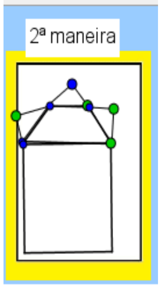
Enunciado da Atividade		Maneiras de reprodução das figuras		Duplas	D.D.	Apreensões						Olhares			
						P.	D.	S.	O.			B.	A.	C.	I.
									Mer.	Otc.	Pos.				
	2ª tentativa	Sobreposição de duas ou mais figuras	Correta	A2, A5, A6, A8, A9, B3, B4	X*	X			X		X	X			
			Incorreta	A8 e B2		X			X		X	X			
		Sobreposição e justaposição de duas ou mais figuras	Correta	A1, B5 e B7		X			X		X	X			
			Incorreta	A4 , A7 e B1	X*	X			X		X	X			
		Justaposição de duas ou mais figuras	Incorreta	B6		X			X		X	X			

Fonte: A autora

No que se refere à primeira tentativa de reprodução da figura, as maneiras que emergiram foram de sobreposição e de sobreposição com justaposição de duas ou mais figuras. Na segunda tentativa, além das maneiras de reprodução contempladas na primeira, uma terceira maneira, de justaposição de duas ou mais figuras, foi apresentada pela dupla B6. Foi constatado que, a partir dos dados empíricos coletados, nem todos os sujeitos conseguiram reproduzir a figura de partida da atividade 3.1. Por esse motivo, no Quadro 12, anterior, foi indicado se a reprodução da figura foi realizada acertadamente ou erroneamente.

A fim de ilustrar o modo como as duplas reproduziram a figura de partida, apresenta-se, no Quadro 13, algumas reproduções feitas pelas duplas, sendo elas, de sobreposição, e sobreposição com justaposição:

Quadro 13 – Algumas reproduções da figura de partida da atividade 3.1

	Duplas	**Formas geométricas utilizadas pela dupla**	**Figura de partida**	**Figura reproduzida**
Sobreposição de duas ou mais figuras	A5			
Sobreposição e justaposição de duas ou mais figuras	B1			
Justaposição de todas as figuras	B6			

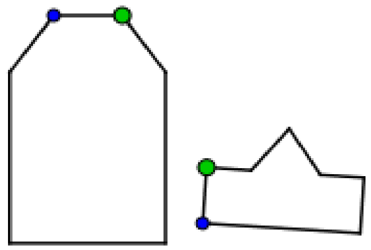
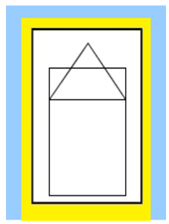
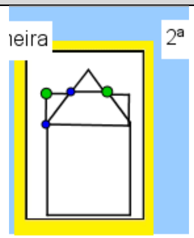
Fonte: A autora

Os diferentes modos apresentados para reproduzir a figura de partida são indicativos de que as atividades mobilizaram a visualização em um nível de reconhecimento das formas com a apreensão perceptiva e o olhar botanista mais evidenciados. Atividades como essa corroboram com Duval (2011, p. 85, grifos do autor) de que "ver uma figura é **reconhecer imediatamente as formas,** isto é, os contornos fechados justapostos, superpostos, separados.". Nessa atividade, em que a apreensão perceptiva e o olhar botanista foram requisitados, os sujeitos precisaram identificar contornos e características da figura de partida para tentar reproduzi-la de dois modos distintos. Aliada à apreensão perceptiva, a apreensão operatória com modificação posicional e mereológica foi mobilizada pela mudança de posição das formas geométricas, bem como da identificação de subfiguras que compunham a figura de partida.

Um aspecto relevante é que algumas duplas consideraram subfiguras não tão comuns a uma percepção imediata da figura de partida, a qual seria de uma sobreposição de um ou dois quadriláteros com um triângulo. Como por exemplo, a dupla B4 identificou, na segunda maneira de reprodução da figura, um hexágono e um heptágono sobrepostos.

O Quadro 14, a seguir, apresenta quais subfiguras a dupla B4 utilizou para reproduzir a figura de partida:

Quadro 14 - Segunda maneira de reconfiguração realizada pela dupla B4 na atividade 3.1

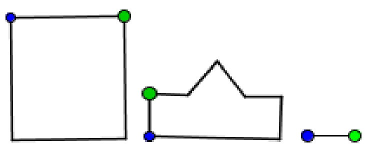
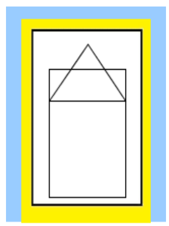
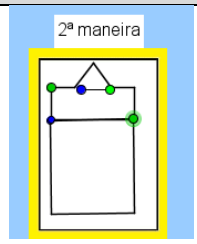
Formas geométricas utilizadas pela dupla B4	Figura de partida	Figura reproduzida por B4
		

Fonte: A autora

Foi constatado que algumas duplas mobilizaram a desconstrução dimensional em suas reproduções. Para Duval (2011, p. 94), a desconstrução dimensional é também “um reflexo espontâneo dos lados traçados”. O que pode ser explicado que, a partir de uma figura de duas dimensões (2D), o reconhecimento dos lados da figura (1D) formados por segmentos de reta representa um indicativo dessa atividade cognitiva. Embora essa atividade cognitiva tenha se manifestado, foi possível observar alguns equívocos cometidos. Por exemplo, a dupla B1 utilizou a justaposição de duas formas geométricas e a sobreposição de um segmento de reta e não observou que a figura obtida estava incompleta.

No Quadro 15, a seguir, são apresentadas as formas geométricas utilizadas pela dupla B1 e como a figura de partida foi obtida na segunda tentativa.

Quadro 15 - Segunda maneira de reconfiguração realizada pela dupla B1 na atividade 3.1

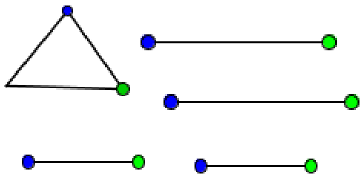
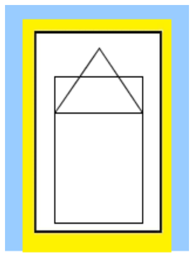
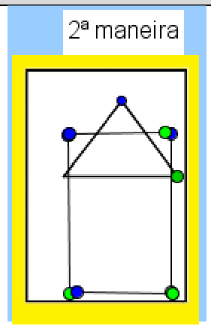
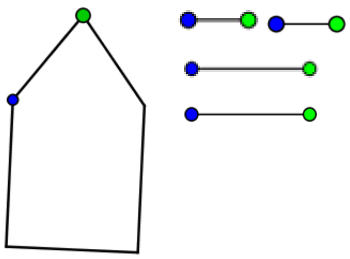
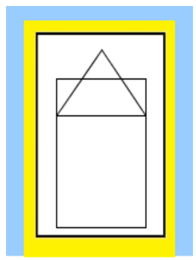
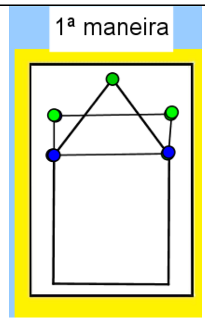
Formas geométricas utilizadas pela dupla B1	Figura de partida	Figura reproduzida por B1
		

Fonte: A autora

Essa dupla B1 não representou de maneira adequada a figura de partida, embora tenha mobilizado uma desconstrução dimensional ao considerar um segmento para a obtenção de um dos contornos da figura. As duplas A2, A4, A5 e B3 também fizeram uso de pelo menos um segmento de reta para a obtenção da figura de partida, o que indicou uma desconstrução dimensional de 2D➔ 1D.

No Quadro 16, a seguir, são apresentadas as reproduções da figura pelas duplas A4 e B3, as quais utilizaram a maior quantidade de segmentos de reta.

Quadro 16 – Atividade 3.1 – algumas reproduções da figura

Dupla	Formas geométricas utilizadas	Figura de partida	Figura reproduzida
B3			
A4			

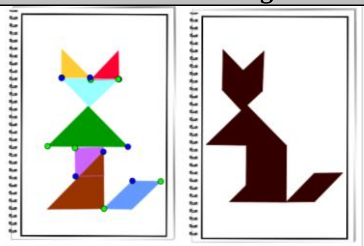
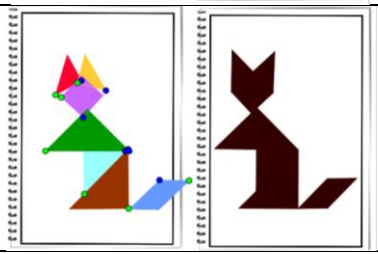
Fonte: A autora

A partir dessa verificação quanto ao uso de segmentos de reta para a reprodução da figura de partida, foi possível corroborar com o que Duval (2011) afirma, que a mudança de uma dimensão a outra é laboriosa, pois contraria a percepção imediata, que é a da dimensão superior.

Para complementar essa atividade 3.1, que implicava na identificação das formas, a atividade 3.2, chamada de Tangram, foi proposta aos dois grupos. Das 8 duplas do primeiro grupo que realizaram a atividade, 6 conseguiram reproduzir de maneira correta o desenho formado pelas peças do Tangram. Outras 2 duplas apresentaram percepções singulares da figura do Tangram, como a sobreposição de peças e a não observância das posições corretas de algumas peças.

No Quadro 17, são mostradas as reproduções da atividade 3.2 feita pelas duas duplas:

Quadro 17 - Reprodução da atividade 3.2 pelas duplas A2 e A8

Sujeitos	Atividade 3.2 Tangran
A2	
A8	

Fonte: A autora

Como é possível verificar no Quadro 17, a dupla A2 reproduziu o desenho desproporcionalmente e também fez uso de sobreposição das peças de cor roxa (um quadrado) e marrom (triângulo). A dupla A8 cometeu um equívoco ao organizar a parte superior do desenho. Embora a atividade tenha sido considerada pelos alunos do primeiro grupo de fácil realização, foi possível verificar que depois de alguns minutos muitos estavam com dificuldades e admitiam que já tinham feito inúmeras tentativas de reprodução do desenho.

Quanto ao segundo grupo de alunos, essa atividade foi modificada. Foram disponibilizadas as peças do Tangram todas na cor preta ao invés de peças coloridas. Participaram dessa atividade cinco duplas. Umas das singularidades que chamou a atenção na atividade do Tangram foi quando a pesquisadora perguntou para a dupla B3 se a atividade tinha sido finalizada, ao que dos alunos respondeu: "*Ah professora, não conseguimos ainda, é muito difícil*". Essa fala foi considerada relevante, pois se pensava que a atividade 3.2 - Tangran não ofereceria dificuldades. Para analisar essa atividade, sob um ponto de vista cognitivo, a composição de um quadro de análise foi necessária, tomando como base o que se previu para essa atividade.

No Quadro 18, a seguir, foram mostradas as maneiras utilizadas pelas duplas para reproduzir o desenho do Tangram, em que as fontes de dados empíricos foram as produções digitais e as anotações da pesquisadora. Algumas produções digitais serão apresentadas no decorrer do texto.

Quadro 18 - Análise cognitiva atividade 3.2 Tangran

<table>
<tr><th rowspan="3">Enunciado da Atividade</th><th rowspan="3">Maneiras de reprodução da figura</th><th rowspan="3">Duplas</th><th rowspan="3">D.D.</th><th colspan="6">Apreensões</th><th colspan="4">Olhares</th></tr>
<tr><th rowspan="2">P.</th><th rowspan="2">D.</th><th rowspan="2">S.</th><th colspan="3">O.</th><th rowspan="2">B.</th><th rowspan="2">A.</th><th rowspan="2">C.</th><th rowspan="2">I.</th></tr>
<tr><th>Mer.</th><th>Otc.</th><th>Pos.</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Observe o desenho ao lado, feito com as peças de Tangram.
Tente reproduzi-lo utilizando as peças coloridas disponíveis.
Lembre-se:
- Para girar a peça, utilize o ponto na cor verde.
- Para arrastar a peça, utilize o ponto na cor azul.</td><td>Sobreposição de duas ou mais figuras</td><td>A2</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Justaposição de duas ou mais figuras</td><td>A1, A4, A5, A6, A7, A8, A9, B1, B2, B3, B4 e B5</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Fonte: A autora

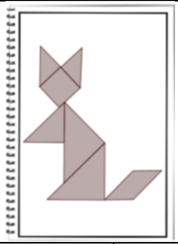
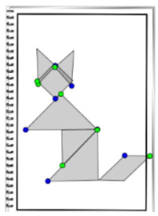
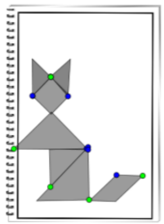
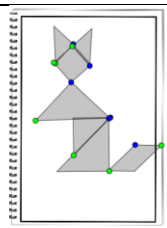
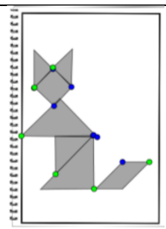
Na análise preliminar, foi compreendido que as apreensões perceptiva e operatória seriam mobilizadas nessa atividade. Quanto às modificações presentes na apreensão operatória, seriam requisitadas as do tipo mereológica e posicional. Estaria presente nessa atividade o olhar botanista, por se tratar de um reconhecimento de formatos para a reprodução do desenho.

De posse dos dados empíricos, foi possível constatar que a apreensão perceptiva foi mobilizada, pois por meio dela foi possível que os sujeitos interpretassem o desenho do Tangran e o reproduzissem. A apreensão operatória com modificação posicional foi necessária, pois os sujeitos precisaram arrastar e girar as figuras de modo a obter a reprodução dos desenhos. A modificação mereológica foi mobilizada para a identificação das subfiguras que formavam o desenho do Tangran. Algumas singularidades sobre o modo como os sujeitos identificaram as subfiguras que compunham o desenho foram obtidas no segundo grupo.

Todos os sujeitos do segundo grupo conseguiram reproduzir o desenho, mas a fim de verificar quais subfiguras foram utilizadas, a pesquisadora optou por descolorir as composições feitas.

No Quadro 19, a seguir, são mostradas as composições feitas pelas duplas B1, B3, B4 e B5 em comparação com o desenho feito pela pesquisadora:

Quadro 19 - Modificação mereológica da atividade 3.2 feita por 4 duplas do segundo grupo

<table>
<tr><th colspan="5">Atividade 3.2 Tangran</th></tr>
<tr><td>Desenho criado na interface do GeoGebra pela pesquisadora</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Como o desenho foi reproduzido pelas duplas</td><th>B1</th><th>B3</th><th>B4</th><th>B5</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Fonte – A autora

A maneira como os sujeitos do Quadro 19, acima, compreenderam o desenho de partida foi diferente em relação ao modo como foram dispostas as subfiguras pela pesquisadora. Em virtude de que o desenho foi apresentado na cor preta e sem os contornos, a reprodução obtida foi a mesma. De acordo com as considerações de Duval (2011, p. 86, grifos do autor), “[...] **existem sempre várias maneiras de reconhecer as formas ou as unidades figurais, mesmo que o fato de reconhecer umas exclui a possibilidade de reconhecer outras.”.** Essas maneiras de ver o desenho do Tangran apresentadas pelas duplas foram singulares e inesperadas.

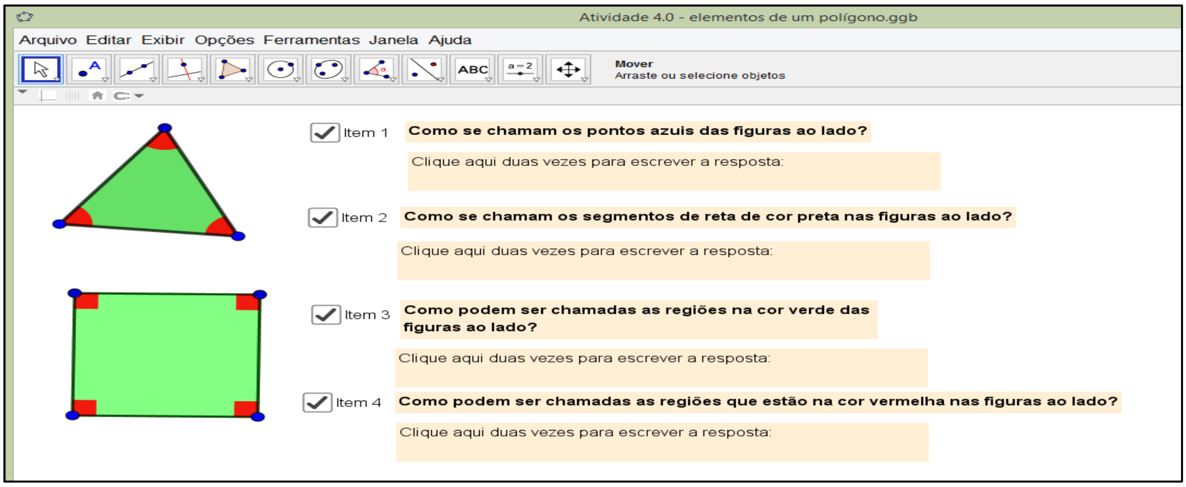
Ao identificar esses modos singulares de ver o desenho do Tangran, se constatou a mobilização do olhar botanista. É justificada a mobilização desse olhar, pois para a reprodução do desenho, foi necessário o reconhecimento das figuras e suas características qualitativas, sem a necessidade de propriedades geométricas para a construção do desenho do Tangram.

Análise da atividade 4.0

A atividade 4.0 foi proposta para verificar se os alunos reconheciam certos componentes dos polígonos, a saber: vértices, lados, superfície interna e ângulos. Para isso, na interface do GeoGebra, 2 polígonos foram apresentados (triângulo e quadrilátero), juntamente com 4 itens que, ao serem clicados, exibiam 4 questões e 1 caixa de texto para digitação das respostas.

A Figura 29, a seguir, apresenta a interface da atividade:

Figura 29 - Atividade 4.0 - elementos de um polígono



Fonte – A autora

Por meio da análise preliminar, foram consideradas necessárias para a realização dessa atividade as apreensões perceptiva e discursiva, seguidas de um olhar botanista. A desconstrução dimensional seria requisitada quando se questionou, por exemplo, que nome era atribuído para os segmentos de reta que formavam os polígonos em que, de duas dimensões, os sujeitos precisariam voltar o olhar para a dimensão um.

Essa atividade foi aplicada para ambos os grupos sem a necessidade de modificações. Do primeiro grupo de alunos, participaram 8 das 9 duplas, enquanto que, do segundo grupo, apenas 1 aluno que compunha a dupla B3 não esteve presente.

