

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA – PROFMAT

LINOEL BATISTA LANHOSO

ANÁLISE DOS NÍVEIS DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DOS ESTUDANTES
INGRESSANTES EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA NA
PERSPECTIVA DE VAN HIELE

PONTA GROSSA
2020

LINOEL BATISTA LANHOSO

ANÁLISE DOS NÍVEIS DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DOS ESTUDANTES
INGRESSANTES EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA NA
PERSPECTIVA DE VAN HIELE

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional, Setor de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Luciane Grossi

Ponta Grossa
2020

L287 Lanhoso, Linoel Batista
Análise dos níveis do pensamento geométrico dos estudantes ingressantes em um curso de licenciatura em matemática na perspectiva de van hiele. / Linoel Batista Lanhoso. Ponta Grossa, 2021.

156 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientadora: Profa. Dra. Luciane Grossi.

1. Geogebra. 2. Tecnologias digitais. 3. Ensino de geometria. I. Grossi, Luciane. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Matemática. III.T.

CDD: 510.7



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
Av. General Carlos Cavalcanti, 4748 - Bairro Uvaranas - CEP 84030-900 - Ponta Grossa - PR - <https://uepg.br>

TERMO DE APROVAÇÃO

LINOEL BATISTA LANHOSO

“ANÁLISE DOS NÍVEIS DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DOS ESTUDANTES INGRESSANTES EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DE VAN HIELE”

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Ponta Grossa 14 de dezembro de 2020.

Membros da Banca:

Profa. Dra. Luciane Grossi (UEPG) – Presidente

Profa. Dra. Fabiane de Oliveira (UEPG)

Profa. Dra. Nilcéia Aparecida Maciel Pinheiro (UTFPR)



Documento assinado eletronicamente por **Fabiane Oliveira, Professor(a)**, em 04/03/2021, às 16:48, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



Documento assinado eletronicamente por **Luciane Grossi, Professor(a)**, em 04/03/2021, às 17:20, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



Documento assinado eletronicamente por **Adriana Aparecida Telles, Secretário(a)**, em 04/03/2021, às 17:39, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



A autenticidade do documento pode ser conferida no site <https://sei.uepg.br/autenticidade> informando o código verificador **0420225** e o código CRC **0219049D**.

*Dedico este trabalho a minha família,
minha Mãe Vera e meu Pai Noel.
Vocês foram minha maior força de
vontade, foco e determinação.*

Agradeço a Deus pelas diversas oportunidades que me concedeu nesta vida.

Agradeço aos meus pais por estarem presentes em todos os momentos de minha vida, me amparando me ensinando me corrigindo me incentivando a seguir em frente, obrigado por tudo.

A minha orientadora, Professora Doutora Luciane Grossi, pela confiança na proposta de pesquisa, por dedicar seu tempo orientando-me e guiando-me nos caminhos da pesquisa.

RESUMO

Não é novidade que a Matemática é considerada por muitos como difícil e abstrata, e a geometria se destaca entre os conteúdos temidos da matemática, seja pelas dificuldades dos professores em ensiná-las ou pelos alunos em compreendê-los. O ensino de geometria é tema de pesquisa a mais de 30 anos, e continua atual, sendo objeto de estudo para entender o desenvolvimento do pensamento geométrico ou abordada por meio de tecnologias digitais, metodologias e recursos diferenciados. Dessa forma a presente pesquisa teve por finalidade investigar o nível do pensamento geométrico dos acadêmicos ingressantes no primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Pública do Paraná, tendo como fundamentação teórica a Teoria de Van Hiele. Para tanto utilizou-se dos próprios aparelhos celulares dos estudantes para a realização de atividades desenvolvidas com o aplicativo GeoGebra para Android. Esta pesquisa teve abordagem qualitativa de natureza exploratória e desenvolveu-se pela participação dos acadêmicos no desenvolvimento de 19 atividades divididas em 4 níveis: nível 0 (visualização), nível 1 (análise), nível 2 (dedução informal) e nível 3 (dedução formal) e as correspondentes habilidades indicadas no referencial teórico. Pela análise realizada com os dados coletados das resoluções das atividades, pode-se concluir que os participantes atingiram o nível 1, sendo a habilidade gráfica a mais desenvolvida e a lógica necessitando ser aprimorada. Para os níveis 2 e 3, a quantidade de atividades entregues das duas turmas foi bem abaixo do esperado e devido à pouca representatividade da amostra, as inferências apontadas nestes níveis não podem ser generalizadas às turmas. Os resultados quanto às habilidades dos níveis 2 e 3 mais e menos desenvolvidas parecem permanecer iguais aos níveis anteriores. Nessa pequena amostra os acadêmicos apresentam as habilidades parcialmente desenvolvidas em relação aos níveis 2 e 3 do desenvolvimento do pensamento geométrico, porém nos chama a atenção que no nível 3 a habilidade lógica ficou zerada. Os resultados apresentados se mostram preocupantes pois estas defasagens apresentadas podem prejudicar os estudantes em conteúdos futuros e até mesmo nas futuras aulas que estes acadêmicos irão ministrar. Por fim destacamos a importância do desenvolvimento de estudos que utilizem a Teoria de Van Hiele, pois essa possibilita uma melhor compreensão do pensamento geométrico dos estudantes e assim facilitar a tomadas de decisões em sala de aula, com foco na aprendizagem dos conceitos em Geometria.

Palavras-chave: GeoGebra, Tecnologias digitais, Ensino de Geometria.

ABSTRACT

It is not new that Mathematics is considered by many to be difficult and abstract, and geometry stands out among the dreaded contents of mathematics, whether due to the difficulties of teachers in teaching them or by students in understanding them. The teaching of geometry has been the subject of research for over 30 years, and remains current, being the object of study to understand the development of geometric thinking or addressed through digital technologies, methodologies and differentiated resources. Thus, the present research aimed to investigate the level of geometric thinking of students entering the first year of the Bachelor's Degree in Mathematics at a Public University of Paraná, with Van Hiele's Theory as its theoretical foundation. For this purpose, students' own cell phones were used to carry out activities developed with the GeoGebra application for Android. This research has a qualitative approach of exploratory nature and was developed through the participation of academics in the development of 19 activities divided into 4 levels: level 0 (visualization), level 1 (analysis), level 2 (informal deduction) and level 3 (formal deduction) and the corresponding skills indicated in the theoretical framework. From the analysis carried out with the data collected from the activity resolutions, it can be concluded that the participants reached level 1, with the graphic skill being the most developed and the logic needing to be improved. For levels 2 and 3, the number of activities delivered by the two classes was well below expectations and due to the low representativeness of the sample, the inferences pointed out at these levels cannot be generalized to the classes. The results regarding the skills of levels 2 and 3 more and less developed seem to remain the same as the previous levels. In this small sample, academics show the skills partially developed in relation to levels 2 and 3 of the development of geometric thinking, but it is noteworthy that in level 3, the logical ability was zeroed. The results presented are worrisome because these lags can harm students in future content and even in future classes that these academics will teach. Finally, we highlight the importance of developing studies that use Van Hiele's Theory, as it enables a better understanding of students' geometric thinking and thus facilitates decision making in the classroom, with a focus on learning the concepts in Geometry.

Key-Words: GeoGebra, Digital Technologies, Geometry Teaching.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1	Figura exemplo para o desenvolvimento do nível 0.....	48
Figura 3.2	Possível resolução para o nível 0.....	49
Figura 3.3	Exemplo de atividade para o nível 1.....	50
Figura 3.4	Possível solução para a atividade do nível 1.....	50
Figura 3.5	Possível solução para a atividade do nível 2.....	51
Figura 3.6	Exemplo de atividade do nível 3.....	51
Figura 3.7	Exemplo de solução para uma atividade do nível 3.....	52
Figura 3.8	Visão geral do <i>software</i> GeoGebra.....	55
Figura 4.1	Ilustração da tela do dispositivo móvel com o processo de download do GeoGebra.....	58
Figura 4.2	Exemplo de atividade: construindo um triângulo e medindo seus lados e ângulos.....	59
Figura 4.3	Atividade 1 N0H1- Nível 0 Habilidade Verbal.....	61
Figura 4.4	Atividade 1 N0H1- Nível 0 Habilidade Verbal. (Roteiro de atividades)	61
Figura 4.5	Atividade 2 N0H2 - Nível 0 Habilidade Visual. (Roteiro de atividades).	62
Figura 4.6	Atividade 2 N0H2 - Nível 0 Habilidade Visual.....	62
Figura 4.7	Atividade 3 N0H3 - Nível 0 Habilidade Gráfica.....	63
Figura 4.8	Atividade 3 N0H3 - Nível 0 Habilidade Gráfica. (Roteiro de atividades)	63
Figura 4.9	Atividade 4 - N0H4 - Nível 0 Habilidade Lógica.....	64
Figura 4.10	Atividade 4 - N0H4 - Nível 0 Habilidade Lógica.....	64
Figura 4.11	Atividade 5 N0H5 - Nível 0 Habilidade Aplicação.....	65
Figura 4.12	Atividade 5 N0H5 - Nível 0 Habilidade Aplicação. (Roteiro de Atividades)	65
Figura 4.13	Atividade 6 N1H1 - Nível 1 Habilidade Verbal.....	66
Figura 4.14	Atividade 6 N1H1 - Nível 1 Habilidade Verbal. (Roteiro de Atividades)	66
Figura 4.15	Atividade 7 N1H2 - Nível 1 Habilidade Visual.....	67

Figura 4.16	Atividade 7 N1H2 - Nível 1 Habilidade Visual. (Roteiro de atividades)	67
Figura 4.17	Atividade 7 N1H3 - Nível 1 Habilidade Gráfica. (Roteiro de atividades)	67
Figura 4.18	Atividade 9 N1H4 - Nível 1 Habilidades Lógica e Aplicação....	68
Figura 4.19	Atividade 9 N1H4 - Nível 1 Habilidades Lógica e Aplicação. (Roteiro de Atividades)	68
Figura 4.20	Atividade 10 N2H1 - Nível 2 Habilidade Visual.....	69
Figura 4.21	Atividade 10 N2H1 - Nível 2 Habilidade Visual. (Roteiro de Atividades)	69
Figura 4.22	Atividade 11 N2H2 - Nível 2 Habilidade Verbal.....	70
Figura 4.23	Atividade 11 N2H2 - Nível 2 Habilidade Verbal. (Roteiro de atividades)	70
Figura 4.24	Atividade 12 N2H3 - Nível 2 Habilidade Gráfica.....	71
Figura 4.25	Atividade 12 N2H3 - Nível 2 Habilidade Gráfica. (Roteiro de atividades)	71
Figura 4.26	Atividade 13 N2H4 - Nível 2 Habilidade Lógica.....	72
Figura 4.27	Atividade 13 N2H4 - Nível 2 Habilidade Lógica. (Roteiro de Atividades)	72
Figura 4.28	Atividade 14 N2H5 - Nível 2 Habilidade Aplicação.....	73
Figura 4.29	Atividade 14 N2H5 - Nível 2 Habilidade Aplicação. (Roteiro de Atividades)	73
Figura 4.30	Atividade 15 N3H1 - Nível 3 Habilidade Visual.....	74
Figura 4.31	Atividade 15 N3H1 - Nível 3 Habilidade Visual.....	75
Figura 4.32	Atividade 16 N3H2 - Nível 3 Habilidade Verbal.....	75
Figura 4.33	Atividade 16 N3H2 - Nível 3 Habilidade Verbal. (Roteiro de Atividades)	76
Figura 4.34	Atividade 17 N3H3 - Nível 3 Habilidade Gráfica. (Roteiro de Atividades)	76
Figura 4.35	Atividade 18 N3H4 - Nível 3 Habilidade Lógica. (Roteiro de Atividades)	77
Figura 4.36	Atividade 18 N3H4 - Nível 3 Habilidade Lógica.....	77
Figura 4.37	Atividade 19 N3H5 - Nível 3 Habilidade Aplicação.....	78

Figura 4.38	Atividade 19 N3H5 - Nível 3 Habilidade Aplicação. (Roteiro de Atividades)	78
Figura 5.1	Atividade N0H1. Agrupamento equivocado.....	81
Figura 5.2	Atividade N0H1. Justificativa equivocada.....	81
Figura 5.3	Atividade N0H1. Agrupamento quanto aos lados.....	82
Figura 5.4	Atividade N0H1. Agrupamento quanto aos ângulos.....	82
Figura 5.5	Atividade N0H1. Agrupamento quanto aos ângulos.....	83
Figura 5.6	Atividade N0H2.....	84
Figura 5.7	Atividade N0H2. Agrupamento do estudante A53 – Turma NY.	85
Figura 5.8	Atividade N0H2. Agrupamento do estudante A57.....	85
Figura 5.9	Atividade N0H2. Estudante A26 – Turma NX	86
Figura 5.10	Atividade N0H3. Desenho do Estudante A15 – Turma NX.....	87
Figura 5.11	Atividade N0H3. Desenho estudante A17 representando uma caminhonete.....	88
Figura 5.12	Atividade N0H3.- Desenho do estudante A57 – Turma NY.....	88
Figura 5.13	Atividade N0H4. Representação sem coerência dos pares de retas.....	89
Figura 5.14	Atividade N0H4. Representação dos diversos pares de retas....	90
Figura 5.15	Atividade N0H4. Representação informal dos pares de retas utilizando as cores.....	90
Figura 5.16	Atividade N0H4. Representação informal dos pares de retas....	91
Figura 5.17	Atividade N0H5. Reposta coerente com a atividade.....	92
Figura 5.18	Atividade N0H5. Reposta não coerente com a atividade.....	92
Figura 5.19	Atividade N0H5. Reposta coerente com a atividade.....	93
Figura 5.20	Atividade N0H5. Reposta coerente com a atividade.....	93
Figura 5.21	Atividade N1H1. Representação de alguns polígonos marcados nas intersecções das retas.....	95
Figura 5.22	Atividade N1H1. Representação de alguns polígonos marcados nas intersecções das retas.....	95
Figura 5.23	Atividade N1H1. Representação de alguns polígonos marcados nas intersecções das retas.....	96
Figura 5.24	Atividade N1H1. Representação escrita de apenas um triângulo marcado nas intersecções das retas.....	96

Figura 5.25	Atividade N1H1. Representação de alguns polígonos marcados nas intersecções das retas.....	97
Figura 5.26	Atividade N1H2. Classificação totalmente coerente com a atividade.....	98
Figura 5.27	Atividade N1H2. Classificação com um triângulo no lugar errado.....	99
Figura 5.28	Atividade N1H2. Classificação com lugares trocados.....	99
Figura 5.29	Atividade N1H3. Polígono esperado pela atividade.....	101
Figura 5.30	Atividade N1H3. Polígono esperado pela atividade.....	101
Figura 5.31	Atividade N1H3. Polígono com apenas algumas propriedades coerentes.....	102
Figura 5.32	Atividade N1H4. Classificação em grupos de maneira adequada.....	104
Figura 5.33	Atividade N1H4. Classificação em grupos de maneira adequada (descrição no roteiro de atividades)	104
Figura 5.34	Atividade N1H4. Classificação com ângulos internos todos iguais, iguais aos pares e todos diferentes.....	105
Figura 5.35	Atividade N1H4. Classificação com ângulos internos todos iguais, iguais aos pares e todos diferentes descrita no roteiro de atividades.....	105
Figura 5.36	Atividade N1H4. Classificação com um polígono de maneira inadequada.....	106
Figura 5.37	Atividade N1H4. Classificação em ângulos retos e não retos....	106
Figura 5.38	Atividade N1H4. Classificação em ângulos retos e não retos. (Roteiro de atividades)	107
Figura 5.39	Atividade N1H4. Linguagem inapropriada para a classificação. (Roteiro de atividades)	107
Figura 5.40	Figura 5.40 - Atividade N2H1. Quadrado e losango com diagonais perpendiculares.....	109
Figura 5.41	Atividade N2H1. Resposta do estudante A41 no roteiro de atividades.....	110
Figura 5.42	Atividade N2H1. Resposta do estudante A04 O estudante confundiu as diagonais com os lados.....	112

Figura 5.43	Figura 5.43 - Atividade N2H1. Resposta do estudante A35.....	110
Figura 5.44	Figura 5.44 - Atividade N2H2. Resposta do estudante A19.....	112
Figura 5.45	Figura 5.45 - Atividade N2H2. Resposta do estudante A29.....	112
Figura 5.46	Figura 5.46 - Atividade N2H2. Resposta decepcionante do estudante A08.....	113
Figura 5.47	Atividade N2H2. Resposta do estudante A36.....	113
Figura 5.48	Atividade N2H3. Resposta adequada com a propriedade de possuir um ângulo de 120°	114
Figura 5.49	Atividade N2H3. Resposta adequada com a propriedade de possuir um ângulo de 120°	115
Figura 5.50	Atividade N2H3. Resposta no roteiro de atividades adequada com as expectativas.....	115
Figura 5.51	Atividade N2H3. Resposta adequada com as expectativas da atividade.....	115
Figura 5.52	Atividade N2H3. Interpretação equivocada do estudante A44.	116
Figura 5.53	Atividade N2H3. Interpretação equivocada do estudante A44.	116
Figura 5.54	Atividade N2H3. Construção de um polígono convexo.....	117
Figura 5.55	Atividade N2H3. Construção de um polígono convexo (Roteiro de atividades)	117
Figura 5.56	Atividade N2H4. Configuração de maior ocorrência entre os estudantes.....	118
Figura 5.57	Atividade N2H4. Configuração de maior ocorrência entre os estudantes (Roteiro de atividades)	119
Figura 5.58	Atividade N2H4. Configuração com a inclusão dos quadrados nos retângulos.....	119
Figura 5.59	Atividade N2H4. Configuração com a inclusão dos quadrados nos retângulos.....	119
Figura 5.60	Atividade N2H4. Configuração com um erro.....	120
Figura 5.61	Atividade N2H5. Identificação de quadrados e retângulos.....	122
Figura 5.62	Atividade N2H5. Descrição de diversos elementos matemáticos.....	122
Figura 5.63	Atividade N2H5. Identificação de retas e polígonos.....	122

Figura 5.64	Figura 5. 64 - Atividade N3H1. Processo de construção do baricentro.....	124
Figura 5.65	Figura 5.65 - Atividade N3H1. P é o baricentro.....	124
Figura 5.66	Atividade N3H1. Ferramentas do GeoGebra para marcação do baricentro.....	125
Figura 5.67	Atividade N3H1. Equívoco visual com a marcação da bissetriz.	125
Figura 5.68	Atividade N3H1. Resposta inadequada.....	126
Figura 5.69	Atividade N3H2. Descrição coerente com as expectativas para o ponto Q.....	127
Figura 5.70	Atividade N3H2. Construção coerente com as expectativas para o ponto Q.....	127
Figura 5.71	Atividade N3H2. Identificação coerente com as expectativas para o ponto Q.....	128
Figura 5.72	Atividade N3H2. Identificação de um triângulo isósceles formado com o ponto Q.....	128
Figura 5.73	Atividade N3H2. Equívoco de linguagem e Identificação para o ponto Q.....	129
Figura 5.74	Atividade N3H2. Equívoco de identificação de propriedades para o ponto Q.....	129
Figura 5.75	Atividade N3H3. Apresentação adequada para o trapézio pedido.....	130
Figura 5.76	Atividade N3H3. Apresentação equivocada com relação aos lados não paralelos.....	130
Figura 5.77	Atividade N3H3. Apresentação equivocada com relação à medida da base maior.....	131
Figura 5.78	Figura 5.78 - Atividade N3H4. Apresentação com argumentos insuficientes.....	132
Figura 5.79	Atividade N3H4. Apresentação com argumentos insuficientes.	132
Figura 5.80	Atividade N3H4. Apresentação com argumentos insuficientes.	132
Figura 5.81	Atividade N3H4. Apresentação com linguagem mais formalizada, mas com argumentos insuficientes.....	133
Figura 5.82	Atividade N3H5. Maneira coerente de construção do triângulo.	134
Figura 5.83	Atividade N3H5. Ajuste manual das medidas dos triângulos.....	134

Figura 5.84	Atividade N3H5. Ajuste manual das medidas dos triângulos.....	135
Figura 5.85	Atividade N3H5. Construção de forma estranha do triângulo.....	135
Figura 5.86	Atividade N3H5. Tentativa de construção do triângulo utilizando as três medidas como lados.....	136

LISTA DE QUADROS

Quadro 3.1	Relação entre o ano de estudo e as habilidades pertinentes a esta dissertação para os estudantes do Ensino Fundamental.	43
Quadro 3.2	Relação das habilidades pertinentes a esta dissertação para os estudantes do ensino médio.....	44
Quadro 3.3	Níveis da aprendizagem geométrica.....	46
Quadro 3.4	Níveis da teoria de Van Hiele e habilidades.....	47
Quadro 4.1	Identificações dos níveis e habilidades associados às atividades.....	60
Quadro 5.1	Resumo dos resultados apresentados para a atividade NOH4....	89

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1	Porcentagens dos tipos de respostas apresentadas para a atividade N0H2.....	84
Tabela 5.2	Resumo dos resultados obtidos para a atividade 6. (N1H1)	94
Tabela 5.3	Resumo das respostas para a atividade 7.....	98
Tabela 5.4	Resumo dos resultados da atividade 9.....	103
Tabela 5.5	Resumo das respostas apresentadas para atividade 10.....	109
Tabela 5.6	Percentual de estudantes das turmas NX e NY que descreveram os pares de circunferências com suas posições relativas.....	111
Tabela 5.7	Resumos das respostas apresentadas para a atividade 12.....	114
Tabela 5.8	Percentual das respostas apresentadas pelos estudantes para atividade 13. (N2H4)	118
Tabela 5.9	Percentual das respostas apresentadas pelos estudantes para atividade 14. (N2H5)	121
Tabela 5.10	Percentual das respostas apresentadas pelos estudantes para atividade 15. (N3H1)	123
Tabela 5.11	Percentuais das respostas apresentadas pelos estudantes para a atividade 16.....	126
Tabela 6.1	Resumo das atividades do nível 0.....	139
Tabela 6.2	Resumo das atividades do nível 1.....	140
Tabela 6.3	Resumo das atividades do nível 2.....	141
Tabela 6.4	Resumo das atividades do nível 3.....	142

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
DCE	Diretrizes Curriculares Estaduais
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
GDI	Geometria Dinâmica e Interativa
GTEM	Grupo de Pesquisa de Tecnologias Educacionais em Matemática
HQ	Histórias em Quadrinhos
LABEM	Laboratório de Educação Matemática
NUTEAD	Núcleo de Tecnologia em Educação a Distância
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
PROFMAT	Programa de Mestrado Profissional em Matemática
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PSS	Processo de Seleção Seletiva
RA	Registro Acadêmico
TD	Tecnologias Digitais
TDIC	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação
TIC	Tecnologia de Informação e Comunicação
TM	Tecnologia Móvel
UEPG	Universidade Estadual de Ponta Grossa
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	OBJETIVOS	21
1.1.1	Objetivo Geral	21
1.1.2	Objetivos Específicos	21
1.2	JUSTIFICATIVA	21
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	22
2	REVISÃO DE LITERATURA	23
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	38
3.1	A GEOMETRIA NOS DOCUMENTOS OFICIAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA	38
3.2	TEORIA DE VAN HIELE	45
3.3	TECNOLOGIAS EDUCACIONAIS	52
4	DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA	56
4.1	DELINEAMENTO DA PESQUISA	56
4.2	ETAPAS E ATIVIDADES	57
4.2.1	Etapa 1	57
4.2.2	Etapa 2	59
4.2.3	Atividades Desenvolvidas	60
5	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS	79
5.1	ANÁLISE DAS ATIVIDADES	80
5.1.1	Pensamento Geométrico - Nível Zero	80
5.1.2	Pensamento Geométrico - Nível Um	94
5.1.3	Pensamento Geométrico - Nível Dois	108
5.1.4	Pensamento Geométrico - Nível Três	123
6	CONCLUSÃO	137
6.1	DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	138
	REFERÊNCIAS	146
	APÊNDICE A – ROTEIRO DE ATIVIDADES	152

1 INTRODUÇÃO

A geometria é uma das subáreas da matemática que mais se faz presente no cotidiano de qualquer indivíduo, pois tudo ao seu redor exhibe formas geométricas. A criança desde pequena é estimulada por objetos e brinquedos que desenvolvem sua visão geométrica, seja pelos próprios formatos dos objetos que a cercam, quanto aos jogos que possuem encaixe de peças geométricas. Porém, no decorrer da educação básica e ensino médio, em muitos casos, a relação do indivíduo com a geometria pode mudar. Vários fatores estão envolvidos nessa mudança, em decorrência disso os estudantes acabam muitas vezes desenvolvendo até aversão a geometria.

Muitos estudantes apresentam dificuldades de visualização e abstração de propriedades do ente geométrico, por não terem desenvolvido certas habilidades que contribuem para o amadurecimento do pensamento geométrico. Mas em que momento a visão geométrica das formas planas e espaciais foram se perdendo? Quais habilidades não se desenvolveram? Como identificar se o estudante possui um nível de pensamento geométrico condizente com seu ano de escolaridade?

Desta maneira, observa-se várias dificuldades de entendimento de conceitos básicos da geometria por parte de estudantes de diversos níveis, desde o Ensino Fundamental ao Ensino Superior. Há um certo abandono dos conceitos matemáticos relacionados a geometria e suas aplicações. Diante desta inquietação é que surge meu¹ interesse por este tema.

Sou professor de matemática. Quanto ao interesse por essa profissão, provavelmente tive influências fortes da minha família. Minha mãe é professora e pedagoga da educação infantil e do Ensino Fundamental há 36 anos. Já aposentada continua trabalhando. Minha avó, já falecida, também atuou como professora do ensino fundamental por toda sua vida. Desde pequeno tive um ambiente escolar muito forte, convivendo com reuniões de professores, provas (que minha mãe levava para corrigir em casa), entre outros tantos exemplos.

Um fato interessante me ocorreu no 9º ano, quando tive um excelente professor de matemática, e que por várias vezes ele me incentivou para que eu pudesse aprimorar as ideias e conceitos matemáticos. Com certeza o método que ele me ensinou para aplicar o Teorema de Pitágoras, me deixou fascinado. Queria aplicá-lo

¹ O texto, neste capítulo, será redigido na primeira pessoa do singular, pois trata-se da descrição pessoal do autor.

a tudo que é triângulo que via pela frente. Neste momento criei gosto pela matemática, em especial pela geometria.

Quando passei no vestibular de inverno da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), surgiram novos desafios e com eles algumas dificuldades. Sempre morei em um sítio, no interior do Município de Reserva (interior do interior). Logo tinha que dar um jeito de cursar a faculdade. Então fui morar na cidade de Reserva em uma casa cedida por minha avó. Viajava para Ponta Grossa todos os dias, saindo às 16:00 horas e regressando às 23:00, ou ainda mais tarde (dependendo das condições da estrada). Foi um período muito interessante, pois sair do interior e conhecer novos lugares e novas pessoas, fez com que eu crescesse enquanto pessoa e tivesse uma nova visão de mundo.

A Licenciatura em Matemática não é um curso fácil, por isso agradeço muito pela formação que recebi da UEPG. Guardo com muito carinho lições do 1º ano, quando me deparei com as disciplinas de Cálculo (lembro-me as excelentes aulas da Professora Luciane e seus inúmeros exemplos motivadores) e Geometria Analítica (como não esquecer do Professor Grados e suas maravilhosas histórias).

Estudar nem sempre é fácil, muito menos estudar e trabalhar. Desde o segundo ano de faculdade sou professor contratado pelo Processo de Seleção Seletiva (PSS) do estado do Paraná, as vezes com várias aulas as vezes com poucas, substituindo outros professores e as vezes com minhas próprias aulas ao iniciar um ano letivo. No entanto sempre paira a incerteza se terei ou não trabalho no próximo ano.

Alguns anos em que lecionei em escolas do interior onde descia de um ônibus e subia em outro. Algumas experiências são interessantes de mencionar, em especial minha primeira aula em um 9º ano, sem experiência nenhuma, sem muitas ideias pois muitas vezes você é chamado em um dia de manhã e tem aula a tarde. Sorte minha ter tido uma boa aula de Geometria um dia antes na UEPG, na qual o professor usou um exemplo concreto que relacionava as dobras de uma folha de papel com as potências de base 2 repliquei aquela ideia e venci minha primeira aula.

Mas para todos os efeitos me formei em 2012, é claro que no decorrer do curso passei por dependências, exames, estágios, noites chuvosas e frias, mas tudo é necessário para uma boa formação.

Desde então, voltei a morar no sítio e atuo sempre como professor PSS. Minha classificação nunca me permite completar as 40 horas. Sendo assim, trabalho como agricultor junto à minha família. Cultivamos frutas, como uva (nossa principal renda

agrícola junto com o vinho que fazemos ao final da safra) e o tomate. Também produzimos hortaliças, que entregamos nas escolas, devido ao credenciamento que tenho com uma cooperativa que participa dos programas de merenda escolar.

Ingressei no Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) em 2017, com o objetivo de aprofundar meus conhecimentos, e conseqüentemente, melhorar minhas aulas nas escolas onde atuo. Assim como na graduação, não foi nada fácil, mas com dedicação e perseverança tudo é possível. Em toda minha vida acadêmica tive muito apressa pela geometria, tentando sempre aprendê-la para ensiná-la da melhor forma possível.

Um fator que me levou a escolha da temática da pesquisa deve-se ao apego especial que tenho pelas tecnologias educacionais. Por alguns anos trabalhei como tutor presencial de um curso de Licenciatura em Matemática, no Polo de apoio presencial de minha cidade. Neste período percebi o quanto a tecnologia pode contribuir no ensino e aprendizagem dos nossos estudantes. Essa experiência proporcionou que eu aprofundasse os estudos sobre o *software* GeoGebra (pois era o que já havia instalado nos computadores do Polo).

Acompanhar os licenciandos em matemática me fez pensar em formas de como usar as tecnologias para aprimorar o pensamento geométrico. Por meio das experiências vivenciadas na educação básica e pela tutoria realizada, pude observar as dificuldades dos licenciandos em geometria e notei que muitas das dúvidas são trazidas da educação básica. Neste sentido, a questão central desta pesquisa se refere à: Qual o nível do pensamento geométrico dos acadêmicos ingressantes no primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Pública do Paraná, segundo a Teoria de Van Hiele?

Na tentativa de responder essa questão, foi elaborada e implementada uma sequência didática com exercícios de geometria em níveis crescentes de complexidade. A fim de investigar quais habilidades os estudantes apresentam desenvolvidas para estabelecer o nível que estes se encontram. As atividades foram desenvolvidas no *software* GeoGebra, o qual foi usado na implementação.

1.1 OBJETIVOS

Para o desenvolvimento desta pesquisa foram elaborados os seguintes objetivos.

1.1.1 Objetivo Geral

Investigar o nível do pensamento geométrico que os acadêmicos ingressantes no primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Pública do Paraná, apresentam segundo a Teoria de Van Hiele.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Verificar nos documentos oficiais referentes a Educação Básica as diretrizes da abordagem a geometria;
- Desenvolver uma sequência didática para a licenciatura em matemática de atividades no *software* GeoGebra baseada nos níveis e habilidades do pensamento geométrico da Teoria de Van Hiele;
- Aplicar as atividades como forma de investigação dos níveis do pensamento geométrico da Teoria de Van Hiele;
- Analisar os dados obtidos a fim de responder à questão norteadora desta pesquisa.

1.2 JUSTIFICATIVA

Atualmente há diversos estudos que abordam as dificuldades dos estudantes do Ensino Fundamental e Médio em relação aos conceitos básicos da geometria, entre eles tem-se, Pavanello (1989, 1993, 2015), Lorenzato (1995), Fiorentini (1995), Nacarato e Passos (2003). Estas dificuldades muitas vezes estão ligadas as formas deficientes de como estes conceitos são apresentados e desenvolvidos em sala de aula. Desta forma se torna importante identificar quais são essas dificuldades e em

que parte do processo mental de aprendizagem ocorre esta defasagem de conhecimento, visto que estes conceitos são necessários para um bom entendimento dos conteúdos que serão tratados no Ensino Superior. A vista de entender essa problemática buscou-se para o embasamento deste trabalho a Teoria de Van Hiele, onde os acadêmicos ingressantes no Ensino Superior devem ter concluídos os níveis 0, 1, 2 e desenvolvendo o nível 3, para conseguir desenvolver e aprofundar os conhecimentos de geometria exigidos no Ensino Superior.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Esta dissertação está estruturada em 6 capítulos, sendo o primeiro a Introdução.

No Capítulo 2 é tratada a Revisão da Literatura onde são apresentados trabalhos referentes aos temas: Geometria; Teoria de Van Hiele e Tecnologias Educacionais. Para a consulta foram utilizados a plataforma de dissertações do PROFMAT, Banco de dissertações da Capes, a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), Portal de periódico da Capes e o banco de dados do *Google Acadêmico*.

O Capítulo 3 compreende a Fundamentação Teórica em que se apoia este trabalho. Este capítulo é dividido em três seções: A primeira trata de conceitos da Geometria e de como ela é apresentada nos documentos oficiais; a segunda seção aborda a Teoria de Van Hiele; a última se constitui de discussão sobre as Tecnologias Educacionais e a apresentação do *software* GeoGebra.

No quarto capítulo são descritos os aspectos metodológicos relacionados a classificação da pesquisa, assim como a descrição dos sujeitos pesquisados, procedimentos de coleta de dados e as atividades que foram desenvolvidas.

O Capítulo 5 traz a análise das soluções apresentadas pelos participantes das atividades da sequência didática.

O sexto capítulo apresenta as considerações finais sobre a pesquisa, as possíveis contribuições no contexto educacional e sugestões para trabalhos a serem desenvolvidos futuramente.

2 REVISÃO DE LITERATURA

A fim de apresentar um panorama das pesquisas já realizadas sobre a Teoria de Van Hiele na formação docente com o uso do GeoGebra, foi realizada uma revisão sistemática da literatura. Neste sentido realizaram-se buscas por trabalhos existentes utilizando como palavras chaves: “*Van Hiele*”, “*GeoGebra*” e “*Formação de Professores*”.

As bases de dados utilizadas para esta revisão de literatura foram: a plataforma de dissertações do PROFMAT, Banco de teses e dissertações da Capes, a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), o Portal de periódico da Capes e o banco de dados do Google Acadêmico.

Plataforma de dissertações do PROFMAT

Primeiramente buscou-se trabalhos na plataforma de dissertações do PROFMAT, que teve seu início em 2013 com as primeiras dissertações defendidas no programa, o qual iniciou suas atividades em 2011. Assim, a pesquisa abrange os últimos 6 anos, considerando os trabalhos presentes na base de dados até a data de 30 de janeiro de 2019. Como na plataforma do PROFMAT não é possível realizar pesquisa por palavras chaves agrupadas, foi adotada a busca por trabalhos com a palavra Van Hiele em seu título. Obtendo desta forma os trabalhos de Assad (2017), Costa (2017), Ferreira (2013), Góes (2017), Martins (2014), Monforte (2017), Nagata (2016), Rodrigues (2015), Santos (2014), Santos (2015), Silva (2018a), Silva (2018b) e Souza (2014).

Delineamos agora, alguns aspectos dos principais trabalhos elencados. Assad (2017) apresenta uma revisão da literatura do período de 2013 a 2017, analisando 21 trabalhos. Desta forma, apresentamos os resultados da autora e os trabalhos publicados posteriores, que não constam em sua análise.

Assad (2017) faz uma investigação dos níveis do pensamento geométrico de estudantes do primeiro ano do Ensino Médio, tendo como fundamentação teórica a Teoria de Van Hiele. Para atingir este objetivo utilizou de atividades desenvolvidas com o *software* GeoGebra, para explorar os 5 níveis elencados pela teoria assim como as cinco habilidades relacionadas a cada nível.

Os resultados apontam que os estudantes do colégio investigado, não detêm as habilidades condizentes com o nível de ensino esperado, que segundo a teoria deveria ser o nível 2. A maioria dos alunos participantes da pesquisa situam-se no nível zero, um pequeno número atingiu o nível 1 e pouquíssimos atingiram o nível 2, porém, com dificuldades nas habilidades correspondentes a este nível.

Os resultados obtidos por Assad (2017) são preocupantes, pois a defasagem acarreta a não compreensão dos conteúdos que serão trabalhados posteriormente no ensino médio. Como o trabalho da autora apresenta uma completa revisão de literatura dos trabalhos anteriores na mesma temática, nesta pesquisa bibliográfica se optou por apresentar apenas os trabalhos posteriores ao da autora supracitada.

O trabalho de Góes (2017), tem como foco verificar quais são as dificuldades de aprendizagem dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental com relação aos conceitos de retas paralelas e perpendiculares. O autor utiliza da perspectiva da teoria de Van Hiele aliada a atividades de dobraduras e medições com papel A4, com régua e transferidor. Conclui-se que seu objetivo foi alcançado, pois os estudantes após utilizarem as dobraduras, demonstraram maior interesse pelos conceitos matemáticos. Dessa forma, oportunizou maior compreensão sobre retas paralelas e perpendiculares.

A pesquisa de Monforte (2017), descreve os resultados da busca realizada por atividades que abordavam o assunto "*semelhança*" no repositório do GeoGebra, classificando as atividades entre os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele. Como resultado obteve dezessete aplicativos com proposta definida sobre o tema semelhanças e foram incluídas mais três propostas no repositório do GeoGebra desenvolvidas pelo autor.

A dissertação de Silva (2018a) tem sua base nas Teorias de Ausubel e Van Hiele, com o intuito de contribuir para o sucesso do ensino-aprendizagem da Geometria na Educação Básica. Assim, desenvolveu uma proposta didática para o estudo dos quadriláteros, que foi aplicada em sala de aula. A qual contribuiu positivamente para o aprendizado de uma turma do 8º ano do ensino fundamental.

Em Silva (2018b), o autor apresenta uma sequência de atividades baseadas na teoria dos Van Hiele, voltada para alunos do 7º ano do ensino fundamental. Tendo como objetivo contribuir para a construção do conceito de área de figuras planas (triângulos e retângulos). Como resultado, apesar dos obstáculos encontrados, a pesquisa aponta que atividades desenvolvidas com base nos níveis e suas

respectivas habilidades do modelo dos Van Hiele, torna a aprendizagem significativa para aluno, consolidando o processo de aprendizagem.

Por mais que as pesquisas mostradas acima tratem da teoria de Van Hiele, e algumas do *software* GeoGebra, observa-se apenas que o de Assad (2017) é o que mais se aproxima da proposta a ser desenvolvida nesta pesquisa. Entretanto, esta pesquisa difere da autora mencionada pelo fato de que se pretende analisar o nível do pensamento geométrico dos alunos do primeiro ano de um curso de Licenciatura em Matemática. As atividades relacionadas ao presente trabalho serão desenvolvidas no GeoGebra, porém nos próprios *Smartphones* dos estudantes, e serão voltadas para a geometria plana.

Banco de Teses e Dissertações da Capes

Para verificar outros trabalhos que desenvolveram pesquisas relacionadas a temática, fez-se uma consulta no Banco de Teses e Dissertações da Capes, usando o mesmo período de pesquisa da plataforma do PROFMAT e as palavras-chave “*Van Hiele*”, “*GeoGebra*” e “*Formação de Professores*”. Porém, só foram analisados aqueles que não são apresentados na revisão sistemática apresentada por Assad (2017).

Diferente da plataforma anterior no Banco de Teses e Dissertações da Capes, é possível realizar busca com palavras agrupadas, assim foi possível refinar a busca. Extraindo a duplicidade dos trabalhos já apresentados, até a data de 30/01/2019 os seguintes trabalhos foram selecionados: Silva Filho (2015), Dall'Alba (2015), Costa (2016), Silva (2017), Awila (2017), Ferreira (2018), Castro (2018), Zanella (2018) e Santos (2018). É importante destacar que embora utilizadas as palavras chaves supracitadas, os trabalhos de Awila (2017) e Castro (2018), apareceram na lista e não abordam a Teoria de Van Hiele, mas trazem contribuições ao levantamento na perspectiva do uso do GeoGebra.

A dissertação de Silva Filho (2015), apresentou como objetivo principal a investigação de como uma sequência de atividades pode contribuir para o avanço de nível segundo a teoria de Van Hiele, partindo de objetos concretos do cotidiano e de materiais manipuláveis relacionando-os com os conceitos e propriedades de sólidos geométricos.

Como sujeitos de pesquisa foram os estudantes do 3º Ano do Ensino Médio de uma escola estadual do município de Flores – PE. Para o autor os resultados indicam certa fragilidade quanto ao conhecimento de geometria por parte dos alunos. Por outro lado, conclui-se que a sequência de atividades, associada a forma como os alunos utilizaram os materiais manipuláveis, pode contribuir de forma significativa para que haja o avanço no desenvolvimento do pensamento geométrico.

Em Dall’Alba (2015), foi apresentada uma investigação do desenvolvimento do pensamento geométrico de um grupo de alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. Essa investigação se deu a partir da inserção do *software* GeoGebra em atividades de ensino, tomando como base o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele. Como conceitos a autora utilizou-se de várias temáticas: ângulos, retas, semirretas, segmentos de retas, polígonos, triângulos e quadriláteros. Pela análise feita a autora sugeriu que foi possível perceber um avanço no nível 1 (visualização) e o transitar dos estudantes no nível 2 (análise). Sendo assim, pode inferir que o *software* contribuiu para a apropriação dos conceitos abordados.

O trabalho de Costa (2016), teve por objetivo analisar os efeitos de uma sequência didática para a construção do conceito de quadriláteros notáveis, utilizando o *software* GeoGebra como recurso didático. O estudo, uma replicação de pesquisa do trabalho de Câmara dos Santos (2001), foi desenvolvido com 30 estudantes de uma turma do sexto ano do ensino fundamental, tendo por base a teoria de Van Hiele.

Como resultado o autor aponta que alguns alunos não alcançaram a passagem do primeiro para o segundo nível, mas, esses alunos progrediram significativamente dentro do próprio nível, ficando bem mais próximos do nível seguinte. O autor ainda ressalta que o GeoGebra mostrou-se como um importante recurso didático aos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria.

A dissertação de Awila (2017), teve como objetivo investigar e verificar o quanto *applets* produzidos com o *software* GeoGebra podem contribuir para tornar o cálculo de área e volume mais esclarecedores. Na pesquisa foi utilizada uma sequência didática com os ingressantes do curso de graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Maria, obtendo como resultados que a interação com o *software* se mostrou proveitosa para o esclarecimento dos conceitos abordados.

Silva (2017), apresentou uma investigação de como as atitudes em relação a Geometria, de alunos e professores do ciclo de alfabetização, se correlacionam com o desempenho dos alunos na resolução de problemas geométricos. Utilizou-se como

fundamentação teórica a Teoria de Van Hiele e encaminhamentos metodológicos mistos. Os sujeitos pesquisados foram alunos do 3º ano do ensino fundamental. Como resultado os dados apontam que os alunos estão no nível de desenvolvimento do pensamento geométrico esperado para 3º ano, ou seja, já atingiram o nível 0 e estão iniciando o nível 1 do modelo da teoria de Van Hiele.

A tese de Castro (2018), teve por objetivo identificar subsídios, diretrizes, mecanismos e procedimentos essenciais para a construção do currículo da era digital. Em particular o currículo da Matemática para o Ensino Fundamental, usando como recurso tecnológico o GeoGebra. Como resultado, no que diz respeito ao currículo apresentado por meio dos materiais didáticos fornecidos pelos órgãos centrais e oficiais, constatou-se que é pouco relevante os subsídios para a integração do uso das Tecnologias no processo educativo.

O trabalho de Ferreira (2018), analisou os conhecimentos de Geometria dos alunos do último ano do Ensino Médio de uma Escola Pública de Campo Novo do Parecis – Mato Grosso, tendo como base a Teoria de Van Hiele. Como instrumentos de coleta de dados foram utilizados questionários investigativos e de caracterização: entrevista, semiestruturada e diário de campo. A autora verificou que ao terminar o ensino médio, os alunos não apresentaram conhecimentos geométricos adequados e relacionados ao nível 3, indicado por Van Hiele. Ou seja, concluem a educação básica com grandes lacunas no processo de desenvolvimento do pensamento geométrico.

A tese de doutorado de Zanella (2018), investiga como o uso do GeoGebra influencia a compreensão de objetos geométricos e suas propriedades por futuros professores de Matemática. Participaram da investigação onze estudantes do Curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, que constituíram uma turma da disciplina de Geometria Euclidiana. Os dados foram analisados à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

Como um dos principais resultados apontados por Zanella (2018) está o fato de trazer informações significativas e relevantes para que as instituições de Ensino Superior reflitam sobre seus currículos, no que diz respeito a formação geométrica do futuro professor de Matemática. Tanto em função do uso das tecnologias digitais, bem como para contribuir com a literatura nacional e internacional, no campo do pensamento geométrico desse futuro profissional da educação.

Santos (2018) apresenta uma investigação envolvendo um grupo de acadêmicos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática, com objetivo

principal de analisar a aprendizagem desses acadêmicos ingressantes no que diz respeito à internalização de conceitos básicos de Geometria Plana, mediante o uso do *software* GeoGebra a luz da Teoria de Van Hiele. Os dados foram produzidos a partir de questionários, encontros formativos, observação, diário de bordo e grupo focal. Para a autora o uso de *software* apresenta grandes vantagens no que diz respeito a visualização das figuras, facilitando assim o processo de ensino e aprendizagem.

Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações - BDTD

Outra fonte de busca utilizada nesta pesquisa foi BDTD. Após excluir a duplicidade dos trabalhos já apresentados, os selecionados até a data de 30/01/2019 foram: Stormowski (2015), Borsoi (2016), Andrade (2017), Vieira (2017a), Vieira (2017b), Honorato (2018) e Souza (2018). De forma análoga ao que ocorreu na busca no Banco de Teses e Dissertações da Capes, os trabalhos de Stormowski (2015), Andrade (2017), Vieira (2017a) e Honorato (2018), não abordam a Teoria de Van Hiele, mas trazem contribuições ao levantamento na perspectiva da formação de professores e quanto ao uso do GeoGebra.

A tese de doutorado de Stormowski (2015) teve por objetivo organizar uma proposta de formação visando a capacitação de professores de matemática para o uso potencial do *software* GeoGebra, em que o autor apresenta um planejamento de uma Arquitetura Pedagógica para uma disciplina cursada a distância por professores de matemática em formação continuada. O suporte metodológico utilizado foi a Engenharia Didática e com aporte teórico dos Registros de Representação Semiótica.

O autor aponta que a formação continuada pode contribuir para o desenvolvimento de um professor que no futuro consiga explorar o potencial do GeoGebra com seus alunos. Verificou-se um bom aproveitamento dos professores-alunos, de modo que uma parcela significativa dos participantes obteve níveis positivos no que se refere à exploração do GeoGebra. Porém, outra peculiaridade apresentada é que o processo de apropriação do GeoGebra por parte dos professores-alunos é demorado, complexo e requer uma articulação pertinente de conhecimento matemático. Desta forma, quanto maior a dificuldade do sujeito em articular o conceito matemático, mais difícil e demorada é a instrumentalização do *software*.

A dissertação de Borsoi (2016), apresenta uma sequência didática para o 3º ano do Ensino Médio que explorava conceitos da Geometria Espacial, utilizando-se do *software* GeoGebra. Tendo por objetivo promover o desenvolvimento do pensamento geométrico espacial, tirando-se proveito dos recursos de representação do *software* como a interação dinâmica entre as representações do objeto tridimensional e diferentes planos de corte. Foram apresentadas dez atividades em crescente nível de dificuldade e a análise dos dados foi realizada a luz das teorias de Van Hiele, Duval e Gutiérrez. Para a autora, ao final das atividades os estudantes mostraram constantes progressos no desenvolvimento do pensamento geométrico.

Em Andrade (2017), observa-se as influências que um curso de formação continuada, sobre a utilização do *software* GeoGebra, pode propiciar para a prática docente de professores de matemática. Para tanto, a autora observou as práticas docentes de duas professoras que participaram do referido curso de formação para investigar como as Tecnologias Digitais (TD) foram utilizadas por elas. Os resultados indicados pela autora apontam que foram encontrados traços de influências do curso de formação nas aulas que as professoras ministraram, destacando-se os relacionados com o “pensar-com-TD” e o uso de roteiros de construções no GeoGebra para exploração de simulações e visualizações.

No trabalho de Vieira (2017a), apresenta-se um enfoque histórico e epistemológico de como as tecnologias se fazem presente na trajetória das disciplinas de Geometria e Desenho Geométrico, oferecidas no período de 1980 a 2010, na Universidade Federal de Juiz de Fora. De acordo com a autora aponta-se que o uso de *softwares* nestas disciplinas se mostra crescente, porém com certa insegurança ainda por parte de alguns professores.

Vieira (2017b), investigou como a Geometria se faz presente no curso de Pedagogia, e assim analisou a importância dos saberes matemáticos do pedagogo quanto aos conceitos de geometria. A autora se utiliza da teoria de Van Hiele para analisar o nível de pensamento geométrico de alunos do curso de pedagogia da Faculdade de Educação (Universidade Federal do Ceará). Desse modo, a autora concluiu que existe uma lacuna nos processos de ensino e aprendizagem de geometria pelos alunos observados. Ressalta ainda o sentido amplo de como a matemática é tratada nos cursos de pedagogia, parecendo se resumir em metodologias e técnicas de ensino, deixando a cargo do graduando buscar conhecimento específico em geometria.

A dissertação de Honorato (2018), teve por objetivo investigar como ocorre o processo de elaboração de atividades matemáticas com a utilização do GeoGebra. Foram realizadas reuniões com os participantes da pesquisa (grupo de pesquisadores em Educação Matemática vinculados ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista – campus de Rio Claro), para dialogar sobre as atividades assim como elaboração e aprimoramento. O conteúdo utilizado foi de Geometria Espacial com objetivo de aplicar à um curso de extensão universitária destinado a estudantes e professores do curso de Licenciatura em Matemática. Outro ponto utilizado foi um grupo fechado na rede social Facebook que possibilitou discussões e compartilhamento rápido das atividades construídas.

Para o autor, uma das principais contribuições do estudo é de que conhecer o processo de produção de atividades, propiciaram à comunidade da Educação Matemática uma grande riqueza de ideias desenvolvidas em meio ao processo.

Souza (2018) apresenta uma investigação do nível de pensamento geométrico, baseando-se na teoria de Van Hiele, de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental da rede pública, participaram da pesquisa 24 alunos de uma escola de Bauru SP. Como recurso didático a autora se utilizou de uma História em Quadrinhos (HQ) com o objetivo de analisar se este recurso contribui para o avanço dos níveis de pensamento geométrico.

Como resultado observou que a maioria dos estudantes estavam no nível 0 e pequena parte no nível 1. A autora acredita que a criação da HQ denominada “Zerométrica” como um recurso didático facilitador do processo de ensino-aprendizagem, atende as características de ser um material de fácil acesso para o professor e para o aluno, em que se trabalha com habilidades visuais e assim propicia a aquisição de conceito em um cenário contextualizado e significativo. (SOUZA, 2018).

Portal de Periódicos da Capes

Para a busca no portal de periódicos da Capes, utilizou-se as mesmas palavras-chave e período de busca que as anteriores, restringindo à textos em português. Após exclusão das duplicidades, foram selecionados 5 trabalhos que apresentam semelhanças com o trabalho desenvolvido nesta dissertação. São eles: Leivas (2014), Aires (2015), Amado (2015), Bairral (2016) e Pachêco (2017).

O artigo de Leivas (2014), traz uma pesquisa realizada com alunos de um mestrado profissionalizante em ensino de Matemática, com o objetivo de investigar como eles podem reconstruir conceitos de prisma a partir do uso do *software* Cabri 3D. O autor toma com embasamento teórico importantes pesquisas, entre elas, os níveis do pensamento geométrico de Van Hiele.

Ao investigar inicialmente como os mestrandos definiam e identificavam características de um prisma, observou-se que os participantes, professores de diversos níveis de escolaridade, não possuíam o conceito de prisma estruturado. As respostas foram superficiais, não próximas à real definição. No entanto, com o planejamento e desenvolvimento das atividades por construções geométricas no Cabri 3D, os participantes puderam construir o conhecimento, o qual se esperava que tivessem adquirido na graduação. Leivas (2014), argumenta que o conceito poderia estar adormecido ou talvez nem foi aprendido. Assim, é compreensível o problema do abandono da geometria na educação básica. Após a construção foi solicitado que redefinissem o conceito de prisma, o que a maioria conseguiu realizar. O autor concluiu que houve desenvolvimento de habilidades relacionadas a representação, compreensão, comunicação, investigação e visualização espacial.

O trabalho de Aires (2015), teve como sujeito um grupo de alunos do 6.º ano de escolaridade. O objetivo foi analisar relativamente a forma como eles visualizam e apresentam a definição do conceito de quadrado. Este artigo teve por base os níveis da teoria de Van Hiele. Os dados recolhidos permitiram concluir que o nível de raciocínio geométrico apresentado pelos alunos, é inferior ao desejável e necessário para essa fase de aprendizagem da Geometria. Também a definição de quadrado apresentada se baseia apenas na congruência dos lados.

O artigo de Amado (2015), apresenta uma experiência de ensino no 9.º ano, na qual foram tratadas propriedades do triângulo e seus pontos notáveis. Com o suporte do GeoGebra, os alunos estruturaram ideias matemáticas e raciocínios e construíram cadeias argumentativas. Os dados analisados mostram que a maioria dos alunos formula e explora conjecturas procurando caminhos para a sua justificação.

O trabalho de Bairral (2016), analisa interações no Virtual Math Team com GeoGebra e (VMTcG), de licenciandos de matemática resolvendo atividade sobre pontos notáveis de um triângulo. O VMTcG, é um ambiente virtual gratuito utilizado para a resolução colaborativa de atividades de matemática. Para Bairral (2017), um ponto importante é de que a dinâmica interativa no VMTcG com o GeoGebra,

possibilitou que os participantes interagissem online, conjecturassem e fizessem descobertas de forma colaborativa, sendo uma ferramenta para enriquecer o trabalho dos futuros professores.

O artigo de Pachêco (2017), teve como objetivo analisar o nível de conhecimentos geométricos de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, por meio do estudo do quadrado, mediado pela Teoria de Van Hiele. Participaram deste trabalho 26 alunos de uma escola pública, situada no município de São Vicente Férrer - Pernambuco. Diante da análise feita pela autora pôde-se verificar que, na identificação dos quadrados por meio de sua forma física, não há indícios de dificuldades pelos alunos, mas existe certa fragilidade para citar suas propriedades.

Plataforma Google Acadêmico

A última fonte de busca de trabalhos foi a plataforma do Google Acadêmico, com as mesmas palavras-chave. Porém, devido a ampla quantidade de trabalhos, optou-se por uma nova busca com as mesmas palavras restringindo que estivessem presente nos títulos. Com essa busca obteve-se trabalhos de diversas modalidades de ensino. Elencamos apenas alguns para uma análise mais criteriosa, tais como: Santos (2014), Farias (2014), Costa Junior (2014), Santos (2015), Kaleff (2015), Costa (2017), Leivas (2017), Barros (2017) e Silva (2018).

A tese de doutorado de Farias (2014) aborda a análise de uma proposta de ensino aplicada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba na modalidade à distância. Esta proposta está relacionada ao conteúdo de triângulos e é baseada na Teoria da Atividade e na Teoria de Van Hiele. Como base metodologia o trabalho se refere a um estudo de caso em que participaram 67 estudantes do 5º período.

Após a aplicação de diversas atividades investigativa, dirigida e avaliativa, nas quatro etapas determinadas como materializada, linguagem externa, linguagem interna e etapa mental, a autora conclui que através de uma assimilação orientada, embasada em elementos da Teoria da Atividade, com planejamento sistemático considerando as características de um curso à distância, é possível potencializar o ensino e aprendizado dos estudantes que participam de todas as etapas do processo e propiciar maior retenção e assimilação de conceitos.

O trabalho de Costa Junior (2014), apresenta uma investigação realizada com estudantes iniciantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba Campus Campina Grande – Paraíba, com intuito de analisar em que níveis do pensamento geométrico da teoria de Van Hiele esses estudantes se encontram. Para isso, os autores organizaram uma sequência de atividades relacionadas aos conceitos básicos da geometria, especificamente das propriedades de polígonos. As atividades também contaram com o apoio do material manipulativo Tangram e contemplaram os níveis 0, 1 e 2 da teoria de Van Hiele.

Os resultados apresentados revelaram dificuldades e deficiências de grau elevado no que se refere ao conhecimento de conceitos básicos da geometria, pois estes estudantes deveriam encontrar-se no mínimo no nível 3. Este estudo traz contribuições significativas para a formação inicial docente, já que o professor formador por meio dos resultados pode redirecionar sua prática a fim de sanar tais problemas. (COSTA JUNIOR, 2014)

O trabalho de conclusão de curso de Santos (2015), segue a linha do trabalho de Costa Junior (2014), porém tem como sujeitos da pesquisa os estudantes concluintes do curso de Licenciatura em Matemática da UEPB. A pesquisa tem abordagem quali-quantitativa. A coleta de dados ocorreu por meio de um questionário e algumas atividades. Para a autora, os resultados alcançados são satisfatórios com relação aos conceitos de geometria, mas com ressalvas a serem mais aprofundadas em alguns conteúdos. Concluiu-se que a maioria dos estudantes pesquisados se encontra no nível 3 do pensamento geométrico.

Em Kaleff (2015) (apresentado no boletim do Laboratório de Educação Matemática (LABEM)), tem-se a descrição dos resultados obtidos em uma grande pesquisa longitudinal realizada durante 17 anos com estudantes dos períodos finais do curso de Licenciatura em Matemática, com o objetivo de avaliar o avanço na habilidade da visualização geométrica relacionada com a Teoria de Van Hiele.

A pesquisa foi realizada na Universidade Federal Fluminense, com dados coletados entre 1996 e 2012. Participaram da pesquisa 413 licenciandos que responderam à um questionário com questões sobre a interpretação de desenhos que representam sólidos elementares construídos por meio do empilhamento de cubos, com uma ou mais faces visíveis no desenho, e sua relação com o cálculo de seus volumes. É importante ressaltar que os desenhos e situações apresentados no

questionário se assemelham as apresentadas em livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental.

Os resultados obtidos indicam que os licenciandos continuam a apresentar dificuldades significativas na interpretação das imagens, com uma parcela significativa de estudantes que não conseguiu determinar o volume implícito nos desenhos com cubos empilhados.

O artigo de Costa (2017), analisou o pensamento geométrico de futuros professores de Matemática, em processo de formação inicial, vinculados a uma determinada Instituição de Ensino Superior no Estado de Pernambuco. O trabalho se desenvolveu com a aplicação de um teste diagnóstico com conceitos principais voltados para os quadriláteros notáveis. Segundo Costa (2017), os resultados indicaram que cerca da metade dos participantes atua na dimensão pragmática (nível 0), cerca de um terço atingiu a dimensão relacional (nível 1) e um quinto a dimensão aplicativa (nível 2). Percebe-se então, que a Geometria vivenciada por esses estudantes não favoreceu, de modo significativo, o desenvolvimento de dimensões mais elaboradas (níveis 3 e 4) do pensamento geométrico.

Leivas (2017), apresenta em seu artigo uma investigação desenvolvida junto a um grupo de estudantes participantes de um programa de pós-graduação com o intuito de verificar se estes pertenciam ao último nível de pensamento geométrico da Teoria de Van Hiele. Como conteúdo geométrico foi utilizado à generalização do Teorema de Pitágoras.

Os resultados apresentados mostraram que os envolvidos, embora enunciassem o referido teorema em linguagem natural, interpretaram de maneira incorreta e assim não há clareza entre formas e medidas. Além disso, ao concluir que há um único registro figural para o teorema, entende-se que não alcançaram o nível do rigor (nível 4) da teoria. (LEIVAS, 2017).

No trabalho de conclusão de curso de especialização em Educação em Matemática e Ciências, Barros (2017) realizou uma pesquisa com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, de um colégio particular do município de Maringá- Paraná. Este trabalho consistiu na elaboração e análise de tarefas utilizando o *software* GeoGebra, envolvendo a formação de conceitos de triângulos e quadrilátero baseando-se na Teoria de Van Hiele. O *software* teve papel de recurso auxiliar para que os estudantes desenvolvessem os conceitos matemáticos. A autora relata como

resultado que as atividades envolvendo o GeoGebra podem contribuir significativamente para a passagem de um nível para outro.

O artigo de Silva (2018), apresenta um relato das experiências desenvolvidas e das dificuldades encontradas pelos autores no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), do curso de Licenciatura em Matemática do Campus São Cristóvão-Sergipe. Foram desenvolvidas atividades pautadas na Teoria de Van Hiele para contribuir com o ensino da Geometria nas aulas de professores do ensino fundamental e médio da rede estadual de Sergipe. Quanto aos resultados, os autores destacam que a dificuldade que os alunos apresentam em relação aos conteúdos geométricos, incide principalmente na identificação das propriedades e classificação das figuras geométricas.

Neste Capítulo, 33 trabalhos foram apresentados para esta revisão de literatura. Sendo estes de diversos níveis de escolaridade: Dissertações de Mestrado; Teses de Doutorado; Trabalhos de Conclusão de Cursos; Monografia de especialização e artigos de revistas e eventos. Por meio da Análise desses trabalhos, observou-se que em relação aos participantes das pesquisas têm-se que 11 estudos foram com estudantes do Ensino Fundamental, 4 com estudantes do Ensino Médio, 11 foram com acadêmicos do Ensino Superior, 2 foram em cursos de formação continuada, 2 foram com estudantes da pós-graduação e 4 foram de cunho Teórico.

Em um contexto geral dos trabalhos analisados que se referem ao Ensino Fundamental, 2 trabalham com estudantes do Ensino Fundamental I (1º ao 5º ano) e 9 são com alunos do Ensino Fundamental II (6º ao 9ºano). Também é interessante notar que em sua maioria os conteúdos geométricos abordados são os referentes ao estudo de quadriláteros. No que diz respeito as tecnologias, o GeoGebra se fez presente em 4 estudos. Para os níveis da Teoria de Van Hiele, temos grande parte dos estudantes situados no nível 0 (Silva (2018b), Dall'Alba (2015), Costa (2016), Silva (2017), Souza (2018), Aires (2015) e Pachêco (2017) e poucos operando no nível 1 (Silva 2018a), Góes (2017) e Barros (2017).

No caso do Ensino Médio, temos uma predominância de estudos realizados com o 3º ano. Com relação aos conceitos geométricos utilizados destaca-se os da geometria espacial. O GeoGebra se mostrou presente em metade dos estudos referentes ao Ensino Médio. Quanto aos níveis da Teoria de Van Hiele, no Ensino Médio ainda temos estudantes situados no Nível 0, observados em Silva Filho (2015), e estudantes operando no Nível 1, como vemos em Assad (2017) e Ferreira (2018).

Dos trabalhos apresentados neste capítulo, 4 foram de aporte teórico: um traz um relato das experiências desenvolvidas e das dificuldades encontradas pelos autores no PIBID, em que se desenvolveram atividades pautadas na Teoria de Van Hiele, para contribuir com o ensino da Geometria nas aulas de professores do Ensino Fundamental e Médio; outro faz uma pesquisa classificatória de atividades no repositório do GeoGebra sobre os níveis da Teoria de Van Hiele; outro ainda trabalha com o currículo digital para a Matemática do Ensino Fundamental e Médio, e o último realiza um estudo histórico e epistemológico nas disciplinas de Geometria e desenho geométrico de uma instituição de Ensino Superior.

Com relação os trabalhos relacionados a pós-graduação e a formação continuada temos: dos que se referem as tecnologias digitais, 2 trabalhos que envolveram o GeoGebra e 1 que utilizou o *software* Cabri 3D. Os conteúdos abordados foram da Geometria Espacial e o Teorema de Pitágoras. Dos trabalhos que analisaram os níveis do pensamento geométrico têm-se: Leivas (2017) expõe que os estudantes de uma pós-graduação ainda estão situados no nível 3 e não conseguiram desenvolver habilidades referentes ao nível 4.

Para o Ensino Superior, 9 estudos tiveram como sujeitos pesquisados apenas acadêmicos da Licenciatura em Matemática. Um dos estudos trabalhou com a Licenciatura e o Bacharelado em Matemática e outro pesquisou acadêmicos da Pedagogia. O *software* GeoGebra fez parte de 5 trabalhos e os conceitos mais abordados foram da geometria plana. Os estudos que trabalharam os níveis da Teoria de Van Hiele, apresentaram como resultado uma diversidade de níveis. Ainda existem estudantes no nível 0, como mostra Costa (2017). Segundo Costa Junior (2014), também temos estudantes no nível 1. Em Santos (2015), temos estudantes concluintes alcançando o nível 3. Vale salientar o estudo de Vieira (2014b), que apresentou estudantes de Pedagogia situados nos níveis 1 e 2.

É notório o trabalho de Kaleff (2015), que por um longo tempo observou as respostas de estudantes para um problema sobre volumes, e concluiu que mesmo com o passar do tempo os estudantes continuam a apresentar dificuldades quanto a interpretação de desenhos e o cálculo de volumes.

Nos trabalhos apresentados, observa-se que o uso do GeoGebra é apresentado como auxiliador e facilitador do desenvolvimento do pensamento geométrico, assim como, há preocupação dos pesquisadores com os resultados obtidos pela maioria de estudantes referentes à todas as esferas de ensino. Nota-se

que quase a totalidade dos trabalhos analisados aponta que os participantes não alcançaram os níveis do pensamento geométrico correspondentes com a Teoria de Van Hiele. Isso pode esclarecer o número crescente de pesquisas envolvendo a formação inicial de professores de Matemática, como forma de amenizar os problemas de “abandono da geometria”. Pois como vemos em Lorenzato (1995), quem pretende ensinar Geometria ou pesquisar sobre o ensino da Geometria não pode deixar de conhecer o "Modelo de Van Hiele".

Diante do panorama apresentado das pesquisas contidas neste levantamento bibliográfico, e em outros estudos como Lorenzato (1995), percebe-se que a geometria é o calcanhar de Aquiles da matemática. Sendo apontado por muitos que o motivo do abandono da disciplina por parte dos professores na educação Básica seja a falta de domínio do conteúdo geométrico. Outro ponto trata-se da dificuldade e complexidade de trabalhar conteúdos geométricos de forma que o estudante consiga muitas vezes visualizar tridimensionalmente algo que está impresso na folha do livro, ou seja, bidimensional. Neste sentido, que os *softwares* e aplicativos dinâmicos de geometria, como o GeoGebra para dispositivos móveis, têm-se mostrado um grande aliado do professor.

Considerando este contexto, é que essa pesquisa de mestrado teve como objetivo analisar o nível de pensamento geométrico de acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática. Pretende-se assim contribuir com o desenvolvimento da aprendizagem em geometria com uso dos *smartphones*, tão comuns atualmente, mas muitas vezes deixados de lado no ensino. Também pode-se contribuir com os professores do ensino superior das disciplinas ligadas a geometria, no sentido de terem uma visão de qual nível de pensamento geométrico seus estudantes estão ingressando na universidade.

Após a apresentação e discussão da revisão bibliográfica realizada, o próximo capítulo abordará a fundamentação teórica da presente pesquisa.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo aborda a base teórica utilizada neste trabalho e está dividido em três seções. A primeira trata dos conceitos da Geometria e de como ela é apresentada nos documentos oficiais. Enquanto a segunda aborda os conceitos referentes à Teoria de Van Hiele, seus fundamentos e aplicações. A última, se constitui de discussão sobre as Tecnologias educacionais e a apresentação do *software* GeoGebra.

3.1 A GEOMETRIA NOS DOCUMENTOS OFICIAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

A Geometria é uma área da matemática que é objeto de estudo há muitos séculos, com registros históricos nas civilizações sumérias, egípcias, babilônios e gregos. Seu desenvolvimento continua ao longo do tempo e hoje muitos matemáticos se debruçam sobre temas mais atuais como geometrias não euclidianas e fractais.

É consenso da comunidade matemática, que a geometria é um tema de grande importância para o aprendizado matemático, mas será que as orientações oficiais para o ensino contemplam essa importância? Veremos neste capítulo alguns documentos oficiais norteadores e o que cada um apresenta sobre o conteúdo de geometria.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), referentes do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental a geometria é apresentada na área “Espaço e Forma”, e tratada como um desenvolvimento no mundo sensível em que a criança está inserida. Com o aprimoramento desta sensibilidade é que o estudante pode passar para o mundo geométrico representativo, desenvolvendo assim a representação simbólica.

Segundo os PCN (1997):

O pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades. Por meio da observação e experimentação elas começam a discernir as características de uma figura, e a usar as propriedades para conceituar classes de formas. (BRASIL, 1997, p. 82)

Assim, para o desenvolvimento do pensamento geométrico, a utilização de atividades, que levem o estudante a se situar no espaço, é de fundamental importância para o desenvolvimento de habilidades lógicas e estruturais dos estudantes, pois:

Uma das possibilidades mais fascinantes do ensino de Geometria consiste em levar o aluno a perceber e valorizar sua presença em elementos da natureza e em criações do homem. Isso pode ocorrer por meio de atividades em que ele possa explorar formas como as de flores, elementos marinhos,

casa de abelha, teia de aranha, ou formas em obras de arte, esculturas, pinturas, arquitetura, ou ainda em desenhos feitos em tecidos, vasos, papéis decorativos, mosaicos, pisos etc. (BRASIL, 1997, p. 83)

Outra prática que contribui no desenvolvimento deste pensamento, citada nos PCN (1997), refere-se as atividades geométricas desenvolvidas com as crianças a fim de desenvolverem estimativas visuais para medidas como comprimento, ângulos ou algumas outras medidas geométricas, mesmo sem o uso de instrumentos de medidas, desenvolvendo assim suas habilidades visuais.

Do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental têm-se os Parâmetros Curriculares Nacionais de 1998. Nesta fase os estudantes têm entre 11 e 14 anos geralmente e devem apresentar um pensamento geométrico visual já desenvolvido, sabendo assim se localizar frente ao espaço. Neste PCN (1998) a geometria também é apresentada na área “Espaço e Forma” e no documento é destacado que:

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1998, p. 51)

Os estudantes deste ciclo passam a desenvolver o pensamento de maneira mais organizada, sendo o momento adequado para aperfeiçoar habilidades que possam auxiliá-los em situações de observação, percepção de semelhanças e diferenças, e identificação de regularidades.

No sentido da aprendizagem os PCN (1998) indicam o uso de instrumentos como a régua e o compasso para construções geométricas, para a visualização e compreensão de propriedades e relações geométricas.

Segundo os PCN (1998):

As atividades de Geometria são muito propícias para que o professor construa junto com seus alunos um caminho que a partir de experiências concretas leve-os a compreender a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas. (BRASIL, 1998, p. 126)

Esta afirmação faz perceber o quanto a demonstração lógica é necessária para o desenvolvimento das habilidades geométricas. Tem-se como exemplo o Teorema de Pitágoras, que muitas vezes é apenas apresentado aos estudantes como verdade sem uma justificativa formal. Para esta situação os PCN (1998) apresentam que:

No caso do teorema de Pitágoras, essa justificativa poderá ser feita com base na congruência de figuras planas e no princípio da aditividade para as áreas. Posteriormente, os alunos poderão também demonstrar esse teorema quando tiverem se apropriado do conceito de semelhança de triângulos e

estabelecido as relações métricas dos triângulos retângulos. (BRASIL, 1998, p. 128)

Tanto para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio nas Diretrizes Curriculares Estaduais (DCE), os conteúdos de geometria estão inseridos nos chamados Conteúdos Estruturantes, fazendo parte do tema *Geometrias* e desdobrado nos seguintes conteúdos: geometria plana, geometria espacial, geometria analítica e noções básicas de geometrias não-euclidianas.

Para a Geometria Plana tem-se como base a obra de Euclides, que no documento é apresentada da seguinte maneira:

Em torno dos anos 300 a.C., Euclides sistematizou o conhecimento geométrico, na obra já citada Elementos. Seus registros formalizaram o conhecimento geométrico da época e deram cientificidade à Matemática. Nessa obra, o conhecimento geométrico é organizado com coesão lógica e concisão de forma, constituindo a Geometria Euclidiana que engloba tanto a geometria plana quanto a espacial. Pela maneira como são postas suas bases e pelo rigor das demonstrações, a geometria euclidiana se caracteriza como modelo lógico para as outras ciências físicas. A obra de Euclides tem uma importância excepcional na história da Matemática e exerce influência até os dias atuais, inclusive no âmbito escolar. (PARANÁ, 2008, p. 55)

Ao tratar do Ensino Fundamental, o espaço é tratado como principal referência de estudo, partindo então da vivência do estudante no mundo, da sua capacidade de analisar e perceber os objetos para depois representá-los. Para o Ensino Médio, busca-se o aperfeiçoamento dos conceitos da geometria em um nível de rigor mais analítico, onde o estudante deve ser capaz de realizar análise dos elementos que formam a geometria plana utilizando-se para isto das representações algébricas.

Por fim, nas DCE os conceitos geométricos são abordados como não individuais dentro da matemática, mas sim, correlacionados com conceitos e propriedades da aritmética e da álgebra para assim desenvolver um conhecimento mais amplo e abrangente.

Para os Parâmetros Curriculares Nacionais+ (PCN+) de 2002 a Geometria é vista como de fundamental importância para o crescimento educacional do estudante, tanto para ter uma visão social do mundo onde está inserido quanto para seu desenvolvimento profissional.

Neste sentido, para que seja possível que o estudante atinja um nível cognitivo mais elaborado quanto ao raciocínio matemático, têm-se que:

As propostas para ensino da Matemática no Ensino Médio constituem-se de unidades temáticas que visam contribuir para esta formação, são elas: Álgebra - compreendendo o estudo dos números e das funções; Geometria e medidas - tratando das formas planas e tridimensionais e suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo

concreto; Análise de dados – tendo como objeto de estudos os conjuntos finitos de dados que podem ser numéricos ou de informações qualitativas. (ASSAD, 2018, p.42)

Para a unidade temática Geometria e Medidas os PCN+ (2002) descrevem a geometria como parte presente nas formas naturais e construídas. Assim é primordial a descrição, representação e medida dos conceitos geométricos, para que o estudante se situe em seu meio social e profissional. Para isto o tema é subdividido nas unidades temáticas: Geometria Plana, Geometria Espacial, Geometria Métrica e Geometria Analítica.

Para o estudo da Geometria Plana, apresenta-se como temas norteadores: Identificação de dados e relações geométricas para a resolução de problemas; Análise e interpretação de diversas representações de figuras planas; Representação e visualização do mundo real por meio das formas geométricas; Utilização de conceitos de semelhança e congruência e Utilização de escalas em representações planas.

Ainda muitos professores pensam na geometria como mera memorização de teoremas e aplicações em figuras, mas os PCN+ (2002) orientam que:

Não se trata da memorização de um conjunto de postulados e de demonstrações, mas da oportunidade de perceber como a ciência Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, bem como propiciar o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática. (BRASIL, 2002, p. 125)

Neste sentido, é importante conhecer e compreender como ocorre o desenvolvimento do pensamento lógico dentro do contexto da Geometria:

as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. (BRASIL, 2002, p.123)

A relação existente entre os conhecimentos geométricos presentes no Ensino Fundamental e no Ensino Médio deve ser explorada para o desenvolvimento educacional e profissional do estudante. Enquanto o ensino da Geometria no Ensino Fundamental está estruturado para propiciar uma primeira percepção e reflexão dos alunos através da experimentação e de deduções informais sobre as propriedades relativas aos conhecimentos geométricos, no Ensino Médio é necessário que seja feito um aprofundamento dessas ideias no sentido de que o estudante possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas, e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são cotidianos.

Tendo em vista a ideia de que no Ensino Fundamental as deduções são informais e no Ensino Médio as deduções passam a ter um formato mais formal, pode-se associar isto a teoria desenvolvida por Pierre Van Hiele e Dina Van Hiele, que abordam os níveis em que ocorre mudança do pensamento geométrico, assim como os aspectos envolvidos em cada nível. Visto que esta teoria é base de análise para a presente pesquisa, esta será abordada de forma mais detalhada na próxima seção.

Em conformidade ao que se apresenta nos PCN+, na BNCC a matemática ensinada para o Ensino Fundamental decorre:

por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. (BRASIL, 2017, p. 263)

Assim são propostas cinco unidades temáticas, correlacionadas, que orientam a formulação de habilidades a ser desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística.

Para a unidade Geometria, que envolve vários conjuntos de conceitos e procedimentos, é importante estudar a posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais e deste modo desenvolver o pensamento geométrico dos estudantes. No denominado Ensino Fundamental – Anos Iniciais, espera-se que os alunos: visualizem características das formas geométricas bidimensionais e tridimensionais; associem figuras espaciais a suas planificações; que nomeiem e comparem polígonos, por meio de propriedades relativas aos lados, vértices e ângulos. Como parte para alcançar estes objetivos a BNCC indica o uso de *software* de Geometria Dinâmica, como por exemplo, o GeoGebra, pois segundo o entendimento apresentado no documento:

{...} Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras.” (BRASIL, 2017, p. 270)

NA BNCC, são elencadas diversas habilidades relacionadas aos conteúdos de Geometria a serem desenvolvidas por parte do estudante. O Quadro 3.1 apresenta algumas destas habilidades que são pertinentes ao nosso trabalho.

Quadro 3.1 - Relação entre o ano de estudo e as habilidades pertinentes a esta dissertação para os estudantes do ensino fundamental.

(Continua)

Etapa de Ensino	Habilidades
1º ano	(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos.
2º ano	(EF02MA15) Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos.
3º ano	(EF03MA15) Classificar e comparar figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo) em relação a seus lados (quantidade, posições relativas e comprimento) e vértices.
4º ano	(EF04MA18) Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou <i>softwares</i> de geometria.
5º ano	(EF05MA17) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.
6º ano	(EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos. (EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles. (EF06MA22) Utilizar instrumentos, como régua e esquadros, ou <i>softwares</i> para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.
7º ano	(EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes. (EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de <i>softwares</i> de geometria dinâmica.
8º ano	(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos. (EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.

Quadro 3.1 - Relação entre o ano de estudo e as habilidades pertinentes a esta dissertação para os estudantes do ensino fundamental.

(Conclusão)

9º ano	<p>(EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.</p> <p>(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.</p> <p>(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também <i>softwares</i>.</p>
--------	---

Fonte: BNCC (2017)

São várias habilidades relativas à Geometria, e quando se trabalha com geometria imagens estão inseridas no contexto. O uso de *softwares* de Geometria é previsto como ferramenta auxiliar para que seja possível desenvolver estas habilidades. Por fim a BNCC apresenta outro ponto importante:

{...} nessa fase final do Ensino Fundamental, é importante iniciar os alunos, gradativamente, na compreensão, análise e avaliação da argumentação matemática. Isso envolve a leitura de textos matemáticos e o desenvolvimento do senso crítico em relação à argumentação neles utilizada. (BRASIL, 2017, p. 297)

Também, é importante que os conceitos apresentados estejam inseridos em um contexto significativo para os estudantes, não obrigatoriamente do seu cotidiano, podendo ser de outras áreas do conhecimento ou mesmo da história da matemática.

Para os conteúdos do Ensino Médio, as habilidades relacionadas aos conteúdos de Geometria a serem desenvolvidas por parte do estudante são apresentadas no Quadro 3.2, sendo selecionadas as pertinentes a esse estudo.

Quadro 3.2 - Relação das habilidades pertinentes a esta dissertação para os estudantes do ensino médio.

(Continua)

Etapa de Ensino	Habilidades
Ensino Médio.	(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
	(EM13MAT308) Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança.

Quadro 3.1 - Relação entre o ano de estudo e as habilidades pertinentes a esta dissertação para os estudantes do ensino fundamental.

(Conclusão)

	(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados.
	(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamentos do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados, generalizando padrões observados.
	(EM13MAT512) Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos.

Fonte: BNCC (2017)

Mas para que seja possível desenvolver estas habilidades, é necessário sair do tradicional, em que o livro didático geralmente é única fonte de consulta. No texto da BNCC é destacado que:

{...} o uso de tecnologias possibilita aos estudantes aprofundar sua participação ativa nesse processo de resolução de problemas. São alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações. (BRASIL, 2017, p. 528.)

Por fim, vemos que a Geometria está contemplada em diversos documentos oficiais que norteiam os vários níveis de ensino no Brasil, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio.

3.2 TEORIA DE VAN HIELE

A teoria de Van Hiele foi desenvolvida em meados de 1975, pelo casal holandês Dina Van Hiele Geldof e Pierre Marie Van Hiele, como resultado de seus doutorados sendo orientados por Hans Freudenthal. O objetivo do casal Van Hiele foi analisar em grupos de alunos holandeses a estrutura de entendimento dos conceitos da geometria, e assim teorizar um modelo que outros professores pudessem seguir para desenvolver o pensamento geométrico de seus estudantes.

Viera (2017), explica como o casal Van Hiele procedeu em suas teses:

A tese de Pierre consistia em explicar a problemática do aprendizado em geometria, já a de Dina se fundamentava em um experimento educacional relacionado com a ordenação do conteúdo de geometria e nas atividades que seriam suficientes para o aprender dos estudantes. (VIERA, 2017, p.39)

A Teoria de Van Hiele apresenta cinco níveis de aprendizagem em geometria os quais são apresentados no Quadro 3.3

Quadro 3.3 - Níveis da aprendizagem geométrica.