No Quadro 20, a seguir, são apresentadas as respostas frequentes com as nomenclaturas dadas pelos alunos a respeito dos elementos dos polígonos, seguida da análise à luz dos subsídios teóricos:

Quadro 20 – Análise da atividade 4.0 - elementos de um polígono

Questões elaboradas	Respostas apresentadas	Duplas	D.D.	Apreensões						Olhares			
				P.	D.	S.	O.			B.	A.	C.	I.
							Mer.	Otc.	Pos.				
Como se chamam os pontos azuis das figuras ao lado?	Vértice	A1, A2, A4, A5, A7, A8, B1, B3, B4, B5 e B7	X	X	X					X			
	Ponto	A9, B2, B6	X	X	X					X			
	Outros	A6		X						X			
Como se chamam os segmentos de cor preta nas figuras ao lado?	Segmento de reta	A1, A2, A4, A6, B1, B2, B6	X	X	X					X			
	Lados	A5, A8, B4, B5, B7	X	X	X					X			
	Outros	A9, B3		X						X			

Continua

Questões elaboradas	Respostas apresentadas	Duplas	D.D.	Apreensões						Olhares			
				P.	D.	S.	O.			B.	A.	C.	I.
							Mer.	Otc.	Pos.				
Como podem ser chamadas as regiões na cor verde?	Área	A1, A2, A4, A5, A6, A7, A8		X	X					X			
	Superfície interna	B4, B5 e B7		X	X					X			
	meio da figura	A9 E B6		X	X					X			
	Outros	B2, B3		X						X			
Como podem ser chamadas as regiões na cor vermelha?	Ângulos	A2, A4, A5, A7, A8, B1, B2 e b3		X	X					X			
	Ângulos internos	A6, B4, B5 e B7		X	X					X			
	Outras	A1, A9 e B6		X						X			

Fonte: A autora

Em relação à primeira questão, as respostas que emergiram foram vértice, ponto e outros. Para a segunda questão, em que se questionou sobre qual nome era atribuído ao elemento de cor preta (lados), as respostas frequentes foram segmentos de reta, lados e outros. Sobre a terceira questão, sobre o nome atribuído ao elemento de cor verde dos polígonos (superfície interna), as respostas mais frequentes foram área, superfície interna, meio da figura e outros. O que despertou atenção foi o fato de os sujeitos A9 e B6 mencionarem o meio da figura como designação para a superfície interna. O meio da figura pode ser encontrado tanto numa figura vazada quanto numa figura geométrica com área.

Sobre a quarta questão, das regiões de cor vermelha (ângulos internos), grande parte dos alunos apresentou como respostas as palavras: ângulos internos ou somente a palavra ângulos. Outras respostas foram dadas, porém, como não puderam ser agrupadas, optou-se por classificá-las como *outras*.

As apreensões perceptiva e discursiva estiveram presentes devido à atividade apresentar uma figura e quatro enunciados. Cada enunciado solicitava o nome dado para um componente dos polígonos. O olhar botanista esteve presente no momento em que foi necessário o reconhecimento dos vértices, lados, superfície interna e ângulos dos polígonos. A desconstrução dimensional foi mobilizada quando se questionou o nome dado aos pontos azuis das figuras, o que implicava numa desconstrução de 2D➔0D, bem como qual era o nome dos segmentos de reta que compunham as figuras, implicando numa desconstrução dimensional de 2D➔1D.

Análise da Atividade 4.1

A atividade 4.1, chamada de quantos lados, vértices e ângulos, foi elaborada para que os alunos, a partir da contagem dos lados, vértices e ângulos de um hexágono regular e de um hexágono não regular, relembrassem o porquê das nomenclaturas dadas aos polígonos. Na interface do GeoGebra foi solicitado que os sujeitos movimentassem os polígonos para verificarem se permaneceriam com o mesmo número de lados, vértices ou ângulos.

Somente o segundo grupo realizou essa atividade, pois com o primeiro grupo foi feita uma tentativa de preenchimento de uma tabela em que se informava o número de lados, vértices e ângulos de um polígono e se solicitava qual nome era atribuído a ele. No entanto, essa atividade com o primeiro grupo não obteve êxito. Uma dificuldade muito grande em relembrar nomenclaturas como heptágono, hexágono ou octógono foi verificada. A partir desse episódio, a elaboração de uma atividade que já partisse do nome do polígono e questionasse a quantidade de lados, vértices e ângulos foi considerada mais adequada. O Quadro 21, a seguir, mostra as respostas obtidas a partir dos questionamentos sobre os hexágonos:

Quadro 21 - Análise da atividade 4.1

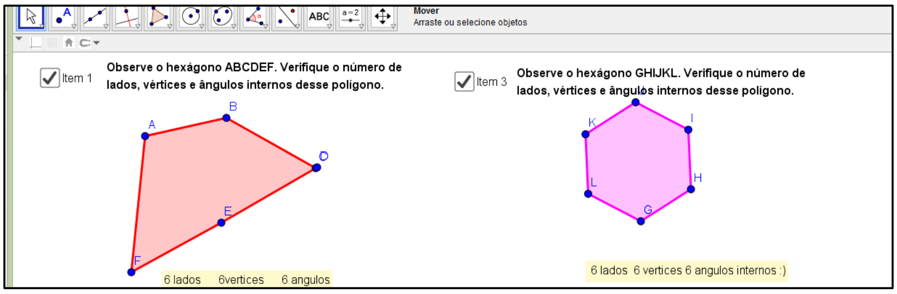
<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="3">Questões elaboradas</th><th colspan="2" rowspan="3">Respostas apresentadas</th><th rowspan="3">Duplas</th><th rowspan="3">D.D.</th><th colspan="6">Apreensões</th><th colspan="4">Olhares</th></tr>
<tr><th rowspan="2">P.</th><th rowspan="2">D.</th><th rowspan="2">S.</th><th colspan="3">O.</th><th rowspan="2">B.</th><th rowspan="2">A.</th><th rowspan="2">C.</th><th rowspan="2">I.</th></tr>
<tr><th>Mer.</th><th>Otc.</th><th>Pos.</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Hexágono Irregular</td><td rowspan="2">Quantos lados, vértices e ângulos?</td><td>Sempre 6</td><td></td><td>B1, B2, B3, B4, B5 e B7</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6 lados, 6 vértices e 5 ângulos</td><td></td><td>B6</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Pela ferramenta mover, movimente os vértices desse polígono. O número de lados, vértices e ângulos é o mesmo?</td><td>Sim</td><td></td><td>B3, B4</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Não</td><td>Os ângulos ficam diferentes</td><td>B1, B6 e B7</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Obtemos outra figura</td><td>B2, B5</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">Hexágono Regular</td><td>Quantos lados, vértices e ângulos?</td><td>Sempre 6</td><td></td><td>B1, B2, B3, B4, B5, B6 e B7</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Pela ferramenta mover, movimente os vértices desse polígono. O número de lados, vértices e ângulos é o mesmo?</td><td rowspan="2">Sim</td><td>A figura gira e permanece a mesma</td><td>B4, B5 e B7</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>B1, B2 e B3</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Não</td><td></td><td>B6</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Fonte: A autora

Das respostas apresentadas, duas duplas ao movimentarem o hexágono irregular conjecturaram que essa figura se transformaria em outra, mas que o hexágono regular mesmo movimentado não mudaria o número de lados, vértices e ângulos internos. Esse imprevisto, em que o hexágono irregular poderia ser transformado em outro polígono, precisou ser explicado ao grupo após todos terem realizado a atividade.

A Figura 30, a seguir, apresenta a resolução da dupla B2 que modificou o hexágono irregular e obteve um pentágono:

Figura 30 - Resolução da atividade 4.1 pela dupla B2



Fonte – A autora

A modificação feita pela dupla B1 no hexágono ABCDEF foi a de arrastar o vértice D sobre o vértice C, em que a figura obtida se tornou um pentágono, o que levantou dúvidas sobre como afirmar qual tipo de modificação esteve presente nessa ação. Ao verificar o suporte teórico, compreendeu-se que a modificação feita na figura foi do tipo ótica, em que Duval (2012b, p. 125) comenta que, ao “aumentá-la, diminuí-la ou deformá-la: esta modificação é uma modificação ótica”. A dupla deformou a figura de partida ao obter um pentágono.

Quanto à modificação feita no hexágono regular por meio do arrastamento de um dos vértices, se compreendeu que duas modificações ocorreram: a modificação ótica e também a modificação posicional. Isso pode ser justificado quando Duval (2012b) explica que a modificação ótica permite aumentar, diminuir ou deformar uma figura e a modificação posicional se desloca ou se rotaciona uma figura. Por meio dos dados empíricos, foi possível constatar essas duas modificações.

Por exemplo, quando a dupla B5 responde, depois de movimentar o hexágono regular, *“a figura gira e permanece a mesma em diferentes tamanhos.”.* Ao girar a figura, se compreendeu que uma rotação foi realizada e que essa é uma característica da modificação posicional. Aliada à rotação, a figura foi alterada em diferentes tamanhos, porém permaneceu a mesma, o que caracterizou uma modificação ótica. Outras respostas, como a do sujeito B7, em que o hexágono *“só gira e não muda o número de lados nem de vértice e nem de ângulos* *internos”*, e também da dupla B4, quando menciona que esse polígono *“fica tão [sic] pequenos que a olho nu não é possível o identificar. Mas o número de pontos e de lados não aumenta.”*, são indicativos de que as modificações realizadas foram tanto ótica quanto posicional. De posse desses dados, é possível caracterizar que o olhar botanista se manifestou pela identificação de características quanto ao número de lados, vértices e ângulos dos hexágonos. Aliada a esse olhar, as apreensões perceptiva e discursiva foram necessárias.

As figuras estavam acompanhadas de discursos que conduziam as observações. A percepção imediata mostrava dois hexágonos. No entanto, pelo movimento dos vértices em que se questionou se os polígonos permaneciam os mesmos, a apreensão operatória com modificação ótica foi requisitada, e como Duval (2004) afirma, essa apreensão neutraliza a apreensão perceptiva imediata de uma figura. Isso foi constatado quando os sujeitos, ao movimentarem o hexágono irregular, puderam transformá-lo em outro tipo de polígono.

Considerou-se pertinente que, para trabalhar com os poliedros, ainda era necessário retomar com os alunos as características e propriedades dos polígonos regulares. Para isso, outra atividade foi elaborada e será analisada.

Análise da Atividade 4.2

A próxima atividade é a 4.2, chamada de polígonos regulares e não regulares, que foi aplicada para os dois grupos sem a necessidade de modificações do primeiro grupo para o segundo grupo. Nessa atividade, eram apresentados três itens na interface do GeoGebra. Ao clicar em cada item, eram exibidos, respectivamente, 2 triângulos, 3 quadriláteros e 2 pentágonos. No caderno da oficina (APÊNDICE A), foram dadas instruções para o uso de ferramentas de medida de comprimento dos lados e também para a medida dos ângulos internos. Foi solicitado ainda que os alunos respondessem, por escrito, no caderno, 8 questões a partir da movimentação dos polígonos. A intenção era possibilitar, por meio da atividade 4.2, que os sujeitos estabelecessem conjecturas a respeito das características dos polígonos regulares, pois por meio de polígonos regulares, as faces dos poliedros regulares são formadas.

Para responder as primeiras três questões, os sujeitos precisaram efetuar a medida dos lados dos polígonos. Essas três questões perguntavam sobre quais diferenças existiam entre as medidas dos lados dos triângulos, quais diferenças existiam entre as medidas dos lados dos quadriláteros e, respectivamente, quais diferenças existiam nas medidas dos lados dos pentágonos.

No Quadro 22, a seguir, a análise referente às três primeiras questões é apresentada:

Quadro 22 - Análise da atividade 4.1: conjecturas sobre a medida de lados

Questões elaboradas	Respostas apresentadas	Duplas	D.D.	Apreensões						Olhares			
				P.	D.	S.	O. Mer.	O. Otc.	O. Pos.	B.	A.	C.	I.
Quais diferenças você percebe entre os triângulos? Que alterações ocorrem nas medidas dos lados dos triângulos?	As medidas mudam, mas o formato é o mesmo.	A1, A7, A8, B1, B4 e B6	X	X	X	X		X	X	X			
	Um dos triângulos tem as medidas dos lados alteradas e o outro não	A4, A5, A6, A9, B2, B3 e B5	X	X	X	X		X	X	X			
	Outros	A2, A3		X		X		X	X	X			
Quais diferenças você percebe entre cada quadrilátero? Que alterações ocorrem nas medidas dos lados dos quadriláteros?	As medidas mudam, mas o formato é o mesmo	A1, A2, A3, A6, A7, A8, A9, B1, B2 e B4	X	X	X	X		X	X	X			
	O primeiro quadrilátero possui medidas diferentes, o segundo quadrilátero possui as medidas dos lados opostos iguais e o terceiro quadrilátero não tem alteração nas medidas	A4, A5, B3, B5 e B7	X	X	X	X		X	X	X			
	Outros	B6		X		X		X	X	X			
Quais diferenças você percebe entre os pentágonos? Que alterações ocorrem nas medidas dos lados dos pentágonos?	As medidas mudam, mas o formato é o mesmo	A1, A2, A7, A8, B2, B4, B6 e B7	X	X	X	X		X	X	X			
	o primeiro pentágono possui medidas diferentes e o segundo as medidas são iguais	A4, A5, A6, B1, B3 e B5	X	X	X	X		X	X	X			
	Outros	A3 e A9		X		X		X	X	X			

Fonte: A autora

O primeiro direcionamento da atividade 4.2 foi que os sujeitos efetuassem as medidas dos lados e movimentassem os polígonos. A pretensão foi a de que visualizassem que, dentre os polígonos, um de cada formato, mesmo quando movimentado os vértices, permanecia com as medidas dos lados todas iguais.

Os grupos de respostas que emergiram referentes a cada polígono apresentado na atividade foram os mesmos. O primeiro grupo, tanto para o triângulo e o quadrado, quanto para o pentágono, foi referente às respostas que indicavam a compreensão de que as medidas dos lados das figuras mudavam quando movimentadas. A dupla A1, por exemplo, foi caracterizada nesse primeiro grupo, pois escreveu *"A[s] medidas dos triângulos mudam toda vez que movemos as figuras. Porque a cada vez que movemos as figuras os lados aumentam ou diminuem mudando assim as medidas."*.

O segundo grupo de respostas contemplou aquelas que mostravam a compreensão de que, dentre as figuras apresentadas, ao serem movimentadas, ao menos uma de cada formato mantinha as mesmas medidas para todos os lados. Por exemplo, a dupla A5 escreveu sobre os quadriláteros: *"O 1º quadrilátero muda totalmente o tamanho de seus segmentos de reta, após o movimento. O 2º muda o tamanho, mas as linhas posicionadas de frente uma com a outra tem a mesma medida. O 3º é um polígono regular, pois seus lados continuam com a mesma medida."*. É possível inferir que essa dupla já reconheceu, dentre os quadriláteros, que um deles era regular, quando escreveu sobre conjecturas referentes ao 3° polígono exibido na tela do GeoGebra.

Por fim, foi estabelecido um terceiro grupo de respostas, chamado de *outras*, o qual contemplou respostas incompreensíveis sem a possibilidade de relação com as categorias anteriores e também as respostas em branco.

Com base no aporte teórico, foram mobilizadas as apreensões sequencial, perceptiva, discursiva e operatória com modificações ótica e posicional. Por meio da verificação dos arquivos digitais, se observou que a sequência de instruções para obtenção das medidas dos lados foi seguida corretamente pelas duplas, caracterizando a apreensão sequencial. As apreensões perceptiva e discursiva foram necessárias, pois, pela apreensão perceptiva, o reconhecimento das figuras era imediato e a presença de um discurso guiava o olhar sobre as figuras. Em relação ao olhar, compreendeu-se que as questões iniciais dessa atividade mobilizaram o olhar botanista.

A apreensão operatória com modificação ótica foi estabelecida por meio do movimento dos polígonos. A dupla A8, caracterizada no grupo de respostas: *as medidas mudam, mas o formato é o mesmo*, menciona sobre os quadriláteros que: *"A numeração mudou, mas não houve mudança no formato*". Por meio de uma inferência quando a dupla escreveu a palavra "numeração", é possível dizer que se referem às medidas dos lados dos quadriláteros. A dupla A1 conjecturou que as medidas dos triângulos mudavam: "*Porque a cada vez que movemos as figuras os lados aumentam ou diminuem mudando assim as medidas."* Tanto as respostas de A1 quanto de A8 indicaram que a modificação ótica esteve presente. De acordo com Duval (2012b), nesse tipo de modificação a figura é aumentada, diminuída ou deformada. No entanto, é possível inferir que, além da modificação ótica, outro tipo de modificação se fez presente com o uso do GeoGebra.

A figura que recebe uma modificação posicional, segundo Duval (2012a, p. 126), "pode-se deslocá-la ou rotacioná-la em relação às referências do campo onde ela se destaca". Quando a dupla B5 (grifos nossos) escreveu sobre o quadrado que *"[...] no KLMN ao movimentar um* *vértice* ***a figura gira*** *e a medida fica igual"*, compreendeu-se que a modificação posicional também esteve presente, porém na análise preliminar não estava prevista.

Para que fosse retomado o conceito de polígono regular, ainda era necessária a medida dos ângulos, pois, segundo Souza e Pataro (2015, p. 180), polígonos regulares "todos os lados têm comprimentos iguais e todos os ângulos possuem a mesma medida.".

Para obter a medida dos ângulos, uma sequência de três passos precisava ser seguida para cada um dos polígonos. O Quadro 23, a seguir, apresenta um exemplo com as instruções para a medida dos ângulos de um dos triângulos:

Quadro 23 - Passo-a-passo para a obtenção da medida dos ângulos na atividade 4.2

1- Selecione a ferramenta Ângulo  e **no sentido horário** clique sobre os vértices A, B e C do triângulo da cor azul . O GeoGebra exibirá a medida do ângulo $A\hat{B}C$.
2- Proceda da mesma maneira para **todos os ângulos internos** de cada um dos triângulos.
3- Clique na ferramenta Mover 

Fonte: A autora

Depois de movimentarem os polígonos, outras três questões foram respondidas. Essas questões eram sobre quais diferenças tinham observado em relação às medidas dos ângulos nos triângulos, quadriláteros e pentágonos.

O Quadro 24, a seguir, apresenta a análise das respostas dadas pelos sujeitos diante dessas três questões:

Quadro 24 - Análise da atividade 4.2

Questões elaboradas	Respostas apresentadas	Duplas	D.D.	Apreensões						Olhares			
				P.	D.	S.	O.			B.	A.	C.	I.
							Mer.	Otc.	Pos.				
Quais alterações você percebeu em relação aos ângulos em cada um dos triângulos?	A medida dos ângulos de um dos triângulos não muda	A1, A5, A8, A9, B1, B4 e B5		X	X	X		X	X	X			
	As medidas dos ângulos mudam	A2, A6, B2, B6 e B7		X	X	X		X	X	X			
	Outras	A3, A4 e A7		X		X		X	X	X			
Quais alterações você percebeu em relação aos ângulos em cada um dos quadriláteros?	A medida dos ângulos de dois quadriláteros não muda	A1, A5, A9, B1, B3, B4, B5		X	X	X		X	X	X		X*	
	As medidas dos ângulos mudam	A2, A6, A7, A8 e B7		X	X	X		X	X	X			
	Outras	A3, A4, B2 e B6		X		X		X	X	X			

Continua

Questões elaboradas	Respostas apresentadas	Duplas	D.D.	Apreensões						Olhares			
				P.	D.	S.	O.			B.	A.	C.	I.
Quais alterações você percebeu em relação aos ângulos em cada um dos pentágonos?	A medida dos ângulos de um dos pentágonos não muda	A1, A5, A9, B1, B3 e B5		X	X	X		X	X	X			
	As medidas dos ângulos mudam	A2, A6, A8, B2, B6 e B7		X	X	X		X	X	X			
	Outras	A3, A4, A7 e B4		X		X		X	X	X			

Fonte: A autora

De posse dos dados empíricos sobre a observação da medida dos ângulos após a movimentação dos vértices, para cada polígono, três grupos de respostas foram frequentes. O primeiro grupo de repostas diz respeito a conjecturas corretas das duplas de que, dentre os polígonos, pelo menos um possuía ângulos iguais. Por exemplo, a resposta da dupla A9 sobre a medida dos ângulos dos triângulos, em que “*O primeiro triângulo mexe o ângulo e o segundo não mexe.”,* indicou uma percepção coerente.

Sobre os pentágonos, a dupla A1 escreveu “*Eles [são] como os triângulos, os ângulos também aumentam e diminuem, e um dos pentágonos as medidas dos ângulos não mudam”.* A dupla A1, quando respondeu que observou que um dos pentágonos presentes na atividade não tinha alterações na medida dos ângulos, foi caracterizada também no grupo de respostas: *a medida dos ângulos de um dos pentágonos não muda.*

O segundo grupo de respostas: *as medidas dos ângulos mudam,* foi comum a todos os polígonos, compreendeu respostas que indicaram somente a mudança dos ângulos sem mencionar que, dentre eles, pelo menos um não tinha as medidas dos ângulos alteradas. A dupla A2, por exemplo, escreveu para todas as questões elaboradas que os ângulos dos polígonos “*mudam de acordo com a movimentação”.* Outra dupla, A6, também escreveu a mesma resposta para todas as questões, de que “*os ângulos mudam sua numeração de graus.”.*

Os questionamentos feitos, a partir da medida dos ângulos dos polígonos contidos nessa atividade, contemplaram as apreensões perceptiva, discursiva, sequencial e operatória, com modificações ótica e posicional, bem como o olhar botanista. Exceto para uma dupla A5, que escreveu a respeito dos triângulos que o *“Triângulo Rosa - É um polígono regular, seus ângulos não mudam”.* A partir dessa resposta, é possível inferir que um olhar construtor esteve presente, pois houve o reconhecimento de uma das propriedades de construção dos polígonos regulares.

Nessa parte da atividade, compreendeu-se que não foi mobilizada a desconstrução dimensional, pois se trabalhou unicamente na dimensão 2.

Para finalizar a atividade 4.2, foram propostas duas questões com respostas escritas sobre quais polígonos eram regulares e quais características lhes poderiam ser atribuídas.

Por meio do Quadro 25, a análise é apresentada:

Quadro 25 - Análise atividade 4.2 - quais polígonos são regulares?

Questões elaboradas		Respostas apresentadas	Duplas	D.D.	Apreensões						Olhares			
					P.	D.	S.	O.			B.	A.	C.	I.
								Mer.	Otc.	Pos.				
Escreva quais são os polígonos regulares contidos nessa atividade e quais características que eles possuem.	Item 1 – triângulos	Triângulo DEF	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, B2, B3, B4, B5, B6, B7		X	X	X		X	X	X			
		Triângulo ABC e DEF	B1		X	X	X		X	X	X			
	Item 2 - Quadriláteros	Quadrado KLMN	A4, A5, A7, A8, A9, B2, B3, B4, B5, B6, B7		X	X	X		X	X	X			
		Retângulo OPQR e quadrado KLMN	A1, A2, A3, A6 e B1		X	X	X		X	X	X			
	Item 3 – Pentágonos	Pentágono A1B1C1D1Z	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, B2, B3, B4, B5, B6		X	X	X		X	X	X			
		Pentágono WSTUV	B1 e B7		X	X	X		X	X	X			
	Características dos polígonos regulares	Todos os lados e ângulos iguais	A3, A4, A5, A7, B5 e B6	X	X	X	X		X	X			X	
		Todos os ângulos iguais	A1, A6, A9, B4 e B7		X	X	X		X	X				
		Todos os lados iguais	A2, A8 e B3	X	X	X	X		X	X				
		Outras	B1 e B2		X	X	X		X	X				

Fonte – A autora

Os polígonos regulares contidos na atividade 4.2 eram três, um de cada formato: o triângulo DEF, o quadrado KLMN e o pentágono $A_1B_1C_1D_1Z$. Em relação aos triângulos, emergiram dois grupos de respostas. O primeiro grupo de respostas, *Triângulo DEF*, contemplou respostas que mencionaram corretamente o polígono regular do primeiro item da atividade. O segundo grupo, chamado de *Triângulo ABC e DEF*, foi elencado a partir de respostas que julgaram que os dois triângulos eram regulares.

De maneira semelhante, quanto aos três quadriláteros presentes no item 2 da atividade, a partir das respostas, foram emergentes dois grupos de respostas frequentes. O primeiro contemplou aquelas que elegeram corretamente o *Quadrado KLMN* como sendo o quadrilátero regular, enquanto que o segundo grupo de repostas indicou tanto o *Retângulo OPQR* quanto ao *quadrado KLMN* como polígonos regulares.

Quanto ao pentágono regular, a maioria das duplas o apontou de maneira correta, caracterizando o primeiro grupo de respostas, chamado de *Pentágono* $A_1B_1C_1D_1Z$. Um segundo grupo de respostas elegeu o pentágono WSTUV não regular como sendo regular.

Além desses grupos de respostas apresentados sobre quais polígonos eram regulares, a respeito das características que esses polígonos possuíam, outras quatro recorrências de respostas emergiram. A primeira, chamada de *Todos os lados e ângulos iguais*, contemplou as respostas corretas dadas pelas duplas, ao mencionarem as duas características dos polígonos regulares. A segunda e terceira recorrência de respostas, respectivamente, contemplaram respostas que mencionaram ou somente que os ângulos eram idênticos ou então que os lados eram iguais quando se tratava dos polígonos regulares.

Em relação à segunda recorrência, chamada no Quadro 25, anterior de: *todos os ângulos iguais*, as duplas A1, A3 e A6 conjecturaram, respectivamente, que: *"os polígonos regulares não há alterações nos ângulos", "que o triângulo só chega a 60° o quadrilátero a 90° e o pentágono a 108° mais só soube isso por causa da ferramenta ângulo"* e que "*eles não mudam seus ângulos"*. Despertou interesse nas respostas dadas por essas duplas, pois, quando se referiram aos quadriláteros, mencionaram que eram regulares tanto o quadrado quanto o retângulo.

Pela observação dos arquivos digitais, constatou-se que as duplas conseguiram estabelecer as medidas dos lados em todos os polígonos contidos na atividade. No entanto, quando não mencionaram que os lados de um polígono regular também possuem a mesma medida, caracterizaram um indicativo de que não houve a desconstrução dimensional de 2D➔1D.

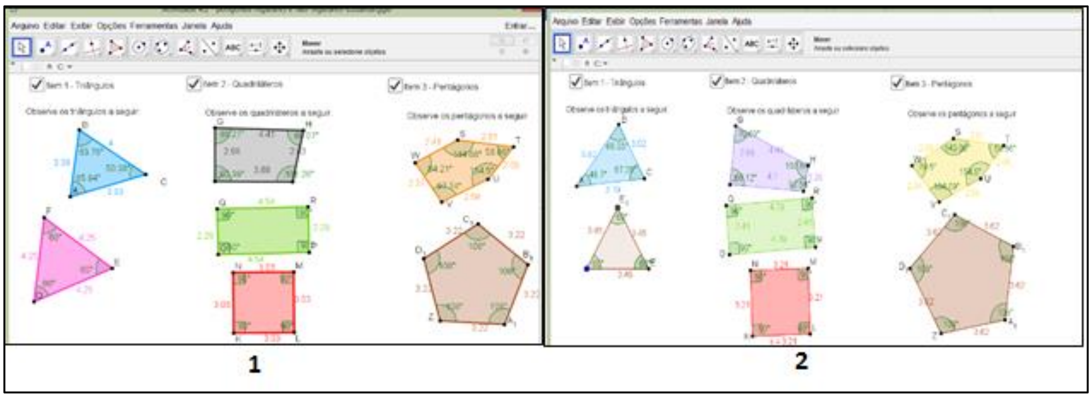
Segundo Duval (2011), a mudança de uma dimensão a outra é contrária ao reconhecimento imediato das formas, porque a unidade figural da dimensão superior se impõe de modo imediato à percepção. Os sujeitos que consideraram somente características dos polígonos regulares, referente aos ângulos iguais, permaneceram na dimensão dois, sem voltar o olhar para os lados dos polígonos que estão na dimensão inferior. Isso levou ao equívoco de mencionarem o retângulo como um polígono regular. Não obstante este fato, a resposta, por exemplo, da dupla A3 que *"só soube isso por causa da ferramenta ângulo*" denotou a potencialidade do uso do software GeoGebra. Por meio do movimento das figuras, a percepção é aguçada, facilitando conjecturas.

Por fim, um quarto grupo de respostas, chamado de *outras*, contemplou respostas incoerentes, a exemplo do caso do sujeito B1, que citou como característica dos polígonos regulares *"que eles não se cruzam".* A resposta dada por B1 de que os polígonos vistos na atividade 4.2 não se cruzam foi uma das características trabalhadas em aulas anteriores da oficina sobre as diferenças entre um polígono e um não polígono.

A atividade 4.2, sob um ponto de vista cognitivo, mobilizou as quatro apreensões. A apreensão perceptiva e discursiva para interpretação dos polígonos presentes na interface do GeoGebra. Conforme Duval (2004, p. 168, tradução nossa) menciona: "não há desenho sem legenda.". Nessa atividade, as figuras receberam uma designação por meio de letras maiúsculas, e, por meio dos enunciados, eram fornecidos os dados para serem considerados sobre as figuras. A apreensão sequencial que implicava o seguimento correto das instruções para a obtenção das medidas dos ângulos também foi mobilizada.

A Figura 31, a seguir, apresenta a interface da atividade realizada pela dupla A7 (indicada pelo número 1) e pelo sujeito B7 (indicada pelo número 2):

Figura 31 - Interface da atividade 4.2 realizada por A7 e B7



Fonte: A autora

A Figura 31 mostra que os sujeitos obtiveram êxito ao efetuar as medidas tanto dos lados quanto dos ângulos, o que significa que compreenderam as instruções para tal feito. A partir da obtenção das medidas dos lados, os alunos movimentavam os polígonos e respondiam as questões por escrito. A mesma sequência foi realizada após medirem os ângulos internos, os polígonos foram movimentados e, em seguida, algumas questões foram respondidas. Essa ação em que os sujeitos movimentaram os vértices dos polígonos implicou numa apreensão operatória com modificações ótica e posicional.

Quanto ao olhar construtor, previsto para essa atividade, é possível inferir que a mobilização foi realizada de modo parcial entre os sujeitos, pois quando questionado sobre as características dos polígonos regulares, por meio desse olhar, a tomada de consciência sobre as propriedades geométricas que envolviam os polígonos regulares seriam verificadas não apenas pela característica perceptiva. O instrumento, que no caso foi o GeoGebra, permitiu, a partir da obtenção tanto da medida dos lados quanto dos ângulos dos polígonos e, em especial, pelo movimento dos vértices, a verificação que, dentre os polígonos exibidos na tela, alguns permaneciam com as medidas dos lados e dos ângulos iguais.

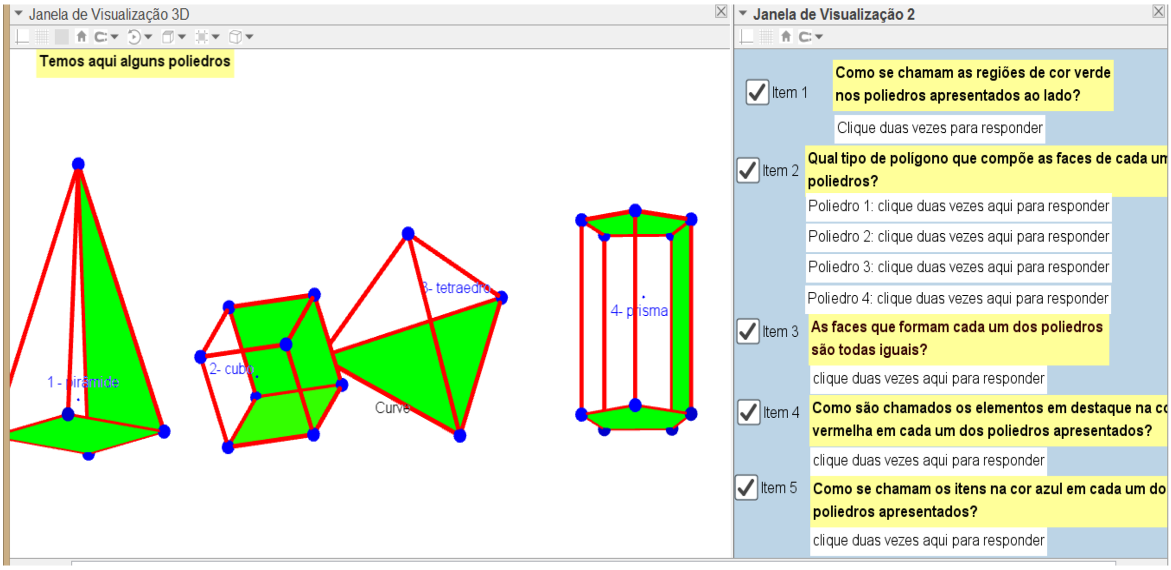
Outras respostas trazidas à baila a respeito das características dos polígonos regulares confirmaram o pressuposto da análise preliminar sobre a desconstrução dimensional que poderia estar presente nessa atividade. Quando se questionou sobre as características dos polígonos regulares, as duplas A5, A7, B5 responderam, respectivamente, que os polígonos regulares possuem *"ângulos do mesmo tamanho, segmentos de reta do mesmo tamanho"*, *"todos tem lados do mesmo tamanho (os lados) e o mesmo tamanho de ângulos*", "*tem as medidas dos lados e dos ângulos iguais*", e, por fim, um sujeito que realizou as atividades sozinho, B7 escreveu que *"os lados são todos iguais e os ângulos internos".* Ao mencionarem sobre as características observadas nos lados dos polígonos, compreendeu-se que uma desconstrução dimensional de 2D➔1D foi estabelecida, pois dos polígonos (2D) os olhares se voltaram para os lados (1D).

Análise da Atividade 5.0

A atividade 5.0 exibia na interface do GeoGebra quatro poliedros, sendo dois regulares (hexaedro e tetraedro) e dois não regulares (prisma de base pentagonal e pirâmide de base quadrada). Os alunos precisavam clicar em quatro itens. Em cada um desses itens, era exibida uma pergunta. Era questionado a respeito do formato das faces, bem como dos nomes dos elementos em destaque pelas cores: verde, vermelho e azul, que correspondiam às faces, arestas e vértices.

Os alunos digitavam suas respostas na própria tela do GeoGebra, ao clicarem duas vezes na caixa de texto na cor bege. Na Figura 32, a seguir, a interface dessa atividade é mostrada:

Figura 32 - Atividade 5.0 - Elementos de um poliedro



Fonte: A Autora

Exceto pela dupla B3 do grupo 2, que não esteve presente, todos os demais alunos realizaram essa atividade. Para cada questão, foram agrupadas as respostas frequentes. Em seguida, com base no aporte teórico, foram indicadas as atividades cognitivas presentes em cada categoria.

O Quadro 26, a seguir, ilustra a análise feita dessa atividade:

Quadro 26 - Análise da atividade 5.0

Questões elaboradas		**Respostas apresentadas**	**Duplas**	**D.D.**	**Apreensões**						**Olhares**			
					P.	**D.**	**S.**	**O.**			**B.**	**A.**	**C.**	**I.**
								Mer.	**Otc.**	**Pos.**				
Como se chamam as regiões de cor verde nos poliedros apresentados (faces)		Faces	A4, A5, A9, B1, B2, B4, B5 B6 e B7	X	X	X					X			
		Aresta	A3, A4	X	X	X					X			
		Base	A1, A2, A6	X	X	X					X			
Qual tipo de polígono que compõe as faces de cada um dos poliedros?	Pirâmide de Base quadrangular	Triângulo e quadrado	A2, A5, A8, B1, B5, B6 e B7	X	X	X					X			
		Triângulo	A1, A4, A6 e B7	X	X	X					X			
		Quadrado	A5	X	X	X					X			
		Vértice	A3, A7, B2	X	X						X			
	hexaedro	Quadrado	A1, A2, A4, A5, A6, A8, A9, B1, B2, B4, B5, B6 e B7	X	X	X					X			
		Pontos	A3 e A7	X	X	X					X			
	tetraedro	Triângulos	A1, A2, A4, A5, A6, A8, A9, B1, B2, B4, B5, B6 e B7	X	X	X					X			
		Arestas	A3, A7	X	X						X			
	prisma de base pentagonal	Retângulo e Pentágono	A2, A5, B1, B5, B6 e B7	X	X	X					X			
		Retângulo	A1, A4 e B4	X	X	X					X			
		Faces	A3 e A7	X	X	X					X			
		Outros	A6, A8 e B2		X						X			
As faces que formam cada um dos poliedros são todas iguais?		Não	A2, A3, A4, A7, A9, B1, B2, B4, B5, B6 e B7	X	X	X					X			
		Sim	A1, A5, A6 e A8	X	X	X					X			
Como são chamados os elementos em destaque na cor vermelha em cada um dos poliedros apresentados? (arestas)		Arestas	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A8, A9, B4, B5 e B7	X	X	X					X			
		Retas	B1 e B6	X	X	X					X			
		Outros	A7 e B2		X						X			
Como se chamam os elementos na cor azul em cada um dos poliedros apresentados? (vértices)		Vértice	A1, A2, A4, A5, A8, A9, B1, B2, B4, B5, B7	X	X	X					X			
		Pontos	A3, A6 e A7	X	X	X					X			
		Outros	B6		X						X			

Fonte: A autora

A primeira questão dessa atividade era sobre como se chamavam as regiões de cor verde nos poliedros. As respostas frequentes foram: *faces, aresta* e *base*. As duplas que apresentaram a resposta *faces* acertaram a questão. Isso correspondeu a um número significativo de sujeitos. Uma recorrência que chamou atenção foi que três duplas apresentaram como resposta a palavra *base*. Uma possível evidência para essa resposta pode ter sido que, ao clicarem no item 1, nem todas as faces dos poliedros apareciam pintadas na cor verde, o que pode ter confundido os alunos.