Níveis	Denominação	Descrição
0	Visualização	Neste nível, é a aparência das formas que as define.
1	Análise	Neste nível, os alunos começam a apreciar que uma coleção de formas é composta devido as suas propriedades.
2	Dedução informal	Neste nível, os alunos serão capazes de acompanhar e apreciar um argumento dedutivo informal sobre formas e suas propriedades.
3	Dedução formal	Neste nível, os alunos serão capazes de trabalhar com sentenças abstratas, sobre as propriedades geométricas e estabelecer conclusões baseadas mais na lógica do que na intuição.
4	Rigor	Neste nível, os alunos estudam os próprios sistemas axiomáticos, não apenas as deduções dentro de um sistema.

Fonte: Adaptado de Walle (2009).

Observa-se no Quadro 3.3 a nomenclatura e a descrição dos cinco níveis do pensamento geométrico segundo a Teoria de Van Hiele. Vale salientar que utilizamos a nomenclatura do nível 0 ao 4 e alguns autores utilizam do nível 1 ao 5, mas sendo apenas uma descrição diferente nada alterando nas características de cada nível.

Quanto a posição dos estudantes nos níveis do pensamento geométrico e o nível de ensino em que estão, tem-se: Em Assad (2017), espera-se que os estudantes do Ensino Médio devam ter seu pensamento geométrico desenvolvido até o nível 2, para quando ingressarem no Ensino Superior desenvolverem a geometria descritiva atrelada ao nível 3. Como descrito em Ferreira (2018), um estudante no final do Ensino Médio deve ter completado o nível 2 e operar no nível 3 da Teoria de Van Hiele. Para Da Costa e Dos Santos (2020), um estudante do Ensino Superior deverá operar no nível 3 do pensamento geométrico e assim desenvolver características para alcançar o nível 4.

Algumas características sobre a teoria de Van Hiele, importantes para compreensão, análise e aplicação são: os níveis são sequenciais; os níveis são independentes da idade dos estudantes; para o avanço entre os níveis a experiência

geométrica é o fator de maior influência; quando a linguagem usada pelo professor está em um nível superior ao do estudante haverá falta de comunicação.

As cinco habilidades associadas aos níveis do pensamento geométrico da teoria de Van Hiele, são apresentadas no Quadro 3.4

Quadro 3.4 - Níveis da Teoria de Van Hiele e habilidades.

(Continua)

	Nível 0 Reconhecimento Visualização	Nível 1 Análise	Nível 2 Dedução Informal	Nível 3 Dedução Formal	Nível 4 Rigor
Visual	Reconhecer figuras geométricas em um desenho, reconhecer informações encontradas em uma figura.	Perceber uma figura como parte de outra maior; identificar propriedades de uma figura.	Reconhecer inter-relações e propriedades comuns entre figuras distintas.	A partir de informações de uma figura deduzir outras informações.	Identificar, utilizando figuras, suposições injustificadas; perceber figuras pertinentes a diversos sistemas dedutivos.
Verbal	Dada uma figura, associar a esta o nome correto; compreender expressões que descrevem as figuras.	Detalhar formalmente as diversas propriedades de uma figura.	Definir, correta e precisamente, as palavras, elaborar expressões apresentando inter-relações entre as figuras.	Perceber as diferenciações entre definições, axiomas e teoremas; identificar o que é apresentado e o que é solicitado para fazer numa atividade.	Detalhar diversos sistemas dedutivos; elaborar expressões de resultados presumidos.
Desenho ou Gráfica	Criar esquemas de figuras e identificar corretamente as partes dadas.	Transpor para um desenho as comunicações expressas verbalmente; esboçar o desenho de uma figura a partir de propriedades dadas.	A partir de certas figuras dadas ser capaz de construir outras figuras pertinentes as primeiras.	Desenhar ou construir uma figura específica a partir de informações dadas; identificar quando é necessária a utilização de elementos auxiliares em uma determinada figura.	Conceber as limitações e oportunidades das diversas reproduções gráficas; descrever graficamente, em diferentes sistemas dedutivos, conceitos não formalizados.

Quadro 3.4 - Níveis da Teoria de Van Hiele e habilidades.

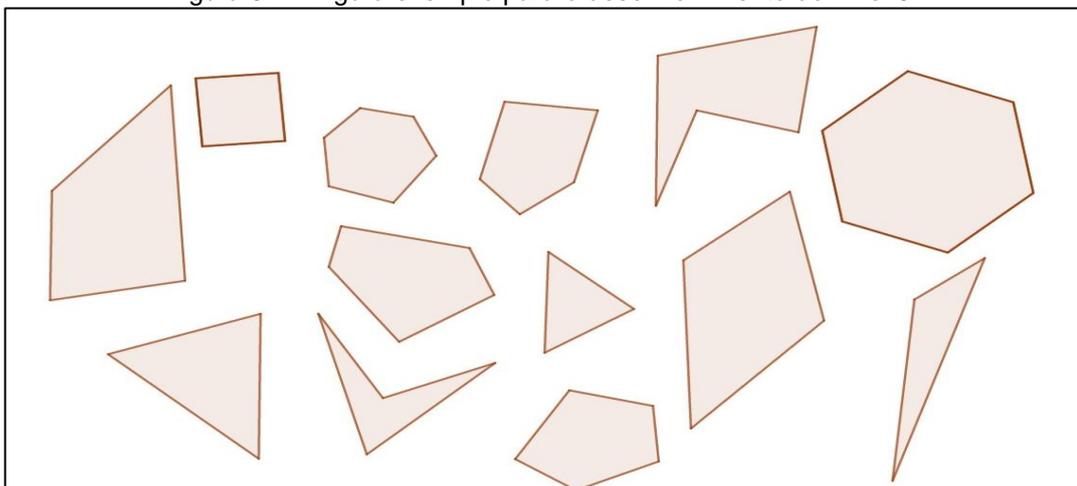
(Conclusão)

Lógica	Entender as diferenças e semelhanças que existem entre as figuras; perceber a preservação da forma de uma figura independente de sua posição.	Perceber que existem diferentes tipos de classificação de figuras; verificar que é possível distinguir uma figura pelas suas propriedades.	Determinar se uma classe de figuras está contida em outra por meio de suas propriedades; entender o quanto importante é uma boa definição.	Desenvolver demonstrações utilizando regras de lógica; inferir consequências a partir de informações dadas.	Entender as limitações e oportunidades dos axiomas ou teses; distinguir quando um sistema de axiomas é independente, consistente e categórico.
Aplicação	Reconhecer, nos elementos do meio ambiente, formas geométricas.	Perceber propriedades geométricas nos elementos do meio ambiente; em um modelo ou no papel reproduzir fenômenos físicos.	Compreender o conceito de um modelo matemático que retrata relações entre objetos.	A partir de informações concedidas ou adquiridas inferir propriedades dos objetos; solucionar problemas que associam objetos.	Retratar sistemas abstratos utilizando modelos matemáticos; criar padrões matemáticos para representar fenômenos físicos, sociais e naturais.

Fonte: Adaptado de Dall'Alba (2015).

Tem-se no Quadro 3.4 as características e habilidades associadas a cada nível de pensamento geométrico, e uma descrição do que é esperado dos estudantes para cada habilidade em seu nível correspondente. Com o intuito de facilitar a compreensão a respeito dos cinco níveis de pensamento geométrico, é apresentada uma sequência de atividades com descrição do que é esperado como resposta. Para exemplificar como ocorre o desenvolvimento do pensamento geométrico, utilizou-se do conjunto de polígonos presentes na Figura 3.1.

Figura 3.1 - Figura exemplo para o desenvolvimento do nível 0.

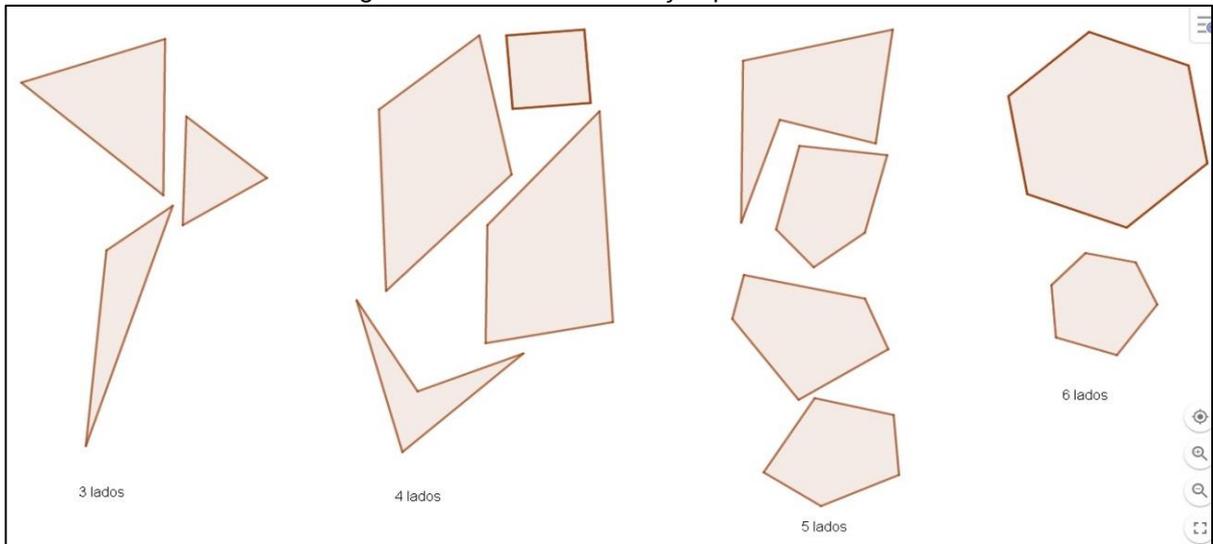


Fonte: o autor.

Para o nível 0 (Visualização ou reconhecimento), têm-se como expectativas: que os estudantes se coloquem dentro do espaço que os rodeia; reconheçam figuras planas por suas aparências físicas; façam a associação entre o objeto / figura e seu respectivo nome; reconheçam os elementos do meio ambiente por meio de formas geométricas. Todavia no nível 0 os estudantes não identificam as figuras geométricas por meio de suas propriedades.

Desta forma, um exemplo de atividade do nível 0 com utilização da Figura 3.1 pode ser abordado da seguinte forma: pede-se aos estudantes, diante da Figura 3.1, para agruparem as figuras de acordo com alguma característica comum estabelecida por eles mesmos. Uma possível resposta é apresentada na Figura 3.2, em que a característica utilizada para o agrupamento foi a quantidade de lados de cada figura.

Figura 3.2 - Possível resolução para o nível 0.

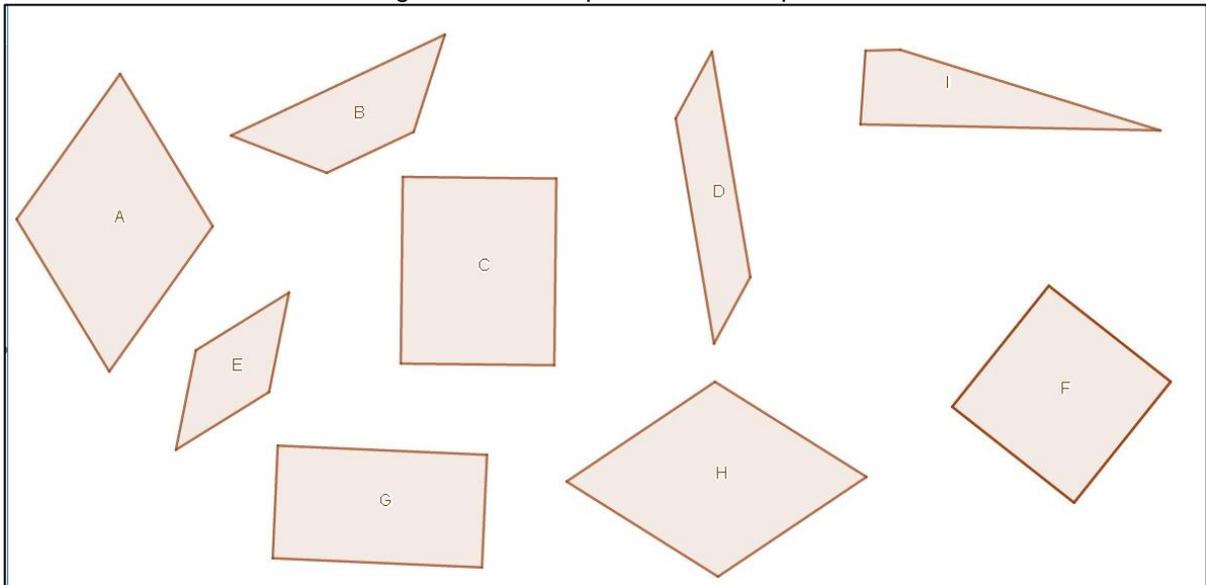


Fonte: o autor.

Já no nível 1, (Análise) os estudantes devem ser capazes de identificar característica e propriedades das figuras apresentadas, ou seja, reconhecem as figuras por suas partes. Desta forma, numa atividade deste nível, os estudantes podem agrupar as figuras quanto a suas propriedades de maneira mais formalizada. Entretanto não são capazes de explicar as relações entre essas propriedades.

Um exemplo de atividade do nível 1 pode ser observada na Figura 3.3, em que se solicita aos estudantes que agrupem os objetos seguindo propriedades relativas as figuras.

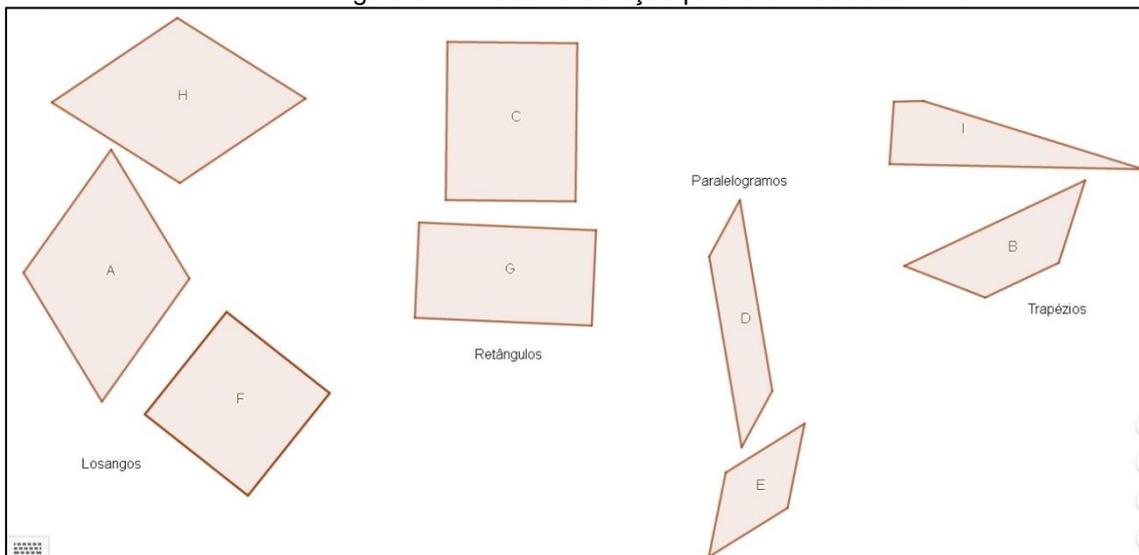
Figura 3.3 - Exemplo de atividade para o nível 1.



Fonte: o autor.

Uma possível solução apresentada por parte dos estudantes pode ser observada na Figura 3.4.

Figura 3.4 - Possível solução para a atividade do nível 1.

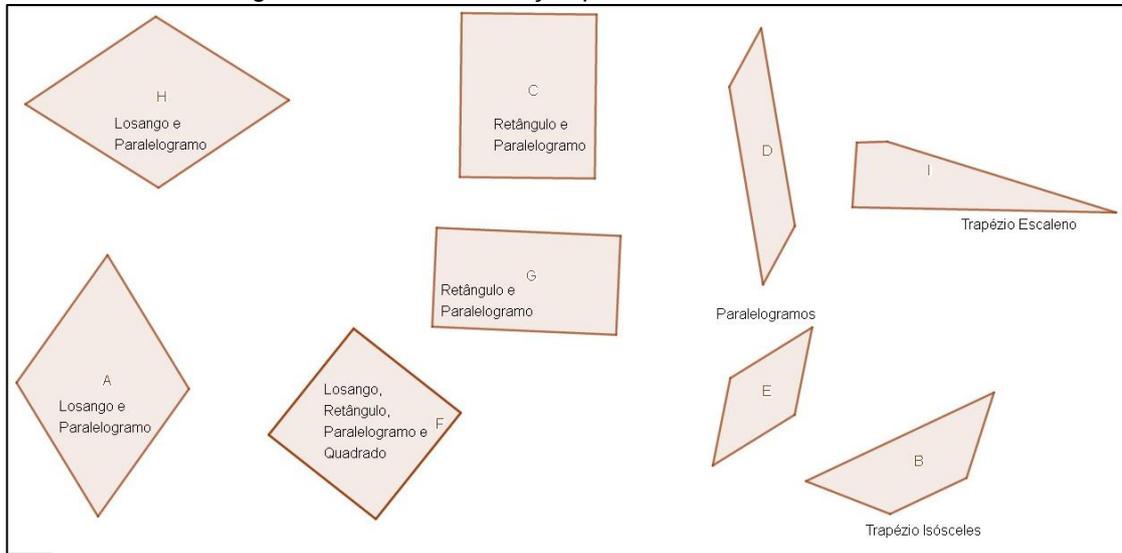


Fonte: o autor.

No nível 2 (Dedução informal), espera-se que os estudantes: tenham a percepção das relações e propriedades comuns entre diferentes figuras; construam figuras a partir de uma figura dada; compreendam relações entre objetos; façam inserção de classes de figuras; compreendam os significados das definições; consigam acompanhar e formular argumentos informais; acompanhem uma demonstração de forma informal. Todavia, os estudantes deste nível ainda não têm condições de formalizar uma própria demonstração. Um exemplo de solução para uma atividade do nível 2 pode ser vista na Figura 3.5, em que são apresentadas as figuras com seus

respectivos nomes. O estudante deve agrupá-las seguindo propriedades dos quadriláteros, além disso incluir uma mesma figura em diversas classificações.

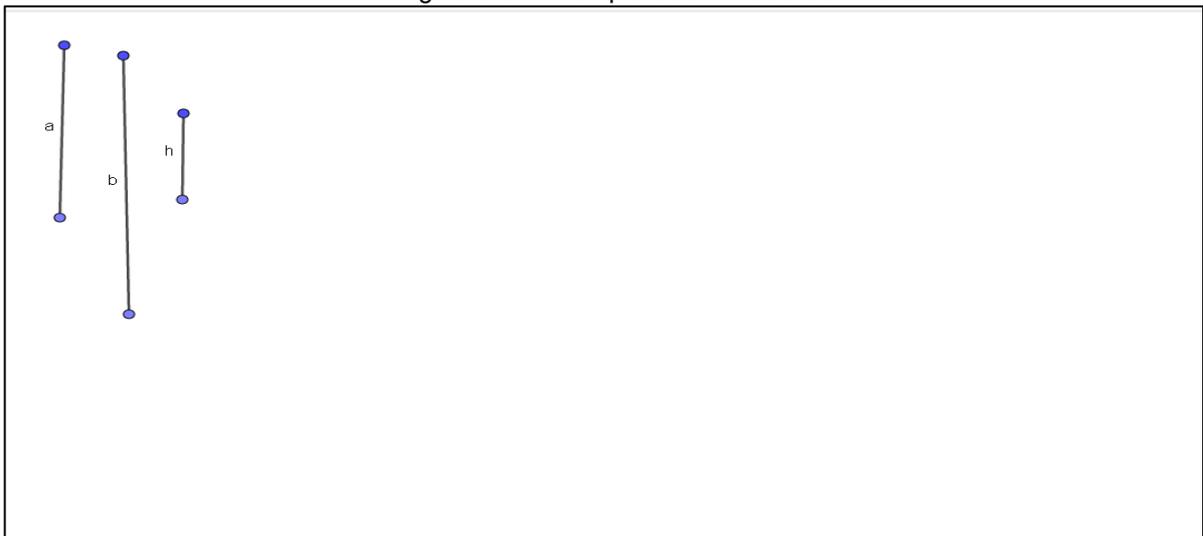
Figura 3.5 - Possível solução para a atividade do nível 2.



Fonte: o autor.

Para o nível 3 (Dedução Formal), imagina-se que os estudantes: já deduzem informações a partir de informações fornecidas; conseguem construir figuras específicas com elementos dado; têm domínio do processo dedutivo e das provas matemáticas. Para exemplificar tipos de atividades do nível 3, utilizamos a Figura 3.6, sendo solicitado que o estudante deve construir um triângulo conhecendo dois lados (a e b) e a altura (h). Neste caso, utilizando o *software* GeoGebra.

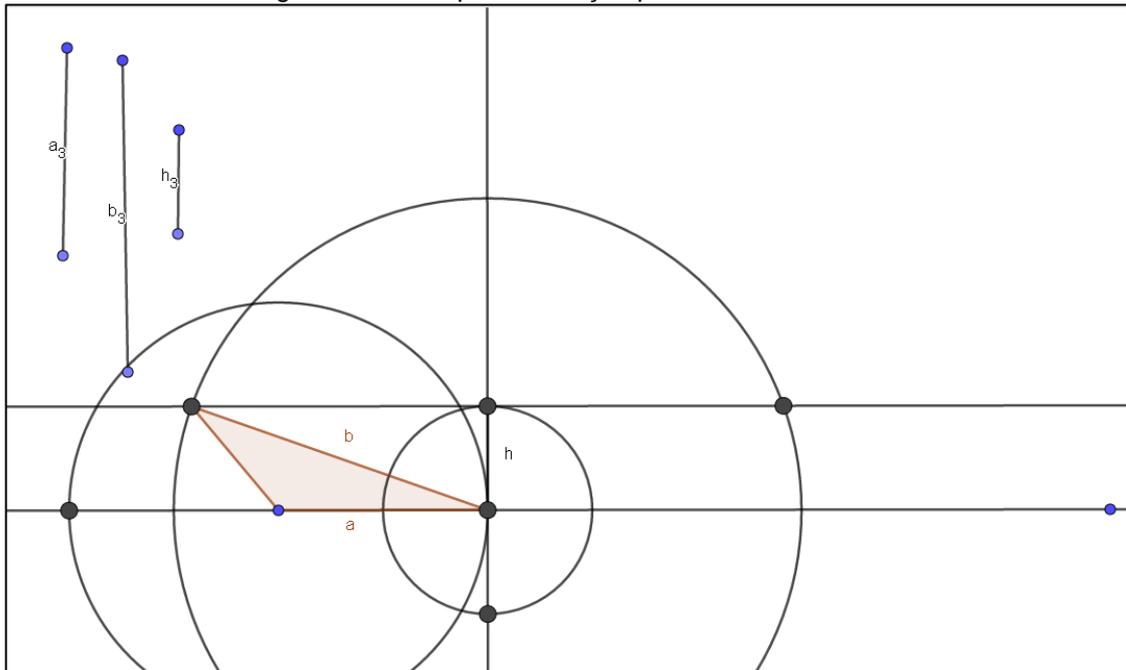
Figura 3.6 - Exemplo de atividade do nível 3.



Fonte: o autor.

Um exemplo de resolução da atividade proposta pode ser observado na Figura 3.7, em que o estudante constrói o triângulo solicitado utilizando diversos conceitos matemáticos como paralelismo, retas perpendiculares, circunferências entre outros.

Figura 3.7. Exemplo de solução para uma atividade do nível 3.



Fonte: o autor.

O uso do GeoGebra facilita a construção de figuras geométricas, pois permite ao estudante testar hipóteses e assim observar o que ocorre em tempo real.

Como vemos em Assad (2017), Walle (2009), Silva Filho (2015), Dall’Alba (2015), Costa (2016) e entre outros autores, o uso das tecnologias educacionais como materiais concretos (ou manipuláveis) e/ou *softwares* tendem a aprimorar os conhecimentos que os estudantes detêm em um determinado nível e ajudam a melhorar o progresso entre os níveis.

Neste sentido, as atividades aplicadas neste trabalho foram desenvolvidas no *software* GeoGebra e disponibilizadas para os estudantes por meio dos dispositivos móveis pessoais, como será mostrado no próximo capítulo.

3.3 TECNOLOGIAS EDUCACIONAIS.

No mundo atual, as tecnologias nos envolvem de diversas maneiras, seja no avanço dos dispositivos móveis (indispensáveis a quase todas as pessoas), nas redes sociais, (tão presentes em nossas vidas), ou de tantos outros recursos criados e reformulados a uma velocidade impressionante. Mas afinal, como definir uma tecnologia? Castro (2018) afirma que:

Embora existam diversas definições para o termo tecnologia, torna-se interessante o ponto comum entre todas elas: as tecnologias são produções oriundas do conhecimento e da inteligência humana e, especialmente na

Educação, elas podem favorecer a construção de outros novos conhecimentos. (CASTRO, 2018, p. 25)

No cenário educacional, tanto os professores, quanto os estudantes ou pesquisadores estão cada dia mais envolvidos com tecnologias. O uso de tecnologias potencializa muito os processos de ensino e aprendizagem. Em especial o uso dos *softwares*, pois propicia melhores condições para analisar situações e explorá-las de maneira mais adequada, permitindo representá-las de uma forma mais clara. (BERTOLDI, 2019).

Os recursos tecnológicos tornam as aulas mais interessantes e relacionadas com a realidade, aguçando a curiosidade do aluno e ampliando sua criatividade. É de senso comum a importância da tecnologia no cotidiano dos indivíduos e que seu uso confere uma maior dinamicidade ao dia a dia das pessoas e suas interações. (CASTRO, 2018).

Para Sampaio (2018), no cenário atual as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), podem ser uma alternativa para o ensino que vise à autonomia do aluno e que permita explorar a sua criatividade a partir da investigação de situações que se fazem presentes no dia a dia na sala de aula. Entretanto, inserir o uso das TDIC nas escolas é um processo muito maior que simplesmente equipar os espaços com tecnologias, prover acesso a equipamentos e automatizar práticas educacionais. (CASTRO, 2018).

Nesta dissertação optou-se por utilizar os próprios dispositivos móveis dos estudantes, pois possibilita a interação no mesmo ambiente em que eles realizam suas atividades habituais, sem a necessidade de utilização de um laboratório. Desta forma, são interessantes as chamadas Tecnologias Móveis (TM), ou seja, um avanço na praticidade tecnológica como coloca Silva (2018):

A partir dos avanços tecnológicos, percebe-se que as TM conhecidas pelos dispositivos: celular, tablets e smartphones vêm trazendo contribuições na sociedade contemporânea, abrindo novos caminhos para as informações, comunicações e interação no mundo social e no contexto escolar, portanto, no cenário educativo percebe-se que tais tecnologias influenciam de maneira que possibilita a interação entre professor e aluno, ampliando e apresentando inúmeros recursos como: aplicativos, jogos, calculadoras e dentre outros, para auxiliar no processo de ensino e de aprendizagem. (SILVA, 2018)

Desta maneira a mobilidade que as TM propiciam torna-se aliada do professor, como um recurso a mais para o desenvolvimento educacional. Também acrescenta uma nova dimensão às atividades, pois possibilita a utilização da natureza pessoal e portátil dos dispositivos para o desenvolvimento das interações que

fortalecem a comunicação dos alunos com o ambiente educacional e com os conteúdos a serem estudados. (LADEIRA, 2018)

Outra vantagem dos dispositivos trata-se do convívio que os estudantes têm com a sua utilização e exploração de recursos, facilitando as atividades:

Os dispositivos das TM como tablets, smartphones e celular já fazem parte do cotidiano dos alunos em sala de aula que muitas vezes causam desconfortos pelo seu uso. Percebemos que muitos professores veem tais recursos como um problema na sala de aula e que muitas vezes não há interesse por parte dos alunos em querer estudar. (SILVA, 2018).

É fato que o uso da internet está presente na vida dos estudantes, e a ampliação da aquisição dos dispositivos móveis, em especial dos smartphones, torna a internet acessível para pessoas de quase todos os poderes aquisitivos, seja através de computadores, notebooks, tablets ou smartphones. (CASTRO, 2018)

Sobre as atividades envolvendo *software* em geometria tem-se a fala de Borba (2007): “As atividades, além de naturalmente trazer a visualização para o centro da aprendizagem matemática, enfatizam um aspecto fundamental na proposta pedagógica da disciplina: a experimentação.” Para este trabalho realizou-se a escolha do *software* GeoGebra, amplamente difundido na comunidade acadêmica e estudantil.

Desde seu lançamento, em meados de 2001, o GeoGebra tem interessado professores, estudantes e pesquisadores pelo mundo afora, tanto por sua versatilidade quanto por seu potencial didático-pedagógico. Criado pelo austríaco Markus Hohenwater, é um *software* de geometria dinâmica e gratuito, que integra diversos recursos gráficos, simbólicos, estatísticos e numéricos. Seu ambiente permite que objetos sejam construídos e manipulados visualmente ou através de comandos programáveis. Em outras palavras:

Por meio de suas múltiplas janelas, o GeoGebra reúne, em um único ambiente, recursos gráficos, numéricos, simbólicos e de programação em Geometria, Aritmética, Álgebra, Funções, Estatística e Probabilidade. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. (BORTOLOSSI, 2016, p. 430)

A utilização de *softwares* permite explorar os recursos computacionais existentes de forma criativa e diferenciada, tornando assim as aulas mais dinâmicas e atraentes. Neste sentido, percebe-se que o:

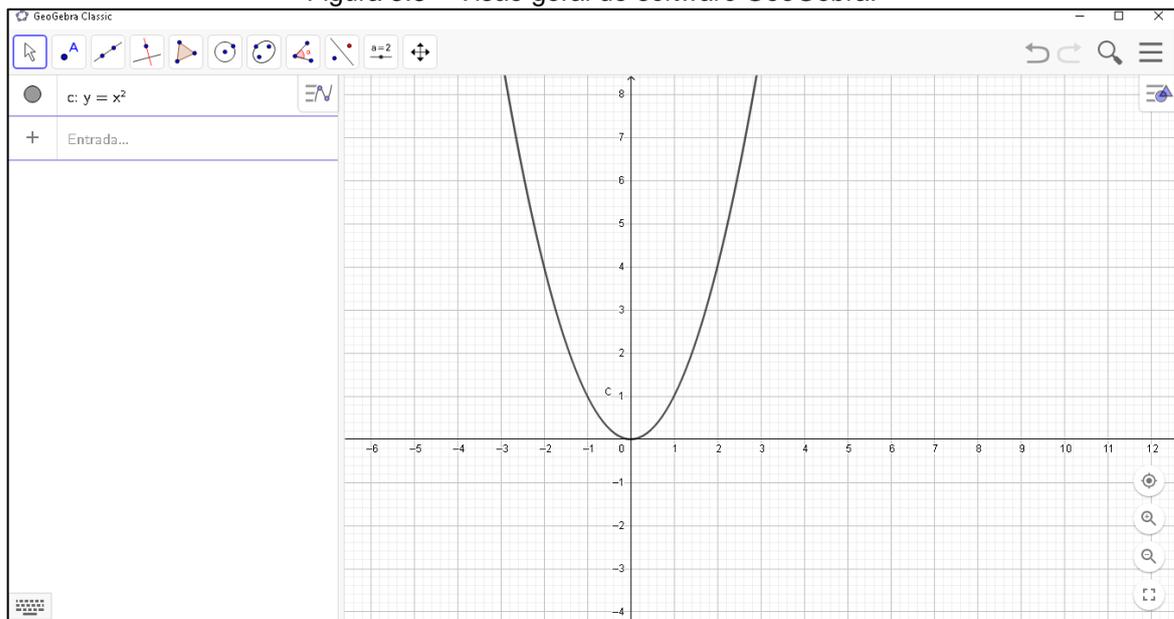
“GeoGebra proporciona experiências enriquecedoras para o processo de ensino e aprendizagem, na medida em que permite criar ambientes dinâmicos e interativos muito elucidativos e intuitivos. Trata-se de uma ferramenta poderosa para a superação dos obstáculos inerentes à aprendizagem, por permitir realizar investigações empíricas e conceber

atividades em que os alunos exploram as propriedades relevantes dos objetos em estudo.” (CORDEIRO, 2016. p.204)

O GeoGebra pode ser baixado gratuitamente pelo *link* <https://www.geogebra.org/download>, ou ainda pode ser utilizado de forma *online* no próprio *site*. Ainda existem as versões para *smartphone* e *tablets*.

Para Amorim (2011), o GeoGebra tem grande funcionalidade pois sua interface dispõe de uma janela de Álgebra e outra de Geometria, em que cada objeto geométrico criado possui uma correspondência algébrica, ou seja, existe uma interatividade entre a zona gráfica e a algébrica, de modo que tudo que é construído na zona gráfica o próprio *software* algebriza mostrando uma expressão algébrica que represente tal figura construída. A Figura 3.8 apresenta a janela de visualização do GeoGebra, em que se pode observar a forma gráfica e algébrica de uma função.

Figura 3.8 – Visão geral do *software* GeoGebra.



Fonte: O autor.

Na Figura 3.8, visualiza-se a janela gráfica bidimensional. Atualmente existe as versões do GeoGebra tridimensionais e com Realidade Aumentada. O GeoGebra pode ser utilizado desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior, visto sua versatilidade de conteúdo e aplicações. No capítulo seguinte será descrita a metodologia utilizada na pesquisa, os sujeitos investigados e as atividades utilizadas como instrumento de coleta de dados.

4 DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Neste capítulo são apresentados os aspectos metodológicos relacionados a classificação da pesquisa, assim como a descrição dos sujeitos, procedimentos de coleta de dados e as atividades que foram desenvolvidas.

4.1 DELINEAMENTO DA PESQUISA

Esta dissertação apresenta um estudo exploratório, pois objetiva investigar o nível do pensamento geométrico dos acadêmicos do primeiro ano do Curso de Licenciatura em Matemática, de uma Universidade pública do Paraná, por meio da Teoria de Van Hiele, com o auxílio do GeoGebra. Classificada como exploratória, pois devido a classificação delineada por Gil (2008), tem como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses.

Os sujeitos da pesquisa foram acadêmicos de duas turmas do 1º ano do curso de Licenciatura em Matemática, ofertado na modalidade presencial, no período noturno de uma Universidade Estadual do Paraná. Participaram da pesquisa 57 acadêmicos das turmas, denominadas aqui por Turma NX e Turma NY.

A docente da disciplina de Geometria Analítica, da qual as duas turmas encontravam-se cursando, cedeu um espaço em suas aulas para que o pesquisador expusesse do que se tratava a pesquisa, os objetivos, o *software* que seria utilizado, entre outros aspectos. Na sequência foi feito o convite aos interessados a participarem desse estudo. Como é usual com acadêmicos das licenciaturas do período noturno, os acadêmicos participantes, eram em grande parte trabalhadores, sem disponibilidade de se fazer presente em outros dias ou horários. Devido ao interesse de participação apresentado por muitos, após planejamento e reestruturação da docente da disciplina citada, a coleta de dados ocorreu no horário normal de aula. Mais detalhes dos encontros com as turmas e sobre as atividades desenvolvidas serão apresentados na sequência.

4.2 ETAPAS E ATIVIDADES

Nesta seção são apresentadas as etapas do desenvolvimento da pesquisa em relação aos sujeitos. O processo de planejamento, organização e construção das atividades desenvolvidas serão omitidos, pois são considerados atividades normais de uma pesquisa.

É importante ressaltar que as turmas escolhidas cursavam a disciplina de Geometria Plana e Desenho Geométrico, que trata de conceitos pertinentes aos abordados na pesquisa. Assim as atividades aqui propostas foram previamente repassadas à professora da disciplina para análise e opinião, a qual sugeriu a adaptação de algumas atividades para se adequarem ao conteúdo que os acadêmicos estavam trabalhando.

As atividades desenvolvidas foram aplicadas aos membros do Grupo de Pesquisa de Tecnologias Educacionais em Matemática -GTEM. O grupo contribuiu positivamente nos aspectos de escrita e forma de apresentação das questões, assim como também serviu de teste para o funcionamento das atividades nos dispositivos móveis.

A pesquisa visava a utilização do GeoGebra, e para que os acadêmicos pudessem utilizar os próprios *Smartphones* para acessar o *software*, foi necessário uma apresentação e ambientação do *software* e seus recursos, visto que nem todos os acadêmicos conheciam o programa. Nesse sentido, duas etapas foram planejadas. Na primeira etapa realizou-se a apresentação e ambientação do *software* GeoGebra. Na segunda a realização das atividades pelos acadêmicos, sendo esta, a etapa de coleta de dados propriamente dita.

4.2.1 Etapa 1

A primeira etapa, consistia na apresentação e ambientação dos acadêmicos com o *software* GeoGebra. Como os participantes eram de duas turmas, para que não houvesse interferências quanto a coleta de dados, optou-se por reuni-las nesta etapa. As atividades foram realizadas no laboratório do Núcleo de Tecnologia em Educação a Distância (NUTEAD), sendo utilizadas quatro aulas da disciplina de Geometria Analítica, e contando com o auxílio de dois voluntários do grupo de pesquisa GTEM, divididas da seguinte maneira:

No primeiro momento, foi apresentada a forma como os acadêmicos procederiam para o *download* do GeoGebra em seus dispositivos móveis. A Figura 4.1, apresenta um exemplo com a plataforma *Play Store*. Alguns acadêmicos utilizaram outras plataformas de acordo com os modelos de seus dispositivos.

Figura 4.1 – Ilustração da tela do dispositivo móvel com o processo de download do GeoGebra.



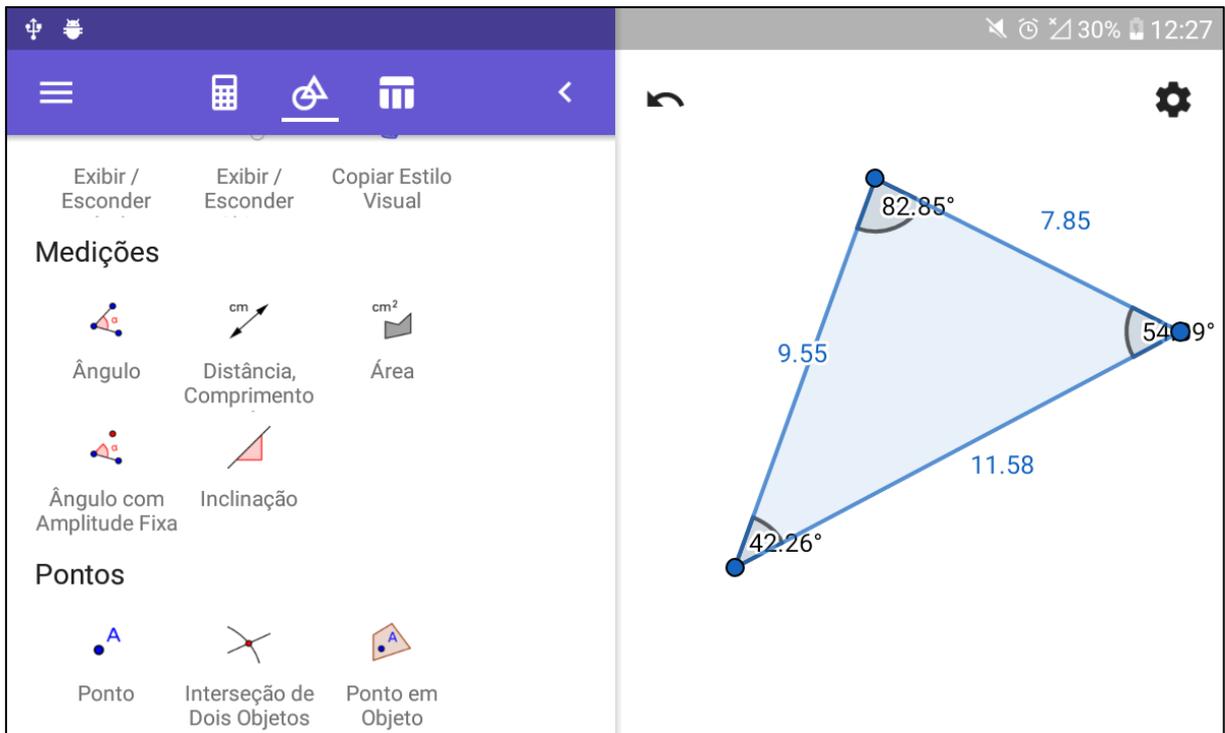
Fonte: o autor.

Num segundo momento, explicaram-se os procedimentos dentro do *software* de forma básica: entrar e sair, salvar, compartilhar, exportar. Para isto o pesquisador projetou a tela de seu próprio dispositivo móvel para que os acadêmicos pudessem acompanhar o passo-a-passo. Também foi realizada uma lista dos contatos pessoais dos acadêmicos vinculados ao aplicativo *WhatsApp*. Isto para que no dia da realização das atividades pudessemos disponibilizá-las por meio de grupos de conversas no aplicativo.