Na segunda questão dessa atividade, os alunos precisavam indicar qual era o formato das faces de cada um dos poliedros exibidos na tela do GeoGebra. Para o primeiro poliedro, a pirâmide de base quadrada, emergiram as respostas: *Triângulo e quadrado, Triângulo, Quadrado* e *vértices*. O primeiro grupo de respostas, *triângulo e quadrado*, contemplou as respostas corretas, enquanto que as respostas *triângulo* e *quadrado* indicaram reconhecimento de somente um dos formatos dos polígonos que compõem a pirâmide de base quadrada. Foram apresentadas também como resposta que se tratariam dos *vértices*, o que indicou uma falta de compreensão dessas duplas a respeito do que foi solicitado na segunda questão.

Para o segundo poliedro, um cubo regular, emergiram as respostas *quadrado* e *pontos*. Grande parte dos alunos reconheceu o formato das faces do cubo, enquanto que, de maneira surpreendente, duas duplas mencionaram a palavra *ponto* como resposta.

O terceiro poliedro, um tetraedro, também teve o formato de suas faces reconhecidos de maneira correta por grande parte dos alunos. As respostas emergentes a respeito desse poliedro foram: *triângulo* e *arestas.* Aos alunos que escreveram como resposta a palavra *aresta* para indicar o formato das faces do tetraedro não foi possível estabelecer que tipo de conjecturas foram realizadas para que apresentassem essa resposta.

O quarto poliedro presente na atividade, um prisma de base pentagonal, teve o formato de suas faces não tão reconhecido quanto no caso do cubo. As respostas emergentes foram agrupadas em quatro grupos: o primeiro grupo que apresentou como respostas *Retângulo e Pentágono*, o segundo grupo que contemplou como resposta *Retângulo*, o terceiro *Faces* e o quarto grupo chamado de *Outros.* O primeiro grupo de respostas representa as duplas que identificaram corretamente o formato das faces do prisma, ao passo que o segundo grupo de respostas indicou o reconhecimento de um dos formatos das faces do prisma, o retângulo. O terceiro grupo de respostas emergiu de duas duplas, as quais escreveram a palavra *faces* como resposta. Por fim, o quarto grupo de respostas, chamado de *outros*, contemplou respostas que não puderam ser relacionadas.

Outra questão proposta nessa atividade era se as faces que formavam cada poliedro tinham os mesmos formatos. As respostas apresentadas foram *sim* e *não*. Por exemplo, de um lado, a dupla A2, que indicou que as faces não eram todas iguais complementou: *"não pois existem faces quadradas, triângulos e pentágonos. Mas tem algumas iguais, figura 1 e 2*" se referiram ao cubo e ao tetraedro, que possuíam os mesmos formatos para todas as faces. Por outro lado, por exemplo, a dupla A1 escreveu que os poliedros: "*sim, são iguais*".

As últimas duas questões eram sobre quais nomes se atribuíam para os elementos dos poliedros de cor vermelha (arestas) e de cor azul (vértices). A maioria das duplas nomeou de maneira correta, apresentando como respostas as palavras *arestas* e *vértices.* No entanto, a partir dessas questões, outras respostas surgiram, como das duplas A3, A6 e A7, que escreveram *pontos* ao invés de vértices. O mesmo para as duplas B6 e B7, que escreveram *retas* ao invés de arestas.

Quando se questionou a respeito do nome atribuído para os componentes dos poliedros, faces, arestas e vértices, bem como em relação à observância dos formatos das faces, sobre um ponto de vista cognitivo, é possível inferir que, exceto para as categorias *outros* presentes nas questões, foi mobilizada uma desconstrução dimensional. Uma fala de um dos integrantes da dupla B4 sobre o formato das faces corroborou com a análise. O aluno dialoga com a pesquisadora no momento em que se questiona sobre quais polígonos compõem as faces dos poliedros: "*polígono é como se ele tivesse em 2D professora? Essa parte aqui é 2D.".* A desconstrução dimensional foi mobilizada de 3D➔2D➔1D➔0D, dos poliedros para as faces, em seguida para as arestas e, por fim, para os vértices. Evidentemente, as apreensões requisitadas foram a perceptiva e discursiva. O olhar presente nessa atividade foi o botanista, pois se trabalhou com a identificação de formatos e contornos dos poliedros.

Análise da Atividade 5.1

A atividade 5.1 exibia na interface do GeoGebra um cubo, um tetraedro e uma pirâmide de base quadrada. Eram dadas instruções para que os alunos complementassem a construção, pintando com cores diferentes faces que se encontravam em determinadas arestas, bem como arestas que se encontravam em determinados vértices.

Por fim, era questionado, depois de cada complemento na construção, sobre quantas faces, vértices ou arestas eram pintados em cada poliedro. Por fim, foi solicitado respostas por escrito a respeito de como eram formadas as arestas e vértices dos poliedros. Ao segundo grupo, foi acrescentada uma questão sobre quais seriam os poliedros regulares presentes na atividade.

Num primeiro momento, sob o ponto de vista teórico, essa atividade mobilizou uma apreensão sequencial, pois eram dadas instruções de construção, como por exemplo: *"Pinte de verde, as faces que se encontram na aresta AJ da pirâmide. Pinte de amarelo, as faces que se encontram na aresta KN do tetraedro. Pinte de azul, as faces que se encontram na aresta VW do cubo.*". Outras atividades cognitivas foram mobilizadas, conforme se apresenta no Quadro 27, a seguir, que mostra também as respostas apresentadas:

Quadro 27 - Análise da atividade 5.1

<table>
<tr><th rowspan="3">Questões elaboradas</th><th rowspan="3" colspan="2">Respostas apresentadas</th><th rowspan="3">Duplas</th><th rowspan="3">D.D.</th><th colspan="6">Apreensões</th><th colspan="4">Olhares</th></tr>
<tr><th rowspan="2">P.</th><th rowspan="2">D.</th><th rowspan="2">S.</th><th colspan="3">O.</th><th rowspan="2">B.</th><th rowspan="2">A.</th><th rowspan="2">C.</th><th rowspan="2">I.</th></tr>
<tr><th>Mer.</th><th>Otc.</th><th>Pos.</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Como é formada a aresta de um poliedro?</td><td colspan="2">Com duas faces</td><td>B1, A7</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Por segmentos de reta</td><td>B2, B5, B7, A3, A4, A6, A8</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Pela união dos vértices</td><td>B4, B6, A1, A2, A5, A9</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Como é formado o vértice de um poliedro?</td><td colspan="2">Com o encontro de arestas</td><td>A1, A2, A4, A5, A6, A7, A8, A9, B1, B4, B5, B7</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Outras</td><td>A3, B2, B6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Há algum poliedro regular nessa atividade?</td><td rowspan="2">Sim</td><td>Cubo e tetraedro</td><td>B5, B7</td><td></td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Cubo ou tetraedro</td><td>B1 e B4</td><td></td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Outras</td><td>B2, B6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Fonte: A autora

Itacarambi e Berton (1998, p. 46, grifos das autoras) explicam que "os lados de cada dois polígonos que compõem as faces são as **arestas**. A interseção de três ou mais arestas são os **vértices** do poliedro.". Por meio do Quadro 27, anterior, a respeito das arestas de um poliedro, foram apresentadas três tipos de respostas frequentes, enquanto que, em relação aos vértices de um poliedro, foram estabelecidos dois tipos de respostas sobre as conjecturas dos alunos após a realização da atividade 5.1.

Sobre as arestas, a resposta *com duas faces* contemplou duas duplas. A dupla A7 explicou que, além de ser formada com duas faces, a aresta *"é um linha que separa as faces"* e B1 conclui que a aresta é formada *"com duas faces".* A segunda categoria contemplou conjecturas que relacionaram as arestas como sendo segmentos de reta. Por exemplo, A8 escreveu que *"Aresta é a linha que é composta por um fio que tem começo e fim".* Por sua vez, o terceiro grupo de respostas, chamado de *pela união de dois vértices,* contemplou conjecturas dos alunos que escreveram que a aresta está relacionada com os vértices. Por exemplo, a dupla B4 escreveu que a aresta *"liga dois pontos"* e a dupla A1 mencionou que *"para ela ser formada precisamos do vértice".*

Quando se questionou sobre os vértices, dois grupos de respostas foram identificados. O primeiro grupo, chamado de *com o encontro das arestas,* contemplou grande parte das respostas. Por exemplo, a dupla A6 conjecturou que os vértices *"São as pontas das arestas todas juntas num lugar, com a junção das arestas.".* O segundo grupo de respostas, chamado de *outras,* foi estabelecido a partir de respostas que não puderam ser relacionadas.

Foi possível inferir, a partir das respostas apresentadas, que houve a presença da desconstrução dimensional. Quando se questionou sobre como eram formadas as arestas de um poliedro aos alunos que relacionaram com as faces, uma desconstrução dimensional de 3D➔1D➔2D foi mobilizada. Compreendeu-se que, dos poliedros (3D), a atenção se voltou para as arestas (1D) e, por meio de conjecturas, o olhar se voltou para as faces (2D) na primeira categoria. Uma desconstrução dimensional de 3D➔1D e outra de 3D➔1D➔0D foram estabelecidas quando os alunos relacionaram, respectivamente, as arestas dos poliedros a segmentos de reta e quando relacionaram as arestas dos poliedros aos vértices.

É possível acrescentar que as apreensões mais requisitadas nessa atividade foram a perceptiva e a discursiva. De maneira imediata, eram apresentados três poliedros que foram reconhecidos pelos alunos. Em seguida, o discurso sobre as arestas e vértices conduziu a percepção dos alunos. Por meio dessa atividade, o olhar requisitado foi o botanista, pois não se trabalhou com escalas de medidas para que um olhar agrimensor fosse necessário e, ainda, os complementos solicitados nas construções eram apenas para destacar elementos dos poliedros já construídos, direcionando as observações para características quanto às arestas e vértices.

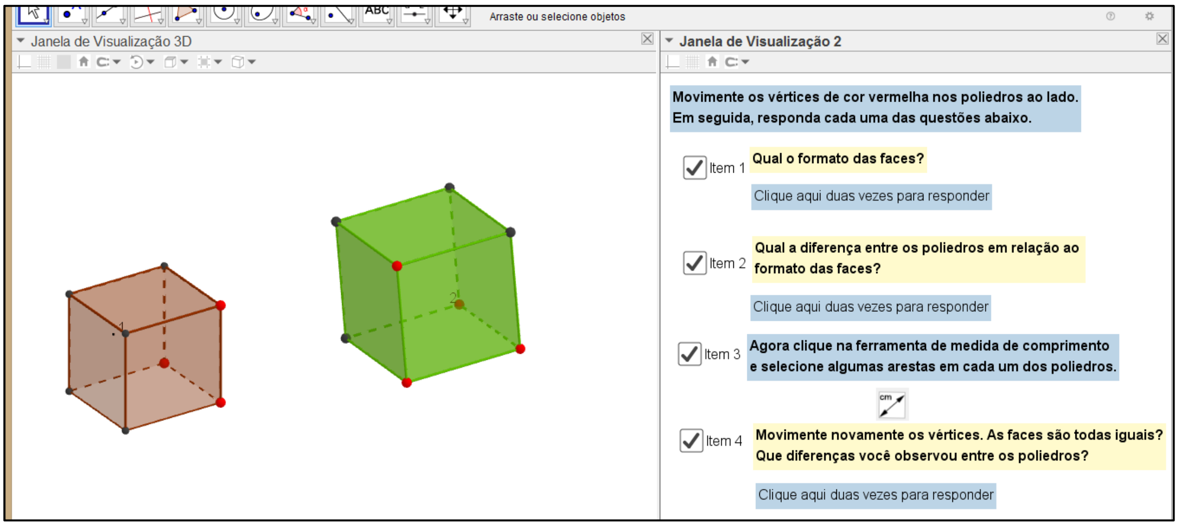
Por fim, a questão aplicada ao segundo grupo, se existiam poliedros regulares na atividade 5.1, contemplou respostas afirmativas classificadas como *sim* e respostas que não foram semelhantes, chamadas de *outras.* Referente às respostas afirmativas, foram estabelecidos dois tipos de respostas frequentes, das duplas que mencionaram os dois poliedros regulares, cubo e tetraedro, e das duplas que mencionaram somente um dos poliedros, ou o cubo ou o tetraedro. Como não se trabalhou com a verificação de propriedades dos poliedros regulares, essa questão, além das apreensões perceptiva e discursiva, contemplou também um olhar botanista.

Análise da Atividade 5.2

Antes de apresentar aos alunos os conceitos que envolvem os poliedros regulares, a atividade 5.2 foi aplicada. Essa atividade exibia na tela do GeoGebra dois poliedros: um cubo e um paralelepípedo reto. Ao lado dos poliedros, uma interface contendo quatro itens era exibida. Ao clicar em cada item, era exibido um discurso que conduzia as observações dos dois poliedros. Era solicitado que os alunos movimentassem cada poliedro clicando nos vértices de cor vermelha e, em seguida, ao clicar em cada item, respondessem na interface do GeoGebra quatro questões.

Por meio da Figura 33, a seguir, a interface da atividade 5.2 é apresentada:

Figura 33 - Interface da atividade 5.2



Fonte: A autora

Tanto o primeiro quanto o segundo item, ao serem clicados, exibiam questões relacionadas ao formato das faces dos poliedros e diferenças observadas a partir do movimento dos vértices. Quando o aluno clicava no terceiro item, era solicitado que, por meio da ferramenta de medida, verificasse o comprimento das arestas de cada poliedro. Por fim, depois da medida e pelo movimento dos poliedros, perguntava-se quais diferenças foram observadas.

Apenas uma dupla do segundo grupo não esteve presente no dia da realização dessa atividade. Embora se tenha considerado a atividade de fácil entendimento para os alunos, mesmo depois de movimentarem tanto o cubo quanto o paralelepípedo, alguns alunos admitiram que os dois poliedros eram compostos por faces quadradas.

Somente depois de efetuarem as medidas e novamente movimentarem os poliedros é que foi possível que todos verificassem as diferenças entre os poliedros.

No Quadro 28, a seguir, a análise da atividade 5.2 é apresentada:

Quadro 28 - Análise da atividade 5.2

Questões elaboradas		**Respostas apresentadas**	**Duplas**	**D.D.**	**Apreensões**						**Olhares**			
					P.	**D.**	**S.**	**O.**			**B.**	**A.**	**C.**	**I.**
								Mer.	**Otc.**	**Pos.**				
Movimente os vértices de cor vermelha nos poliedros ao lado. Em seguida, responda cada uma das questões abaixo.	Qual o formato das faces?	Quadrado e retângulo	B5, A2, A7, A8	X	X	X			X	X	X			
		Quadrado	B1, B2, B4, B6, B7, A3, A4, A5, A6, A9	X	X	X			X	X	X			
	Qual a diferença entre os poliedros em relação ao formato das faces?	Um dos poliedros tem faces quadradas e o outro retangulares	A2, A4, B2, B5, B7	X	X	X			X	X	X			
		Não há diferenças	A1, A6, A9, B4, B6	X	X	X			X	X	X			
		O tamanho das arestas	A3, A5, A7, A8, B1	X	X				X	X	X			
Agora clique na ferramenta de medida de comprimento e selecione algumas arestas em cada um dos poliedros.	Movimente novamente os vértices. As faces são todas iguais?	Somente em um dos poliedros	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, B1, B2, B4, B5, B5 e B7	X	X	X	X		X	X			X	

Fonte: A autora

Num primeiro momento, quando se questionou sobre o formato das faces, duas recorrências de respostas emergiram. A primeira com as observações corretas, de que as faces dos poliedros eram compostas por quadrados e retângulos. Algumas duplas mencionaram somente que as faces eram quadradas, caracterizando a segunda recorrência.

Em seguida, num segundo momento, quando se perguntou sobre as diferenças observadas, três tipos de respostas foram frequentes. O primeiro tipo de resposta contemplou as duplas que observaram que havia faces quadradas em um poliedro e quadradas e retangulares no outro poliedro. Por exemplo, B5 respondeu que *"no primeiro momento os dois [poliedros] tem as faces quadradas mas, ao movimentá-las, o primeiro cubo fica com a face retangular e no segundo a face permanece quadrada"*. O segundo tipo de resposta emergente foi de duplas que responderam não observar diferenças entre os poliedros. Por exemplo, B4 escreveu *"eles são a mesma forma",* A1 respondeu somente que a diferença é *"nenhuma".* Outras duplas observaram que, ao movimentarem os poliedros, o tamanho das arestas se alterava, o que caracterizou a terceira categoria. Por exemplo, A5 escreveu que a diferença dos poliedros era *"o tamanho de cada aresta em ambos"*, enquanto B4 afirmou: *"as arestas ficam diferentes (ficam maiores e menores)".*

O que chamou a atenção nessa atividade, sob um ponto de vista cognitivo, foi a desconstrução dimensional de 3D➔1D presente no terceiro tipo de resposta, chamado de *o tamanho das arestas*. Os alunos partiram do poliedro (3D) para a observação das arestas (1D), omitindo a observação nas alterações que ocorriam no formato das faces ao movimentarem os poliedros, em especial do paralelepípedo.

É possível inferir, ainda, que a desconstrução dimensional foi presente também nos tipos de resposta anteriores (chamados respectivamente de *Quadrado e retângulo*, *Quadrado, um dos poliedros tem faces quadradas e o outro retangulares*, *Não há diferenças*), pois as duplas, a partir do poliedro, fixaram seus olhares nas faces. Logo, uma desconstrução dimensional de 3D➔2D foi estabelecida.