No terceiro momento, foram apresentadas formas de utilização do GeoGebra, tais como: criar e deletar pontos, segmentos, retas, polígonos e circunferências. Além dos procedimentos para marcar interseções de objetos, medir segmentos, medir ângulos, calcular áreas e utilizar a ferramenta compasso. Também neste momento, explicou-se como os acadêmicos deveriam enviar as atividades para o autor por meio do aplicativo *WhatsApp*.

Por fim, disponibilizou-se um tempo para testar os procedimentos e tirar eventuais dúvidas dos acadêmicos. Para isso, foram aplicadas atividades em que os acadêmicos deveriam construir um triângulo, medir seus lados, ângulos e marcar seus pontos médios. (Figura 4.2).

Figura 4.2 – Exemplo de atividade: construindo um triângulo e medindo seus lados e ângulos.



Fonte: O autor.

Para o envio das atividades, dos dispositivos dos acadêmicos para o autor, utilizou-se o aplicativo *WhatsApp* criando dois grupos com a lista dos contatos dos acadêmicos denominadas “GeoGebra NX” e “GeoGebra NY”, onde os acadêmicos teriam acesso as atividades. Após concluírem as atividades os acadêmicos deveriam exportá-las para o contato pessoal do autor com a legenda no formato (RA – Nome da atividade) como exemplo (091031001 N0H1).

4.2.2 Etapa 2

A segunda etapa foi realizada em dois dias (quatro aulas por turma) da mesma semana da Etapa 1, com o intuito de que as informações repassadas estivessem “frescas” para a continuidade do processo. Na Etapa 2, os acadêmicos estavam separados com suas respectivas turmas NX e NY. Foram realizadas 19 atividades (quadro 4.1), sendo quinze delas divididas para os níveis 0, 2 e 3 e quatro para o nível 1. Elas foram baseadas nas habilidades relacionadas com o pensamento geométrico da Teoria de Van Hiele.

Para orientação na realização das atividades desenvolvidas no GeoGebra e enviadas pelo *WhatsApp*, utilizou-se um roteiro com a descrição das atividades (APÊNDICE A).

Quadro 4.1 – Identificações dos níveis e habilidades associados às atividades.

Nível	Habilidade	Identificação da atividade.
0	Verbal	Atividade 1. N0H1
	Visual	Atividade 2. N0H2
	Gráfica	Atividade 3. N0H3
	Lógica	Atividade 4. N0H4
	Aplicação	Atividade 5. N0H5
1	Verbal	Atividade 6. N0H1
	Visual	Atividade 7. N0H2
	Gráfica	Atividade 8. N0H3
	Lógica / Aplicação	Atividade 9. N0H4
2	Visual	Atividade 10. N2H1
	Verbal	Atividade 11. N2H2
	Gráfica	Atividade 12. N2H3
	Lógica	Atividade 13. N2H4
	Aplicação	Atividade 14. N2H5
3	Visual	Atividade 15. N3H1
	Verbal	Atividade 16. N3H2
	Gráfica	Atividade 17. N3H3
	Lógica	Atividade 18. N3H4
	Aplicação	Atividade 19. N3H5

Fonte: o autor

Para melhor compreensão, cada atividade do Quadro 4.1, é apresentada na sequência de forma detalhada.

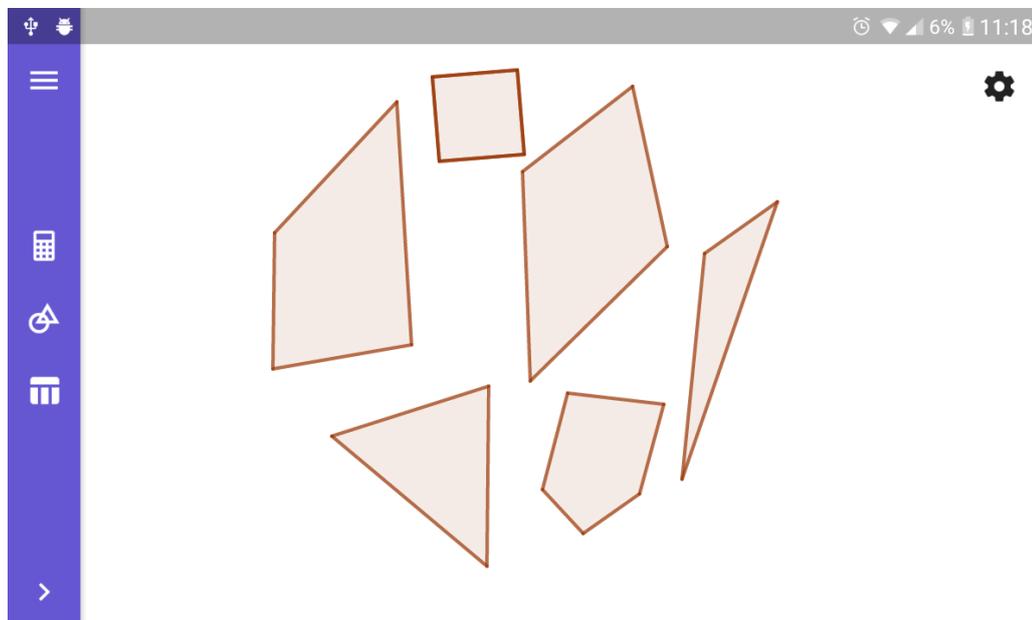
4.2.3 Atividades Desenvolvidas

Nesta seção apresentam-se as atividades planejadas individualmente, seus objetivos, figuras que mostram como a atividade foi apresentada no GeoGebra e o que o acadêmico deveria preencher no roteiro descritivo das atividades (APÊNDICE A). Na apresentação das atividades na sequência, observa-se as figuras do arquivo das atividades do GeoGebra e um recorte da descrição do roteiro de atividade.

Atividades relacionadas ao Nível zero

Atividade 1 - N0H1 – Esta atividade tinha por objetivo, verificar a habilidade verbal do nível 0 da Teoria de Van Hiele, e seu objetivo era o reconhecimento visual de figuras geométricas por parte dos acadêmicos. Para tanto, foram apresentadas algumas figuras geométricas (Figura 4.3) as quais se esperava que o estudante agrupasse as figuras de acordo com alguma característica comum e ainda, indicar no roteiro de atividades (Figura 4.4) qual a característica que conseguiu identificar para justificar esse agrupamento.

Figura 4.3 - Atividade 1 N0H1- Nível 0 Habilidade Verbal.



Fonte: o autor

Figura 4.4 - Atividade 1 N0H1- Nível 0 Habilidade Verbal. (Roteiro de atividades)

Roteiro de atividades no software GeoGebra.

Atividade 1: Abra o arquivo nomeado por atividade N0H1.

Nesta atividade você deve agrupar as figuras de acordo com alguma característica que você identificar.

Qual característica você utilizou para agrupar as figuras:

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N0H1.

Fonte: o autor

O estudante poderia agrupar as figuras utilizando a quantidade de lados das mesmas, ou a quantidade de ângulos internos, ou a quantidade de “cantos” ou “pontas”, etc.

Atividade 2 - N0H2 - Esta atividade pretendia verificar a habilidade visual do nível 0 da Teoria de Van Hiele, tendo assim como objetivo a classificação das figuras apresentadas em polígonos e não polígonos (Figuras 4.4 e 4.5). Como essas classificações apareciam na atividade, esperava-se que os acadêmicos agrupassem os polígonos próximos a palavra polígonos, e realizassem o mesmo processo para os não polígonos.

Figura 4.5 - Atividade 2 N0H2 - Nível 0 Habilidade Visual. (Roteiro de atividades)

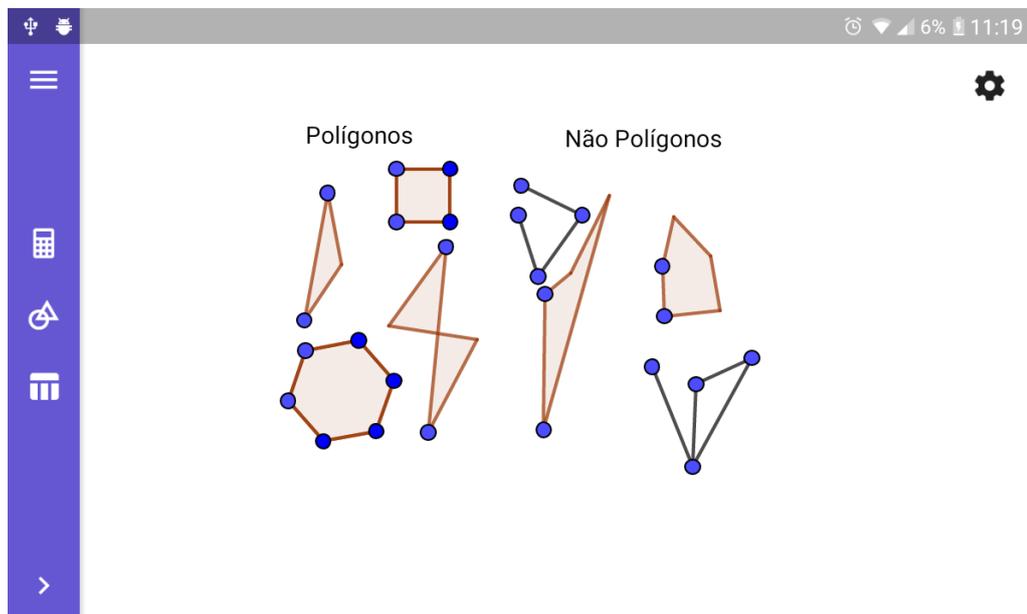
Atividade 2: Abra o arquivo nomeado por atividade N0H2.

Nesta atividade você deve agrupar as figuras com seus respectivos nomes.

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N0H2.

Fonte: O Autor.

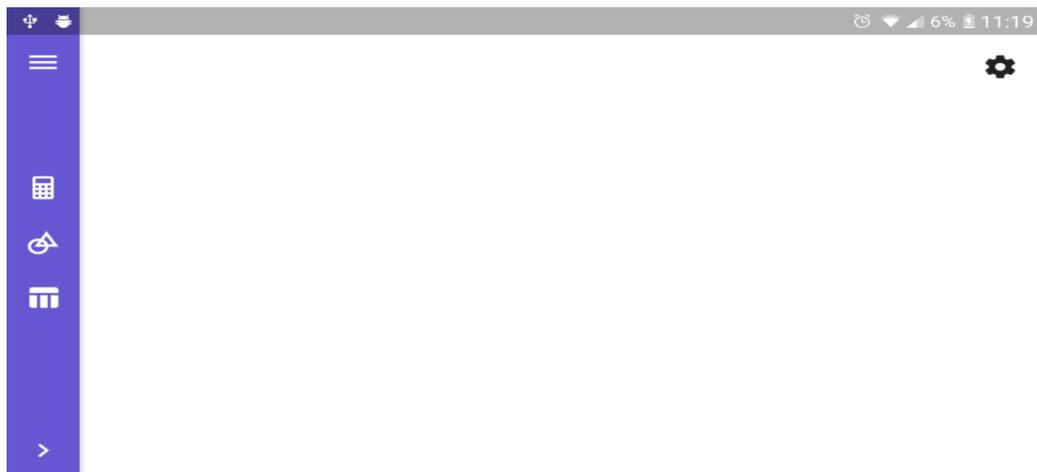
Figura 4.6 - Atividade 2 N0H2 - Nível 0 Habilidade Visual.



Fonte: o autor

Atividade 3 - N0H3 - tinha como finalidade verificar a habilidade de Desenho (ou gráfica) do nível 0 da Teoria de Van Hiele. O principal objetivo era que os acadêmicos utilizassem as ferramentas do GeoGebra para criar figuras geométricas, que representassem algo do seu cotidiano. Por isso a atividade apresentava uma tela em branco para o acadêmico soltar a criatividade. (Figuras 4.6 e 4.7).

Figura 4.7 - Atividade 3 N0H3 - Nível 0 Habilidade Gráfica.



Fonte: o autor

Figura 4.8 - Atividade 3 N0H3 - Nível 0 Habilidade Gráfica. (Roteiro de atividades)

Atividade 3: Abra o arquivo nomeado por atividade N0H3.

Nesta atividade você deve construir figuras geométricas usando as ferramentas do GeoGebra que representem alguma coisa de seu cotidiano.

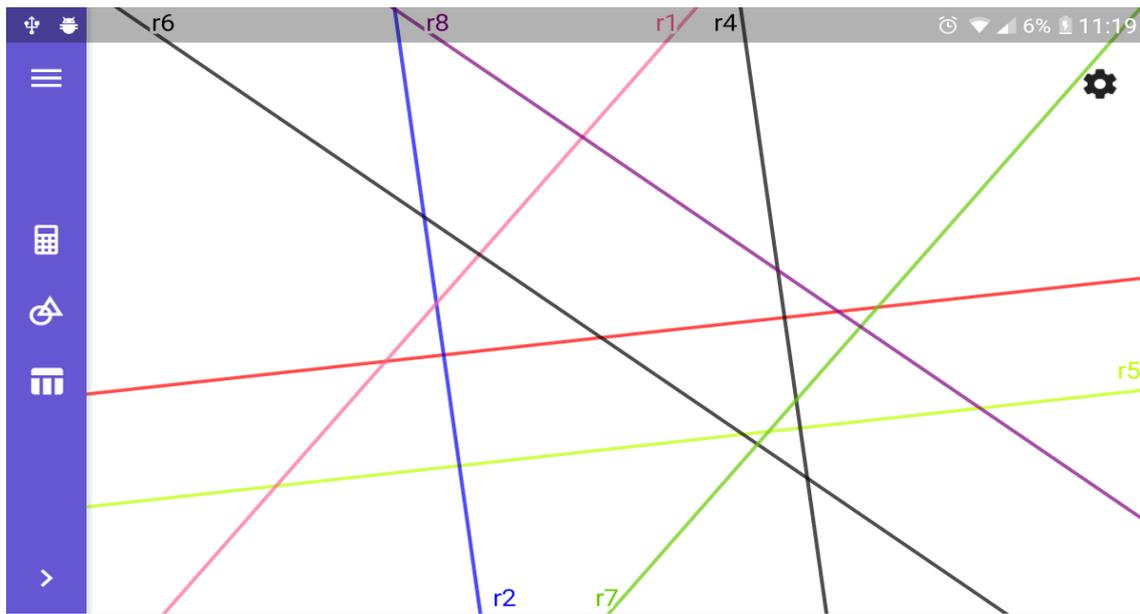
Que figuras geométricas você desenhou? O que elas representam?

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N0H3.

Fonte: o autor

Atividade 4 - N0H4 – teve o intuito verificar a habilidade lógica do nível 0 da Teoria de Van Hiele. Assim o objetivo era que os acadêmicos, diante de várias retas dispostas na atividade (Figura 4.7 e 4.8), descrevessem de forma lógica pares de retas paralelas, perpendiculares ou concorrentes. Para a descrição, os acadêmicos poderiam se utilizar dos respectivos nomes das retas ou de suas cores, e poderiam se expressar de maneira escrita ou de maneira simbólica com os símbolos (//) para paralelas, (X) para concorrentes ou (\perp) para perpendiculares.

Figura 4.9 - Atividade 4 - N0H4 - Nível 0 Habilidade Lógica.



Fonte: o autor

Figura 4.10 - Atividade 4 - N0H4 - Nível 0 Habilidade Lógica.

Atividade 4: Abra o arquivo nomeado por atividade N0H4.

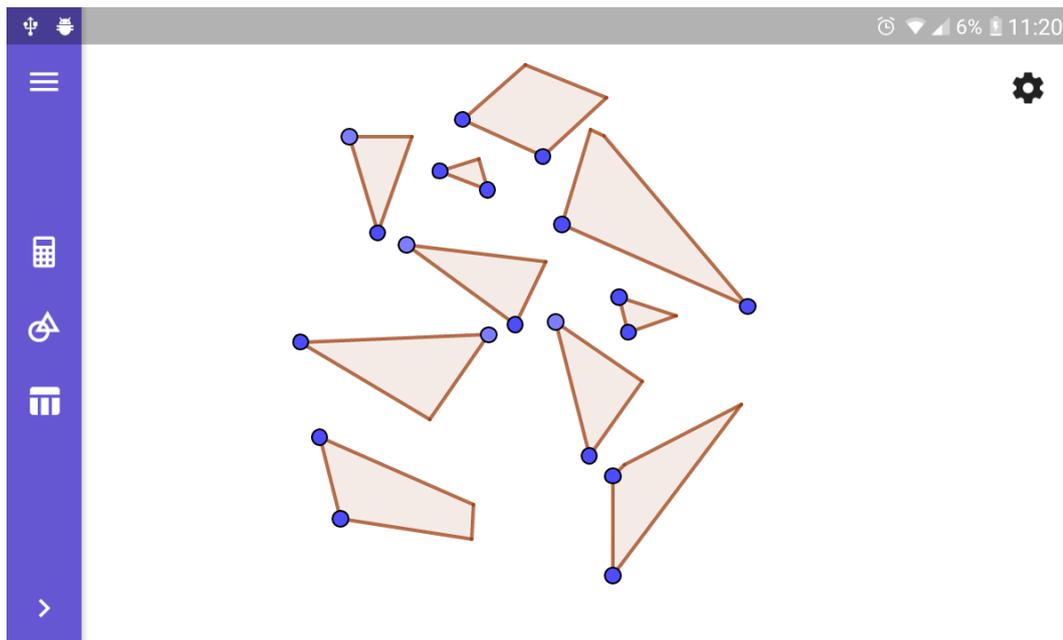
Nesta atividade você deve identificar quais retas são paralelas, quais são perpendiculares e quais são concorrentes entre si? (utilize as cores ou os nomes para identificar as retas.)

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N0H4.

Fonte: o autor

Atividade 5 - N0H5 - tinha como objetivo a verificação da habilidade Aplicação do nível 0 da Teoria de Van Hiele. Desse modo, os acadêmicos diante de vários polígonos, deveriam construir uma nova figura utilizando apenas os triângulos da figura disponibilizada. (Figura 4.11 e 4.12).

Figura 4.11 - Atividade 5 N0H5 - Nível 0 Habilidade Aplicação.



Fonte: o autor

Figura 4.12 - Atividade 5 N0H5 - Nível 0 Habilidade Aplicação. (Roteiro de Atividades)

Atividade 5: Abra o arquivo nomeado por atividade N0H5.

Nesta atividade você deve construir outras figuras usando apenas os triângulos que aparecem no arquivo (arraste e monte uma figura diferente com quantos triângulos quiser).

Que figuras você desenhou?

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N0H5.

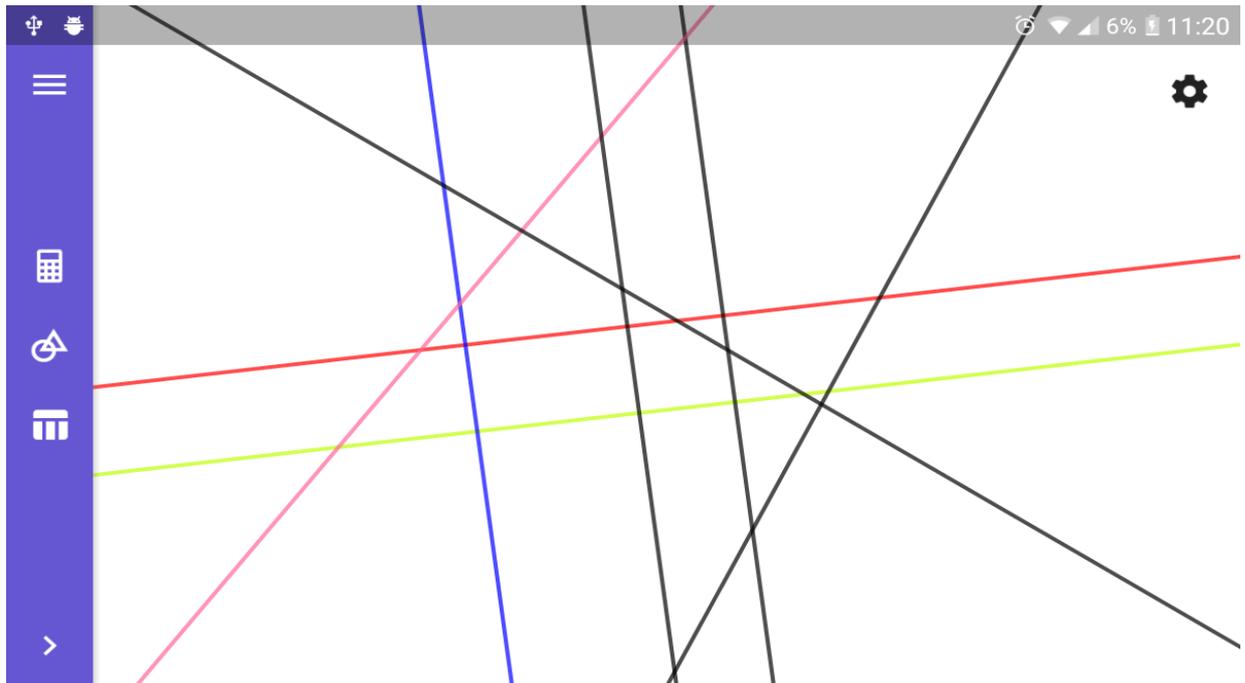
Fonte: o autor

Assim que os acadêmicos entregavam a folha, com o roteiro das atividades do nível 0 preenchida, liberava-se o novo roteiro e os arquivos do GeoGebra referentes ao Nível 1.

Atividades relacionadas ao Nível um.

Atividade 6 - N1H1 - objetivava verificar a habilidade verbal do nível 1 da Teoria de Van Hiele. Nessa atividade, os acadêmicos diante de várias retas, deveriam identificar polígonos presentes nas intersecções destas retas. Foi pedido para que utilizassem a ferramenta polígono para marcar os polígonos encontrados. No roteiro de atividades havia um espaço para descreverem os polígonos identificados. (Figura 4.13 e 4.14).

Figura 4.13 - Atividade 6 N1H1 - Nível 1 Habilidade Verbal.



Fonte: o autor.

Figura 4.14 - Atividade 6 N1H1 - Nível 1 Habilidade Verbal. (Roteiro de Atividades)

Atividade 6: Abra o arquivo nomeado por atividade N1H1.

Nesta atividade você deve identificar dentre as retas apresentadas os diferentes polígonos que se formam nas interseções das retas. Utilize a ferramenta polígono para marcar os polígonos encontrados.

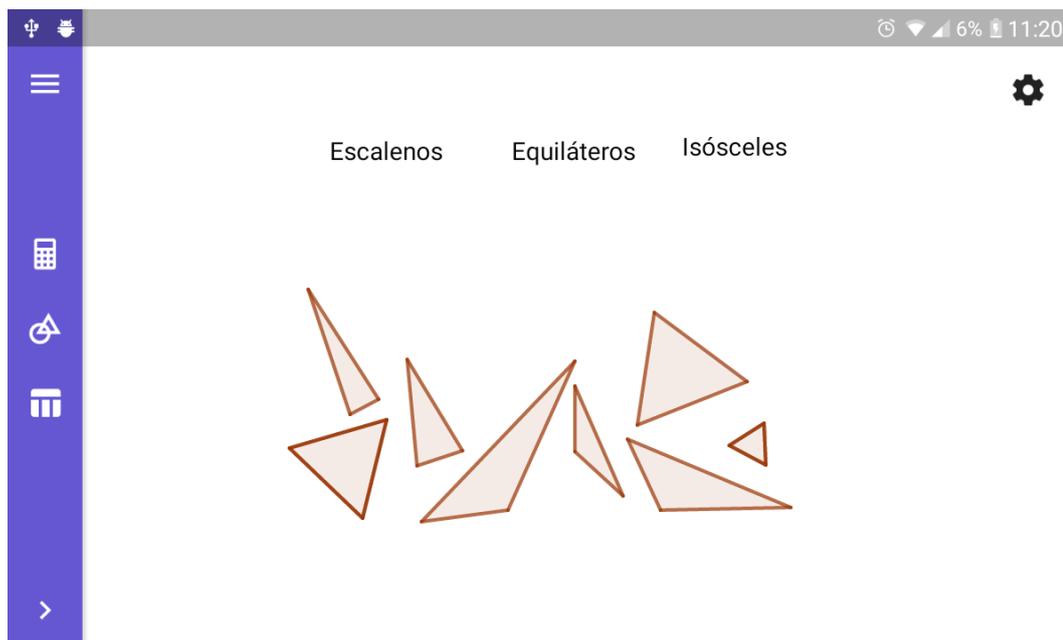
Quais foram os polígonos encontrados?

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N1H1.

Fonte: o autor.

Atividade 7 - N1H2 - apresentava o objetivo de verificar a habilidade visual do nível 1 da Teoria de Van Hiele. Ou seja, os acadêmicos diante de vários triângulos (Figuras 4.15 e 4.16) deveriam organizá-los de maneira concordante com a classificação de seus lados.

Figura 4.15 - Atividade 7 N1H2 - Nível 1 Habilidade Visual.



Fonte: o autor.

Figura 4.16 - Atividade 7 N1H2 - Nível 1 Habilidade Visual. (Roteiro de atividades)

Atividade 7: Abra o arquivo nomeado por atividade N1H2.

Nesta atividade você deve agrupar os triângulos com suas respectivas classificações.

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N1H2.

Fonte: o autor.

Atividade 8 - N1H3 - teve o intuito de verificar a habilidade gráfica do nível 1 da Teoria de Van Hiele. Assim o objetivo era que os acadêmicos diante de 6 características descritas no roteiro de atividades (Figura 4.17), construíssem com as ferramentas disponíveis no GeoGebra um polígono que apresentasse todas as características.

Figura 4.17 - Atividade 7 N1H3 - Nível 1 Habilidade Gráfica. (Roteiro de atividades)

Atividade 8: Abra o arquivo nomeado por atividade N1H3.

Nesta atividade você deve criar um polígono com as seguintes características: a) tenho quatro lados. B) os lados opostos são iguais. C) tem pelo menos um ângulo reto. D) um lado é maior que o outro. E) as diagonais se cruzam ao meio. F) as diagonais são congruentes.

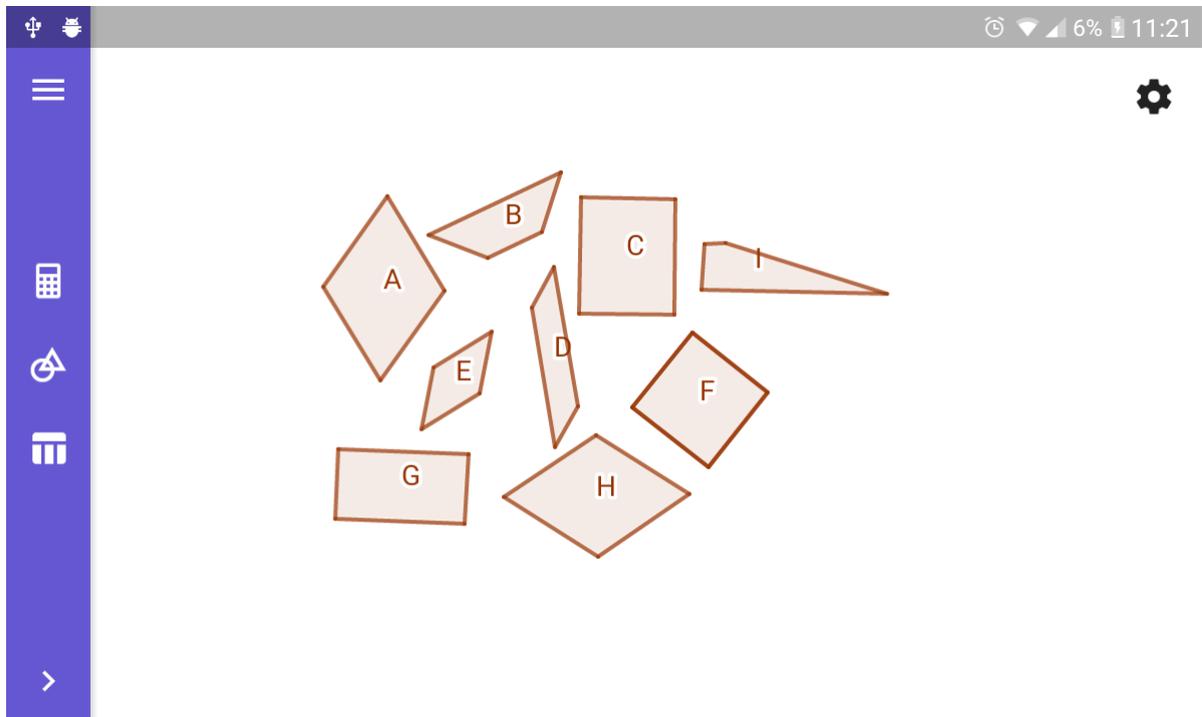
Exporte este arquivo da seguinte forma RA N1H3.

Fonte: o autor.

Atividade 9 - N1H4 – visava avaliar as habilidades de lógica e aplicação do nível 1 da Teoria de Van Hiele. Foram apresentados alguns quadriláteros nomeados

de A à I (Figuras 4.18 e 4.19) para os acadêmicos agrupá-los de acordo com algumas características, que estes mesmos deveriam identificar e descrever no roteiro.

Figura 4.18 - Atividade 9 N1H4 - Nível 1 Habilidades Lógica e Aplicação.



Fonte: o autor.

Figura 4.19 - Atividade 9 N1H4 - Nível 1 Habilidades Lógica e Aplicação. (Roteiro de Atividades)

Atividade 9: Abra o arquivo nomeado por atividade N1H4.

Nesta atividade você deve agrupar as figuras de acordo com algumas características que você identificar.

Nomeie as características e quais figuras estão relacionadas:

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N1H4.

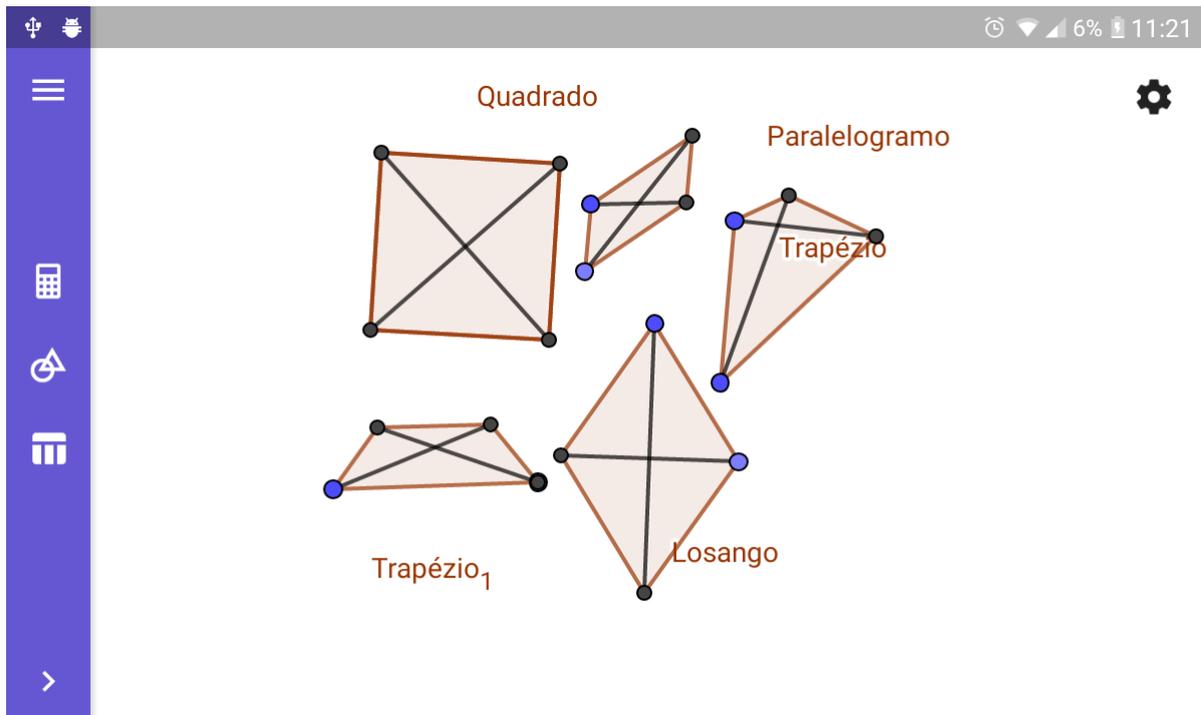
Fonte: o autor.

Assim que os acadêmicos entregavam a folha, com o roteiro das atividades do Nível 1 preenchida, eram então liberados o novo roteiro e os arquivos do GeoGebra referentes ao Nível dois.

Atividades relacionadas ao Nível dois

Atividade 10 - N2H1 - procurava verificar a habilidade Visual do nível 2 da Teoria de Van Hiele. O objetivo era que os acadêmicos utilizassem as ferramentas do GeoGebra para identificar propriedades relacionadas as diagonais dos polígonos apresentados na Figura 4.20, assim como descrever as propriedades identificadas no roteiro de atividades (Figura 4.21).

Figura 4.20 - Atividade 10 N2H1 - Nível 2 Habilidade Visual.



Fonte: o autor.

Figura 4.21 - Atividade 10 N2H1 - Nível 2 Habilidade Visual. (Roteiro de Atividades)

Atividade 10: Abra o arquivo nomeado por atividade N2H1.

Nesta atividade são apresentados alguns quadriláteros, quais as propriedades que você identifica em relação as diagonais?

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N2H1.

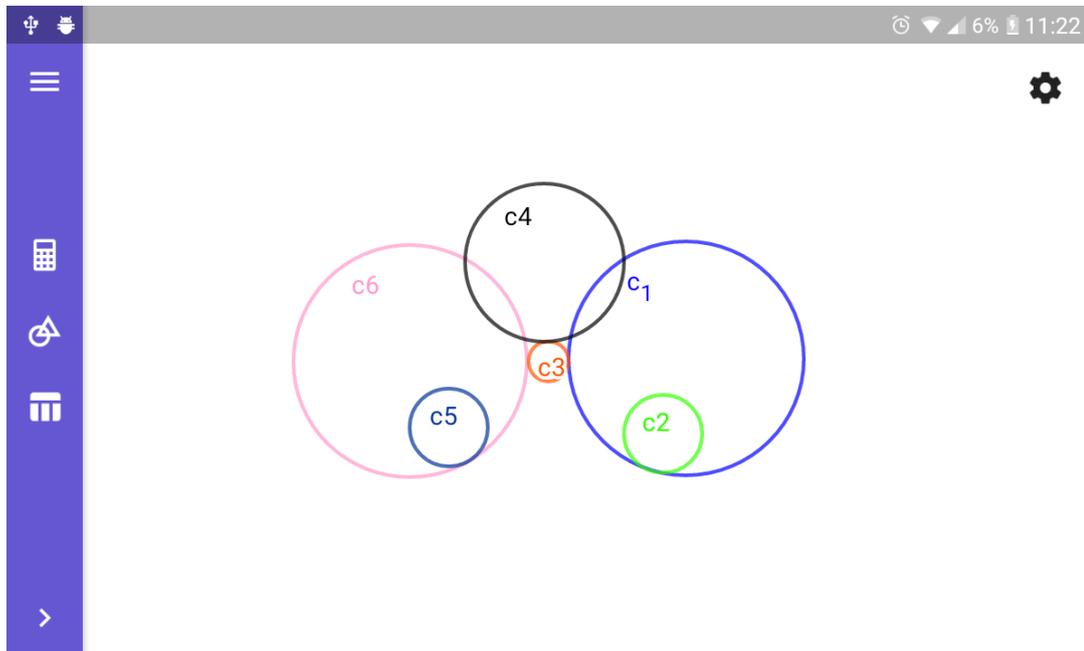
Fonte: o autor.

Embora a atividade N2H1, refere-se à habilidade Visual do nível 2, da Teoria de Van Hiele, os acadêmicos também utilizaram a habilidade verbal.

Atividade 11 - N2H2 - contemplava a habilidade Verbal do nível 2 da Teoria de Van Hiele. Esperava-se que os acadêmicos diante de um conjunto de

circunferências (Figuras 4.22 e 4.23), classificassem-nas aos pares em tangentes, secantes, internas e externas. Para isso, deveriam descrever estas classificações no roteiro de atividades utilizando as cores ou os nomes para identificar as circunferências.

Figura 4.22 - Atividade 11 N2H2 - Nível 2 Habilidade Verbal.



Fonte: o autor.

Figura 4.23 - Atividade 11 N2H2 - Nível 2 Habilidade Verbal. (Roteiro de atividades)

Atividade 11: Abra o arquivo nomeado por atividade N2H2.

São apresentadas algumas circunferências, a cada duas circunferências, classifique-as quanto a posição relativa entre elas (tangentes, secantes, internas e externas),

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N2H2.

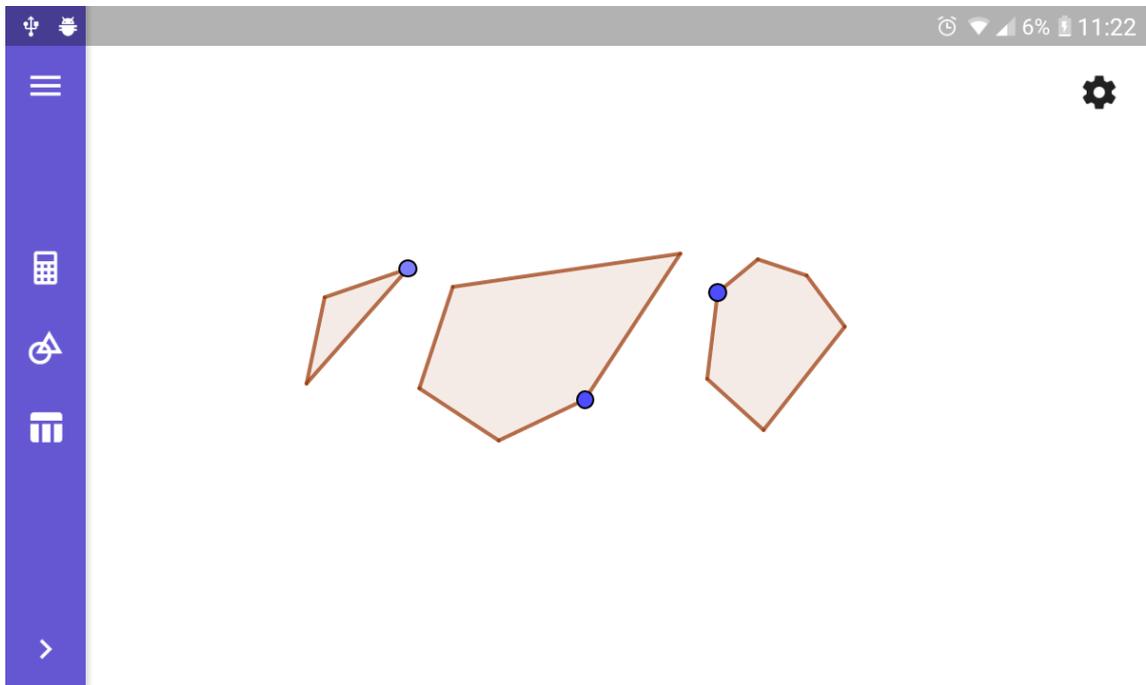
Fonte: o autor.

Embora a atividade N2H2 refere-se à habilidade Verbal do nível 2 da Teoria de Van Hiele, os acadêmicos também utilizariam a habilidade Visual.

Atividade 12 - N2H3 - contemplava a habilidade de desenho no nível 2 da teoria de Van Hiele. Esperava-se que diante de algumas figuras (Figura 4.24) o acadêmico fosse capaz de construir outras figuras pertinentes às primeiras. Logo, foram apresentadas três figuras geométricas com algumas características em comum, em que o estudante deveria identificar uma destas características e criar uma figura

com esta característica pertinente as anteriores e descrevê-la no roteiro de atividades. (Figura 4.25).

Figura 4.24 - Atividade 12 N2H3 - Nível 2 Habilidade Gráfica.



Fonte: o autor.

Figura 4.25 - Atividade 12 N2H3 - Nível 2 Habilidade Gráfica. (Roteiro de atividades)

Atividade 12: Abra o arquivo nomeado por atividade N2H3.

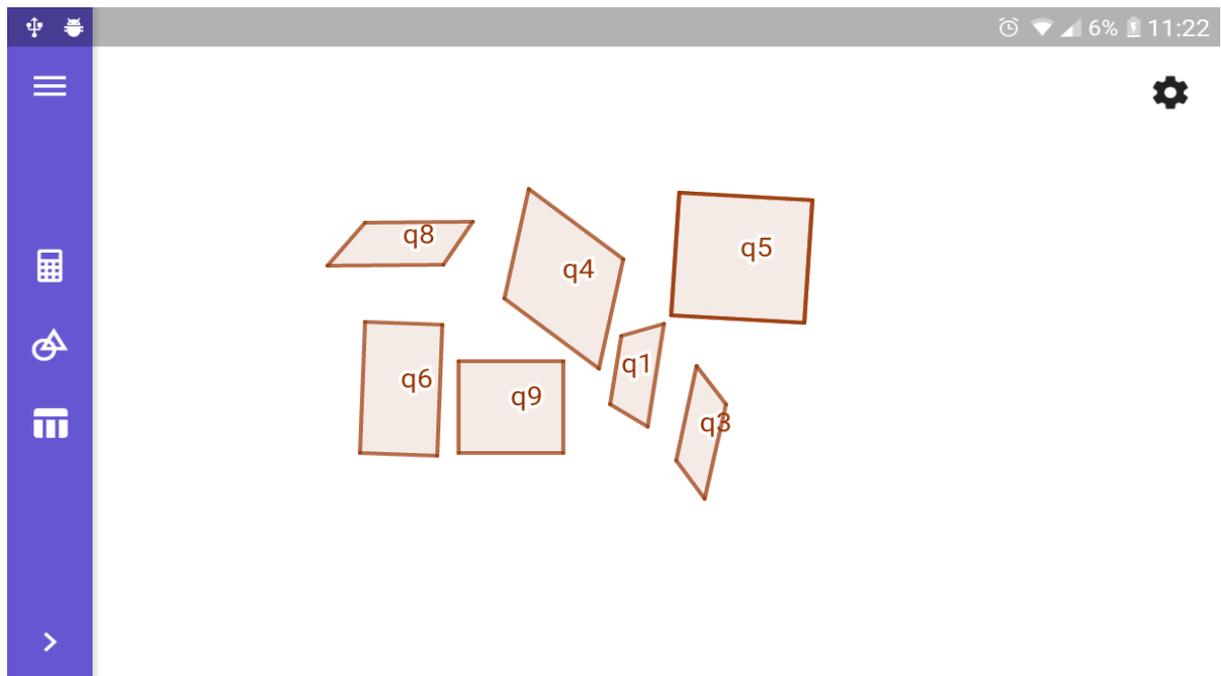
A partir das figuras apresentadas, crie uma nova figura com a característica que você identificou.

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N2H2.

Fonte: o autor.

Atividade 13 - N2H4, procurou verificar a habilidade Lógica do nível 2 da Teoria de Van Hiele. O objetivo era que os acadêmicos classicassem os quadriláteros apresentados (Figura 4.26) em diversas classificações. No roteiro de atividades, foram apresentadas as classificações e os acadêmicos deveriam descrever os polígonos adequados. (Figura 4.27)

Figura 4.26 - Atividade 13 N2H4 - Nível 2 Habilidade Lógica.



Fonte: o autor.

Figura 4.27 - Atividade 13 N2H4 - Nível 2 Habilidade Lógica. (Roteiro de Atividades)

Atividade 13: Abra o arquivo nomeado por atividade N2H4.

Nesta atividade são apresentadas algumas figuras. Agrupe as figuras de forma apropriada.

Retângulos:

Losangos:

Quadrados:

Paralelogramos:

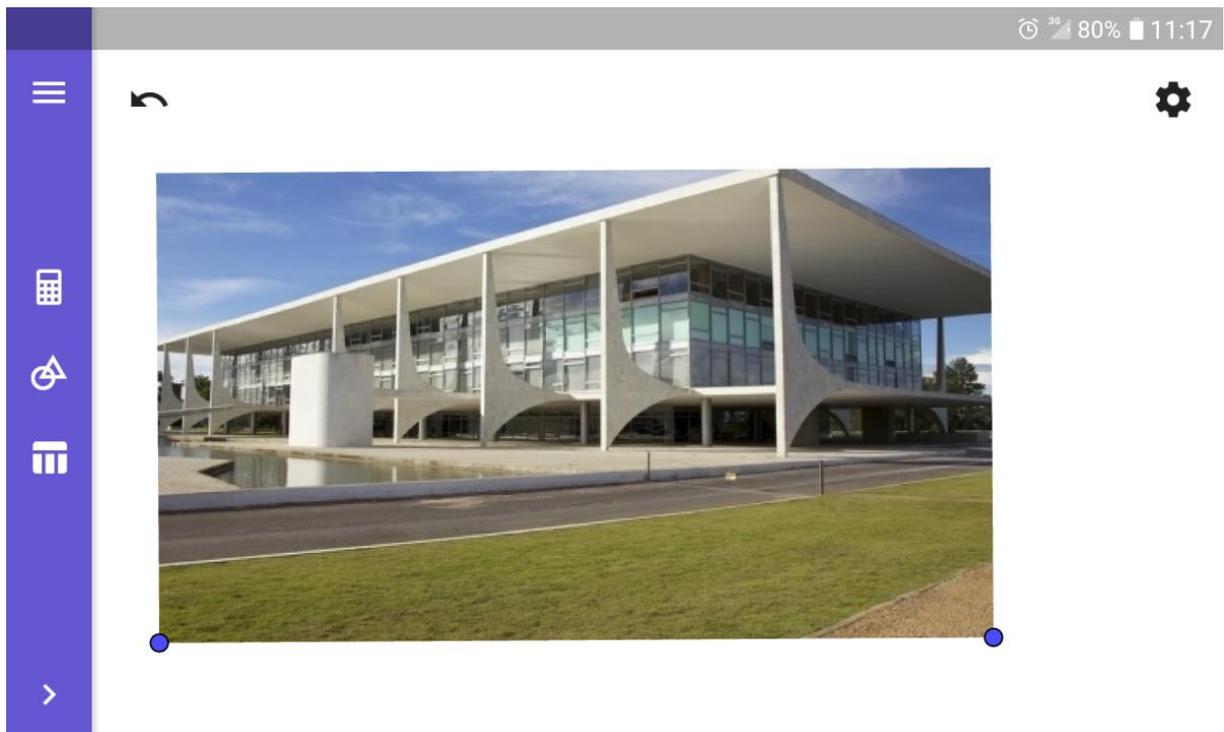
Trapézios:

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N2H4.

Fonte: o autor.

Atividade 14 - N2H5 - teve como objetivo verificar a habilidade de aplicação do nível 2 da Teoria de Van Hiele. Para isso foi apresentada uma imagem do Palácio do Planalto (Figura 4.28), e a partir da imagem os acadêmicos deveriam identificar e descrever elementos matemáticos da geometria presentes na mesma. (Figura 4.29)

Figura 4.28 - Atividade 14 N2H5 - Nível 2 Habilidade Aplicação.



Fonte: o autor.

Figura 4.29 - Atividade 14 N2H5 - Nível 2 Habilidade Aplicação. (Roteiro de Atividades)

Atividade 14: Abra o arquivo nomeado por atividade N2H5.

Nesta atividade visualizamos o Palácio do Planalto, identifique elementos matemáticos da geometria presente nesta imagem. Que elementos você identificou?

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N2H5.

Fonte: o autor.

As Atividades 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13 e 14 são atividades adaptadas das atividades desenvolvidas no trabalho de Assad (2017).

Assim que os acadêmicos entregavam a folha com o roteiro das atividades do Nível dois preenchida, liberava-se o novo roteiro e os arquivos do GeoGebra referentes ao Nível três.

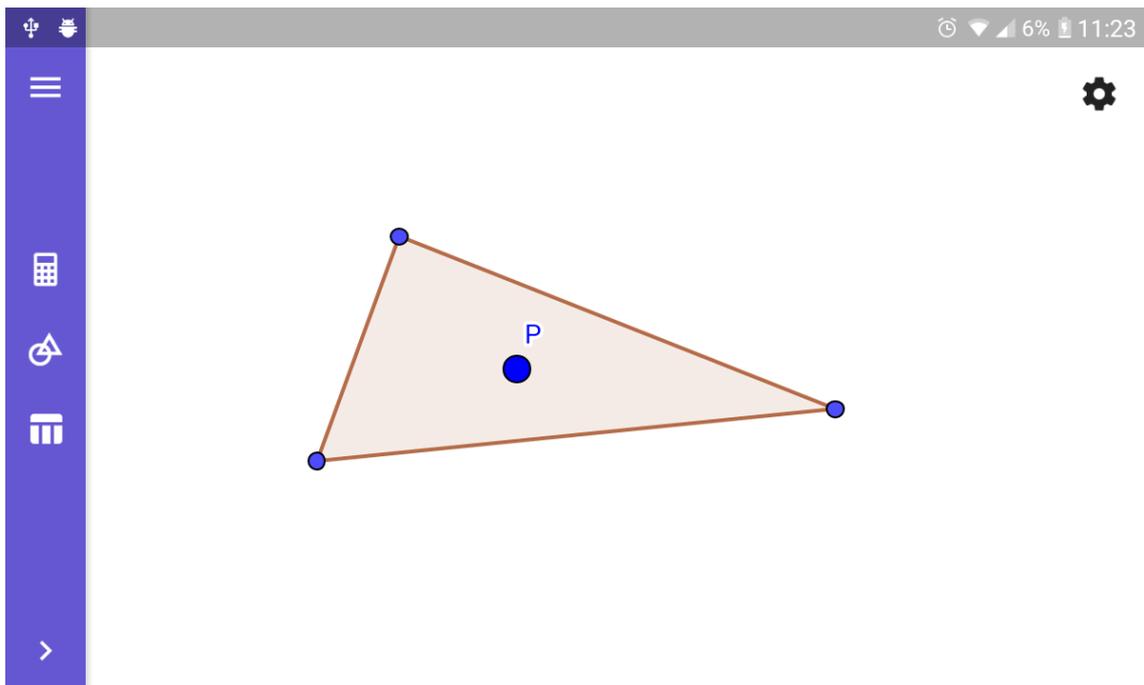
Atividades relacionadas ao Nível três

Como vê-se em Da Costa e Dos Santos (2016), o ideal para a Teoria de Van Hiele, é que os estudantes concluam o Ensino Médio com o nível dois completo e situados no nível três, para assim ingressarem na Universidade.

Optou-se por elaborar atividades até o nível três para analisar se alguns dos acadêmicos poderiam estar com seus pensamentos geométricos mais desenvolvidos.

Atividade 15 - N3H1 - tinha o intuito de verificar a habilidade Visual do nível 3 da Teoria de Van Hiele. O objetivo era que os acadêmicos diante de um triângulo e um ponto P (Figura 4.30), fossem capazes de identificar propriedades e características referentes ao ponto P em relação ao triângulo, e assim descrevê-las no roteiro de atividades. (Figura 4.31)

Figura 4.30 - Atividade 15 N3H1 - Nível 3 Habilidade Visual.



Fonte: o autor.

Embora a atividade N3H1 refere-se à habilidade Visual do nível 3 da Teoria de Van Hiele, os acadêmicos também utilizariam a habilidade Verbal.

Figura 4.31 - Atividade 15 N3H1 - Nível 3 Habilidade Visual.

Atividade 15: Abra o arquivo nomeado por atividade N3H1.

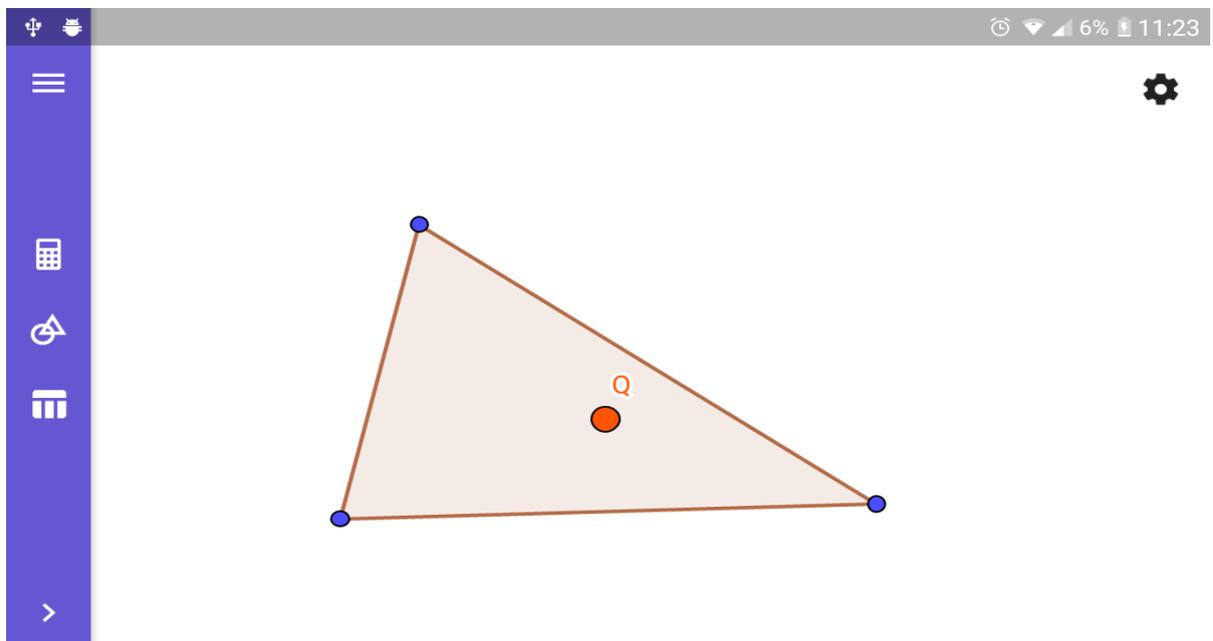
Nesta atividade são apresentados um triângulo e um ponto P, você deve identificar propriedades e característica deste ponto P em relação ao triângulo. O que você concluiu sobre P? Como chegou a essas conclusões?

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N3H1.

Fonte: o autor.

Atividade 16 - N3H2 – pretendia verificar a habilidade Verbal do nível 3 da Teoria de Van Hiele. Desta forma, era esperado que os acadêmicos diante de um triângulo e um ponto Q (Figura 4.32), fossem capazes de identificar propriedades e características referentes ao ponto Q em relação ao triângulo, e assim descrevê-las no roteiro de atividades (Figura 4.33), utilizando-se de uma linguagem materna para esta descrição.

Figura 4.32- Atividade 16 N3H2 - Nível 3 Habilidade Verbal.



Fonte: o autor.

Figura 4.33 - Atividade 16 N3H2 - Nível 3 Habilidade Verbal. (Roteiro de Atividades)

Atividade 16: Abra o arquivo nomeado por atividade N3H2.

Nesta atividade são apresentados um triângulo e um ponto Q, você deve identificar propriedades e característica deste ponto Q em relação ao triângulo. Descreva em linguagem materna as relações encontradas?

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N3H2.

Fonte: o autor.

Embora a atividade N3H2 refere-se à habilidade Verbal do nível 3 da Teoria de Van Hiele, os acadêmicos também utilizariam a habilidade Visual.

Atividade 17 - N3H3 – tinha o objetivo de verificar a habilidade Gráfica do nível 3 da Teoria de Van Hiele. Com essa atividade esperava-se que os acadêmicos construíssem, utilizando-se das ferramentas do GeoGebra, um trapézio isósceles. Sendo um trapézio isósceles aquele que possui seus lados não paralelos iguais, com base maior medindo 4 centímetros (Figura 4.34).

Figura 4.34 - Atividade 17 N3H3 - Nível 3 Habilidade Gráfica. (Roteiro de Atividades)

Atividade 17: Abra o arquivo nomeado por atividade N3H3.

Nesta atividade você deve usar os recursos do GeoGebra para construir um trapézio isósceles (Sendo um trapézio isósceles aquele que possui seus lados não paralelos iguais) com base maior medindo 4 centímetros.

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N3H3.

Fonte: o autor.

Atividade 18 N3H4, teve como objetivo o de verificar a habilidade Lógica do nível 3 da Teoria de Van Hiele. Assim era esperado que os acadêmicos descrevessem, no roteiro de atividade (Figura 4.35), intuitivamente uma demonstração lógica para a proposição: Seja C um círculo de centro O e P um ponto de C. Se t é a reta que passa por P e é perpendicular a OP, então t é tangente a C. (Figura 4.36).

Figura 4.35 - Atividade 18 N3H4 - Nível 3 Habilidade Lógica. (Roteiro de Atividades)

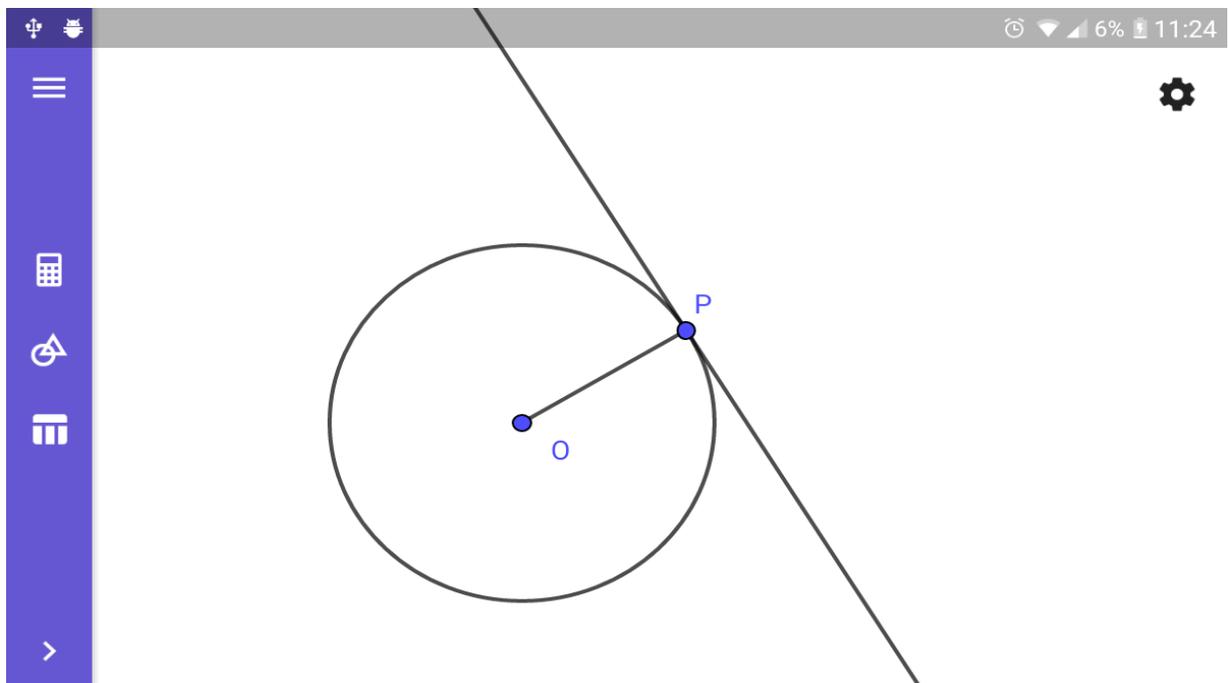
Atividade 18: Abra o arquivo nomeado por atividade N3H4.

Nesta atividade você deve descrever intuitivamente a demonstração lógica para a seguinte proposição: Seja C um círculo de centro O e P um ponto de C . Se t é a reta que passa por P e é perpendicular a OP , então t é tangente a C .

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N3H4.

Fonte: o autor.

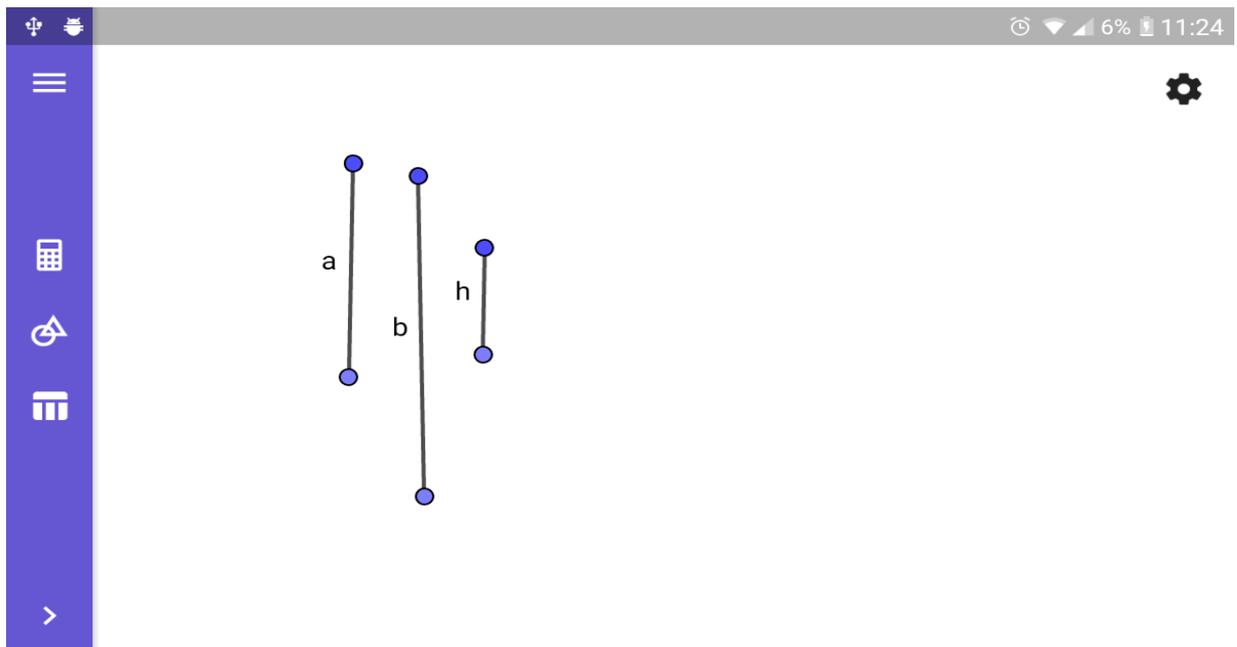
Figura 4.36 - Atividade 18 N3H4 - Nível 3 Habilidade Lógica.



Fonte: o autor.

Atividade 19 - N3H5 - Visava verificar a habilidade aplicação do nível 3 da Teoria de Van Hiele. Ou seja, era esperado que os acadêmicos construíssem com o auxílio das ferramentas do GeoGebra um triângulo formado por dois lados (a e b) fixados e a altura (h) fixada. (Figuras 4.37 e 4.38).

Figura 4.37 - Atividade 19 N3H5 - Nível 3 Habilidade Aplicação.



Fonte: o autor.

Figura 4.38 - Atividade 19 N3H5 - Nível 3 Habilidade Aplicação. (Roteiro de Atividades)

Atividade 19: Abra o arquivo nomeado por atividade N3H5.

Nesta atividade você deve construir um triângulo formado pelos fixados a seguir: os lados (a e b) e a altura (h).

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N3H5.

Fonte: o autor.

Para o nível 4, não se planejou atividades, pois como se vê em Ferreira (2018), os acadêmicos ingressantes na Universidade devem atingir ao menos o nível dois completamente. Esses já operarem no nível três da Teoria de Van Hiele, que é esperado para um estudante que finaliza o Ensino Médio.

Terminada a apresentação dos instrumentos desenvolvidos para a coleta dos dados, o próximo capítulo trata da análise e discussão dos resultados alcançados para as atividades propostas.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Este capítulo aborda a análise dos dados coletados referente as atividades apresentadas no capítulo anterior. Com as análises das respostas dos participantes, espera-se que seja possível identificar o nível de Pensamento Geométrico que ingressos do curso de Licenciatura em Matemática apresentam ao entrarem na Universidade.

No total são apresentados dados sobre as 19 atividades realizadas, abordando do nível 0 ao nível 3 da Teoria de Van Hiele. No início das atividades, estavam presentes 57 acadêmicos, considerando as duas turmas, porém nem todos participaram de todo projeto.

Os acadêmicos do noturno são na maioria trabalhadores, e uma parcela significativa reside em cidades próximas. Devido a necessidade de dependerem de ônibus para o deslocamento até a universidade, ocorreu atraso de alguns estudantes para entrarem em sala, assim prejudicando que estes terminassem as atividades. Isso ocorreu na turma que ocupou os dois primeiros horários. Também aconteceu algo semelhante na turma dos dois últimos horários, pois alguns estudantes saíram antes do término da aula por dependerem dos horários de vans e ônibus. Além dos casos citados, observou-se que alguns estudantes resolveram algumas atividades, porém desistiram a partir do momento que pegavam o roteiro de outro nível, ou seja, quando aumentava o grau de dificuldade.

Devido as ocorrências apresentadas, optou-se por apresentar resultados parciais, por nível de desenvolvimento do pensamento geométrico estabelecido pela Teoria de Van Hiele. Assim a análise realizada foi feita pela quantidade de participantes que desenvolveu cada atividade do respectivo nível em questão.

Conforme estabelecido na seção 4.2.2, após a conclusão da atividade, os estudantes exportavam a imagem salva da tela do seu celular referente a atividade para os grupos criados no *WhatsApp*, “GeoGebra NX” e “GeoGebra NY”, com a legenda no formato (Registro Acadêmico (RA) – Nome da atividade), como exemplo (091031001 N0H1).

Dessa forma, foi criado um padrão de notação, com a numeração variando de A01, A02, A03, ..., A58, para representar a quantidade de participantes. Por exemplo A21, que se refere ao vigésimo primeiro acadêmico. Com os grupos criados foi possível identificar que a notação de A01 até A30 refere-se aos participantes da turma

NX, e de A31 até A58 àqueles da turma NY. Importante ressaltar, que a ordem dos participantes não coincide com a ordem do diário de turma.

Antes de ser entregue o primeiro roteiro de atividades, os acadêmicos foram orientados que deveriam fazer as atividades individualmente, sem consultas à internet ou outros materiais. Enfatizou-se ainda que para desenvolverem as atividades deveriam utilizar todas as ferramentas trabalhadas na primeira etapa de familiarização com o *software* GeoGebra, desenvolvida três dias antes.

É importante ressaltar, que foi solicitado que todos trouxessem seus celulares. Alguns estudantes que ainda não haviam instalado o *software*, foram auxiliados pelo pesquisador e mais dois voluntários do grupo de pesquisa GTEM.

5.1 ANÁLISE DAS ATIVIDADES

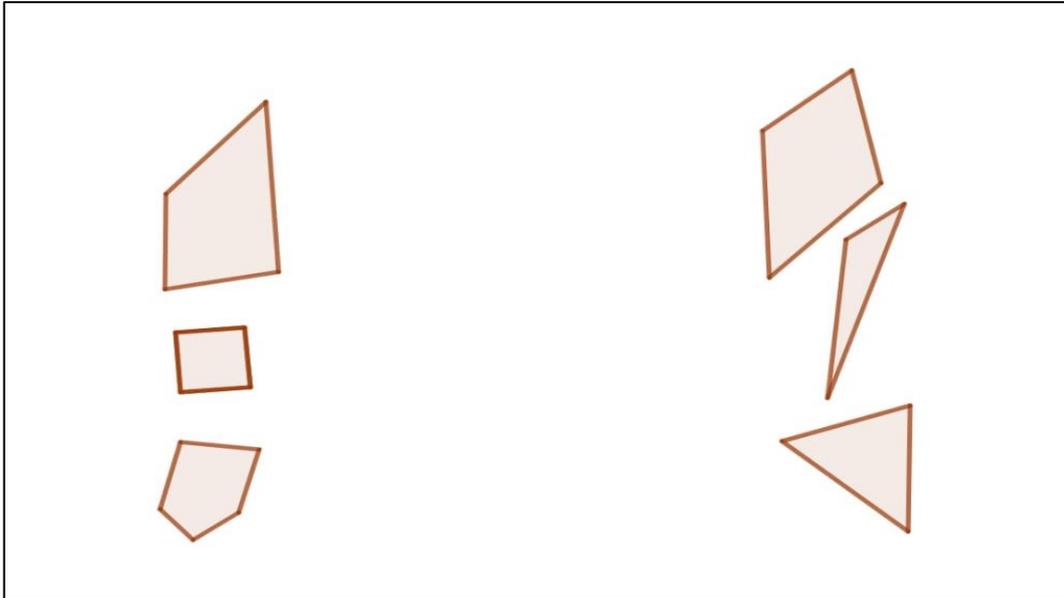
5.1.1 Pensamento Geométrico - Nível Zero

Neste nível era esperado que os acadêmicos reconhecessem figuras geométricas em um desenho. Dada uma figura, que associassem a esta o seu nome correto, criassem esquemas de figuras e identificassem corretamente as características apresentadas. Também que entendessem as diferenças e semelhanças que existem entre figuras, e reconhecessem nos elementos do meio ambiente formas geométricas.

Atividade 1 - N0H1

Para a atividade 1, cujo objetivo era o reconhecimento de figuras geométricas referente a habilidade verbal do nível 0 da Teoria de Van Hiele (N0H1), observou-se que na turma NY, dos 28 estudantes, 89% utilizaram o número de lados para agrupar as figuras, e 11% agruparam de forma equivocada e estranha com argumentação confusa (Figura 5.1 e Figura 5.2).

Figura 5.1 - Atividade N0H1. Agrupamento equivocado.



Fonte: Estudante A51 – Turma NY.

Figura 5.2 - Atividade N0H1. Justificativa equivocada.

Atividade 1: Abra o arquivo nomeado por atividade N0H1.

Nesta atividade você deve agrupar as figuras de acordo com alguma característica que você identificar.

Qual característica você utilizou para agrupar as figuras:

Formas parecidas com triângulos separados
dos losangos.

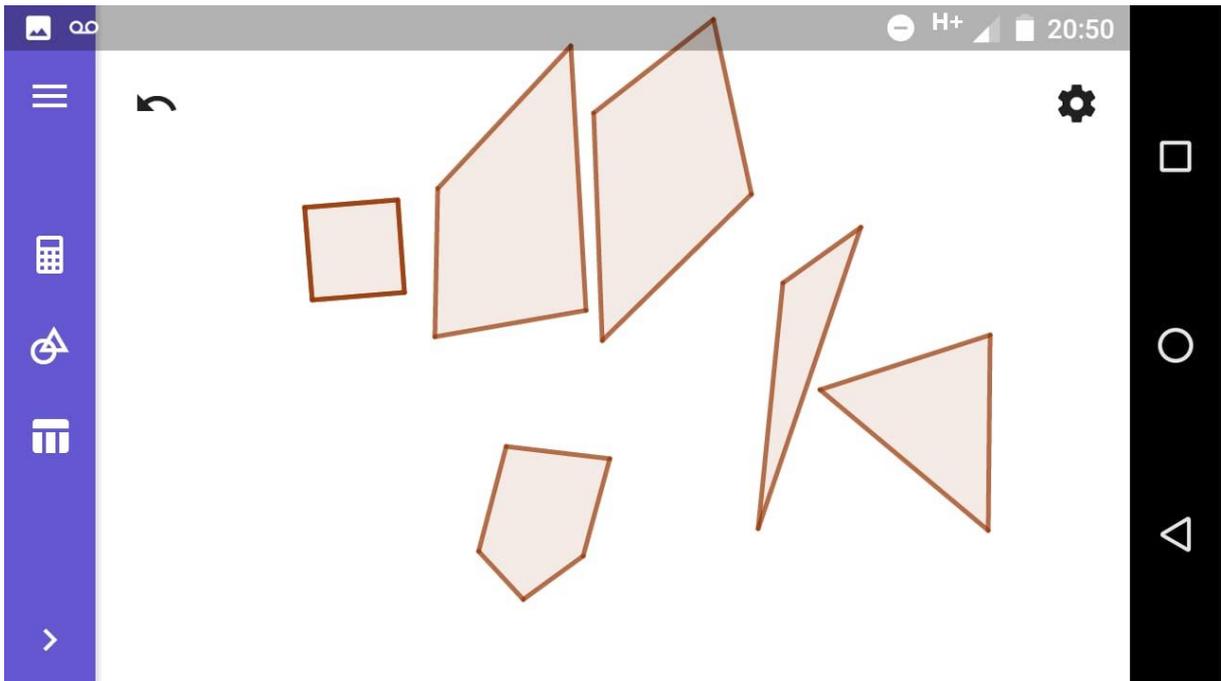
Exporte este arquivo da seguinte forma RA N0H1.

Fonte: Estudante A51 – Turma NY.

Observa-se que o estudante A51, usou uma justificativa equivocada para sua classificação, sendo “triângulos separados dos losangos”. Algo não apropriado para o objetivo da atividade.

Na turma NX, compreendida por 29 estudantes, 79% agruparam pelo número de lados, 7% utilizaram ângulos, 11% dos estudantes organizaram as figuras de outras formas, e 3% se equivocaram na resolução. Como resposta mais popular observou-se a de organizar os grupos pela quantidade de lados: triângulos, quadriláteros e pentágonos. A Figura 5.3 mostra a resposta do estudante A30 da turma NX.

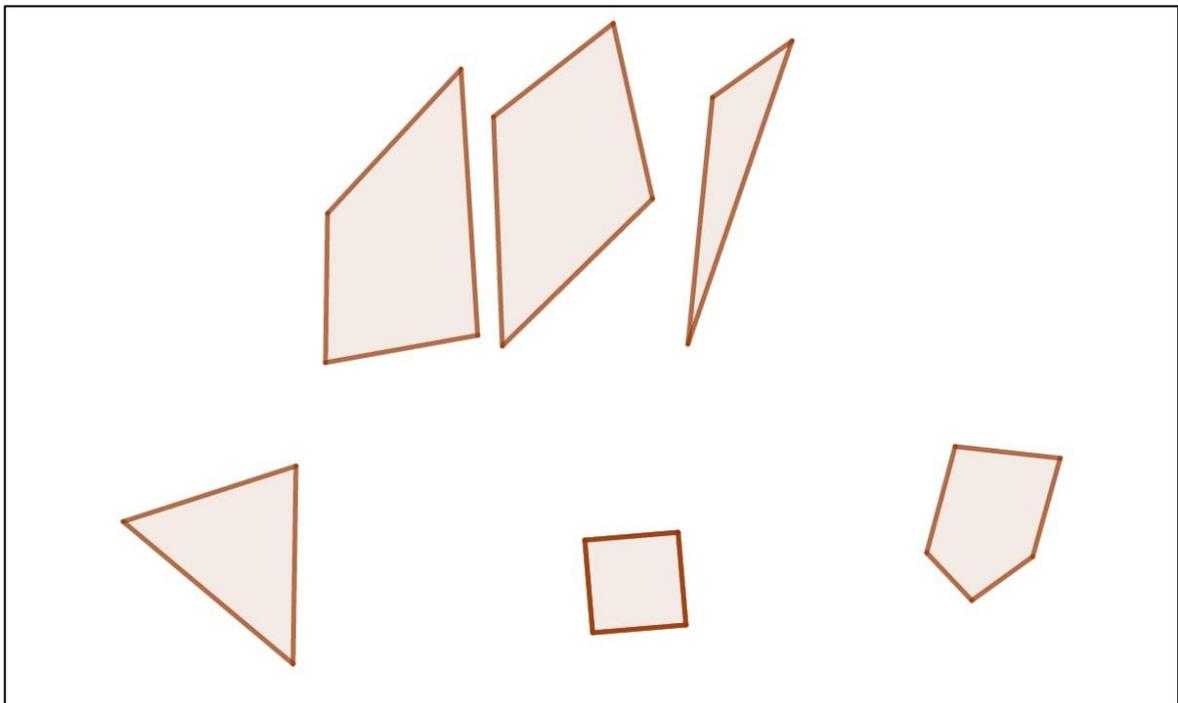
Figura 5.3 - Atividade N0H1. Agrupamento quanto aos lados.



Fonte: Estudante A30 – Turma NX.

Alguns estudantes utilizaram uma classificação quanto aos ângulos para agrupar as figuras, como mostra a Figura 5.4. Nota-se então um triângulo esta agrupado com dois quadriláteros.

Figura 5.4 - Atividade N0H1. Agrupamento quanto aos ângulos.



Fonte: Estudante A09 – Turma NX.

Na Figura 5.5, o estudante A09 apresentou de forma escrita sua classificação no roteiro de atividades, em que utilizou como característica de classificação os ângulos.

Figura 5.5 - Atividade N0H1. Agrupamento quanto aos ângulos

Atividade 1: Abra o arquivo nomeado por atividade N0H1.

Nesta atividade você deve agrupar as figuras de acordo com alguma característica que você identificar.

Qual característica você utilizou para agrupar as figuras:

3 figuras com um ângulo obtuso	1 figura de 5 lados e
1 com figuras com apenas ângulos agudos	2 ângulos retos, 2 obtusos e
1 figura com ângulos retos	1 ângulo agudo

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N0H1.

Fonte: Estudante A09 – Turma NX.

Nota-se que quando escreve três figuras com um ângulo obtuso, ele coloca o triângulo com os quadriláteros. Ao se referir a figura de cinco lados, considera que o pentágono tem dois ângulos retos, e descreve as outras figuras a partir de seus ângulos.

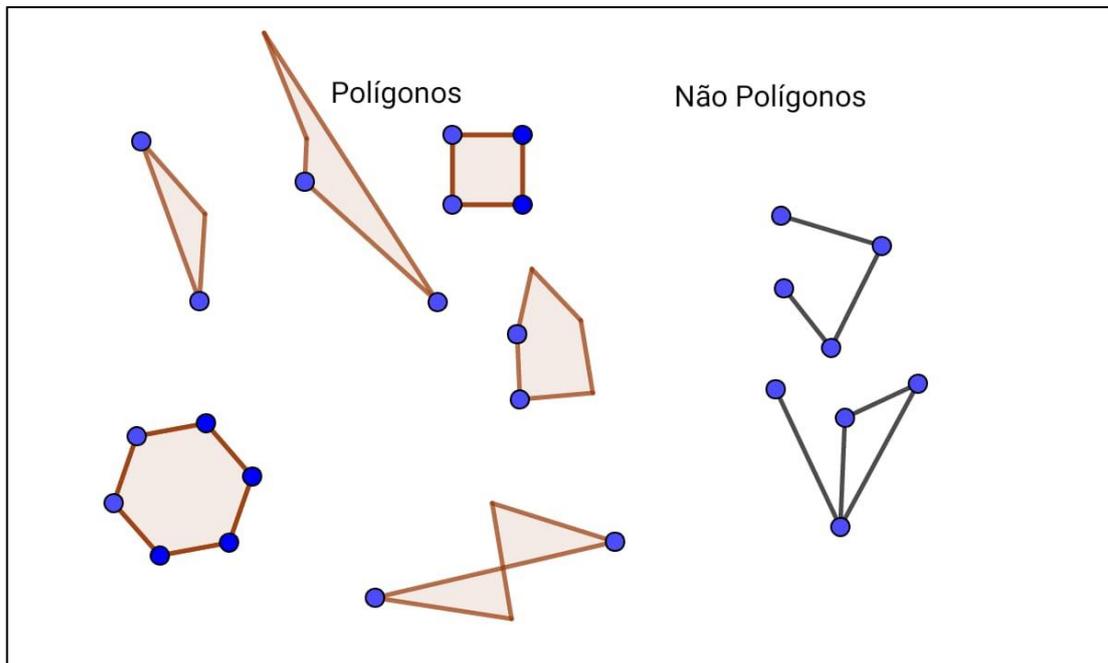
Para a atividade 1, em média 94% dos estudantes conseguiram atingir o objetivo de agrupar e descrever alguma característica para as figuras apresentadas, demonstrando assim terem domínio da habilidade verbal do nível 0. Também nessa atividade, em média 6% dos acadêmicos não conseguiram fazer a análise de maneira coerente, caracterizando assim uma falha no conhecimento adquirido sobre polígonos.

Atividade 2 (N0H2)

Na atividade 2, cuja finalidade era o reconhecimento de figuras geométricas, observando assim a habilidade visual do nível 0 da Teoria de Van Hiele (N0H2), os estudantes deveriam, dentre as figuras apresentadas, separar os polígonos dos não polígonos formando grupos próximos a seus nomes corretos.

Na Figura 5.6 vemos uma resposta coerente com a proposta da atividade realizada pelo estudante A35.

Figura 5.6 - Atividade N0H2.



Fonte: Estudante A35 – Turma NY.

O exemplo do estudante A35 mostra uma resposta coerente quanto a separação das figuras entre Polígonos e Não Polígonos. Na Tabela 5.1 é apresentado um resumo das respostas obtidas para a atividade N0H2.