Quanto às apreensões, foi considerado que tanto a perceptiva quanto a discursiva estiveram presentes. Exceto na categoria chamada de: *o tamanho das arestas*, que revelou uma omissão das duplas em relação ao formato das faces, considerou-se que as duplas não retornaram ao enunciado, fixando-se somente nos poliedros. A apreensão operatória, por sua vez, foi mobilizada com as modificações tanto ótica quanto posicional, pois os alunos aumentavam ou diminuíam os poliedros, bem como poderiam rotacioná-los pelo movimento da tela do GeoGebra. Compreendeu-se que nessa atividade houve uma evolução de um olhar botanista para um olhar construtor quando se propôs a última questão dessa atividade.

A última questão foi aplicada depois de os alunos efetuarem as medidas das arestas (pela ferramenta do GeoGebra) e movimentarem os poliedros. A partir das medidas estabelecidas, a observância de que os poliedros eram diferentes foi unânime entre as duplas. Pelas respostas os alunos, mencionam que as faces são todas iguais somente em um dos poliedros. Por exemplo, embora tenha designado o nome "cubo" para os dois poliedros, B5 escreveu *"A medida das arestas paralelas no cubo são iguais e no segundo cubo a medida de todas as arestas é a mesma, no segundo as faces permanecem iguais.".* Outra dupla, A1, escreveu que "*na figura* *número 1 as faces quando movimentamos se alteram mas a figura número 2 quando movimentamos as faces não se alteram continuam com a mesma medida e essa é a diferença entre os polígonos [sic].*

De posse de respostas como essa, é possível inferir que, de um olhar botanista presente nas primeiras questões em que se questionou sobre as observações dos formatos das faces, foi estabelecida a presença de um olhar construtor. Segundo Duval (2005, p. 11, tradução nossa), "É através da utilização de um instrumento que os alunos podem realmente perceber que as propriedades geométricas não são apenas características perceptivas". Ao efetuarem as medidas das arestas dos poliedros, foi possível que os alunos verificassem, por exemplo, que o cubo, mesmo ao ser movimentado, permanecia com as medidas das arestas iguais, o que caracterizou o reconhecimento de uma propriedade geométrica.

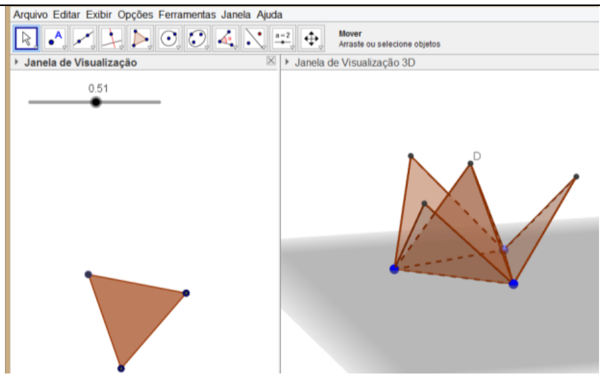
Análise da Atividade 6.0

A última atividade da oficina consistia na construção de cada poliedro regular no GeoGebra em arquivos distintos. As instruções de construção eram apresentadas no caderno de atividades (APÊNDICE A), e, a cada poliedro construído, era solicitado que os alunos marcassem em uma tabela a quantidade de faces, vértices e arestas. Para facilitar a contagem desses elementos, foi sugerido que os alunos trocassem as cores das arestas, planificassem o poliedro, bem como os movimentassem.

Quanto à construção dos cinco poliedros regulares, os alunos não apresentaram dificuldades. Por meio dos protocolos de construção do GeoGebra, foi verificado que todas as instruções foram seguidas corretamente. O encantamento em relação ao GeoGebra foi notório. Por exemplo, quando apresentada a ferramenta de planificação, algumas falas sobre o recurso foram registradas em áudio.

Conforme ilustra o Quadro 29, a seguir:

Quadro 29 - Diálogo sobre a ferramenta de planificação

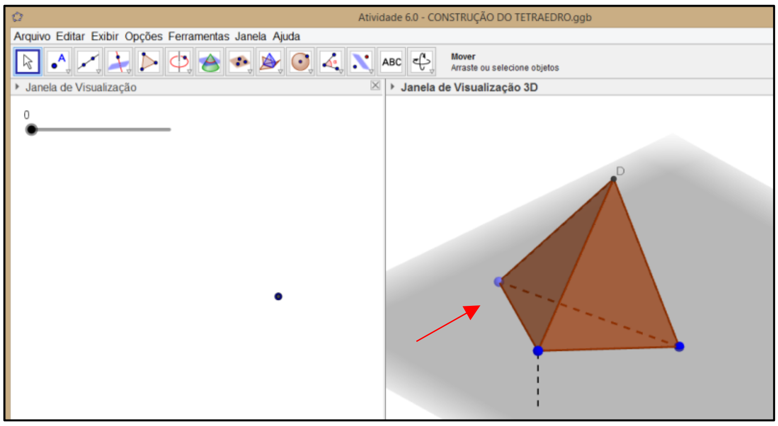
Trecho do diálogo da pesquisadora com o G2	**Interface do GeoGebra que se refere ao diálogo**
Pesquisadora - Aí quando vocês forem contar o número de faces, tem aqui uma ferramenta chamada planificação que é essa última aqui. Todo mundo consegue ver? Alunos – si:::m: Pesquisadora - Vocês vão clicar sobre ela e vão clicar sobre o tetraedro. O que que aconteceu? Um aluno de B4 – Meu Deus. Umas coisas. Pesquisadora - Apareceu a planificação do tetraedro e apareceu essa outra ferramenta que se chama controle deslizante. O que vocês vão fazer com ela, vão vir aqui e vão movimentar esse controle deslizante. Um aluno de B5 - nooossa que legal. Vários alunos - oohhh Um dos alunos de B3 - nossa que massa	

Fonte: A autora

Como é possível observar pelo Quadro 29, na interface do GeoGebra, na janela de visualização 2D (à esquerda), é exibido o formato da face que está sobre o plano na cor cinza na janela 3D. No momento em que a pesquisadora movimentava o tetraedro para cima, por meio do clique e arrastamento do vértice do poliedro, na janela 3D do GeoGebra, a face exibida na janela ao lado desapareceu, sendo mostrado apenas um dos vértices.

A Figura 32, a seguir, ilustra a situação:

Figura 34 - Movimentação do Tetraedro



Fonte: A autora

Ao perguntar aos alunos do grupo 2 sobre o ocorrido, um dos integrantes da dupla B5 explica: *"quando você levantou o poliedro ele não está mais na base, só aparece [sic] aquele aquela pontinha."* A fala do aluno indicou a observação coerente sobre o GeoGebra de que exibe, na janela de visualização 2D, somente as faces que estão sobre o plano na região em cinza da janela de visualização 3D. Como o poliedro foi levantado, somente um dos vértices ficou sobre o plano de cor cinza e, por esse motivo, na janela de visualização 2D, somente esse vértice foi exibido. Mesmo tendo os primeiros contatos com o *software*, falas como a desse aluno evidenciam as potencialidades de seu uso para o estabelecimento de conjecturas. Após os alunos terem construído todos os poliedros regulares, contado o número de faces, vértices e arestas, outras duas perguntas foram feitas.

A análise dessas duas questões é mostrada no Quadro 30, a seguir:

Quadro 30 - Análise da questão 6.0

Questões elaboradas	Respostas apresentadas		Duplas	D.D.	Apreensões						Olhares			
					P.	D.	S.	O.			B.	A.	C.	I.
								Mer.	Otc.	Pos.				
É possível identificar algum tipo de relação atribuída ao número de vértices e faces, com o número de arestas de cada poliedro regular? Descreva com suas palavras.	Não		A1, A8	X	X	X	X		X	X				
	Sim	O número de faces e vértices é igual ao número de arestas mais 2 (dois)	B4, B5, B7, A2 e A5	X	X	X	X		X	X	X			
		São números aproximados	A3, A7	X	X	X	X		X	X	X			
	Outros		B2, B6, A4 e A9		X									
	Em branco		B1, B2, B3, A6											
Tente somar o número de vértices e faces de cada poliedro regular. Compare com o número de arestas. Você consegue verificar alguma relação? Explique.	Sim	Se diminuir 2 (dois) chegará na quantidade de arestas	A1, A2, A4, A7, A8, B5 e B7	X	X	X	X		X	X				
		A soma é quase o mesmo resultado que das arestas	B2, B6, A3, A9	X	X	X	X		X	X	X			
	Em branco		A6, A5, B4, B3, B1											

Fonte: A autora

As respostas que emergiram da primeira questão foram: *não, sim, outros* e algumas duplas deixaram em branco. Ao grupo de respostas chamado de *outros*, foram acrescentadas as que não puderam ser relacionadas. Em relação ao grupo de respostas *sim*, foram apresentados dois tipos de respostas: *o número de faces e vértices é igual ao número de arestas mais dois* e também *são números aproximados.* O primeiro tipo de respostas contemplou as conjecturas corretas sobre a Relação de Euler. O segundo tipo de respostas que emergiu das duplas A3 e A7 foram, respectivamente: "*Sim porque são todos parecidos*", e, ainda, "*Sim, pois sempre são números próximos".* Essa subcategoria indicou conjecturas não suficientes para estabelecer a regularidade da Relação de Euler. Com o intuito de direcionar os alunos a estabeleceram essa conjectura de maneira adequada, uma segunda questão foi proposta.

A segunda questão solicitava que os alunos somassem o número de vértices e faces e comparassem com o número de arestas e, em seguida, escrevessem se era possível identificar alguma relação. Para essa atividade, emergiram duas categorias: *sim* e *em branco.* Da categoria *sim*, duas subcategorias foram identificadas.

As respostas que foram agrupadas primeiramente foram as que correspondiam ao esperado: que do resultado da soma dos vértices e faces de cada poliedro, quando se diminui dois, é possível estabelecer o número de arestas. Por exemplo, do segundo grupo, a dupla B5 afirma: *"Sim, se subtrairmos 2 da soma de V e F obtemos o número de arestas.".* Outra dupla A4, pertencente ao primeiro grupo, conjecturou que: "*[...] sempre sobram dois números da quantidade de arestas".*

Outro grupo de respostas indicou a compreensão de que, quando somados o número de faces e vértices, o resultado da soma se aproxima do número das arestas. Nesse grupo de respostas, a dupla A9, por exemplo, escreveu: "*Sim, porque a soma dos dois é quase o resultado das arestas."* Outra dupla, B2, escreveu: *"sim, eles dão quase o mesmo resultado do valor da aresta.".* Diante de todas essas respostas, embora se tenha trabalhado com os poliedros regulares sob um viés aritmético quando se tratou da contagem de elementos (faces, vértices e arestas), foi possível identificar algumas atividades cognitivas de Geometria, segundo Raymond Duval. Em relação às apreensões, compreendeu-se que foram mobilizadas as apreensões sequencial, discursiva e perceptiva para que as duplas conseguissem construir os poliedros no GeoGebra. Por exemplo, o conjunto de instruções de construção do dodecaedro apresentado no Quadro 31, a seguir:

Quadro 31 – Instruções de construção do dodecaedro na atividade 6.0

1- "Na janela de visualização 2D, crie dois pontos (A e B)
2- No campo de entrada, digite o seguinte comando =DODECAEDRO.
3- Clique na primeira opção: =DODECAEDRO[<Ponto>, <Ponto>]
4- Substitua o primeiro item <Ponto> por A, que indica o ponto A que você criou no passo 1.
5- Substitua o segundo item <Ponto> por B.
6- O poliedro a ser exibido será o dodecaedro regular.
7- Efetue a contagem das **arestas e vértices**, modificando as cores de cada item.

Fonte: A autora

As instruções de construção caracterizaram a apreensão sequencial, enquanto que a designação de elementos dessas instruções, como as palavras: pontos, arestas e vértices compreenderam uma apreensão discursiva, pois os alunos precisavam compreender o significado dessas palavras para conferirem se o que aparecia construído na tela do GeoGebra era condizente com o que se pedia. Partindo desse pressuposto, não se pode deixar de mencionar que a apreensão perceptiva também foi presente, pois a cada passo da construção era necessário o reconhecimento automático dos formatos que apareciam na tela. Outra apreensão presente foi a apreensão operatória com modificações ótica e posicional. Os alunos arrastavam os poliedros e também podiam aumentá-los ou diminui-los para conseguirem estabelecer quantas arestas, vértices e faces possuíam. Ao voltarem-se para esses elementos, foi presente a desconstrução dimensional na realização dessa atividade.

Quando apresentada a ferramenta de planificação, a presença da desconstrução dimensional de 3D➔2D foi estimulada. A partir da construção do poliedro, ao clicar nessa ferramenta era possível, pelo arrastamento do controle deslizante, “montar e desmontar” o poliedro, facilitando a observação de suas faces.

Em relação ao olhar mobilizado nessa atividade, compreendeu-se que esteve presente o olhar botanista, pois as duplas, por meio dos procedimentos de construção, observaram características qualitativas dos poliedros, como o formato das faces, por exemplo. Não se pode afirmar, como foi previsto na análise preliminar, que se tratou de um olhar construtor em virtude das especificidades do *software* ao permitir a construção de modo imediato.

4.3.3.3 Uma articulação entre apreensões: Análise e interpretação das atividades

Para complementar as análises deste trabalho, foi verificada qual caracterização foi atribuída em cada atividade por meio da articulação das apreensões. Dependendo da conexão estabelecida entre as apreensões, é possível caracterizar as atividades de geometria como: figura geométrica, visualização, heurística e demonstração, e construção geométrica. Isso corrobora com o objetivo deste trabalho em fazer apontamentos sobre contribuições referentes ao uso do ambiente dinâmico para a Geometria no que diz respeito ao desenvolvimento do papel heurístico das figuras geométricas e para atividades cognitivas referentes aos tratamentos figurais, tipos de apreensões e olhares, específicos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

Segundo Duval (1997, *apud* MORETTI; BRANDT, 2015, p. 604-605, grifos dos autores):

> i. O que chamamos de **figura geométrica** é o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e discursiva: é preciso ver a figura geométrica a partir das hipóteses e não das formas que se destacam ou das propriedades evidentes. A apreensão discursiva é subordinada pela apreensão perceptiva;
> ii. O que chamamos de **visualização** é o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e operatória. A visualização não exige nenhum conhecimento matemático, mas ela pode comandar a apreensão operatória;
> iii. A **heurística e a demonstração** são resultado da conexão entre as apreensões operatória (que é subordinada pela apreensão perceptiva) e discursiva;
> iv. A **construção geométrica** é o resultado da conexão entre as apreensões discursiva e sequencial – especialmente requisitada em atividades dessa natureza, de construção geométrica, também requer a apreensão perceptiva.

Partindo dessas definições citadas, foram elaborados dois quadros de análise, um para cada etapa da oficina. Nesses quadros, são exibidas as apreensões mobilizadas em cada atividade, bem como o *status* que melhor as caracterizou, se de figura geométrica, visualização, heurística e demonstração, ou construção geométrica.

Foi constatado que a maioria das atividades se caracterizou como figura geométrica e visualização, conforme mostra o Quadro 32:

Quadro 32 – Articulação das apreensões nas atividades da primeira etapa da oficina

Questões	Apreensões requisitadas				Caracterização da atividade pela articulação das apreensões
	perceptiva	discursiva	operatória	sequencial	
1.0	X	X	X	X	Figura geométrica, visualização, heurística e construção geométrica
2.0	X	X			figura geométrica
3.0	X	X	X		figura geométrica/visualização
3.1	X		X		Visualização
3.2	X		X		Visualização
4.0	X	X			figura geométrica
4.1	X	X	X		figura geométrica/visualização
4.2	X	X	X	X	Figura geométrica, visualização,

Fonte: A autora

Das 8 atividades da primeira etapa da oficina, na qual se trabalhou com a geometria plana, pode afirmar que 6 foram caracterizadas como atividades de visualização. Dentre essas atividades de visualização, uma delas, a atividade 3.0, que pedia a classificação de figuras geométricas como sendo polígonos ou não polígonos, foi caracterizada pelo *status* tanto de figura geométrica quanto de visualização. As figuras existentes nessa atividade eram acompanhadas de um enunciado e, além disso, os alunos, por meio do *mouse* efetuar modificações em cada figura, o que mobilizou as apreensões perceptiva e discursiva, bem como a apreensão operatória.

As atividades 1.0 e 4.2, que se referiam à construção de uma reta e dos polígonos regulares, mobilizaram as quatro apreensões. Isso se justifica, pois os alunos seguiram procedimentos de construção (apreensão sequencial), acompanharam um enunciado (apreensão discursiva) referente às atividades e, por meio do *mouse*, puderam movimentar as figuras para melhor observarem-nas (apreensão operatória com modificações posicional e ótica e apreensão perceptiva). Em virtude disso, considerou-se que essas duas atividades contemplaram todas as caracterizações propostas por Duval (1997, *apud* MORETTI; BRANDT, 2015).

A análise das questões da segunda etapa da oficina quanto à caracterização pela articulação das apreensões é exibida no Quadro 33:

Quadro 33 - Articulação das apreensões nas atividades da segunda etapa da oficina

Questões	**Apreensões**				**Status da questão pela articulação das apreensões**
	perceptiva	**discursiva**	**operatória**	**sequencial**	
5.0	X	X			Figura geométrica
5.1	X	X			Figura geométrica
5.2	X	X	X		Figura geométrica/visualização
6.0	X	X	X	X	Figura geométrica, visualização

Fonte: A autora

Quanto às atividades da segunda etapa da oficina, ao considerar as articulações entre as apreensões, se observam as caracterizações envolvendo figura geométrica e/ou visualização em todas as atividades. A atividade 6.0, em que os alunos construíram os poliedros regulares e puderam conjecturar sobre a Relação e Euler, ao mobilizar todas as apreensões, pôde ser caracterizada tanto como figura geométrica, visualização, quanto como heurística e construção geométrica.

Por meio da caracterização das atividades propostas na oficina, foi constatado que a tarefa de elaboração de atividades no ambiente dinâmico GeoGebra se revelou laboriosa quando se consideraram os aspectos cognitivos propostos por Raymond Duval, no tocante à Geometria. Essa tarefa requer constantes reflexões e estudos por parte do professor.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O interesse em tratar de atividades de Geometria no ambiente dinâmico GeoGebra para os alunos do oitavo ano proporcionou importantes reflexões e apontamentos. Serão apresentadas as contribuições da revisão de literatura, o auferimento proporcionado pelo referencial teórico e as perspectivas futuras.

De posse do referencial teórico de Raymond Duval, em relação às atividades cognitivas específicas da Geometria, as apreensões (perceptiva, discursiva, operatória e sequencial), os olhares (botanista, agrimensor, construtor e inventor) e a desconstrução dimensional foi questionado, nesta pesquisa, de que forma era possível estimular o desenvolvimento dessas atividades com a utilização do ambiente dinâmico GeoGebra.