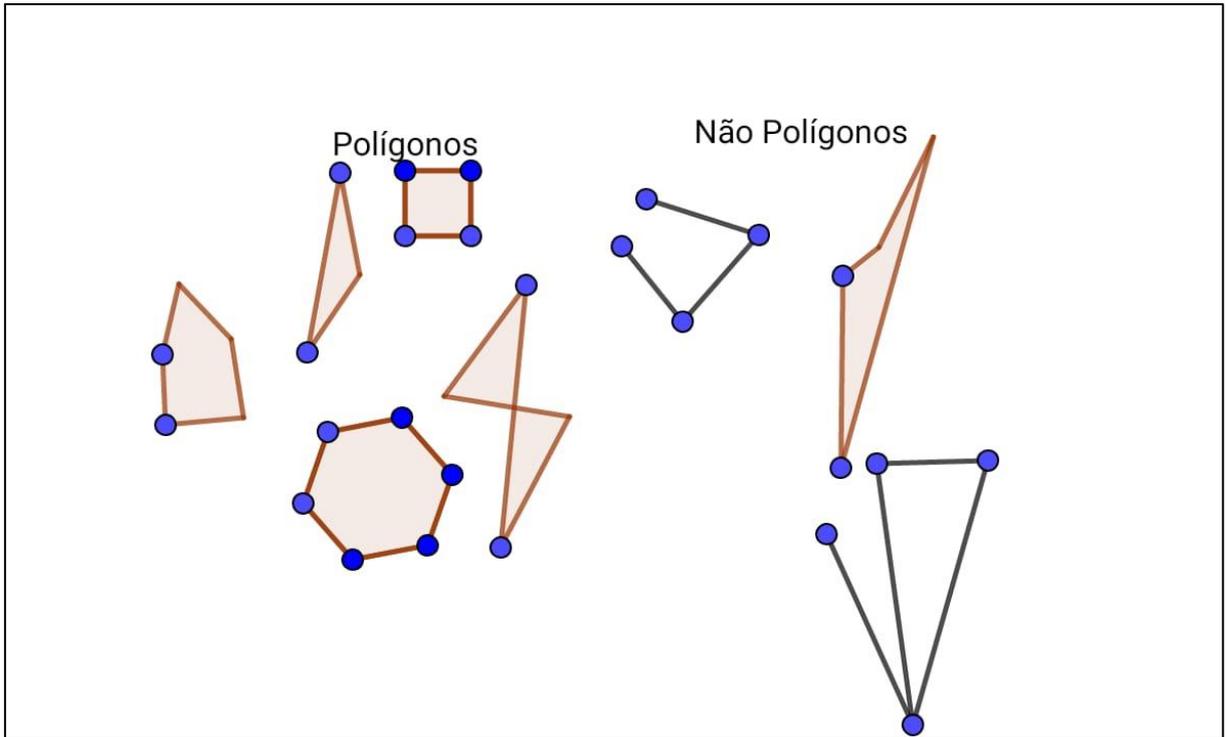
Tabela 5.1 – Porcentagens dos tipos de respostas apresentadas para a atividade N0H2.

Tipos de respostas:	NX	NY
Resposta Totalmente Correta.	57%	44%
Resposta com um equívoco.	21%	33%
Resposta com 2 equívocos.	10%	15%
Resposta com 3 figuras em grupos errados.	12%	3%
Resposta com 4 figuras no lugar errado.	0%	3%

Fonte: o autor

Na turma NX, 28 estudantes entregaram esta atividade. Na turma NY 27 estudantes entregaram esta atividade. Tem-se na Figura 5.7 um exemplo de resposta onde o estudante cometeu um equívoco. Um exemplo de atividade de um estudante que se equivocou em duas figuras está na Figura 5.8. Dos que trocaram quatro figuras de lugar é apresentado um exemplo na Figura 5.9.

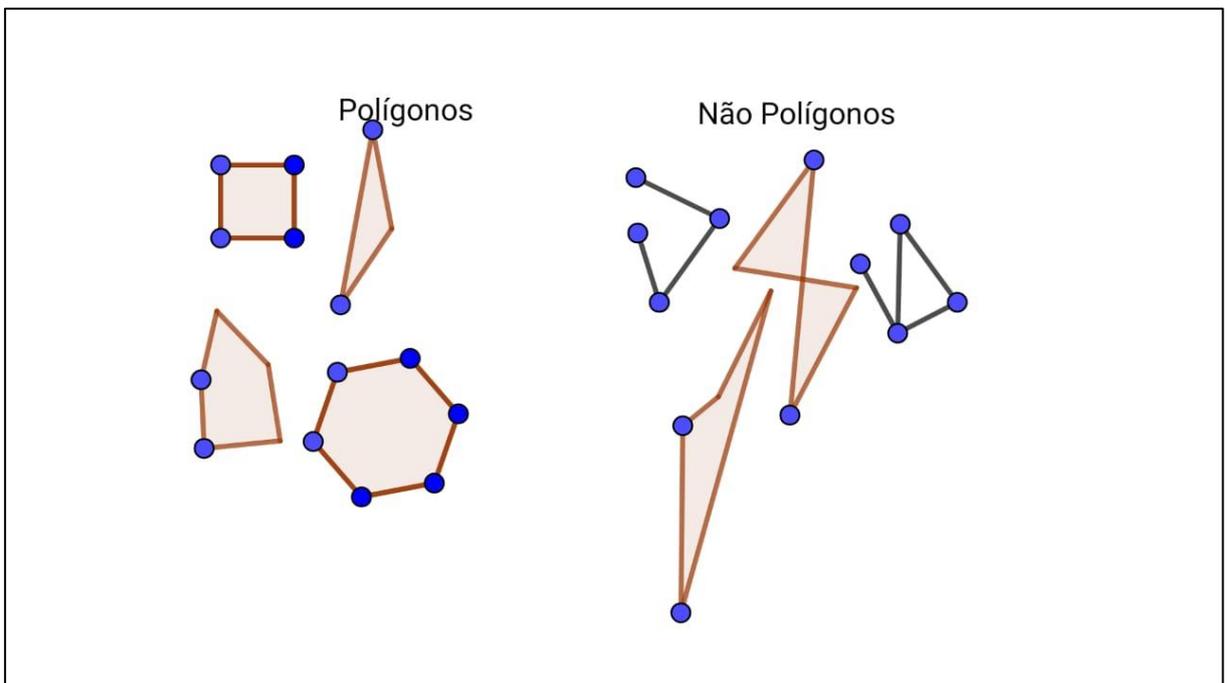
Figura 5.7 - Atividade N0H2. Agrupamento do estudante A53 – Turma NY.



Fonte: o autor.

Entre os que se equivocaram em duas figuras, temos o exemplo da Figura 5.8.

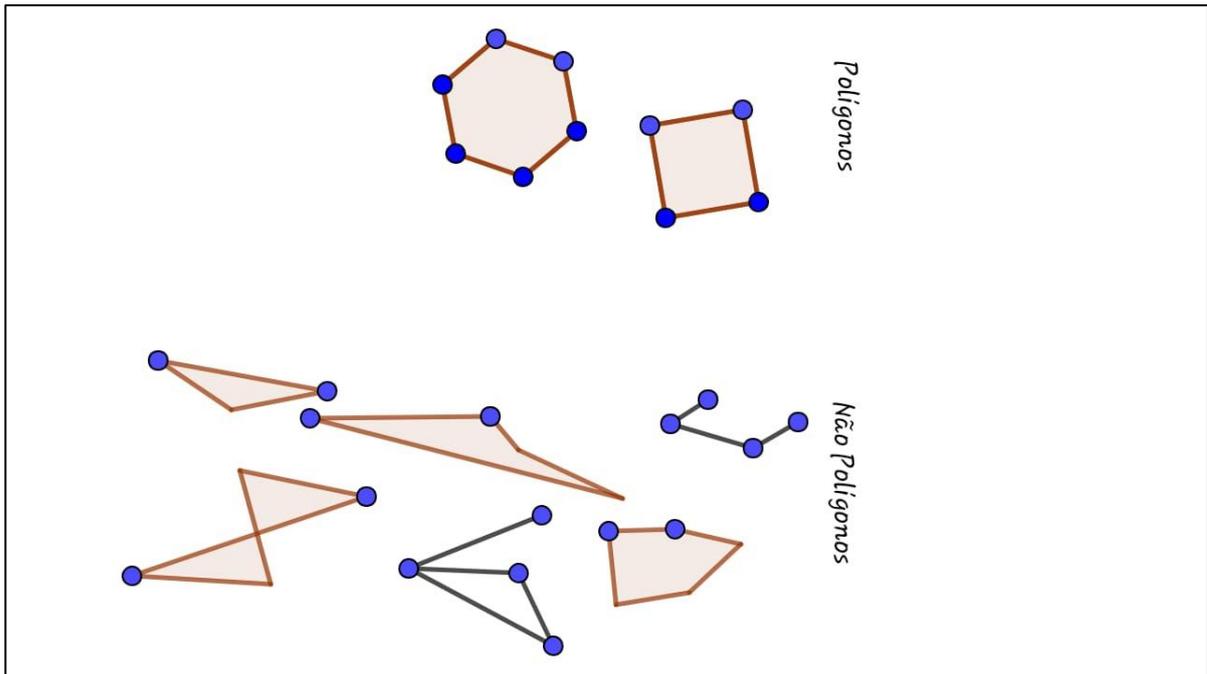
Figura 5.8 - Atividade N0H2. Agrupamento do estudante A57.



Fonte: o autor (Estudante A57 – Turma NY).

A Figura 5.9, mostra a imagem da atividade desenvolvida pelo estudante A26 que apresenta quatro figuras no lugar errado.

Figura 5.9 - Atividade N0H2. Estudante A26 – Turma NX).



Fonte: Estudante A26 – Turma NX.

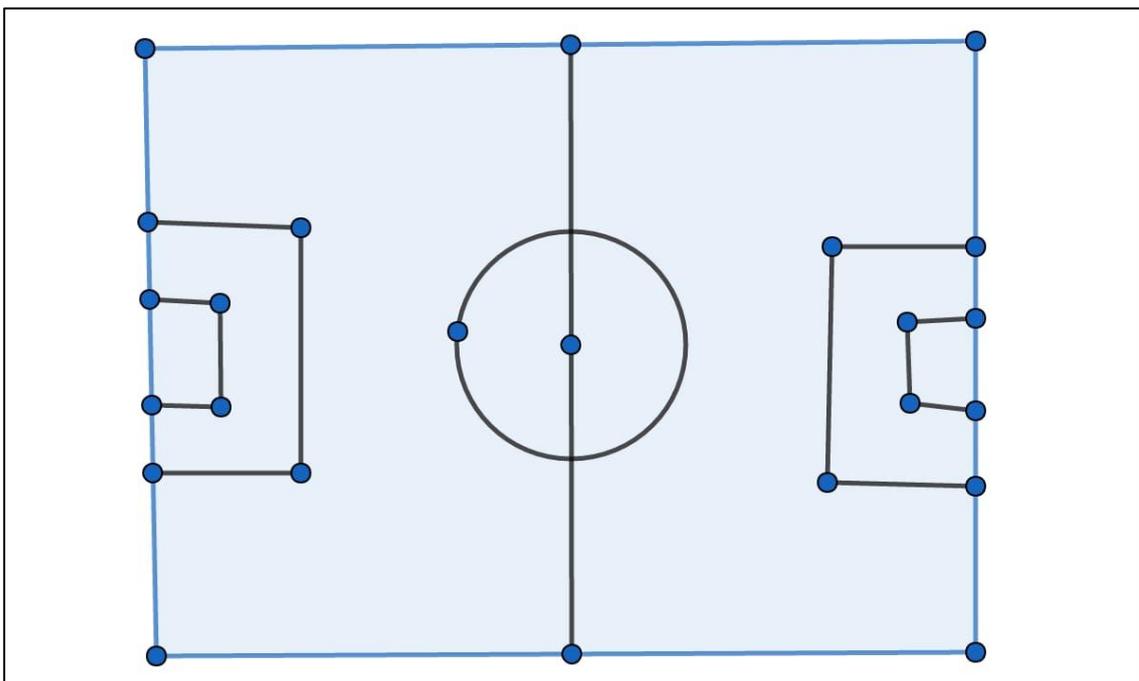
Uma possível explicação para os erros do estudante A26 está relacionada aos polígonos regulares, pois este classificou apenas como polígonos aqueles que visualmente possuíam os lados iguais. Indicando aqui uma defasagem neste conceito. Corroborando com Barbosa (2011), uma possível dificuldade notada na atividade 2 está relacionada aos conceitos básicos sobre polígonos pois muitos erros ocorreram com as figuras que representavam linhas abertas e com os polígonos não convexos. Este fato, muitas vezes é reflexo da forma como tais conteúdos vêm sendo trabalhados na sala de aula, pois em alguns casos os estudantes só estão habituados com os polígonos simples e presos as habilidades visuais, deixando de lado os conceitos mais descritivos.

Nessa atividade em média 49,5% dos acadêmicos não conseguiram fazer o agrupamento corretos dos polígonos, ou seja, não atingiram a habilidade visual. Vale ressaltar que segundo a docente da disciplina de Geometria Plana e Desenho Geométrico, que analisou as atividades anteriormente, informou que o conteúdo de polígonos e quadriláteros já havia sido abordado nas aulas anteriores ao início das atividades desta pesquisa.

Atividade 3 (N0H3)

Na atividade 3 o objetivo era a construção de figuras geométricas com as ferramentas usuais do GeoGebra que representassem algo do seu cotidiano, assim, para analisar a habilidade de desenho do nível 0 da Teoria de Van Hiele. Observou-se uma grande diversidade de respostas para esta atividade. Citamos algumas das respostas que chamaram a atenção pelo bom uso das ferramentas do GeoGebra e pela criatividade, como da Figura 5.10, que trata da representação de um campo de futebol.

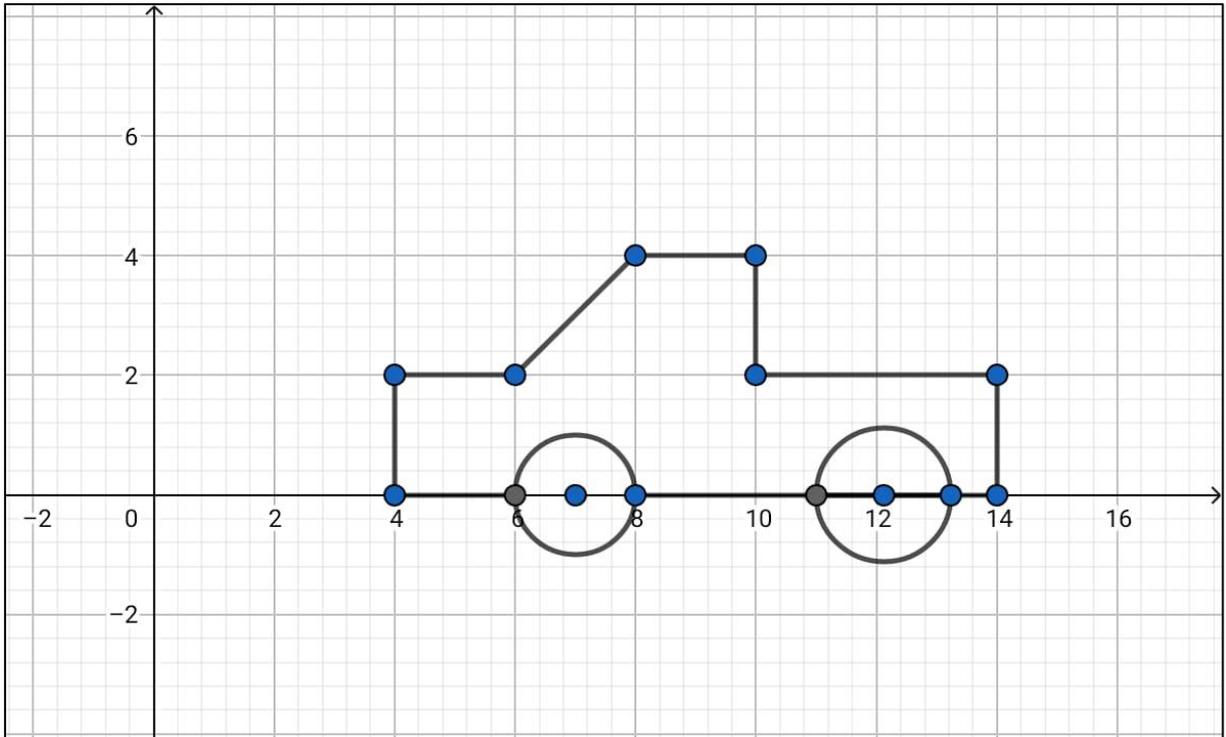
Figura 5.10 - Atividade N0H3. Desenho do Estudante A15 – Turma NX).



Fonte: Estudante A15 – Turma NX.

A Figura 5.11, do estudante A17, apresenta a representação de um carro. É interessante observar que este estudante utilizou a malha quadriculada em seu desenho. O que não ocorreu no desenho do estudante da Figura 5.10, que acabou desenhando o campo de futebol sem se preocupar com a precisão dos detalhes, como representa as linhas do campo perpendiculares.

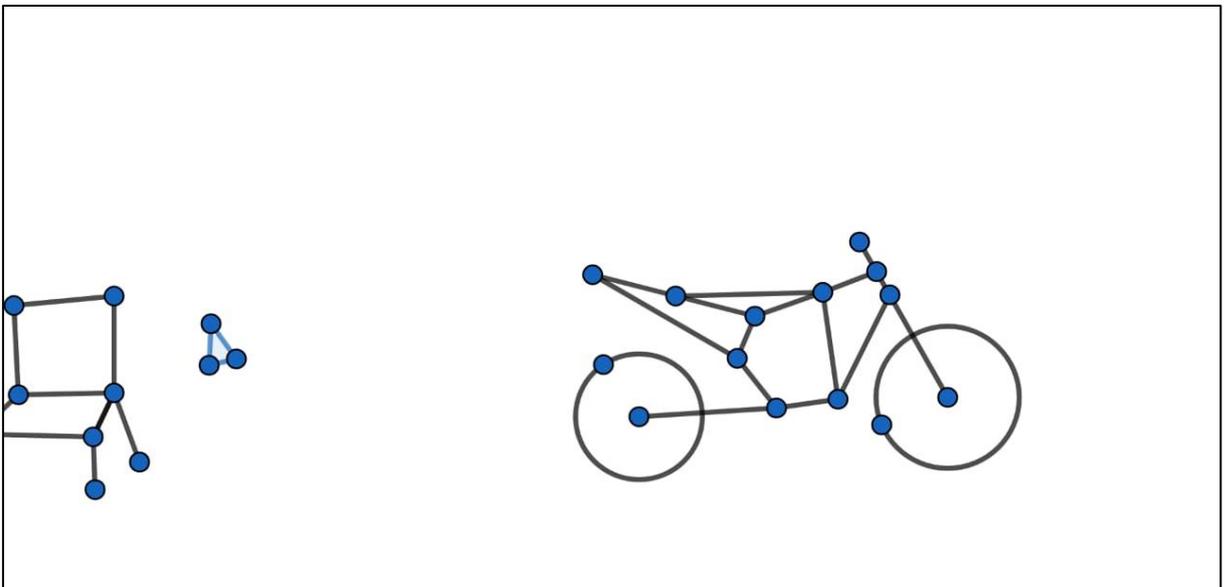
Figura 5.11 - Atividade N0H3. Desenho estudante A17 representando uma caminhonete.



Fonte: Estudante A17 – Turma NX.

Por fim, a figura 5.12, do estudante A57, com a representação de uma motocicleta e no canto uma cadeira.

Figura 5.12 - Atividade N0H3.- Desenho do estudante A57 – Turma NY.



Fonte: Estudante A57 – Turma NY.

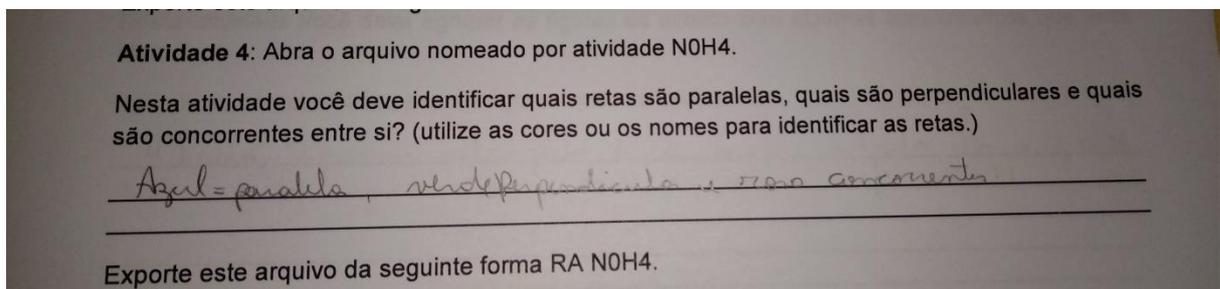
Esta atividade acabou tomando um tempo maior, pois muitos dos estudantes ficaram empolgados e queriam fazer o desenho melhor que do colega ao lado.

Atividade 4 (N0H4)

Na atividade 4, o objetivo era a identificação de pares de retas paralelas, perpendiculares e concorrentes entre si, apresentadas na Figura 4.6. Os estudantes deveriam representá-las por seus respectivos nomes ou cores, analisando assim a habilidade lógica do nível 0 da Teoria de Van Hiele (N0H4).

Apenas um estudante da turma NX, não conseguiu identificar e expressar de maneira coerente os pares de retas (Figura 5.13).

Figura 5.13 - Atividade N0H4. Representação sem coerência dos pares de retas.



Fonte: Estudante A23 – Turma NX.

No Quadro 5.1 apresentamos os resultados da atividade 4 no que diz respeito aos pares de retas perpendiculares e paralelas.

Quadro 5.1 - Resumo dos resultados apresentados para a atividade N0H4.

Classificação das retas	Turma NX (28 Estudantes)		Turma NY (25 Estudantes)	
	Número de estudantes	Quantidade identificada de pares de retas.	Número de estudantes	Quantidade identificada de pares de retas.
Paralelas	20	4	15	4
	6	3	3	3
	1	2	4	2
	1	1	2	1
			1	0
Perpendiculares	14	8	7	8
	6	4	1	7
	2	2	3	4
	3	1	1	2
	3	0	1	1
			12	0

Fonte: o autor.

Optou-se por não colocar no Quadro 5.1, os pares de retas concorrentes devido à grande variedade de valores elencados pelos estudantes, variando desde 15 pares a nenhum par. Na turma NX 3 estudantes não descreveram nenhum par de retas concorrentes e na NY, isso aconteceu com nove estudantes. Alguns alegaram que por conter muitas retas concorrentes não descreveriam todas.

Uma resposta interessante seguida de uma afirmação lógica do estudante A09, pode ser observada na Figura 5.14.

Figura 5.14 - Atividade N0H4. Representação dos diversos pares de retas.

Atividade 4: Abra o arquivo nomeado por atividade N0H4.

Nesta atividade você deve identificar quais retas são paralelas, quais são perpendiculares e quais são concorrentes entre si? (utilize as cores ou os nomes para identificar as retas.)

Paralelas: $r_3 \parallel r_7$ $r_2 \parallel r_4$ $r_3 \parallel r_5$ $r_6 \parallel r_7$

Perpendiculares: $r_1 \perp r_6$ $r_4 \perp r_7$ $r_7 \perp r_6$ $r_7 \perp r_8$ $r_3 \perp r_2$ $r_5 \perp r_2$

$r_4 \perp r_3$ $r_4 \perp r_5$

Concorrentes: $r_3 \times r_6$ $r_4 \times r_1$ $r_7 \times r_3$ $r_7 \times r_2$ $r_1 \times r_3$ $r_5 \times r_7$ $r_8 \times r_2$

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N0H4. Obs: todas as perpendiculares são concorrentes

Fonte: Estudante A09 – Turma NX.

Quanto à maneira de se expressar, na turma NX 16 dos estudantes usaram a forma simbólica para descrever os pares de retas, 11 usaram uma maneira mais informal, utilizando-se das cores para representar a relação entre as retas, e um estudante não conseguiu realizar a identificação e representação em coerência com o pedido. (Figuras 5.15). Na turma NY apenas três utilizaram a linguagem formal (por meio de símbolos matemáticos), e 19 se expressaram de maneira informal. (Figura 5.16).

Figura 5.15 - Atividade N0H4. Representação informal dos pares de retas utilizando as cores.

Atividade 4: Abra o arquivo nomeado por atividade N0H4.

Nesta atividade você deve identificar quais retas são paralelas, quais são perpendiculares e quais são concorrentes entre si? (utilize as cores ou os nomes para identificar as retas.)

$r_3 \parallel r_7$ $r_2 \parallel r_4$ $r_3 \parallel r_5$ $r_6 \parallel r_7$

$r_1 \perp r_6$ $r_4 \perp r_7$ $r_7 \perp r_6$ $r_7 \perp r_8$ $r_3 \perp r_2$ $r_5 \perp r_2$

$r_4 \perp r_3$ $r_4 \perp r_5$

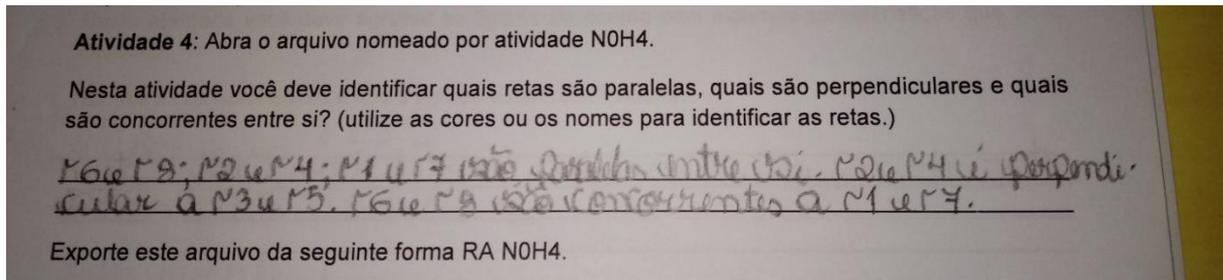
Concorrentes: $r_3 \times r_6$ $r_4 \times r_1$ $r_7 \times r_3$ $r_7 \times r_2$ $r_1 \times r_3$ $r_5 \times r_7$ $r_8 \times r_2$

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N0H4.

Fonte: Estudante A12 – Turma NX.

Na figura 5.15 é possível observar que o estudante A12 escreve os símbolos sobre os tipos de retas, porém na resposta da atividade ele usa as cores e apresenta apenas alguns casos.

Figura 5.16 - Atividade N0H4. Representação informal dos pares de retas.



Fonte: Estudante A58 – Turma NY.

Na representação do estudante A58, figura 5.16, observa-se que ele se refere as retas por seus nomes colocados na imagem do arquivo GeoGebra, mas não utiliza a simbologia das posições entre retas.

Por meio do Quadro 5.1, observamos que na turma NX o percentual de acerto em média das retas paralelas foi de 100%, e na turma NY foi de 96%. Ou seja, todos os estudantes conseguiram identificar retas paralelas na figura apresentada. Para as retas perpendiculares temos que na turma NX 89% dos estudantes identificaram, e na NY apenas 52%. Nas retas concorrentes a turma NY obteve 64% e NX 89%. Embora o percentual de acertos nas retas concorrentes seja baixo em consideração as outras retas, é interessante salientar que alguns estudantes alegaram que por se tratar de muitas retas concorrentes não descreveriam todas.

Quanto a forma de se expressar, em média 35% dos acadêmicos das duas turmas, usaram a linguagem simbólica para representar as retas, porém um número expressivo não utilizou, embora o conteúdo já houvesse sido abordado na disciplina de Geometria plana e Desenho Geométrico.

Nesta atividade, relacionada à análise da habilidade lógica, o estudante deveria ser capaz de entender diferenças e semelhanças entre retas. Deste modo o estudante deveria estabelecer as posições relativas das retas (paralelas, perpendiculares e concorrentes), e ainda perceber que movimentando as retas, estas relações permaneceriam. Logo na turma NX, 85% dos estudantes identificaram e descreveram os três tipos de retas, e na turma NY apenas 40%. Evidenciando assim, somente uma turma atingiu a habilidade lógica do nível zero da Teoria de Van Hiele.

Atividade 5 (N0H5)

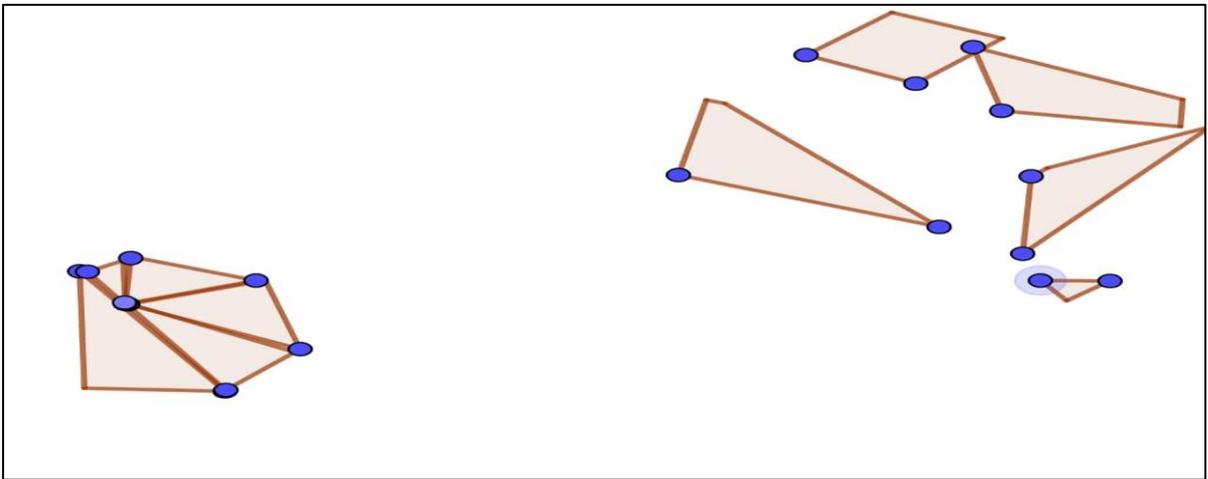
Na atividade 5, o objetivo era a aplicação dos conhecimentos geométricos para identificação de figuras, e a partir delas criar uma nova. Lembrando que o estudante

deveria utilizar apenas os triângulos presentes na figura 4.10. A atividade 5 está ligada a habilidade de aplicação do nível 0 da Teoria de Van Hiele (N0H5).

Na turma NY, 25 estudantes entregaram esta atividade, porém apenas 36% usaram somente os triângulos em seus desenhos, sendo que 64% usaram todas as figuras disponíveis. Enquanto na turma NX, 29 estudantes entregaram esta atividade, porém apenas 44% usaram apenas triângulos em seus desenhos, como esperado na atividade, e 56% usaram todas as figuras disponíveis.

A Figura 5.17 apresenta a resposta de um destes estudantes, na qual observa-se o agrupamento dos triângulos no canto esquerdo da imagem.

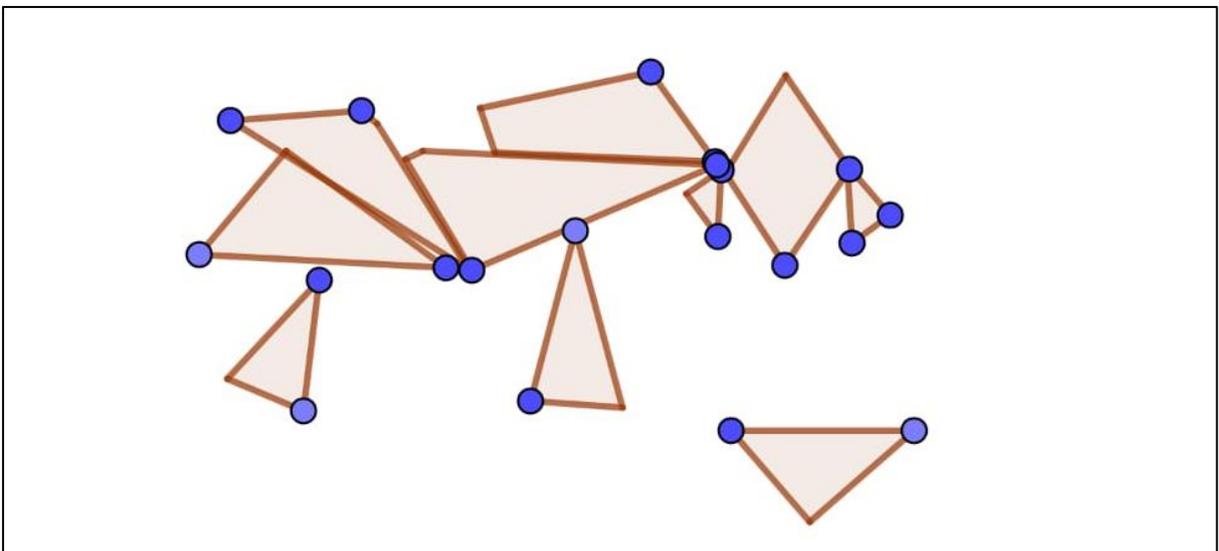
Figura 5.17 - Atividade N0H5. Resposta coerente com a atividade.



Fonte: Estudante A58 – Turma NY.

Observa-se na Figura 5.18 que o estudante A56 utilizou trapézios e losangos não atendendo ao solicitado, mas foi criativo ao representar um inseto.

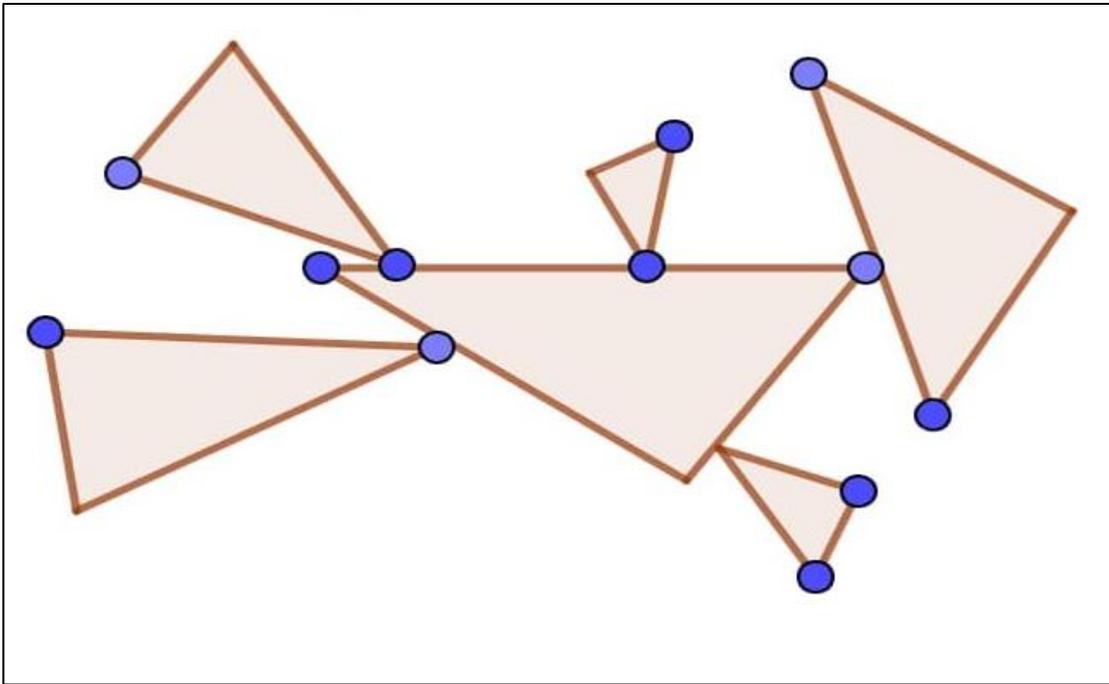
Figura 5.18 - Atividade N0H5. Resposta não coerente com a atividade.



Fonte: Estudante A56 – Turma NY.

Na Figura 5.19 observou-se a criatividade e coerência do estudante A24 em utilizar apenas os triângulos e desenvolver algo que se assemelha à um ser humano, com tronco, braços, pernas e cabeça.

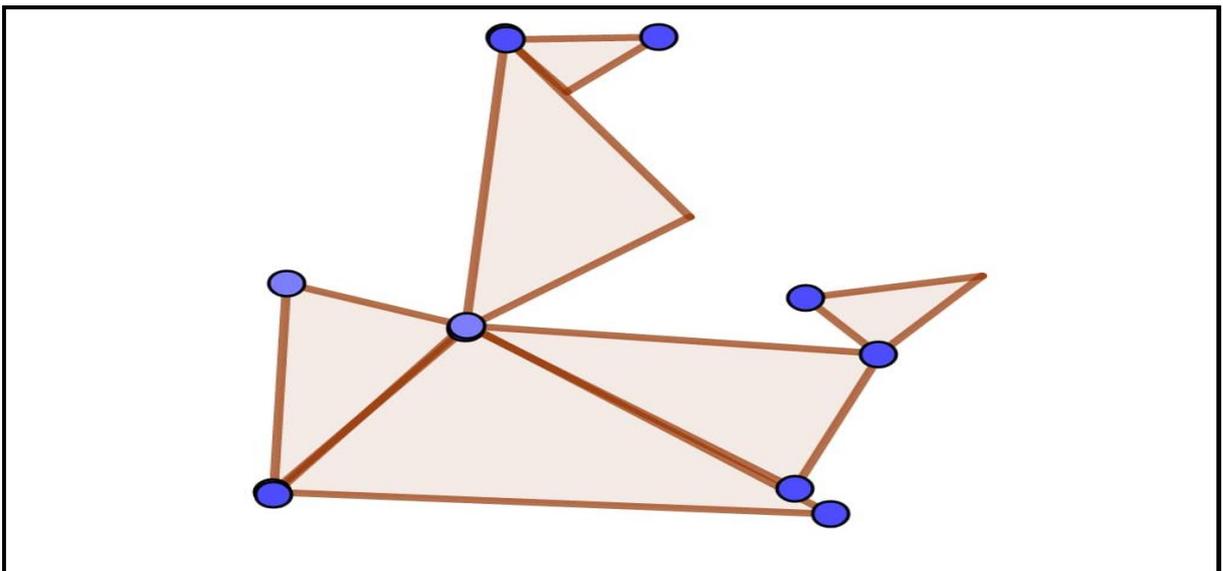
Figura 5.19 - Atividade N0H5. Resposta coerente com a atividade.



Fonte: Estudante A24 – Turma NX.

Na Figura 5.20 vemos a resposta do estudante A09 coerente com o proposto para a atividade.

Figura 5.20 - Atividade N0H5. Resposta coerente com a atividade.



Fonte: Estudante A09 – Turma NX.

Diante destes resultados, em que em média apenas 40% dos acadêmicos realizaram corretamente a atividade, bem abaixo do esperado, não é possível dizer

que se trate de um erro de conteúdo, mas sim uma falta de atenção ao ler o que foi solicitado.

5.1.2 Pensamento Geométrico - Nível Um

Neste nível esperava-se que os acadêmicos: percebessem figuras como parte de outras maiores; identificassem e detalhassem propriedades de uma figura; esboçassem desenhos de figuras a partir de propriedades dadas; percebessem que existem diferentes tipos de classificação de figuras.

Atividade 6 – N1H1

Nesta atividade, o objetivo era a identificação de polígonos nas interseções das retas apresentadas na Figura 4.11, em que os estudantes deveriam marcar os polígonos no *software* e registrá-los no roteiro de atividades. Esta atividade analisa a habilidade Verbal do nível 1 da Teoria de Van Hiele (N1H1).

Um resumo das respostas dos acadêmicos para a atividade 6 é exposto no Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Resumo dos resultados obtidos para a atividade 6. (N1H1).

Polígonos identificados entre as interseções das retas.	Turma NX	Turma NY
	28 estudantes	26 estudantes
Triângulos	100 %	100%
Retângulos	71%	76%
Quadrados	64%	53%
Trapézios	25%	26%
Pentágonos	28%	19%
Losangos	7%	3%
Hexágonos	7%	0%

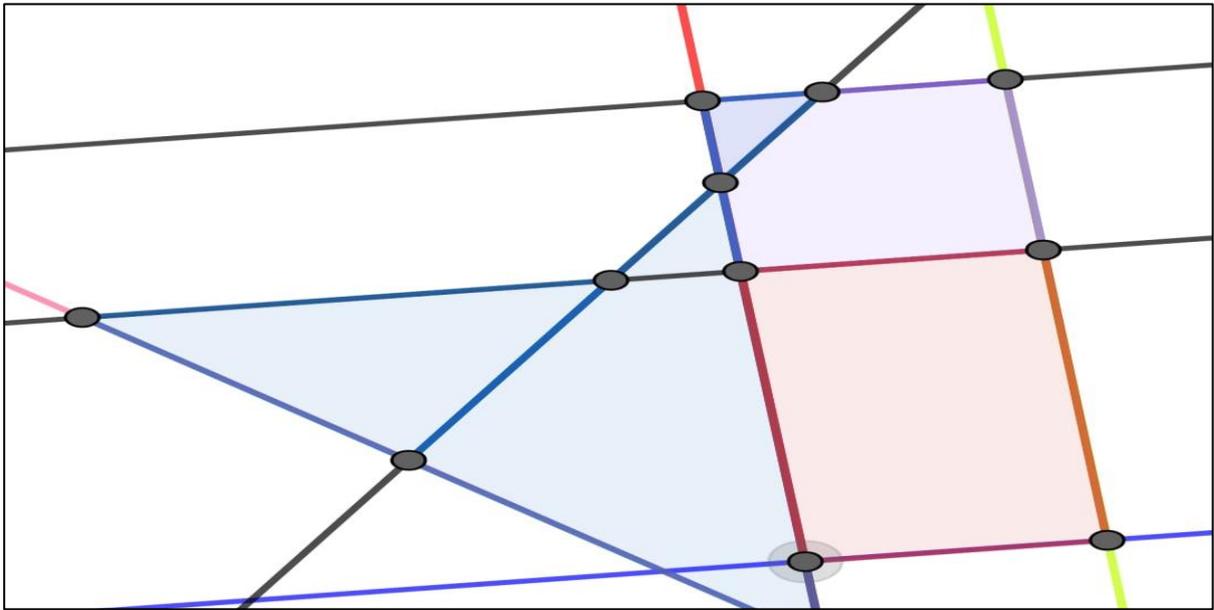
Fonte: o autor.

É possível observar no Quadro 5.3 que os triângulos são as figuras mais identificadas e descritas pelos estudantes seguido de retângulos e quadrados. Uma possível causa deve-se ao fato de serem figuras geralmente utilizadas para exemplos de conceitos geométricos em sala de aula. Observa-se também a baixa descrição de

polígonos mais complexos como pentágonos e hexágonos ressaltando a ideia de que esses polígonos são poucos utilizados em aulas de geometria.

Podemos observar na Figuras 5.21 e 5.22 a resposta do estudante A46, que apresenta triângulo, quadrado, losango e retângulo.

Figura 5. 21 - Atividade N1H1. Representação de alguns polígonos marcados nas intersecções das retas.



Fonte: Estudante A46 – Turma NY.

Figura 5. 22 - Atividade N1H1. Representação de alguns polígonos marcados nas intersecções das retas.

Atividade 6: Abra o arquivo nomeado por atividade N1H1.

Nesta atividade você deve identificar dentre as retas apresentadas os diferentes polígonos que se formam nas intersecções das retas. Utilize a ferramenta polígono para marcar os polígonos encontrados.

Quais foram os polígonos encontrados?

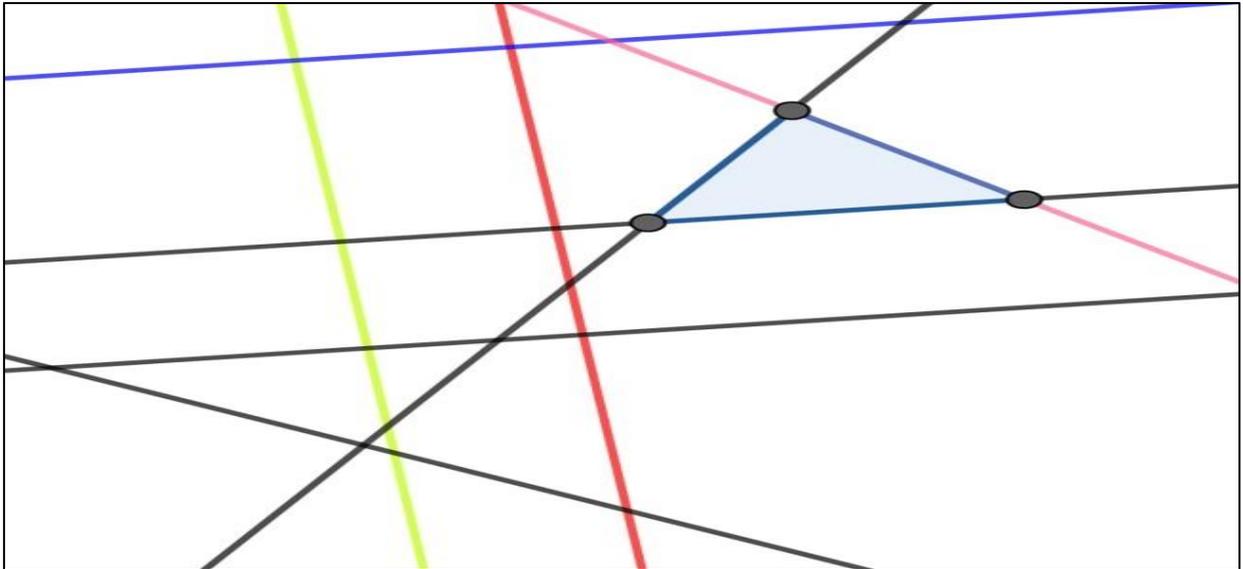
quadrado, triângulo, losango, retângulo

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N1H1.

Fonte: Estudante A46 – Turma NY.

Na Figura 5.23 e Figura 5.24 observamos um exemplo onde o estudante representou apenas um triângulo dentre as intersecções das retas.

Figura 5.23 - Atividade N1H1. Representação de alguns polígonos marcados nas intersecções das retas.



Fonte: Estudante A03 – Turma NX.

Figura 5.24 - Atividade N1H1. Representação escrita de apenas um triângulo marcado nas intersecções das retas.

Atividade 6: Abra o arquivo nomeado por atividade N1H1.

Nesta atividade você deve identificar dentre as retas apresentadas os diferentes polígonos que se formam nas intersecções das retas. Utilize a ferramenta polígono para marcar os polígonos encontrados.

Quais foram os polígonos encontrados?

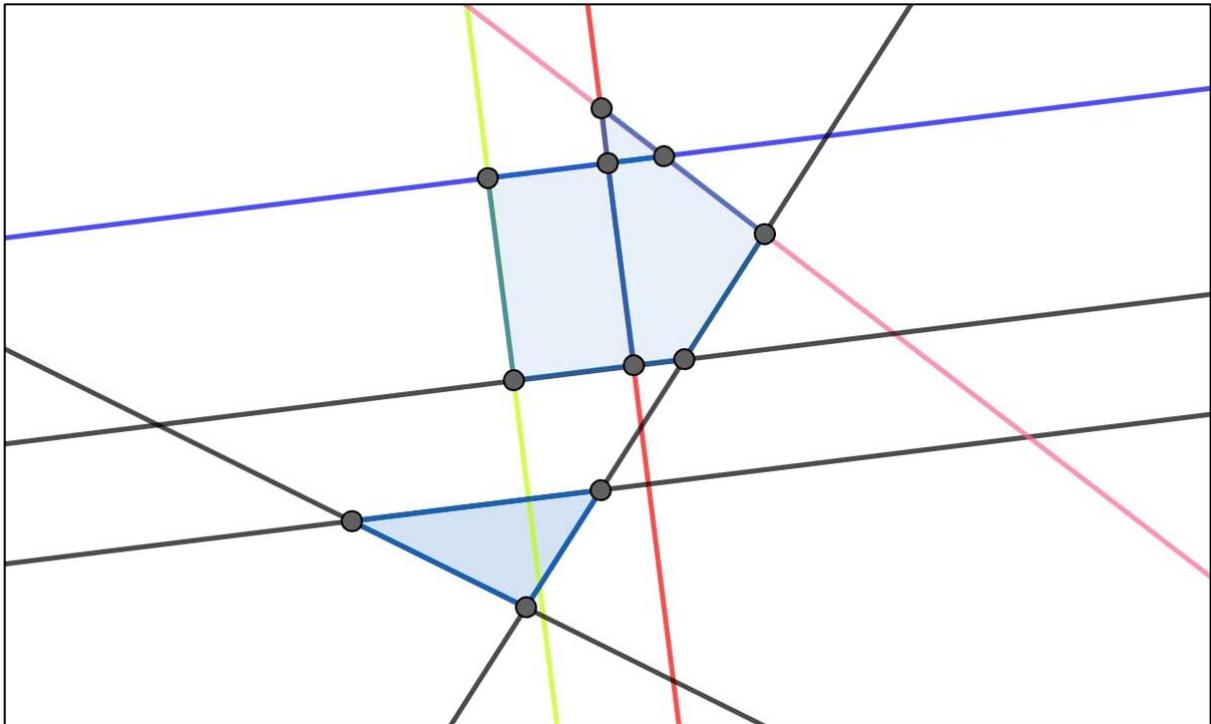
triângulo

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N1H1.

Fonte: Estudante A03 – Turma NX.

Como vemos na Figuras 5.25 alguns estudantes marcaram certos polígonos na figura, mas não levaram em consideração retas que passam dentro destes polígonos. Isso aconteceu em diversos casos na Figura 5.22 vemos um triângulo marcado com uma reta amarela interceptando-o ao meio.

Figura 5.25 - Atividade N1H1. Representação de alguns polígonos marcados nas intersecções das retas.



Fonte: Estudante A37 – Turma NY.

Nesta atividade, grande parte dos estudantes destacaram os triângulos. Enquanto outros polígonos o percentual de estudantes que os destacou foi bem abaixo do esperado, mas não é possível dizer que se trate de desconhecimento de outros polígonos e sim falta de atenção ou de interesse em fazer a atividade. Também é possível notar que muitos marcaram na figura, mas não descreveram no roteiro de atividades esses polígonos. Outro fato que chama a atenção, é que vários estudantes destacaram o polígono, mas este tinha uma ou mais retas passando no interior, ou seja, representava mais de um polígono.

Atividade 7 (N1H2)

Na atividade 7, o objetivo era a classificação de alguns triângulos quanto a medida de seus lados. Na Figura 4.13, os estudantes deveriam agrupar os triângulos próximos aos respectivos nomes de sua classificação. Esta atividade visava analisar a habilidade Visual do nível 1 da Teoria de Van Hiele (N1H2).

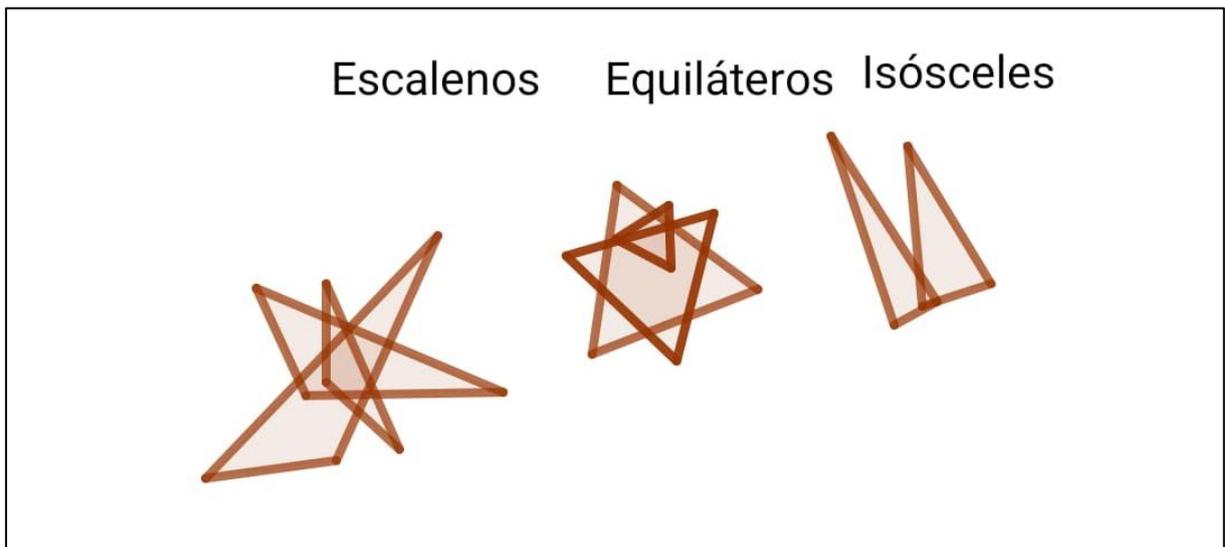
Tabela 5.3: Resumo das respostas para a atividade 7.

	Turma NX 26 estudantes	Turma NY 25 estudantes
Organização dos triângulos totalmente correta.	61%	60%
Organização com equívoco em apenas um triângulo.	23%	24%
Organização dos grupos corretos, mas com a nomenclatura errada.	11%	8%
Organização totalmente equivocada.	3%	4%

Fonte: o autor.

Vemos no Tabela 5.3, que em média 60% dos estudantes das duas turmas obtiveram êxito na realização da atividade, ou seja, conseguiram agrupar de forma correta os triângulos identificando características referentes aos seus lados. Na Figura 5.26 é apresentado um exemplo dessa classificação, onde vemos a resposta do estudante A38.

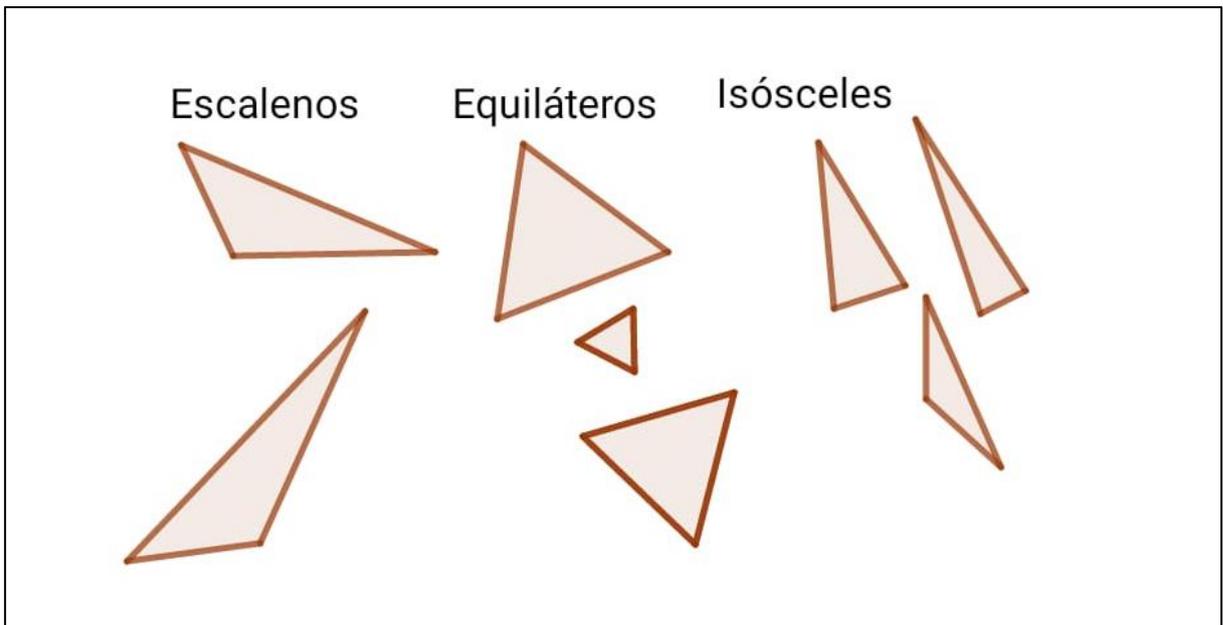
Figura 5.26 - Atividade N1H2. Classificação totalmente coerente com a atividade.



Fonte: Estudante A38 – Turma NY.

Observa-se também que alguns estudantes desenvolveram a atividade com apenas um triângulo no lugar errado, um exemplo está na Figura 5.27.

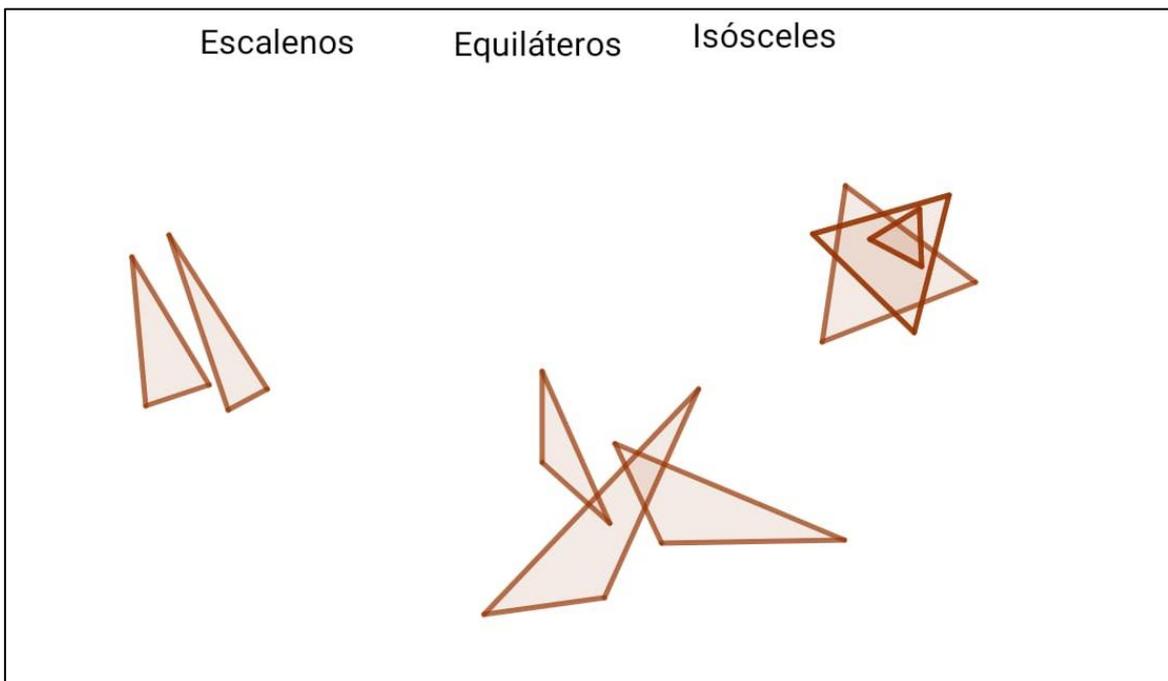
Figura 5.27 - Atividade N1H2. Classificação com um triângulo no lugar errado.



Fonte: Estudante A26 – Turma NX.

A Figura 5.28, apresenta o caso em que os grupos estão aparentemente corretos, mas colocados em lugares trocados. Mostrando assim que o estudante consegue identificar classes de figuras, mas os associa verbalmente de forma incorreta.

Figura 5.28 - Atividade N1H2. Classificação com lugares trocados.



Fonte: Estudante A36 – Turma NY.

Nesta atividade era esperado um percentual de acertos em torno de 90%, pois um triângulo foi desenhado para causar dúvida entre ser equilátero ou isósceles.

Esperava-se que os estudantes utilizassem os recursos do GeoGebra para realizar a medição dos lados e classificar corretamente, porém imagina-se que eles se guiaram principalmente pela aparência (visual) dos triângulos. Por isso a média de acertos em torno de 60%. É difícil dizer se todos fizeram a checagem ou se guiaram apenas visualmente.

É importante ressaltar, que durante essa atividade, os voluntários observaram alguns acadêmicos consultando o material da disciplina de Geometria Plana e Desenho Geométrico, ou a internet. Fizeram isso para se certificarem da classificação dos triângulos quanto aos lados, evidenciando assim uma certa incerteza sobre este conceito.

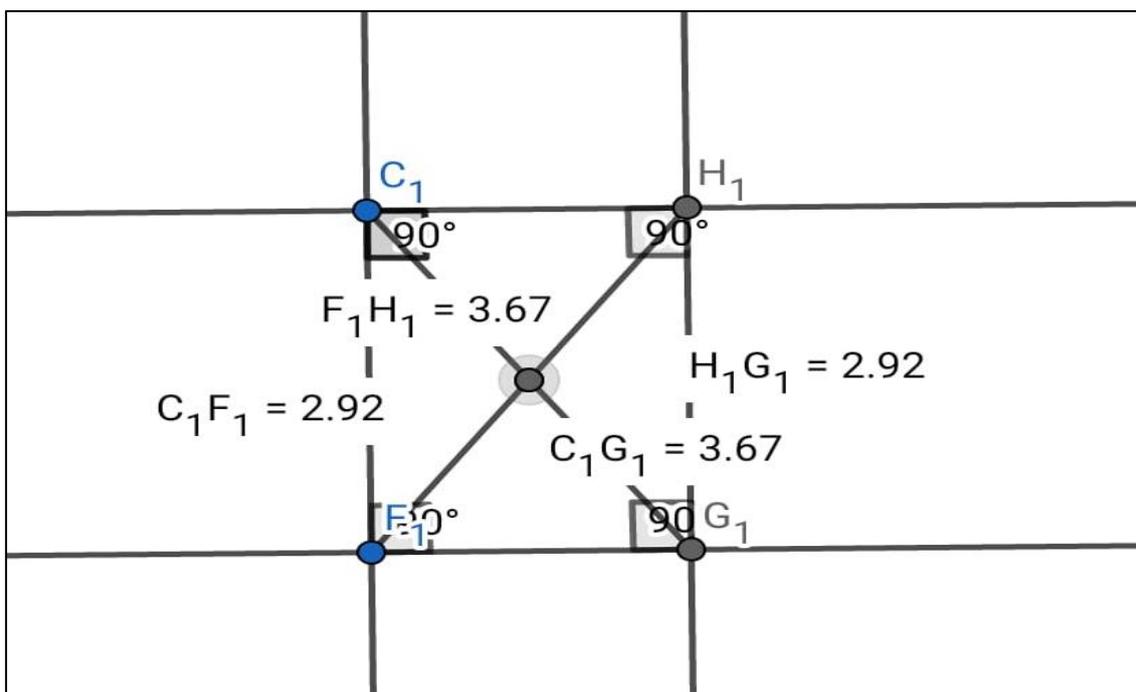
Atividade 8 (N1H3)

Na atividade 8 o estudante precisava fazer o desenho de um polígono a partir de suas características. Ou seja, interpretar as características fornecidas e com as ferramentas do GeoGebra construir um polígono que se enquadrasse nas mesmas. Esta atividade refere-se à habilidade Gráfica do nível 1 da Teoria de Van Hiele (N1H2).

Nesta atividade as duas turmas tiveram o mesmo resultado. A turma NY com 20 estudantes, e a NX com 21, apresentaram solução parecidas. Dentre estes, 80% retrataram o polígono esperado e 20% dos estudantes aplicaram apenas algumas das características pedidas, e assim não entregaram o polígono desejado.

É possível perceber na Figura 5.29, que o estudante A09 compreendeu os conceitos matemáticos necessários para a criação da figura, e conseguiu utilizar as ferramentas do GeoGebra para aplicá-las na atividade.

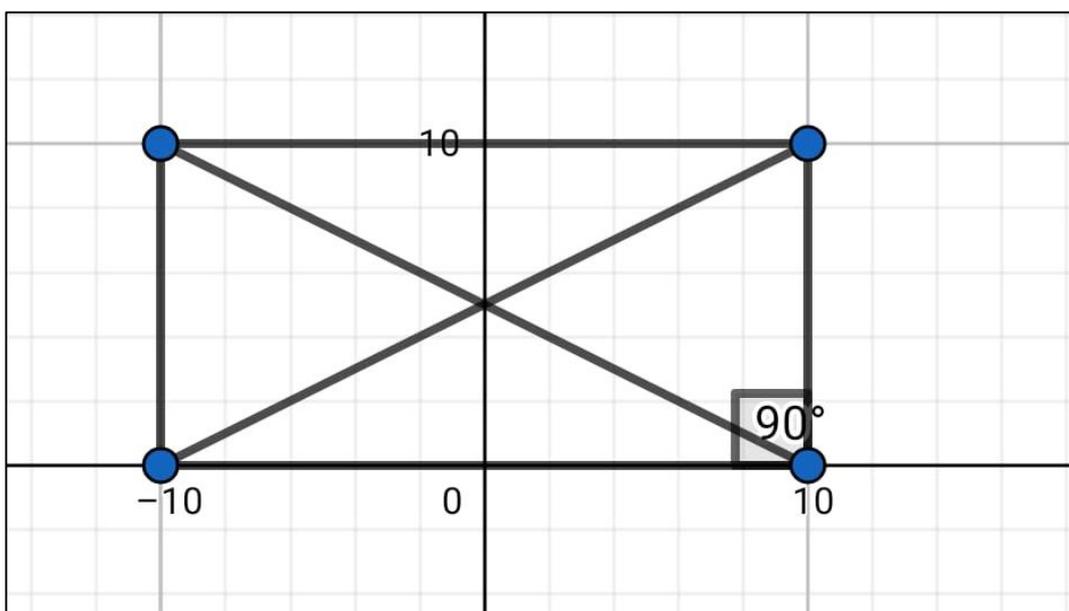
Figura 5.29 - Atividade N1H3. Polígono esperado pela atividade.



Fonte: Estudante A09 – Turma NX.

Outro bom exemplo é notado na Figura 5.30 do estudante A41.

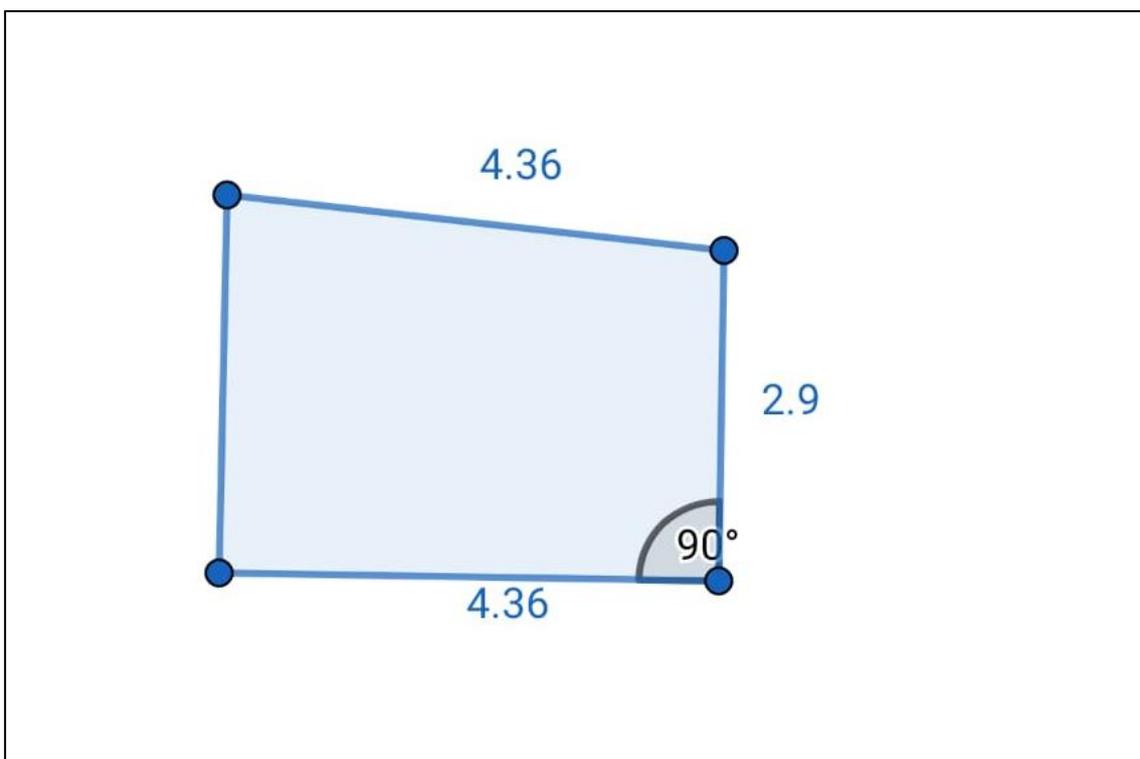
Figura 5.30 - Atividade N1H3. Polígono esperado pela atividade.



Fonte: Estudante A41 – Turma NY.

Na Figura 5.31 vemos uma figura que apresenta apenas uma das características pedidas na atividade, isto nos mostra que há uma dificuldade na interpretação das características apresentadas em passá-las da forma escrita para o desenho.

Figura 5. 31 - Atividade N1H3. Polígono com apenas algumas propriedades coerentes.



Fonte: Estudante A37 – Turma NY.

Embora o número de acertos seja relativamente alto, 20% dos acadêmicos não conseguiram interpretar as características para realizar o desenho. O que mostra que não desenvolveram de forma completa a habilidade gráfica do nível 1.

Atividade 9 (N1H4)

Na atividade 9, o objetivo era o agrupamento de polígonos com características semelhantes, sendo apresentado apenas quadriláteros (Figura 4.16). O estudante deveria identificar características internas aos quadriláteros e assim formar os grupos para descrevê-los no roteiro de atividades e com as características utilizadas. Para esta atividade analisa-se duas habilidades, lógica e aplicação, do nível 1 da Teoria de Van Hiele (N1H4).

No Tabela 5.4, vemos um resumo dos resultados apresentados pelos estudantes para a atividade 9. Na descrição optou-se por colocar os diversos tipos de respostas apresentadas visto a grande variedade de soluções.

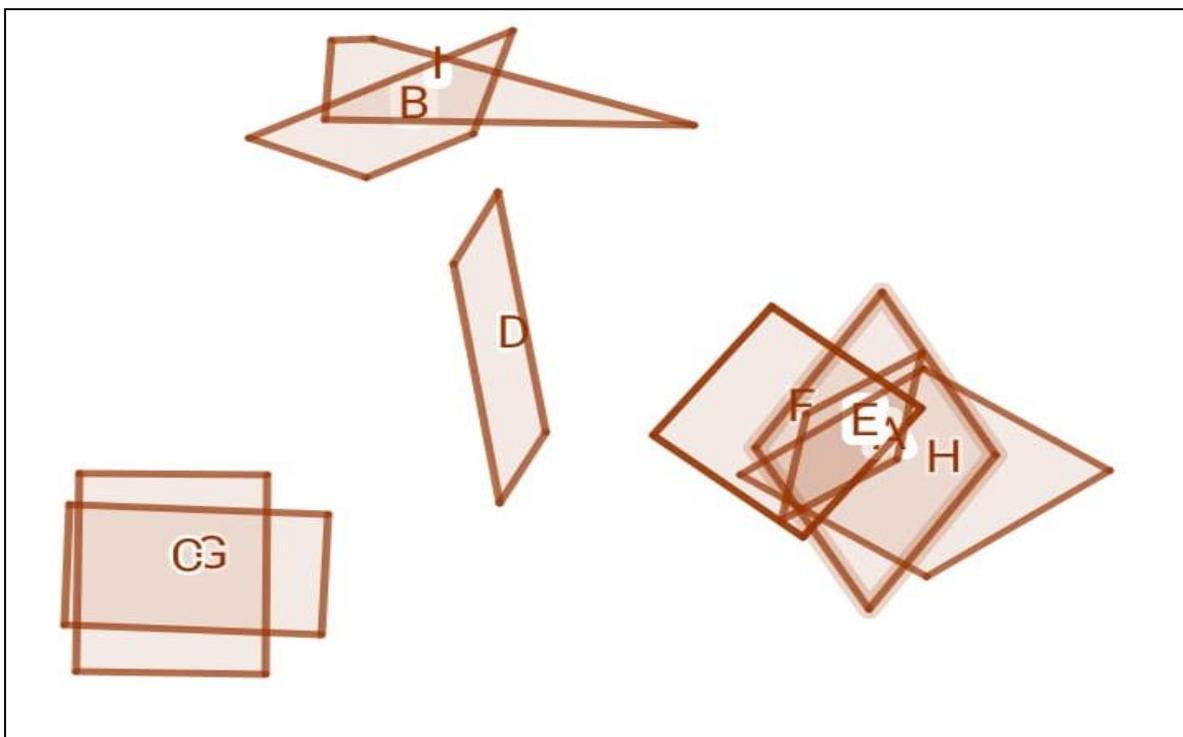
Tabela 5.4: Resumo dos resultados da atividade 9.

Descrição do desenvolvimento	Turma NX 23 estudantes	Turma NY 21 estudantes
Agruparam e descreveram corretamente as características que justificam o agrupamento em Retângulos, Paralelogramos, Trapézios e Losangos.	30%	4%
Agruparam e descreveram corretamente as características que justificam o agrupamento em Retângulos, Paralelogramos, Trapézios e Losangos, porém se equivocaram em um dos polígonos.	21%	14%
Utilizaram apenas a característica ângulos retos para separar os polígonos.	9%	19%
Utilizaram apenas a característica lados iguais, para separar os polígonos.	4%	4%
Utilizaram apenas a característica lados paralelos, para agrupar os polígonos.	0%	8%
Usaram linguagem escrita inadequada para a classificação dos polígonos.	34%	33%

Fonte: o autor.

Na Figura 5.32, pode-se observar uma forma adequada de classificação dos polígonos. Para tanto, na Figura 5.33 temos as justificativas que o estudante utilizou para fazer o agrupamento. Outro ponto importante é que o estudante descreveu os polígonos como quadriláteros, ou seja, verbalizou uma característica comum a todas as figuras.

Figura 5.32 - Atividade N1H4. Classificação em grupos de maneira adequada.



Fonte: Estudante A28 – Turma NX.

Figura 5.33 - Atividade N1H4. Classificação em grupos de maneira adequada (descrição no roteiro de atividades).

Atividade 9: Abra o arquivo nomeado por atividade N1H4.

Nesta atividade você deve agrupar as figuras de acordo com algumas características que você identificar.

Nomeie as características e quais figuras estão relacionadas:

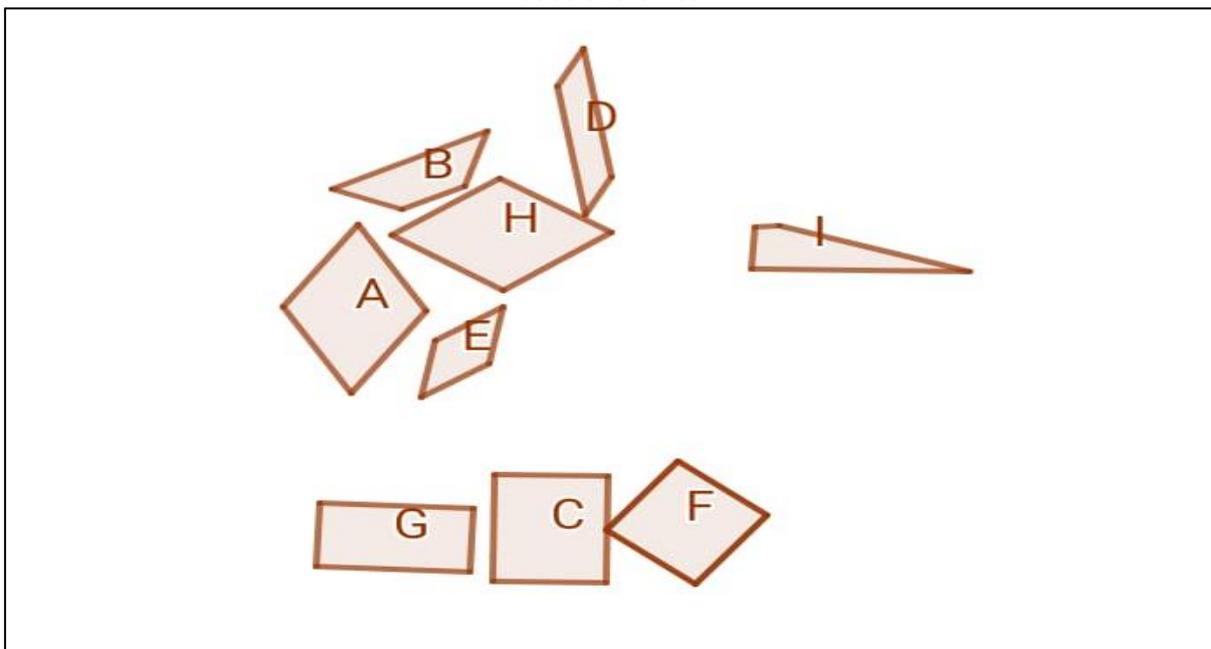
Todas as figuras estão no grande grupo dos quadriláteros
 A, E, H e F: losângulos
 F: quadrado
 D: paralelogramo
 B, I: trapézio
 C, G: Retângulo

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N1H4.

Fonte: Estudante A28 – Turma NX.

Nas Figuras 5.34 e Figura 5.35, observamos o agrupamento realizado pelo Estudante A28, e a descrição feita no roteiro para justificar a classificação.

Figura 5.34 - Atividade N1H4. Classificação com ângulos internos todos iguais, iguais aos pares e todos diferentes.



Fonte: Estudante A18 – Turma NX.

Figura 5.35 - Atividade N1H4. Classificação com ângulos internos todos iguais, iguais aos pares e todos diferentes descrita no roteiro de atividades.

Atividade 9: Abra o arquivo nomeado por atividade N1H4.

Nesta atividade você deve agrupar as figuras de acordo com algumas características que você identificar.

Nomeie as características e quais figuras estão relacionadas:

1 - Ângulos internos iguais: F, C e G.

2 - Ângulos internos 2 a 2 iguais: A, B, D, H.

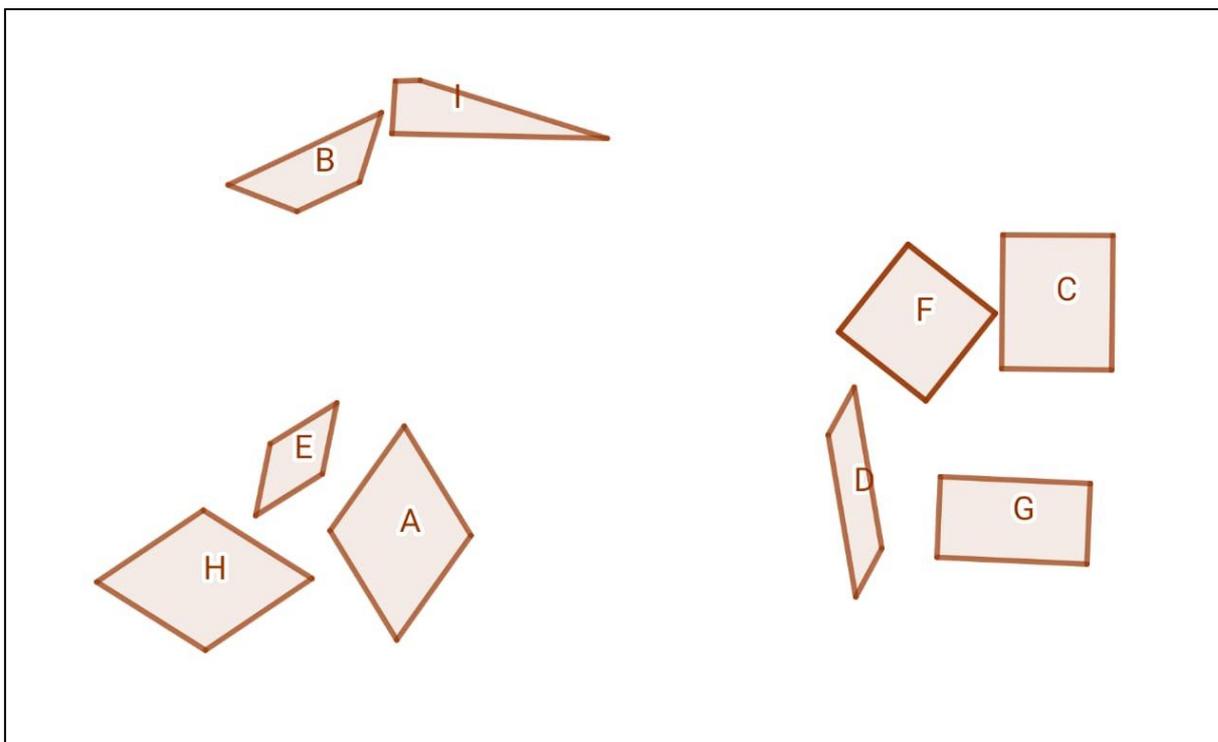
3 - Ângulos internos distintos: E.

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N1H4.

Fonte: Estudante A18 – Turma NX.

Na Figura 5.36 é apresentada uma classificação onde o estudante se equivocou em uma das figuras, neste caso a figura D.

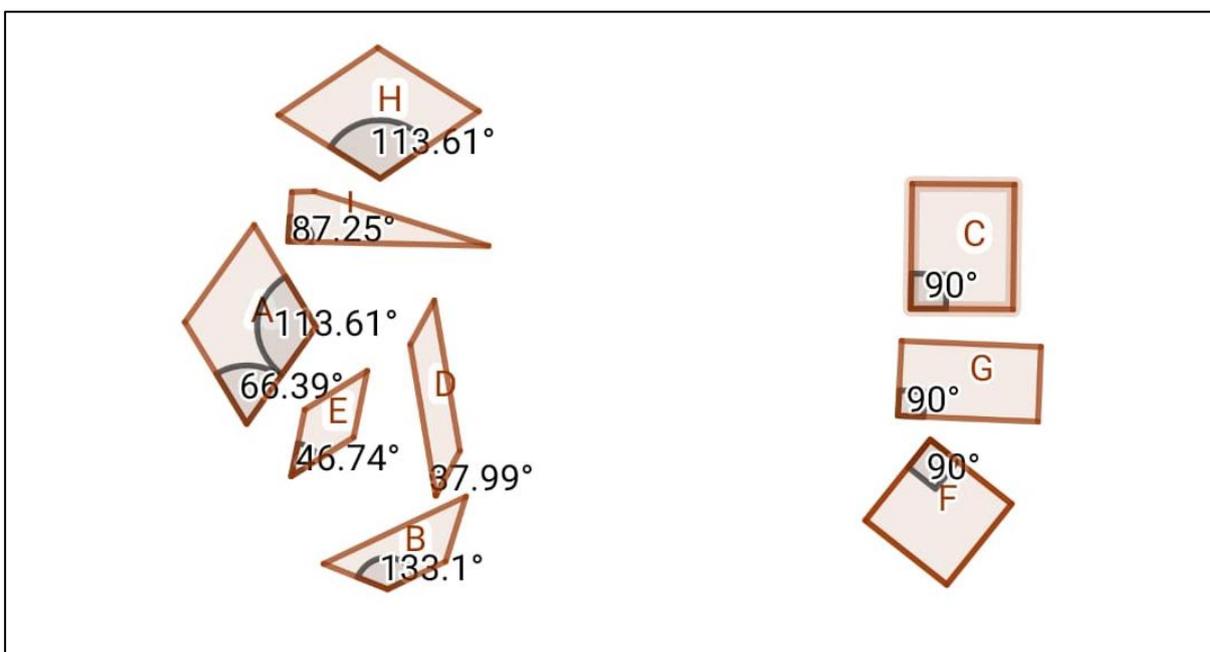
Figura 5.36 - Atividade N1H4. Classificação com um polígono de maneira inadequada.