Por meio da questão norteadora, foi possível afirmar que a escolha dos conteúdos envolvendo poliedros regulares e não regulares e a Relação de Euler, bem como a retomada de conceitos de polígonos regulares e não regulares determinaram estímulo para a desconstrução dimensional. Foi possível identificar também que as figuras geométricas, ao serem movimentadas de modo imediato, mobilizaram a apreensão operatória com modificações ótica e posicional, o que diferenciou da exploração de um ambiente estático, em que esse tipo de ação demanda um custo de tempo elevado.

O GeoGebra contribuiu, evidentemente, para que a apreensão perceptiva fosse estimulada, pois as figuras geométricas por meio do movimento assumiam posições não canônicas. A apreensão perceptiva foi imposta de maneira efetiva, por exemplo, na atividade 3.2, em que os alunos precisavam reproduzir um desenho formado pelas peças do Tangram na cor preta. Nessa atividade, destacou-se também a apreensão operatória com modificação mereológica, em que os alunos precisavam identificar quais subfiguras seriam necessárias para reproduzir o desenho. Outras modificações, características da apreensão operatória, identificadas foram a posicional e ótica. Ao arrastar, girar, aumentar ou diminuir as figuras geométricas presentes na interface do GeoGebra compreendeu-se que essas duas modificações eram simultâneas.

Todas as atividades propostas estavam acompanhadas de enunciados, presentes tanto na interface do GeoGebra quanto no material impresso que foi entregue para cada dupla. A compreensão e realização de maneira correta ou parcialmente correta das atividades indicou que a apreensão discursiva também foi mobilizada. Por exemplo, dentre as atividades da primeira etapa da oficina, a atividade 3.0 solicitava que os alunos separassem as figuras geométricas que representavam polígonos das que não eram polígonos. O reconhecimento do que significavam não polígonos ou polígonos indicou a apreensão discursiva do enunciado.

Tanto a pesquisa de Silva, Santana e Barreto (2012) como a de Moran (2015) enfatizaram que, pelo uso de um ambiente dinâmico, as apreensões perceptiva, discursiva e operatória são promovidas. Não foram observadas considerações sobre a apreensão sequencial. Partindo dessa constatação, uma lacuna em que a presente pesquisa contribuiu é a respeito dessa apreensão, que segundo Duval (2012a) é requisitada quando há necessidade de seguir ou enunciar instruções de construção de uma determinada figura.

Pelo uso do GeoGebra, o seguimento de instruções de construção de figuras geométricas é resgatado de maneira singular. É necessário tanto o conhecimento de termos matemáticos como reta, ponto, polígono, quanto o conhecimento das ferramentas que permitem determinada construção. O GeoGebra é um instrumento de construção facilitador por possuir um painel de comandos intuitivo, com ícones representados, em grande maioria, pelo desenho das construções possíveis seguidas de uma pequena descrição do que será obtido a partir da seleção de determinado ícone. Foi verificado que, para as atividades em que os alunos precisaram seguir instruções de construção no GeoGebra, não houve dificuldades. O que precisa ser levado em conta é que essas facilidades de construção podem omitir compreensões necessárias a respeito das figuras geométricas. Por exemplo, uma questão que pode ser colocada aos alunos é sobre como obter um quadrado considerando suas principais características (todos os ângulos retos e todos os lados iguais) com ferramentas diferentes daquela que constrói polígonos regulares no GeoGebra. No entanto, foi constatado nessa mesma atividade 2.0 uma grande dificuldade significativa dos alunos em descrever instruções de construção para uma figura geométrica que tinham acabado de obter no GeoGebra.

Esse apontamento evidencia uma fragilidade na aprendizagem da Geometria, que diz respeito à construção de figuras geométricas, como, por exemplo, o quadrado, o triângulo, que, implicitamente, requerem o reconhecimento imediato de determinadas propriedades que as definem. A partir disso, pode-se afirmar que o olhar construtor ficou comprometido na atividade 2.0.

Dentre os quatro diferentes tipos de olhares descritos por Duval (2005), a presença dos olhares icônicos foi mais ostensiva nas atividades elaboradas. A escolha dos conteúdos matemáticos envolvendo poliedros regulares e não regulares e a Relação de Euler, bem como a retomada de conceitos de polígonos regulares e não regulares e a característica de cada atividade que consistia, principalmente, em suscitar reflexões e observações por parte dos alunos, foram determinantes para essa constatação.

A partir de observações qualitativas nas figuras, característica essencial do olhar botanista, e, em especial, pela possibilidade de medir tanto o comprimento de lados ou arestas como dos ângulos dos polígonos, movimentar, arrastar, girar, planificar e remontar de modo imediato os poliedros, os alunos puderam estabelecer conjecturas.

Ao articularem o que viam na interface do GeoGebra com os enunciados das atividades, foi proporcionado direcionamento para que os alunos verificassem que as propriedades geométricas das construções, tanto dos poliedros regulares e não regulares quanto dos polígonos regulares e não regulares, não eram somente de caráter perceptivo, mas se mantinham mesmo pelo movimento. Por exemplo, na atividade 4.3, quando os alunos efetuaram as medidas dos lados e dos ângulos dos polígonos e, em seguida, puderam movimentar, arrastar ou girar cada um deles, puderam verificar que as propriedades que definem os polígonos regulares eram mantidas. Conjecturas estabelecidas, como as dessa atividade proposta, demandaram além dos olhares, a desconstrução dimensional.

O trabalho com o GeoGebra favoreceu a desconstrução dimensional pela facilidade em manipular as representações dos objetos matemáticos. Para o caso dos polígonos, os alunos puderam observar de maneira dinâmica o comportamento das figuras, para isso voltaram os olhares tanto para os lados quanto para os vértices, o que evidenciou a desconstrução dimensional de 2D➔1D➔0D. O mesmo fato pode ser observado quando os alunos trabalharam com os poliedros. A atenção voltou-se para o formato das faces e para o comprimento das arestas quando se tratou da diferença entre os poliedros regulares e não regulares. A desconstrução dimensional foi presente, pois, de modo geral, as atividades elencavam a necessidade de observar as unidades figurais inferiores a da figura mostrada na interface do GeoGebra.

Com o uso desse *software*, é possível que explorações dos conteúdos matemáticos, bem como dos pressupostos teóricos de Raymond Duval, sejam eficientes. No entanto, a elaboração de atividades no ambiente dinâmico sobre alguns dos conteúdos de geometria dos Anos Finais do Ensino Fundamental, sustentada em aspectos cognitivos, revelou-se laboriosa. Como indicativo para futuras pesquisas que complementem o presente estudo, uma lacuna a ser preenchida poderá ser a proposta de atividades no ambiente dinâmico que mobilizem, em especial, os olhares não icônicos, a apreensão operatória com modificação mereológica, e a desconstrução dimensional para a resolução de problemas de geometria envolvendo o papel heurístico das figuras geométricas.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, C. R. M.; KALLEF, A. M. M. R. Poliedros de Platão sob uma perspectiva de educação matemática usando recursos didáticos concretos e virtuais**.** *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10 .2016, São Paulo. **Anais**... São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016. v. 1 Disponível em: <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/4995_2293_ID.pdf> Acesso em: 10 jul. 2017.

ALMEIDA, I. A. C. **Identificando rupturas entre significados e significantes nas construções geométricas:** Um estudo em traçados de lugares geométricos bidimensionais, envolvendo pontos, retas e circunferências. 2007. 336 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife. 2007.

ALMOULOUD, S. A. *et al*. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 27, p. 94-108, Dez. 2004 . Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-24782004000300007&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 10 nov. 2016.

AMARAL, M. P.; FRANGO, I. Um levantamento sobre pesquisas com o uso do software Geogebra no ensino de funções matemáticas. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 9, n. 1, p. 90-107, ago. 2014. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2014v9n1p90>. Acesso em: 13 jul. 2017.

ASSUMPÇÃO, P. G. S. **Perímetro e área de polígonos**: abordagem através de um ambiente dinâmico sob o olhar das representações semióticas. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo.** Tradução de L. A. Reta e A. Pinheiro. Lisboa: Edições 70, 2016.

BENTO, H. A. **O desenvolvimento do pensamento geométrico com a construção de figuras geométricas planas utilizando o software**: geogebra. 2010. 260 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

BETTIN, A. D. H.; LEIVAS, J. C. P.; PRETTO, V. O Geogebra 3D na construção da pirâmide: registros de representação semiótica. *In:* SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO, XXII., 2016. Cachoeira do Sul: Universidade Luterana do Brasil, **Anais**... Cachoeira do Sul: Universidade Luterana do Brasil. 2016, v. 1. Disponível em: <http://www.ulbracds.com.br/index.php/sieduca/article/view/338> Acesso em: 05 jul. 2017.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação:** Uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BOLDA, C. R. F. **Geometria e visualização:** desenvolvendo a competência heurística através da reconfiguração. 1997. 162 f. Dissertação (Mestrado em Educação: Educação e Ciência) Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1997.

BORSOI, C. **Geogebra 3D no Ensino Médio:** uma possibilidade para a aprendizagem da geometria espacial. 2016. 159 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO. **Parâmetros curriculares nacionais**: Ensino Fundamental - Matemática. Brasília: MEC, SEF, 1998, 148 p.

______. **Base Nacional Comum Curricular**: orientações quanto à forma e abrangência. Brasília: Ministério da Educação/SEB. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/themes/wp-simple/processo/documento_orientador_seb_secadi_c01.pdf> Acesso em: 25 mai. 2018.

BURATTO, I. C. F. **Representação Semiótica no ensino da Geometria:** uma alternativa metodológica na formação de professores. 2006. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) □ Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.

CARGNIN C. **Ensino e Aprendizagem da integral de Riemann de funções de uma variável real:** possibilidades de articulação da utilização de Mapas Conceituais com a teoria dos Registros de Representações Semióticas. 2013. 417 f. Tese (Doutorado em Educação de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

CARVALHO, F. P.S. **Ensino e Aprendizagem de conteúdos de geometria espacial em um ambiente dinâmico e interativo**. 2011. 141 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Goiás, 2011.

DIONÍZIO, F. A. Q.; BRANDT, C. F. O caminho percorrido pela semiótica e a importância dos registros de representação semiótica para a aprendizagem de matemática. *In*: ANPED SUL: A Pós-Graduação e suas Interlocuções com a Educação Básica, 9., 2012, Caxias do Sul – RS. **Anais...** Caxias do Sul, 2012. p. 1-16.

DUVAL, R. Mudanças, em curso e futuras, dos sistemas educacionais: Desafios e marcas dos anos 1960 aos anos... 2030!. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 10, n. 1, p. 1-23, set. 2015. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2015v10n1p1>. Acesso em: 10 fev. 2017.

______. Entrevista disponibilizada em jul-dez. 2013, **a Revista Paranaense de Educação Matemática**, v.2, n.3. 2013. Disponível em: <http://www.fecilcam.br/rpem/documentos/v2n3/Entrevista.pdf>. Acesso em: 05 fev. 2017.

______. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática** – Revemat: Florianópolis v. 7, n. 1, p. 118-138, jul. 2012a. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/reve mat/article/view/1981-1322.2012v7n1p118>. Acesso em: 28 jan. 2017.

______. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática** – Revemat: Florianópolis, v.7, n.2, p. 266-297, 2012b. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465>. Acesso em: 27 jan. 2017

______. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Organização: Tânia M.M. Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

______. **Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie:** développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. In: ANNALES DE DIDACTIQUE ET SCIENCES COGNITIVES, 2005. p. 5-53. Disponível em: <http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/annales_de_didactique_et_de_sciences_cognitives/volume_10/Duval.pdf> Acesso em: 01 fev. 2017.

______.**Semiosis y pensamiento humano:** registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução de Myrian V. Restrebo. Santiago de Cali: Peter Lang, 2004.

ESTEVAM, E. J. G. **(Res)significando a educação estatística no ensino fundamental:** análise de uma sequência didática apoiada nas tecnologias de informação e comunicação. 2010. 213 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, 2010.

FACCO, S. R. **Conceito de área:** uma proposta de ensino – aprendizagem. 2003. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

FERREIRA, M. B. C. **Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas**. 2016. 342 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. O funcionamento cognitivo e semiótico das representações gráficas: ponto de análise para a aprendizagem matemática. *In*: REUNIÃO DA ANPED, 28. 2005, Caxambu. **Anais**... Rio de Janeiro: Anped, 2005. v. 1.

GESSER, N. J. **Registro de representação semiótica e análise de dados em ambiente dinâmico.** 2012. 168 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

GRAVINA, M. A. E. (Org.) et al. Geometria Dinâmica na Escola. In: ______. **Matemática, Mídias Digitais e Didática:** tripé para formação de professores de Matemática. Porto Alegre: UFRGS, 2010. p. 37-60 Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat >. Acesso em: 01 abr. 2017.

HALBERSTADT, F. F. **A aprendizagem da geometria analítica do Ensino Médio e suas representações semióticas no GRAFEQ**. 2015. 174 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.

ITACARAMBI, R. R.; BERTON, I. C. B. Estudo dos sólidos geométricos. In: ______. **Geometria, brincadeiras e jogos.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 1998. p. 42-56.

KLUPPEL, G. T. **Reflexões sobre o ensino da Geometria em livros didáticos à luz da teoria de representações semióticas segundo Raymond Duval.** 2012. 110 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2012.

KUMMER, T.; MORETTI, M. Processos psicológicos na construção do conhecimento matemático. **Revista Areté -| Revista Amazônica de Ensino de Ciências**, v. 9, n. 18, p. 100-

114, mai. 2017. Disponível em: <http://periodicos.uea.edu.br/index.php/arete/article/view/200>. Acesso em: 13 jul. 2017.

LIMA, R. F. **Aprendizagem de estatística na EJA com tecnologia:** uma sequência didática com base nos registros de representação semiótica. 2014. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **Revista A Educação Matemática em Revista,** São Paulo: SBEM, 1º sem., v.4., p. 3-13, 1995.

LOVIS, K. A. **Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria Dinâmica:** o que pensam e o que sabem os professores. 2009. 148 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) □ Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009. Disponível em: < http://nou-rau.uem.br/nou-rau/document/?code=vtls000180879> Acesso em: 15 jan. 2017.

MORAN, M. **As Apreensões em Geometria:** um estudo com professores da Educação Básica acerca de Registros Figurais. 2015. 248 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e Matemática) □ Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015. Disponível em: < http://nou-rau.uem.br/nou-rau/document/?code=vtls000220490> Acesso em: 15 jan. 2017.

MEDEIROS, M. F. **Geometria dinâmica no ensino de transformações no plano:** Uma experiência com professores da Educação Básica. 2012. 172 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) □ Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012. Disponível em: < http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/URGS_6922716eac07727c4b74645a6e66d822/Details> Acesso em: 07 nov. 2016.

MOREIRA, D. T. Uma investigação acerca de apreensões perceptivas e operatórias de representações gráficas em alunos do curso de licenciatura em matemática. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VIII., 2004, Recife. **Anais...** Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016. v. 1. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/09/CC36242136953.pdf> Acesso em: 13 jul. 2017.

MORETTI, M. T. Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria. **Acta Scientiae**, v. 15, n. 2, p. 289-303. Canoas, 2013. Disponível em: <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article /view/568> Acesso em: 28 jan. 2017.

MORETTI, M. T.; BRANDT, C. F. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. **Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática,** v. 17, n. 3, p. 597-616, nov. 2015. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/25673>. Acesso em: 01 fev. 2017.

OLIVEIRA, L. S. **Reconfiguração e Matemágica**: um caminho para a aprendizagem de geometria. 2016. 180 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) □ Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2016.

ORDEM, J. **Prova e demonstração em Geometria:** uma busca da organização Matemática e Didática em Livros Didáticos de 6ª a 8ª séries de Moçambique. 2010. 143 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

PALLES, C. M. **Um estudo do Icosaedro a partir da visualização em geometria dinâmica**. 2013. 74 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Zetetiké**. n. 7, Ano I, n. 1, p. 7-17, 1993.

PEREIRA, M. G. B. **Contributos de um ambiente de geometria dinâmica (GeoGebra) e do Geoplano na compreensão das propriedades e relações entre quadriláteros:** um estudo com alunos do 4º ano. 2012. 187 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e nos 1º e 2º ciclos do Ensino Básico) Instituto Politécnico de Lisboa Escola Superior de Educação, Lisboa, 2012.

PIROLI, D. L. **Aprendizagem em Geometria nas Séries Iniciais:** uma possibilidade pela integração entre as apreensões em geometria e as capacidades de percepção visual. 2012. 158 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Boletim de Educação Matemática (BOLEMA),** São Paulo, v. 19, n. 25, p. 1-23, 2006. Disponível em: < http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1880/1657> Acesso em: 04 out. 2017.

PONTES, H. M. S.; BRANDT, C. F.; NUNES, A. L. R. O estado da arte da teoria dos registros de representação semiótica na educação matemática. **Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática,** v. 19, n. 1, abr. 2017. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/30291>. Acesso em: 13 jul. 2017.

ROMANOWSKI, J. P.; ENS, R. T. As pesquisa denominadas do tipo estado da arte em educação. **Diálogo Educ**., Curitiba, v.6, n.19, p.37-50, set./dez. 2006.

SALAZAR, J. V. F.; ALMOULOUD, S. A. Registro figural no ambiente de geometria dinâmica. **Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v.17, n.5, p. 919-941, 2015. Disponível em: < revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download /26325/18904> . Acesso em: 11 mar. 2017.

SANTOS, J. A. **Formação continuada de professores em geometria por meio de uma plataforma de educação a distância**: Uma experiência com professores de Ensino Médio. 2007. 152 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: < https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11278 > Acesso em: 07 nov. 2016.

SANTOS, M. T. **Semelhança de Triângulos e geometria dinâmica**: o trabalho em grupo na aprendizagem de conceitos. 2012. 131 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

SANTOS, R. P. **As dificuldades e possibilidades de Professores de Matemática ao utilizarem o Software Geogebra em atividades que envolvem o Teorema de Tales.** 2010. 141 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

SCHEIFER, C. **Design Metodológico para análise de atividades de geometria segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.** 2017. 148 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2017.

SENA, R. M.; DORNELES, B. V. Ensino de Geometria: Rumos da Pesquisa (1991-2011). **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 8, n. 1, p. 138-155, 2013. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2013v8n1p138>. Acesso em: 03 abr. 2017.

SILVA, C. R. **Signos peirceanos e registros de representação semiótica:** qual semiótica para a matemática e seu ensino? 2013. 202 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) □ Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2013. Disponível em: < https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/10982> Acesso em: 09 dez. 2016.

SILVA S. H. **Conhecimento de professores polivalentes em geometria:** contribuições da teoria dos registros de representação semiótica. 2011. 167 f. Dissertação (Mestrado em Educação) □ Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza. 2011. Disponível em: < http://www.uece.br/ppge/dmdocuments/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20Silvana%20Holanda.pdf > Acesso em: 07 nov. 2016.

SILVA, S. H.; SANTANA, L. E.; BARRETO, M. C. Contribuições do software Geogebra para a aquisição de conceitos geométricos. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICAS DE ENSINO, 16., 2012, Campinas. **Anais**... Campinas: UNICAMP, 2012, v. 1, p. 25-36. Disponível em: < http://www.infoteca.inf.br/endipe/smarty/templates/arquivos_template/upload_arquivos/acervo/docs/3489d.pdf> Acesso em: 13 jul. 2017.

SILVA, A. B. **Triângulos nos livros didáticos de matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental:** um estudo sob a luz da teoria dos registros de representação semiótica. 2014. 116 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2014.

SILVA, R. S. **Estudo da Reta em geometria analítica:** uma proposta de atividades para o Ensino Médio a partir de conversões de registros de representação semiótica como o uso do *software* Geogebra. 2014. 185 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

SOUZA, J.; PATARO P. M. **Vontade de saber matemática**, 6º ano. 3. ed. São Paulo: FTD, 2015. p. 180.

SOUZA, L. A. **Uma proposta para o ensino de geometria espacial usando o Geogebra 3D.** 2014. 66 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais.** São Paulo: Atlas, 1987.

APÊNDICES

APÊNDICE A – CADERNOS DE ATIVIDADES DA OFICINA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
Programa de Pós-Graduação em Educação
Mestrado e Doutorado

CADERNO DE ATIVIDADES DA OFICINA
Os poliedros: possibilidades com o GeoGebra
Professoras Franciele Isabelita Lopes Novak e Celia Finck Brandt

Nome dos alunos (as): ____

ATIVIDADES DA PRIMEIRA ETAPA

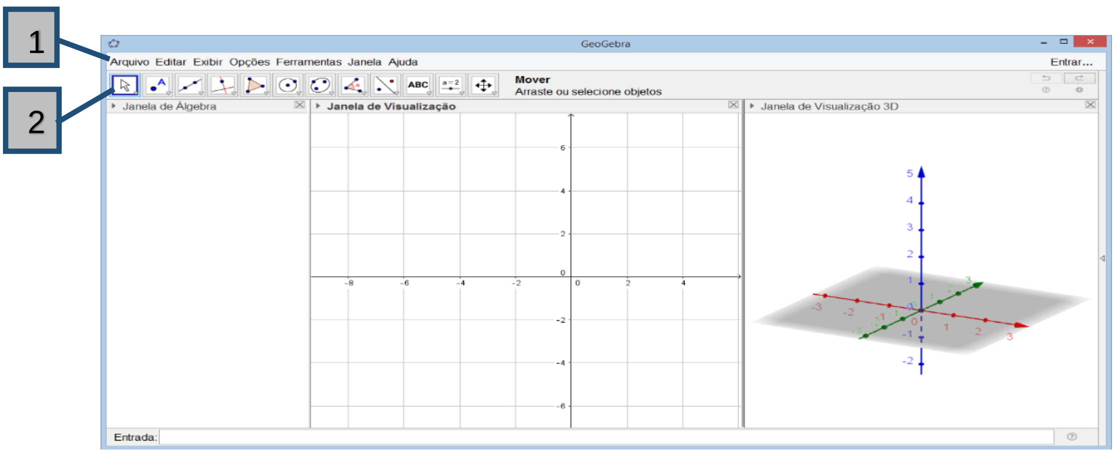
Apresentação do software GeoGebra com a articulação de conceitos sobre reta, semirreta, segmento de reta e polígonos

O que é o GeoGebra?

O GeoGebra é um software de Matemática dinâmica gratuito, criado em 2001 pelo americano Markus Hohenwarter em sua tese de doutorado. Desde sua criação, vem sendo disponibilizadas várias versões e essa oficina trabalha na versão 5.0. Este software possui compatibilidade com os sistemas operacionais existentes, sendo também de fácil instalação tanto em computadores, como *smartphones* e *tablets*. A nomenclatura “Geo” faz referência à geometria, enquanto que “Gebra” diz respeito à álgebra. No entanto, o mesmo pode ser explorado de muitas maneiras, desde a geometria e a álgebra, até mesmo com o conteúdo de estatística. O site oficial para download do programa é http://www.geogebra.org.

Na figura 1 a seguir, apresentamos a interface do *software* juntamente com a descrição de alguns itens referentes à barra de menus e barra de ferramentas que serão utilizados nessa oficina:

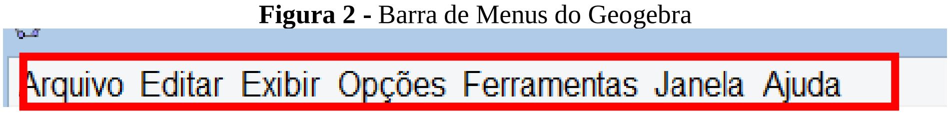
Figura 1 - Interface do GeoGebra



Fonte: As autoras

1 **Barra de Menus:** Composta pelos itens: arquivo, editar, opções, ferramentas, janela e ajuda, conforme a figura 2 a seguir:

Figura 2 - Barra de Menus do Geogebra



Fonte: As autoras

A aba do menu **arquivo** é exposta na figura 3 abaixo, com destaque para os itens: Nova Janela, Abrir e Gravar:

Figura 3 - Aba do menu Arquivo do Geogebra

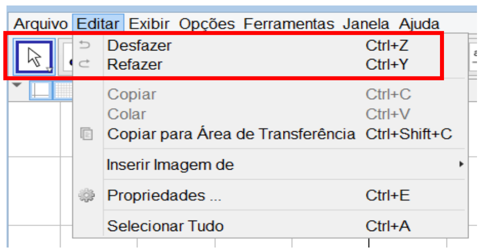
Fonte: As autoras

Basicamente cada um dos itens em destaque na figura 3, cumpre as seguintes funções:

- ✓ **Nova Janela / Novo:** abre um novo arquivo do GeoGebra.
- ✓ **Abrir / Abrir Arquivo Recente:** localiza no computador, arquivos do GeoGebra já existentes.
- ✓ **Gravar / Gravar Como:** o item gravar, salva as alterações do arquivo que está em uso, enquanto que o item gravar como, permite a alteração do nome do arquivo, bem como, o salvamento.

Na figura 4 abaixo, apresentamos a aba do menu editar e, em seguida, a descrição dos itens em destaque:

Figura 4 - Aba do Menu Editar do GeoGebra



Fonte: As autoras

- ✓ **Desfazer:** Elimina a última ação feita na tela do software.

✓ **Refazer:** Retoma a última ação que foi eliminada pela opção desfazer ou então que foi deletada.

2 **Barra de Ferramentas:** composta por grande parte do aparato de construções possíveis no software. Na figura 6, abaixo, ao clicar no primeiro ícone são exibidos o nome da ferramenta, juntamente com uma descrição sucinta do que a ferramenta permite fazer. O primeiro ícone em destaque por meio dos contornos em vermelho, acompanha uma breve descrição no canto direito, em que a ferramenta possui o nome **Mover** e a função é de arrastamento de objetos na tela.

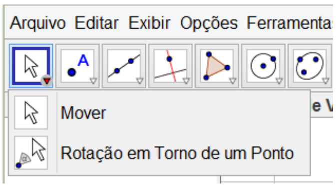
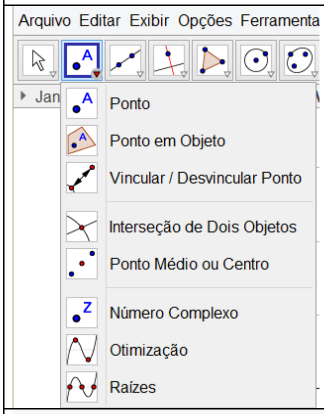
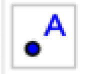
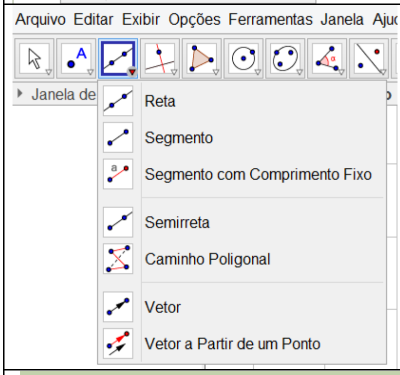
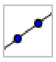
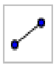
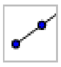
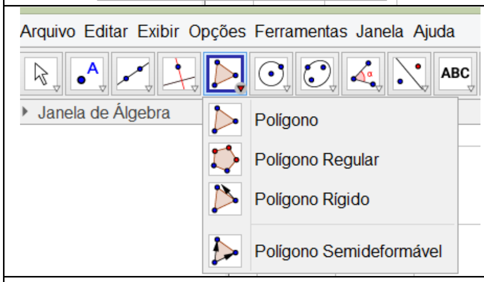
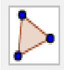
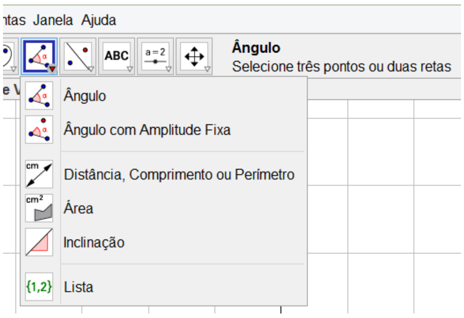
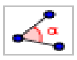
Figura 5 - Alguns ícones da barra de ferramentas do GeoGebra

Fonte: As autoras

A possibilidade de movimentar as construções é uma das características interessantes do software GeoGebra. Além disso, outros ícones da barra de ferramentas, permitem que determinadas construções se tornem rápidas.

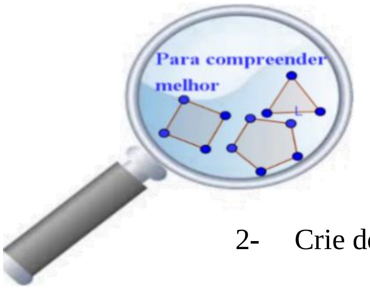
A seguir, no quadro 1, da página seguinte, apresentamos alguns dos blocos de ferramentas do software GeoGebra, relativos à janela de visualização 2D, que compreende dentre as possibilidades, a construção de pontos, retas e polígonos, juntamente com a descrição e indicação de algumas ferramentas que serão utilizadas nessa oficina.

Quadro 1 - Localização e descrição de blocos de ícones de algumas ferramentas do GeoGebra

<table>
<tr><th>Blocos de Ferramentas</th><th>Descrição</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Nesse bloco, ambas opções permitem a movimentação das construções.
Desse bloco de ferramentas, faremos uso da ferramenta **Mover** </td></tr>
<tr><td>
</td><td>Nesse bloco, as ferramentas são relativas a construção de pontos. Como por exemplo, a construção de novos pontos, criação de pontos em construções ou mesmo pontos de intersecção e pontos médios.
Desse bloco de ferramentas, faremos uso da ferramenta **Ponto** .</td></tr>
<tr><td>
</td><td>As ferramentas desse bloco contemplam a construção de retas, segmentos de reta, semirretas, caminhos poligonais e vetores.
Desse bloco de ferramentas, faremos uso de três ferramentas:
Reta 
Segmento 
Semirreta </td></tr>
<tr><td>
</td><td>Nesse bloco, as ferramentas são relativas a construção de polígonos. Utilizaremos dentre elas, a ferramenta **Polígono** .</td></tr>
<tr><td>
</td><td>As ferramentas desse bloco contemplam de modo geral, medidas envolvendo ângulos, distâncias, comprimento ou perímetros e áreas, bem como, medidas de inclinação de retas.
Desse bloco de ferramentas, faremos uso de duas ferramentas:
Ângulo 
Distância, Comprimento ou Perímetro </td></tr>
</table>

Fonte: As autoras

Atividade 1.0

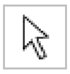


Construção de uma reta, semirreta e segmento de reta

1- Abra o arquivo “Atividade 1.0-reta e segmento de reta” contida na pasta Poliedros – possiblidades com o GeoGebra.

2- Crie dois pontos A e B na janela de visualização.

3- Construa uma reta selecionando os pontos A e B. Observe que o software nomeou essa reta com a letra f.

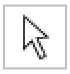
4- Clique na ferramenta mover  e selecione a reta que você construiu.

5- Clique com o botão direito do mouse em cima da reta que você construiu e clique no item propriedades.

6- Em seguida selecione a janela “cor” e escolha a cor vermelha para a sua reta e na janela “estilo” altere a espessura da reta para 5.

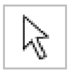
7- Crie outros dois pontos C e D quaisquer na tela do GeoGebra.

8- Construa um segmento de reta selecionando os pontos que você criou no passo 7.

9- Clique na ferramenta mover  e selecione a semirreta que você construiu

10- Clique com o botão direito do mouse no item propriedades, em cima da semirreta que você construiu e escolha no item propriedades.

11- Selecione a janela “cor” e escolha a cor verde para esse segmento de reta e na janela “estilo” altere a espessura do segmento de reta para 5.

12- Agora, clique na ferramenta mover  e movimente os pontos das suas construções e responda:

A- Que característica você observou na reta? Explique.

____

____

B- Que característica você observou no segmento de reta? Explique.

____

____

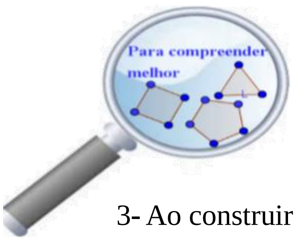
C- O segmento de reta possui início e fim? Explique.

____

D - Como são chamados os pontos que determinam o início e o fim do segmento? ____ Com a tela do GeoGebra aberta, clique no item arquivo, na opção Gravar Como e salve o arquivo acrescentando seu nome e de seu colega de dupla, na pasta “Os Poliedros - possibilidades com o GeoGebra”, que está na área de trabalho. Ex: Atividade 1.0- reta e segmento de reta– Franciele e Celia.

Atividade 2.0

Construção de três formas geométricas que conheço



1- Abra o arquivo **“Atividade 2.0 – formas geométricas”** contida na pasta Poliedros – possiblidades com o GeoGebra.

2- Utilize a ferramenta polígono para a construção de três exemplos de formas geométricas.

3- Ao construir seu polígono você deve clicar, para terminá-lo voltar a clicar no ponto que foi criado em primeiro lugar.

Após a construção, responda as questões a seguir:

A- Qual o nome dos polígonos que você construiu?

____

____

B- Como se chamam os pontos utilizados para a construção desses polígonos?

____

____

C- Como se chamam os segmentos de retas que formaram os polígonos construídos?

____

____

D- Se você fosse ensinar um colega a construir no GeoGebra uma das formas geométricas que você obteve, qual seria o passo-a-passo que você solicitaria? Escreva nas linhas a seguir.

____

____

____

Em seguida**,** salve na pasta da oficina, o arquivo **“atividade 2.0 – formas geométricas**” acrescentando seu nome e de seu colega de dupla. Exemplo: Atividade 2 – formas geométricas - FrancieleCelia.ggb

Atividade 3.0, 3.1 e 3.2

Os polígonos e não polígonos, reconfiguração e tangran

Abra o arquivo "**Atividade 3.0 - Polígonos e não polígonos"** faça o que se pede na tela do GeoGebra e depois, responda a seguinte questão:

A - Quais características possuem as figuras que você separou no grupo dos polígonos? E quais características você observou no grupo dos não polígonos?

____

____

Após concluir a atividade, salve na pasta da oficina, o arquivo **"Atividade 3.0 - Polígonos e não polígonos"** acrescentando seu nome e de seu colega de dupla. Exemplo: Atividade 3.0 - Polígonos e não polígonos – Franciele e Celia.ggb

Abra o arquivo no GeoGebra "**Atividade 3.1- Reconfiguração"**, leia as instruções contidas no arquivo e após concluir a atividade, salve o arquivo 3.1 Reconfiguração na pasta da oficina, acrescentando seu nome e de seu colega de dupla. Exemplo: Atividade 3.1 – Franciele e Celia.ggb

Abra o arquivo no geogebra "**Atividade 3.2- Tangran",** leia as instruções contidas no arquivo e após concluir a atividade, salve o arquivo "Atividade 3.2 Tangran" na pasta da oficina, acrescentando seu nome e de seu colega de dupla. Exemplo: Atividade 3.2 Tangran- Franciele e Celia.ggb

Atividades 4.0, 4.1 e 4.2

Os Polígonos: seus elementos e nomenclatura, polígonos regulares e não regulares.

Abra o arquivo "**atividade 4.0 - Elementos de um polígono**." A tela exibirá a opção para clicar em 4 itens.

Ao clicar sobre cada um dos itens, você será desafiado a relembrar alguns dos elementos que compõem um polígono.

Procure responder cada um dos itens, observando as figuras.

Após concluir a atividade, grave o arquivo "Atividade 4.0 Elementos de um polígono" na pasta da oficina, acrescentando o seu nome e de seu colega de dupla. Ex: Atividade 4.0 Elementos de um polígono - Franciele e Celia.ggb

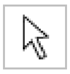
Classificação dos polígonos quanto ao número de lados e ângulos

Atividades 4.1 e 4.2

A partir do número de lados ou ângulos, os polígonos recebem uma classificação. Abra a **“atividade 4.1- quantos lados vértices e ângulos?”**, e responda às questões da tela do GeoGebra referentes ao hexágono. Após concluir a atividade, grave o arquivo “Atividade 4.1 quantos lados, vértices e ângulos” na pasta da oficina, acrescentando o seu nome e de seu colega de dupla. Ex: Atividade 4.1 quantos lados, vértices e ângulos - Franciele e Celia.ggb

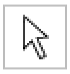
Polígonos regulares e não regulares

Abra o arquivo **“Atividade 4.2 - polígonos regulares e não regulares”.** Ao abrir a atividade 4, você (s) tem a opção de selecionar três itens. Selecione **o item 1** – triângulos, em seguida, proceda conforme orientações a seguir:

- Verifique a medida de cada um dos lados dos triângulos.
- Clique na ferramenta mover  e movimente os vértices dos dois triângulos Em seguida, responda:

A- . Quais diferenças você percebe entre os triângulos? Que alterações ocorrem nas medidas dos lados dos triângulos? Explique nas linhas abaixo.

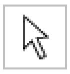
Depois, selecione o item 2 – quadriláteros e proceda conforme orientações a seguir.

- Verifique a medida de cada um dos lados dos quadriláteros. Para isso, clique sobre cada um dos lados.
- Clique na ferramenta Mover  e movimente os vértices dos quadriláteros. Em seguida, responda:

B- Quais diferenças você percebe entre cada quadrilátero? Que alterações ocorrem nas medidas dos lados dos quadriláteros? Explique nas linhas abaixo.

Agora selecione o item 3 – Pentágonos e proceda conforme orientações a seguir.

- Verifique a medida de cada um dos lados dos pentágonos. Para isso, clique sobre cada um dos lados.

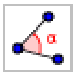
- Clique na ferramenta mover  e movimente os vértices dos dois triângulos Em seguida, responda:

C- Quais diferenças você percebe entre os pentágonos? Que alterações ocorrem nas medidas dos lados dos pentágonos? Explique nas linhas abaixo.

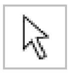
Medida dos ângulos internos de um polígono

Ainda na atividade 4.2 – Polígonos Regulares e não regulares que você abriu, proceda com o passo-a-passo a seguir e procure responder as questões propostas.

Passo-a-passo:

1- Selecione a ferramenta Ângulo  e **no sentido horário** clique sobre os vértices A, B e C do triângulo da cor azul . O GeoGebra exibirá a medida do ângulo $A\hat{B}C$.

2- Proceda da mesma maneira para **todos os ângulos internos** de cada um dos triângulos.

3- Clique na ferramenta Mover 

D- Movimente os vértices dos dois triângulos. O que você observou em relação às medidas dos ângulos de cada deles?

Posteriormente, efetue a medida de todos os ângulos internos tanto dos quadriláteros, quanto dos pentágonos.

E- Movimente os vértices dos quadriláteros. Quais alterações você percebeu em relação aos ângulos em cada um dos quadriláteros?

F- Movimente os vértices dos pentágonos. Quais alterações você percebeu em relação aos ângulos em cada um dos pentágonos?

____

____

No grupo de figuras dessa atividade 4.1 existem alguns polígonos regulares.

G- Escreva nas linhas abaixo quais são os polígonos regulares contidos nessa atividade e quais são as características que eles possuem.

Item 1____

Item 2____

Item 3____

Características observadas: ____

____

Após concluir a atividade, grave o arquivo Atividade 4.2 - polígonos regulares e não regulares, na pasta da oficina, acrescentando o seu nome e de seu colega de dupla. Exemplo: Atividade 4.1 – polígonos – Franciele e Celia.ggb

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA

Programa de Pós-Graduação em Educação
Mestrado e Doutorado

Nome dos alunos (as): ____

OFICINA os poliedros: Possibilidades com o GeoGebra.

ATIVIDADES DA SEGUNDA ETAPA

Poliedros: pirâmides, prismas e poliedros regulares

Atividades 5.0, elementos de um poliedro

Abra o arquivo do GeoGebra, "**Atividade 5.0 – elementos de um poliedro"**. Clique em cada item e responda na tela do GeoGebra o que se pede.
Após terminar a atividade, grave o arquivo acrescentando seu nome e de seu colega de dupla. Ex. Atividade 5.0 - elementos de um poliedro – Franciele e Celia.ggb.

Atividades 5.1, características de alguns poliedros em relação às faces, arestas e vértices

Abra a atividade 5.1 – pirâmide, cubo e tetraedro e siga as instruções a seguir:

1- Pinte de verde, as faces que se encontram na aresta AJ da pirâmide.
2- Pinte de amarelo, as faces que se encontram na aresta KN do tetraedro.
3- Pinte de azul, as faces que se encontram na aresta VW do cubo.

Quantas faces você pintou:

Na pirâmide: ____ No tetraedro: ____ No cubo:_____

Responda as questões a seguir:

A- Como é formada a aresta de um poliedro?

____

____

B- Qual elemento do poliedro está diretamente relacionado com a aresta?

____

Agora, siga as instruções a seguir:

1- Escolha uma cor de sua preferência, e pinte todas as arestas que se encontram no vértice J da pirâmide.

Quantas arestas você pintou no vértice J da pirâmide? _____

O número de arestas que se encontram nos demais vértices da pirâmide é o mesmo que do vértice J?

____

____

2- Escolha uma cor de sua preferência, e pinte todas as arestas que se encontram no vértice N do tetraedro.

Quantas arestas você pintou no vértice N do tetraedro? _____

O número de arestas que se encontram nos demais vértices do tetraedro é o mesmo que do vértice N?

____

____

3- Escolha uma cor de sua preferência, e pinte todas as arestas que se encontram no vértice Y do cubo.

Quantas arestas você pintou no vértice Y do cubo? _____

O número de arestas que se encontram nos demais vértices do cubo é o mesmo que do vértice Y?

____

____

Agora, responda a seguinte questão:

A- Como é formado o vértice de um poliedro?

____

____

B – Há algum poliedro regular nessa atividade? Explique a sua resposta.

____

____

Após concluir as atividades, salve na pasta da oficina, o arquivo “atividade 5.1 – pirâmide, cubo e tetraedro”, acrescentando seu nome e de seu colega de dupla. Exemplo: atividade 5.1 – pirâmide, cubo e tetraedro – Franciele e Celia.ggb

Atividade 5.2 – cubo e paralelepípedo

Abra o arquivo de nome **“atividade 5.2 – cubo e paralelepípedo”** e responda as questões da interface do GeoGebra. Após concluir as atividades, salve na pasta da oficina, o arquivo “Atividade 5.1 – cubo e paralelepípedo” acrescentando seu nome e de seu colega de dupla. Exemplo: Atividade 5.2 – cubo e paralelepípedo – Franciele e Celia.ggb

A - Que características você observou nos poliedros regulares contidos nas atividades anteriores?

Atividade 6.0

Construção, nomeação dos cinco poliedros regulares e a Relação de Euler

Nessa etapa, construiremos cada um dos poliedros regulares em arquivos separados, para melhor analisarmos as características de cada um deles. Você receberá uma folha que contém um quadro semelhante a do quadro 1 abaixo, que deverá ser respondido após cada construção.

Quadro 342 - Análise do número de vértices, faces e arestas de cada poliedro regular

Nome do Poliedro	Formato das faces	Número de vértices (V)	Nº de faces (F)	Nº de arestas (A)

Fonte: As autoras

Construção do Tetraedro Regular

Abra o arquivo de nome "**Atividade 6.0 - Construção do Tetraedro".** Com a janela de visualização 3D selecionada, clique na ferramenta Tetraedro, localizada, por meio da figura 1 a seguir, no seguinte bloco de ferramentas:

Figura 356 - Localização da Ferramenta Tetraedro

Fonte: As autoras

1- Você deverá selecionar o plano (região em cinza da janela de visualização 3D) e em seguida, clicar em um ponto qualquer.

2- O poliedro a ser exibido será o tetraedro regular.

3- Efetue a contagem das **arestas e vértices**, modificando as cores de cada item. Para isso, clique na ferramenta Mover  e selecione um dos vértices do tetraedro.

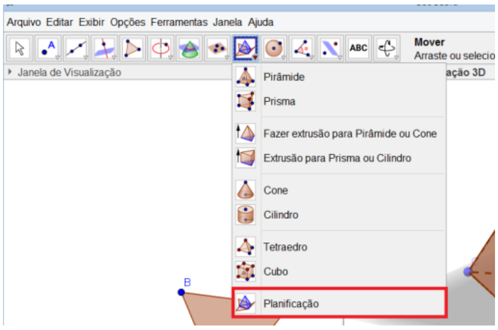
4- Clique, em cima do vértice e em seguida, clique no botão direito do *mouse* e escolha o item propriedades.

5- Em seguida, clique na opção cor e escolha uma cor de sua preferência.

Observação: Você deverá repetir os passos 04 e 05 tanto para os demais vértices, quanto para cada uma das arestas do tetraedro, pois, ao alterar as cores, facilita a contagem para o preenchimento do quadro.

6- Para a contagem das **faces**, com a janela de visualização 3D ativada, clique na ferramenta Planificação que é encontrada, no grupo de ferramentas da janela de visualização 3D. A figura 2 a seguir, mostra a localização da ferramenta por meio do destaque em vermelho:

Figura 7 - Localização da ferramenta Planificação do GeoGebra 3D



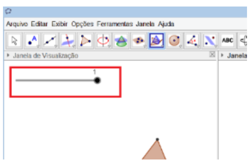
Fonte: As autoras

7- Ao clicar na ferramenta de planificação, selecione o tetraedro.

8- Você irá observar que na janela de visualização 2D, apareceram outras figuras geométricas, além de um item que é chamado de controle deslizante.

A figura 3 a seguir, mostra o controle deslizante destacado pelo contorno em vermelho:

Figura 368 - Ferramenta controle deslizante do GeoGebra



Fonte: As autoras

9- Clique na ferramenta Mover 

10- Movimente o controle deslizante ou os vértices do tetraedro e preencha o quadro.

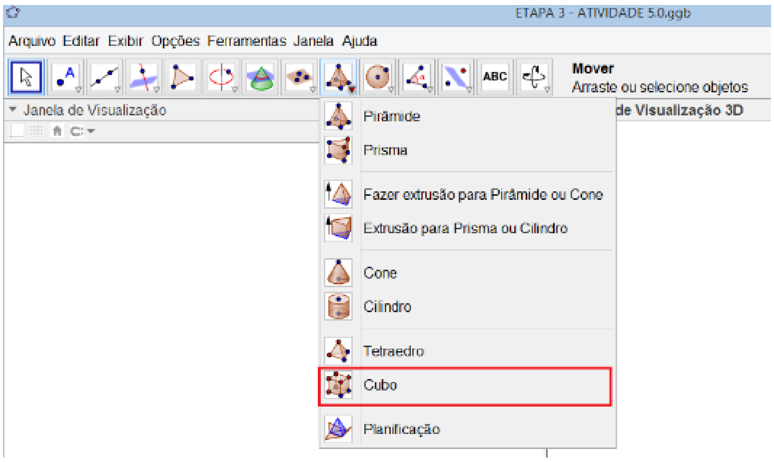
11- Grave o arquivo acrescentando seu nome e de seu colega de dupla e salve-o na pasta da Oficina.

Construção do Hexaedro Regular (cubo)

Abra o arquivo com o nome **"Atividade 6.0 - Construção do Hexaedro",** que está na pasta da Oficina e siga o passo-a-passo a seguir:

1- Com a janela 3D selecionada, clique na ferramenta Cubo, que pode ser localizada pela figura 4 a seguir:

Figura 9 - Localização da ferramenta Cubo

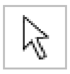


Fonte: As autoras

2- Você deverá selecionar o plano (região em cinza da janela de visualização 3D) e, em seguida, clicar em um ponto qualquer.

3- O poliedro a ser exibido será o hexaedro regular (cubo).

4- Efetue a contagem das **arestas e vértices**, modificando as cores de cada item. Os passos 5 e 6 a seguir, mostram como alterar a cor de um vértice.

5- Clique na ferramenta mover  e selecione um dos vértices do hexaedro.

6- Clique com o botão direito do *mouse* no item propriedades, em cima do vértice e escolha o item propriedades.

7- Em seguida, clique na opção cor e escolha uma cor de sua preferência.

Você deverá repetir esses passos tanto para os demais vértices, quanto para cada uma das arestas do hexaedro, para facilitar a sua contagem e preenchimento do quadro.

8- Para a contagem das **faces**, com a janela de visualização 3D ativada, clique na ferramenta Planificação e selecione o cubo.

9- Movimente tanto o controle deslizante, quanto os vértices, faces ou arestas, o quanto achar necessário para completar o quadro entregue.

10- Grave o arquivo acrescentando seu nome e de seu colega de dupla e salve-o na pasta da Oficina.

Construção do Octaedro Regular

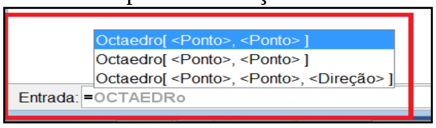
Abra o arquivo com o nome “**Atividade 6.0 - Construção do octaedro**”, que está na pasta da Oficina e siga o passo-a-passo a seguir:

1- Na janela de visualização 2D, crie dois pontos (A e B)

2- No campo de entrada, digite o seguinte comando =OCTAEDRO.

3- Aparecerão três opções neste comando, conforme a figura 5 abaixo ilustra:

Figura 3710 - Comando para construção do Octaedro no GeoGebra



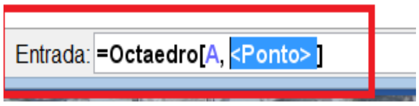
Fonte: As autoras

4- Você deve selecionar com o *mouse* a primeira opção: =Octaedro[<Ponto>, <Ponto>]

5- No lugar do primeiro item <Ponto>, coloque a letra A, que se refere ao primeiro ponto criado no passo 1.

A figura 6 a seguir, ilustra a situação:

Figura 11- Construção do Octaedro no campo de entrada do Geogebra

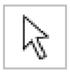


Fonte: As autoras

6- Pela figura 11 acima, é possível verificar que o segundo item <Ponto> está selecionado. Coloque a letra B, pois representa o ponto B criado no passo 1 anterior.

7- O poliedro a ser exibido será o octaedro regular.

8- Efetue a contagem das **arestas e vértices**, modificando as cores de cada item. Os passos 9 e 10 a seguir, mostram como alterar a cor de um vértice.

9- Clique na ferramenta Mover  e selecione um dos vértices do octaedro.

10- Clique com o botão direito do *mouse* no item propriedades, em cima do vértice e escolha o item propriedades.

11- Em seguida, clique na opção cor e escolha uma cor de sua preferência.

Você deverá repetir esses passos tanto para os demais vértices, quanto para cada uma das arestas do octaedro, para facilitar a sua contagem e preenchimento do quadro.

12- Para a contagem das **faces**, com a janela de visualização 3D ativada, clique na ferramenta Planificação e selecione o octaedro.

13- Você irá observar que na janela de visualização 2D, apareceram outras figuras geométricas, além do controle deslizante.

14- Clique na ferramenta Mover.

15- Movimente tanto o controle deslizante, quanto os vértices, faces ou arestas, o quanto achar necessário, e complete o quadro.

16- Grave o arquivo acrescentando seu nome e de seu colega de dupla e salve-o na pasta da Oficina.

Construção do Dodecaedro Regular

Abra o arquivo com o nome "**Atividade 6.0 - construção do dodecaedro**", que está na pasta da Oficina e siga o passo-a-passo a seguir:

1- Na janela de visualização 2D, crie dois pontos (A e B)

2- No campo de entrada, digite o seguinte comando =DODECAEDRO.

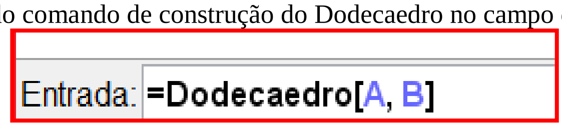
3- Clique na primeira opção: =DODECAEDRO[<Ponto>, <Ponto>]

4- Substitua o primeiro item <Ponto> por A, que indica o ponto A que você criou no passo 1.

5- Substitua o segundo item <Ponto> por B.

A figura 7 a seguir, mostra a interface do comando:

Figura 12 - Interface do comando de construção do Dodecaedro no campo de entrada do Geogebra



Fonte: As autoras

6- O poliedro a ser exibido será o dodecaedro regular.

7- Efetue a contagem das **arestas e vértices**, modificando as cores de cada item. Os passos 8 e 9 a seguir, mostram como alterar a cor de um vértice.

8- Clique na ferramenta Mover e selecione um dos vértices do dodecaedro.

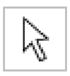
9- Clique em cima do vértice e clique no botão direito do *mouse* escolhendo o item propriedades.

10- Em seguida, clique na opção cor e escolha uma cor de sua preferência.

Você deverá repetir esses passos tanto para os demais vértices, quanto para cada uma das arestas do dodecaedro, para facilitar a sua contagem e preenchimento do quadro.

11- Para a contagem das **faces**, com a janela de visualização 3D ativada, clique na ferramenta Planificação e selecione o dodecaedro.

12- Você irá observar que na janela de visualização 2D, apareceram outras figuras geométricas, além do controle deslizante.

13- Clique na ferramenta Mover 

14- Movimente tanto o controle deslizante, quanto os vértices, faces ou arestas, o quanto achar necessário, e complete o quadro 4 acima com as informações sobre o dodecaedro.

15- Grave o arquivo acrescentando seu nome e de seu colega de dupla e salve-o na pasta da Oficina.

Construção do Icosaedro Regular

Abra o arquivo com o nome "**Atividade 6.0 - construção do icosaedro**", que está na pasta da Oficina e siga o passo-a-passo a seguir:

1- Na janela de visualização 2D, crie dois pontos (A e B)

2- No campo de entrada, digite o seguinte comando =ICOSAEDRO.

3- Clique na primeira opção: =ICOSAEDRO[<Ponto>, <Ponto>]

4- Substitua o primeiro item <Ponto> por A, que indica o ponto A que você criou no passo 1.

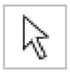
5- Substitua o segundo item <Ponto> por B. A figura 8 a seguir, mostra a interface do comando:

Figura 13 - Interface do comando de construção do Icosaedro no campo de entrada do Geogebra

Fonte: As autoras

6- O poliedro a ser exibido será o icosaedro regular.

7- Efetue a contagem das **arestas e vértices**, modificando as cores de cada item. Os passos 8 e 9 a seguir, mostram como alterar a cor de um vértice.

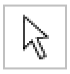
8- Clique na ferramenta mover  e selecione um dos vértices do icosaedro.

9- Clique com o botão direito do *mouse* no item propriedades, em cima do vértice e escolha o item propriedades.

10- Em seguida, clique na opção cor e escolha uma cor de sua preferência.

Você deverá repetir esses passos tanto para os demais vértices, quanto para cada uma das arestas do dodecaedro, para facilitar a sua contagem e preenchimento do quadro.

11- Para a contagem das **faces**, com a janela de visualização 3D ativada, clique na ferramenta Planificação e selecione o icosaedro.

12- Clique na ferramenta Mover 

13- Movimente tanto o controle deslizante, quanto os vértices, faces ou arestas, o quanto achar necessário, e complete o quadro 4 acima com as informações sobre o dodecaedro.

14- Grave o arquivo acrescentando seu nome e o do seu colega de dupla e salve-o na pasta da Oficina.

Após ter completado o quadro, observe os resultados que você obteve e responda aos seguintes questionamentos:

A – Como você conseguiu contar o número de faces, vértices e arestas dos poliedros regulares? Explique.

____

____

B- É possível identificar algum tipo de relação, atribuída ao número de vértices e faces, com o número de arestas de cada poliedro regular? Descreva com suas palavras.

____

____

C- Tente somar o número de vértices e faces de cada poliedro regular. Compare com o número de arestas. Você consegue verificar alguma relação? Explique.

____

____