Fonte: Estudante A08 – Turma NX.

Outro exemplo que surgiu nas respostas dos estudantes foi a utilização dos ângulos internos para classificar as figuras. Na Figura 5.37 vemos este exemplo e na Figura 5.38 vemos a descrição no roteiro de atividades deste mesmo estudante.

Figura 5.37 - Atividade N1H4. Classificação em ângulos retos e não retos.



Fonte: Estudante A41 – Turma NY.

Figura 5.38 - Atividade N1H4. Classificação em ângulos retos e não retos. (Roteiro de atividades)

Atividade 9: Abra o arquivo nomeado por atividade N1H4.

Nesta atividade você deve agrupar as figuras de acordo com algumas características que você identificar.

Nomeie as características e quais figuras estão relacionadas:

Retângulo ret. A, B, D, E, H, I
 Outros ângulos ret. : C, F, G

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N1H4.

Fonte: Estudante A41 – Turma NY.

É importante salientar, que o estudante A41 utilizou-se das ferramentas do *software* para fazer sua análise, e assim checar as propriedades de cada quadrilátero demonstrando que já não se guia unicamente pelo fato visual, caracterizando desta forma um pensamento geométrico desenvolvido no nível 1.

Nessa atividade, 30% e 4% das turmas NY e NX respectivamente, conseguiram agrupar corretamente as figuras na tela do GeoGebra, e elencar corretamente as características que justificam o agrupamento. Nota-se um baixo aproveitamento nesta situação, que pode ser atribuído ao fato de ser uma das últimas atividades do nível um. Neste momento alguns estudantes já estavam cansados e com vontade de ir embora.

Alguns estudantes se utilizaram de uma linguagem inadequada para a situação proposta, na Figura 5.39 vemos um exemplo.

Figura 5.39 - Atividade N1H4. Linguagem inapropriada para a classificação. (Roteiro de atividades)

Atividade 9: Abra o arquivo nomeado por atividade N1H4.

Nesta atividade você deve agrupar as figuras de acordo com algumas características que você identificar.

Nomeie as características e quais figuras estão relacionadas:

A, F, E, H -> Escaleno
 a, c -> retângulo
 I - triângulo retângulo
 B e D ->

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N1H4.

Fonte: Estudante A21 – Turma NX.

É interessante notar a afirmação do Estudante A21 em relação a figura I, classificando-o como “escaleno” e “triângulo retângulo”, visto que a atividade continha apenas quadriláteros.

Nesta atividade tinha-se duas habilidades envolvidas. Os resultados apontam um baixo percentual de estudantes que atingiram as duas habilidades (lógica e de aplicação) simultaneamente. Pois em sua maioria os estudantes classificavam quanto a aparência visual dos polígonos e não conseguiam justificar essa classificação. Em outros casos se equivocavam em certos polígonos. Talvez estes estudantes tenham sempre problemas com figuras que não são muito comuns nos meios de ensino. Temos como exemplo o trapézio e o losango, gerando assim dificuldades quando os estudantes estão diante dessas situações.

Também corroborando com Da Costa e Dos Santos (2016), o paralelogramo foi pouco notado na atividade, isso decorrendo de sua semelhança visual com o retângulo, deixando de lado suas propriedades. Outro fato é que poucos se utilizaram das ferramentas do GeoGebra, mesmo sabendo que estas podiam e deviam ser utilizadas para elencar características dos polígonos.

5.1.3 Pensamento Geométrico - Nível Dois

Neste nível esperava-se dos acadêmicos: reconhecimento de inter-relações e propriedades comuns entre figuras distintas; definição e elaboração de expressões apresentando inter-relações entre as figuras; a partir de figuras fornecidas serem capazes de construir outras figuras com as mesmas características semelhantes das primeiras; determinação de que uma classe de figuras está contida em outra por meio de suas propriedades.

Atividade 10 – N2H1

Para a atividade 10, correspondente a habilidade visual do nível 2 da teoria de Van Hiele, o objetivo era que o estudante identificasse propriedades referentes as diagonais de alguns quadriláteros apresentados na Figura 4.18, e que as descrevesse no roteiro de atividades.

No Tabela 5.5, é apresentado o resumo das respostas que os estudantes deram para a atividade 10, assim como o percentual de cada turma em cada tipo de resposta.

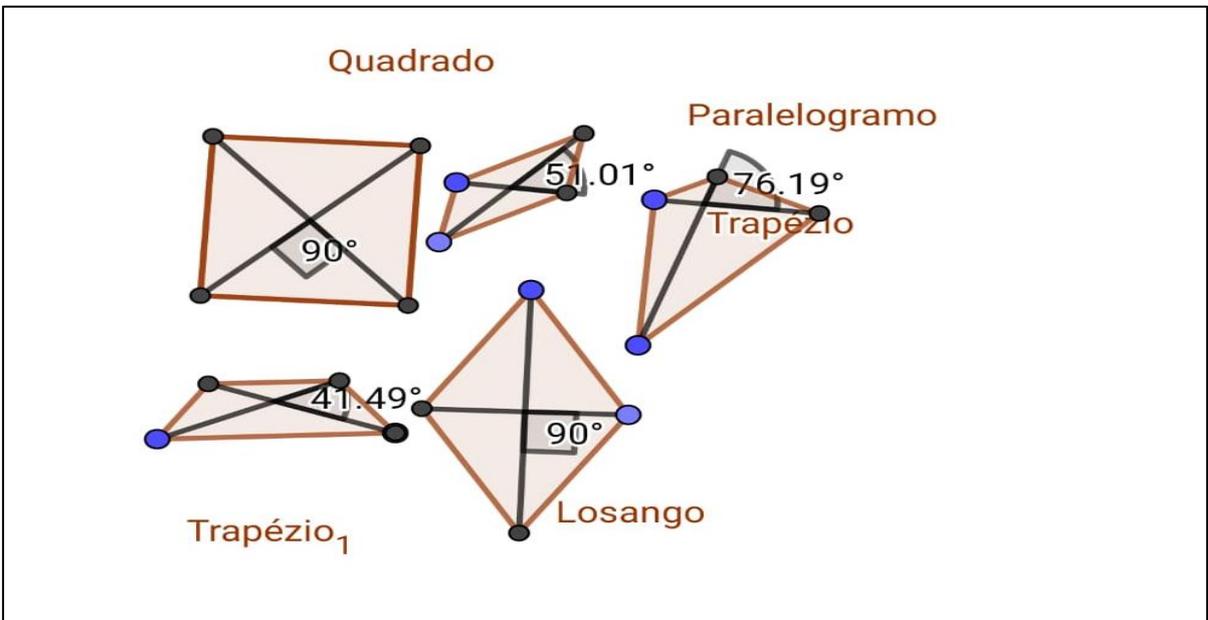
Tabela 5.5: Resumo das respostas apresentadas para atividade 10.

	Turma NX	Turma NY
Descrição de respostas:	18 acadêmicos.	11 acadêmicos.
Para o quadrado as diagonais são proporcionais e em seu encontro são formados quatro ângulos retos.	50%	54%
Retas concorrentes	5%	27%
Separaram os quadriláteros em triângulos.	22%	0%
Descrição de forma inadequada.	10%	19%

Fonte: o autor.

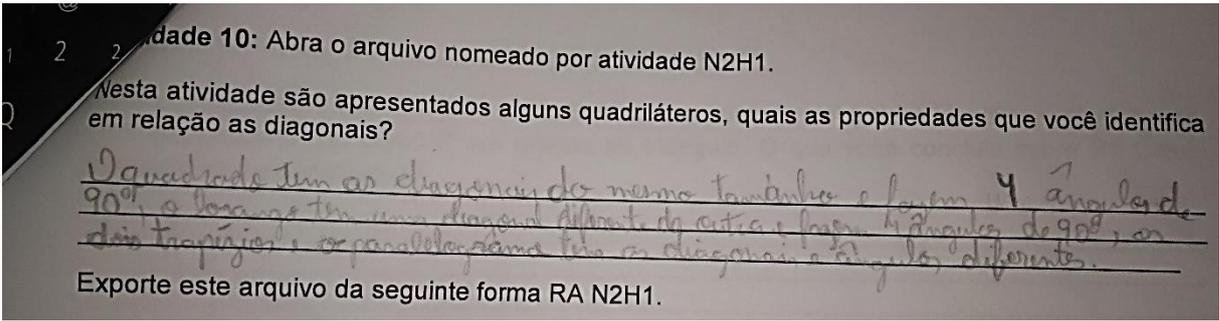
Em média, metade dos acadêmicos descreveu propriedades do quadrado e do losango, descrevendo as diagonais como proporcionais e perpendiculares. Um exemplo temos na Figura 5.40, onde o estudante A41 utilizou as ferramentas do GeoGebra para se certificar quais figuras possuíam diagonais perpendiculares, mostrando assim não se guiar unicamente pelo fator visual.

Figura 5.40 - Atividade N2H1. Quadrado e losango com diagonais perpendiculares.



Fonte: Estudante A41 – Turma NY.

Figura 5.41 - Atividade N2H1. Resposta do estudante A41 no roteiro de atividades.

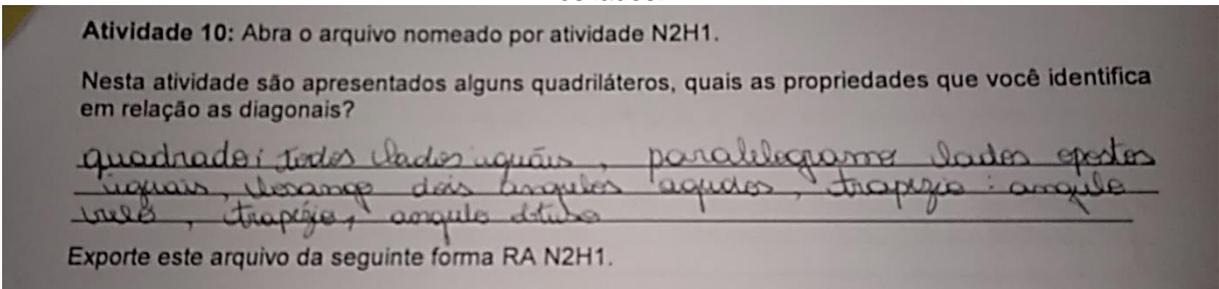


Fonte: Estudante A41 – Turma NY.

Na Figura 5.41, foi possível notar como o estudante A41 descreve algumas propriedades das diagonais de todos os quadriláteros apresentados na atividade.

Na Figura 5.42, tem-se um exemplo no qual o estudante se confunde entre as diagonais e os lados dos quadriláteros. Ele não usou as propriedades corretas, pois é possível construir um paralelogramo com todos os lados iguais e inclinado. Para o paralelogramo faltou ao estudante dizer que os lados opostos precisam ser paralelos. Em suas descrições também errou as características do losango e do trapézio.

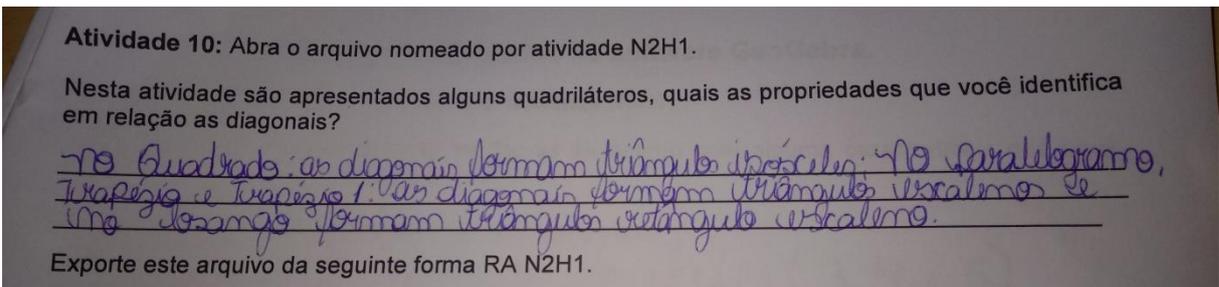
Figura 5.42 - Atividade N2H1. Resposta do estudante A04 O estudante confundiu as diagonais com os lados.



Fonte: Estudante A04 – Turma NX.

Na Figura 5.43 o estudante A35 identificou que as diagonais dos quadriláteros formam triângulos e assim ele usa as classificações destes triângulos para associar ao tipo de quadrilátero.

Figura 5.43 - Atividade N2H1. Resposta do estudante A35.



Fonte: Estudante A35 – Turma NX.

Percebemos dificuldades quanto aos conceitos empregados sobre as diagonais de quadriláteros, aparentando que os acadêmicos apenas sabiam onde ficam as diagonais, sem estarem familiarizados com as propriedades que possam possuir.

Para a atividade 10, em média 80% dos estudantes conseguiu identificar ao menos uma das propriedades das diagonais dos quadriláteros apresentados. Porém, muitos se apegaram a um fato óbvio (retas concorrentes) e pararam neste ponto, não buscando outras propriedades e tão pouco se aproveitando das ferramentas do GeoGebra.

Atividade 11 (N2H2)

A atividade 11, que corresponde a habilidade verbal do nível 2 da teoria de Van Hiele (N2H2), tem como objetivo a identificação e classificação de algumas circunferências da Figura 4.20 quanto a suas posições relativas: secantes, tangentes, externas e internas.

Na turma NX tivemos 16 estudantes entregando esta atividade, e na turma NY 11 estudantes. No Tabela 5.6, é descrita a quantidade de pares de circunferências que os estudantes relataram para cada tipo de posição relativa.

Tabela 5.6: Percentual de estudantes das turmas NX e NY que descreveram os pares de circunferências com suas posições relativas.

Descrição dos tipos de pares de circunferência e suas quantidades.		Turma NX 16 estudantes	Turma NY 11 estudantes
Externas	Nenhum par.	37,5%	27,3%
	Apenas um par.	18,8%	18,2%
	Mais de um par.	43,7%	54,5%
Internas	Nenhum par.	25%	45,5%
	Apenas um par.	18,8%	18,2%
	Mais de um par.	52,2%	36,3%
Tangentes	Nenhum par.	31,2%	54,5%
	Apenas um par.	0%	9%
	Mais de um par.	68,8%	36,5%
Secantes	Nenhum par.	25%	54,5%
	Apenas um par.	18,8%	9%
	Mais de um par.	52,2%	36,5%

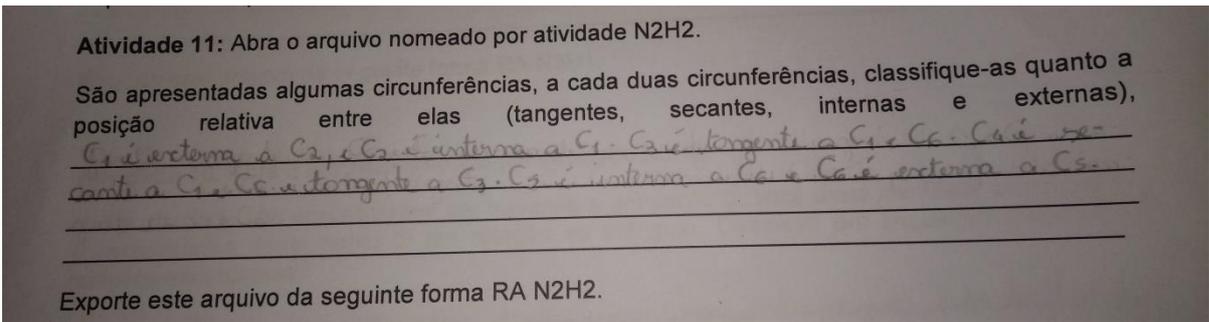
Fonte: o autor.

Optou-se no Tabela 5.6, por apresentar apenas as porcentagens de pares de circunferências separadas em “nenhum par”, “apenas um par” e “mais de um par”, devido as vastas quantidades de circunferência descritas pelos estudantes. Observa-se que os maiores valores se apresentam nas linhas que representa os estudantes que não relataram pares de circunferências para aqueles tipos. Mostrando que o tema de classificação de circunferências é de grande dificuldade para eles.

Com relação a descrição escrita dos estudantes temos também uma grande variedade de respostas. Sendo desde uma escrita descritiva (escrevendo todos os termos), uma escrita organizada como em uma tabela, até o uso de símbolos matemáticos adequados para esta classificação.

Tem-se na Figura 5.44 um exemplo onde o estudante descreve os pares de reta de uma maneira descritiva.

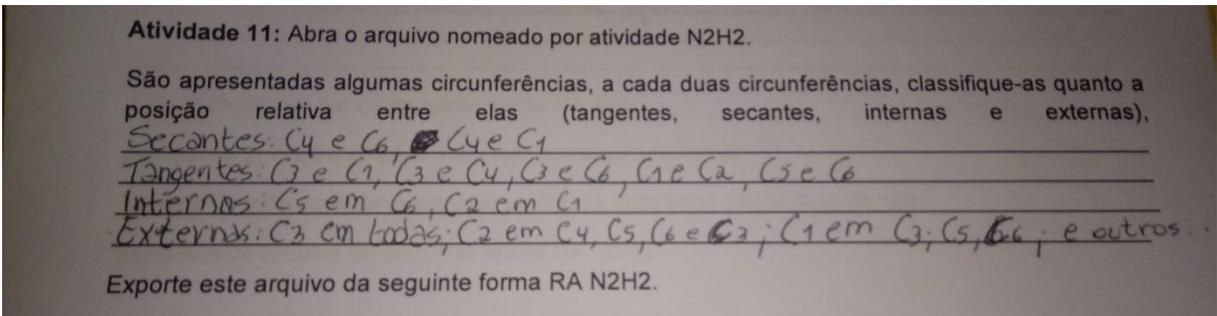
Figura 5.44 - Atividade N2H2. Resposta do estudante A19.



Fonte: Estudante A19 – Turma NX.

Na Figura 5.45 observa-se uma outra forma de se descrever os pares de circunferências se assemelhando a uma tabela organizada.

Figura 5.45 - Atividade N2H2. Resposta do estudante A29.



Fonte: Estudante A29 – Turma NX.

Na figura 5.46 vemos uma resposta um tanto curiosa, mas que retrata uma realidade quanto aos conceitos sobre circunferências.

No Tabela 5.7, é mostrado um resumo das respostas apresentadas pelos acadêmicos para a atividade 12.

Tabela 5.7: Resumos das respostas apresentadas para a atividade 12.

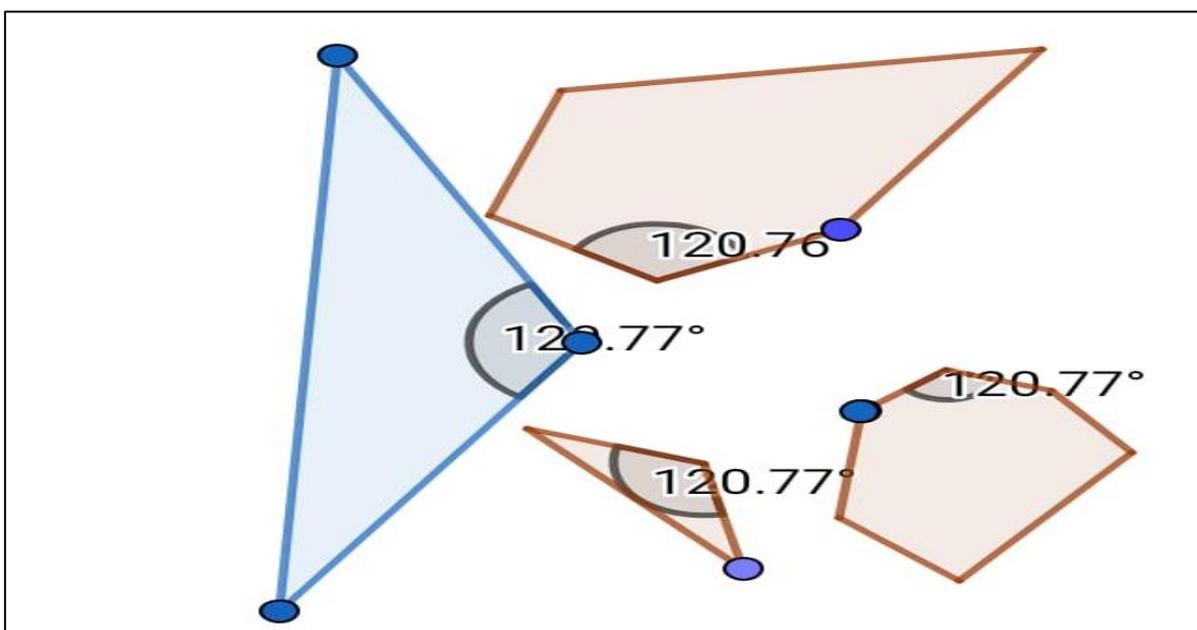
Descrição das respostas apresentadas pelos estudantes.	Turma NX 17 estudantes.	Turma NY 9 estudantes.
Propriedades referentes aos ângulos das figuras. (um ângulo de 120°)	45%	44%
Figuras sendo formadas por triângulos.	0%	12%
Representam polígonos convexos.	0%	22%
Lados congruentes.	20%	0%
Confusão na interpretação da atividade.	35%	22%

Fonte: o autor.

Observa-se no Quadro 5.8, que em média as propriedades mais identificadas foram referentes aos ângulos das figuras. Há também de se falar que uma grande parte dos estudantes se confundiu na interpretação da atividade, e assim não conseguindo completá-la de maneira adequada.

Nas Figuras 5.48 e 5.49, vemos o exemplo do estudante A28 que utilizou as ferramentas do GeoGebra e descobriu que uma característica comum nas figuras era a de um ângulo interno de 120° . Com isso esse estudante então construiu uma nova figura (feita em azul), que possuía a mesma característica das demais, mostrando assim ter desenvolvido a habilidade gráfica do nível dois da Teoria de Van Hiele.

Figura 5.48 - Atividade N2H3. Resposta adequada com a propriedade de possuir um ângulo de 120° .



Fonte: Estudante A28 – Turma NX.

Figura 5.49 - Atividade N2H3. Resposta adequada com a propriedade de possuir um ângulo de 120°.

Atividade 12: Abra o arquivo nomeado por atividade N2H3.

A partir das figuras apresentadas, crie uma nova figura com a característica que você identificou.

Identifiquei um ângulo de medida 120 nas figuras apresentadas.

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N2H2.

Fonte: Estudante A28 – Turma NX.

Outro destaque dado nesta atividade, foi apresentado pelo estudante A19 nas Figuras 5.50 e 5.51, onde esse se utilizou das ferramentas do GeoGebra para certificar-se das medidas dos lados das figuras apresentadas, construindo assim uma nova figura (em rosa) condizente com a propriedade descoberta, que se tratava de dois lados consecutivos serem iguais.

Figura 5.50 - Atividade N2H3. Resposta no roteiro de atividades adequada com as expectativas.

Atividade 12: Abra o arquivo nomeado por atividade N2H3.

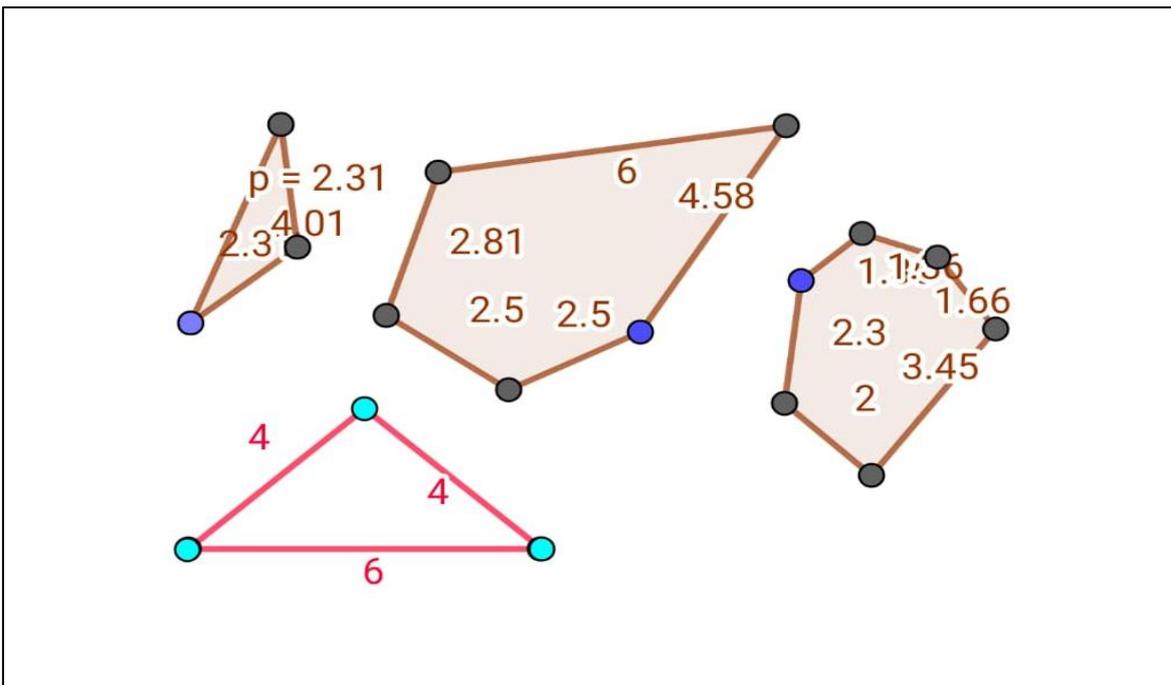
A partir das figuras apresentadas, crie uma nova figura com a característica que você identificou.

Todas as figuras tinham dois lados iguais

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N2H2.

Fonte: Estudante A19 – Turma NX.

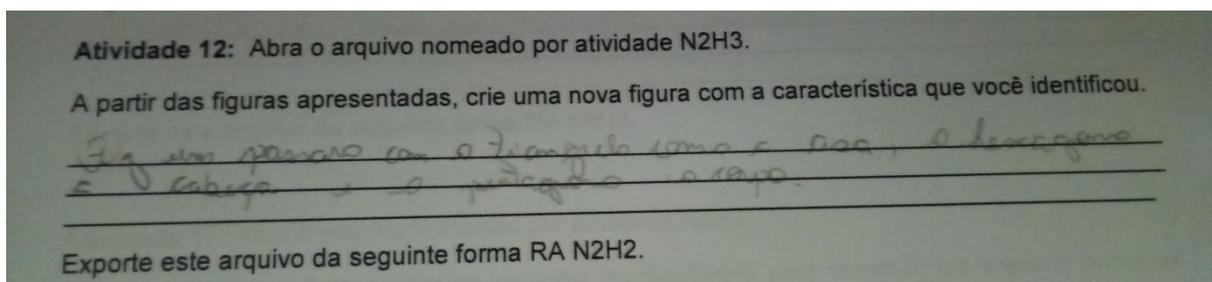
Figura 5.51 - Atividade N2H3. Resposta adequada com as expectativas da atividade.



Fonte: Estudante A19 – Turma NX.

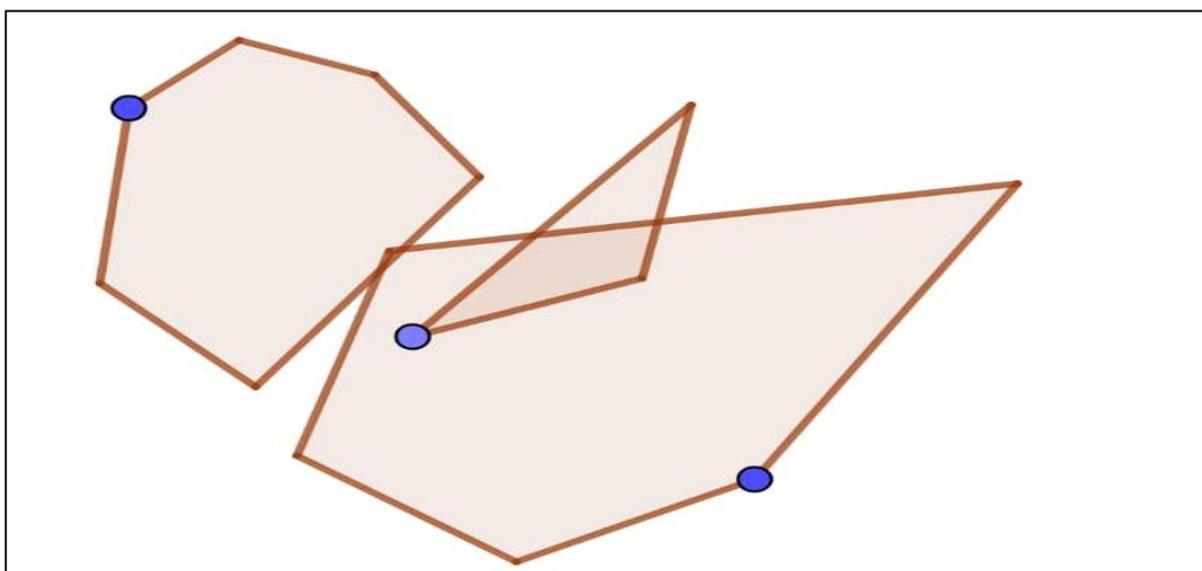
Possivelmente o estudante A44 interpretou o exercício como um quebra cabeça, onde usou as peças para formar uma nova. Ele deveria observar as figuras e identificar propriedades para então construí-la. Este é um exemplo que caracteriza uma má interpretação do modo de proceder na atividade. Observamos este comportamento em diversos estudantes, um exemplo está nas Figuras 5.52 e 5.53.

Figura 5.52 - Atividade N2H3. Interpretação equivocada do estudante A44.



Fonte: Estudante A44 – Turma NY.

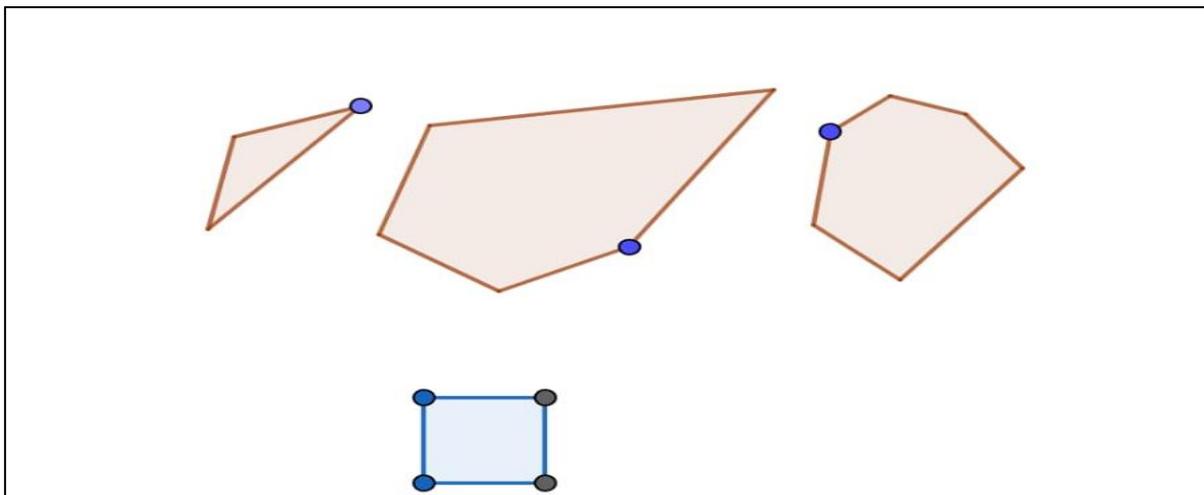
Figura 5.53 - Atividade N2H3. Interpretação equivocada do estudante A44.



Fonte: Estudante A44 – Turma NY.

Na turma NY tivemos 22% dos estudantes caracterizando os polígonos como convexos, um exemplo *desta solução está nas Figuras 5.54 e 5.55:

Figura 5.54 - Atividade N2H3. Construção de um polígono convexo.



Fonte: Estudante A52 – Turma NY.

Figura 5.55 - Atividade N2H3. Construção de um polígono convexo (Roteiro de atividades).

Atividade 12: Abra o arquivo nomeado por atividade N2H3.

A partir das figuras apresentadas, crie uma nova figura com a característica que você identificou.

Crie mais um polígono convexo.

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N2H2.

Fonte: Estudante A52 – Turma NY.

Esta atividade se mostrou bem complexa para os estudantes, tanto na parte interpretativa quanto na sua resolução. A habilidade de desenho não tende a ser muito complicada, porém na parte de identificar uma propriedade em comum nas figuras os estudantes apresentaram dificuldades significativas. É importante ressaltar, que a maioria dos estudantes (61% do total de acadêmicos) que conseguiu resolver a atividade de maneira adequada, utilizou pelo menos uma das ferramentas do GeoGebra para analisar as figuras. Cerca de 29 % do total de estudantes se confundiu na interpretação da atividade e assim não a completou de maneira adequada.

Atividade 13 (N2H4)

Nesta atividade era explorada a habilidade lógica do nível 2 da Teoria de Van Hiele. Alguns quadriláteros foram apresentados na figura 4.24. Os estudantes deveriam agrupá-los de alguma maneira que julgassem apropriada e em seguida registrar no guia de atividade os grupos que formaram.

As diversas classificações utilizadas pelos estudantes estão apresentadas e resumidas no Tabela 5.8.

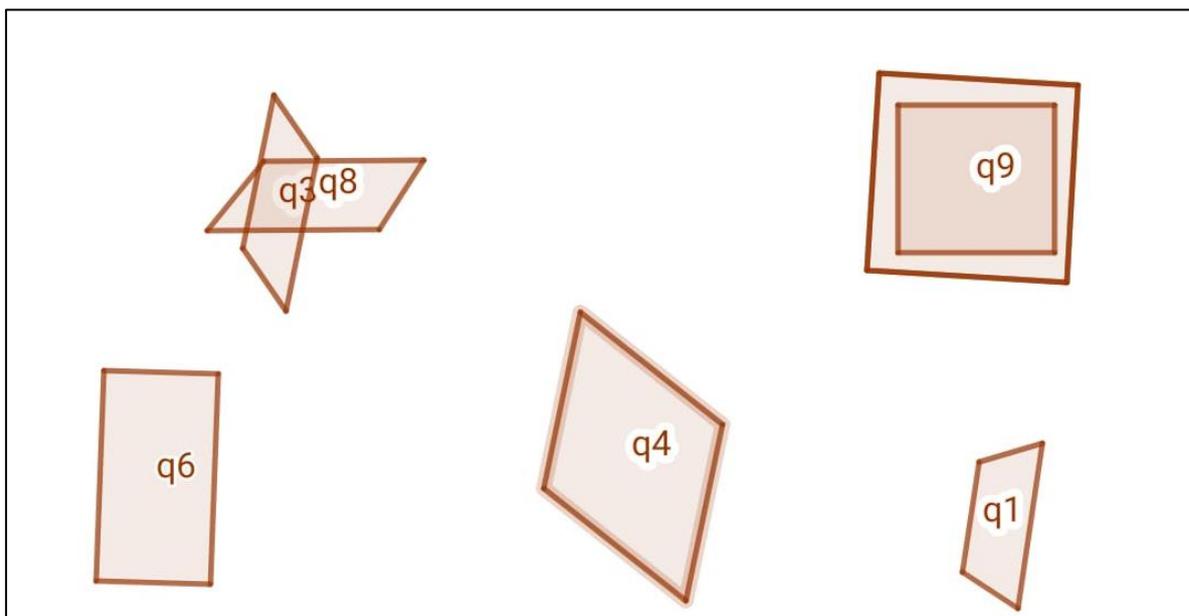
Tabela 5.8: Percentual das respostas apresentadas pelos estudantes para atividade 13. (N2H4).

Tipos de classificações apresentadas pelos estudantes para a atividade 13.	Turma NX 18 acadêmicos.	Turma NY 9 acadêmicos
um retângulo, um losango, dois quadrados, dois paralelogramos e um trapézio.	56%	78%
dois retângulos, um losango, um quadrado, dois paralelogramos e um trapézio.	23%	11%
um retângulo, um losango, dois quadrados, um paralelogramo e um trapézio.	16%	0%
dois retângulos, um quadrado e dois paralelogramos.	5%	0%
Três retângulos, um losango, dois quadrados, dois paralelogramos e um trapézio	0%	11%

Fonte: o autor.

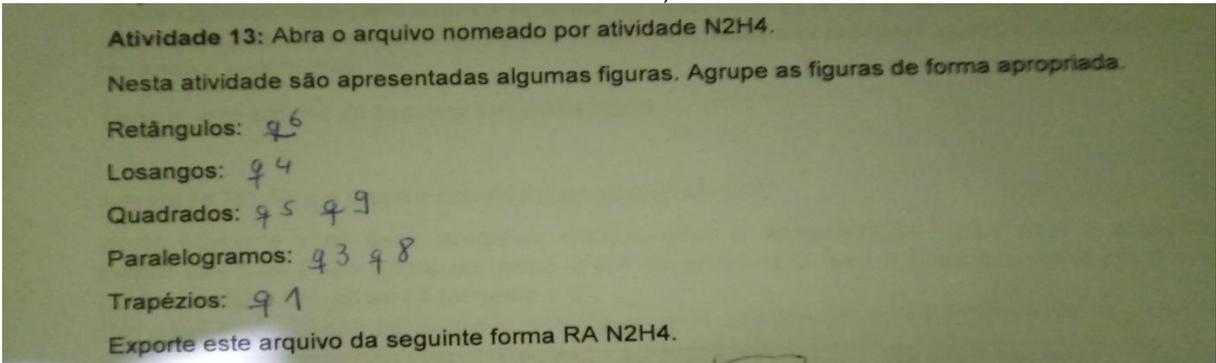
Como é possível verificar, o maior percentual ficou com a classificação em que temos: um retângulo, um losango, dois quadrados, dois paralelogramos e um trapézio. Um exemplo desta classificação é mostrado na Figura 5.56. A Figura 5.57 nos mostra como o estudante mencionou esta classificação no roteiro de atividades.

Figura 5.56 - Atividade N2H4. Configuração de maior ocorrência entre os estudantes.



Fonte: Estudante A28 – Turma NX.

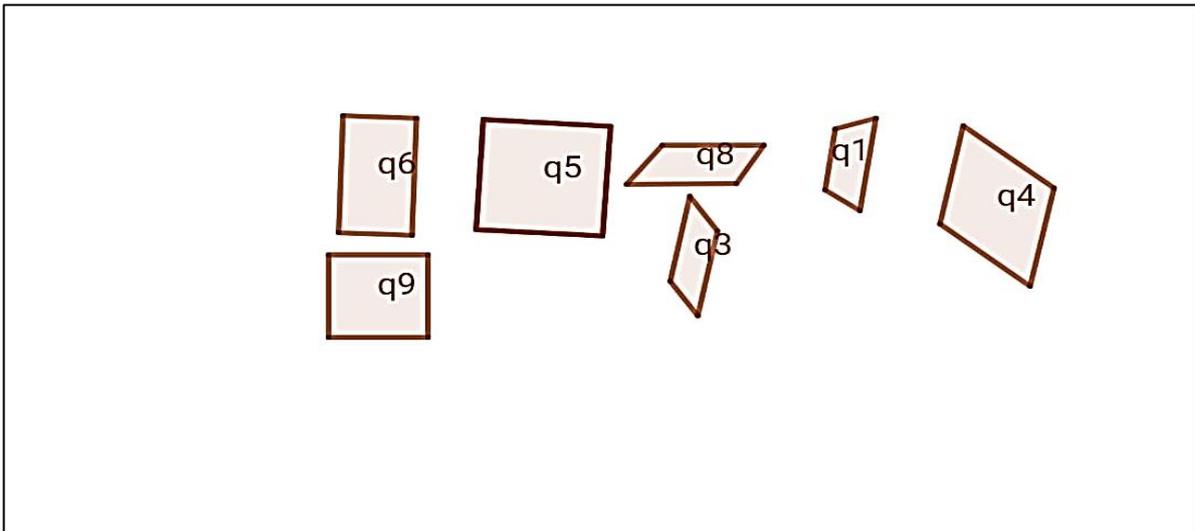
Figura 5.57 - Atividade N2H4. Configuração de maior ocorrência entre os estudantes (Roteiro de atividades).



Fonte: Estudante A09 – Turma NX.

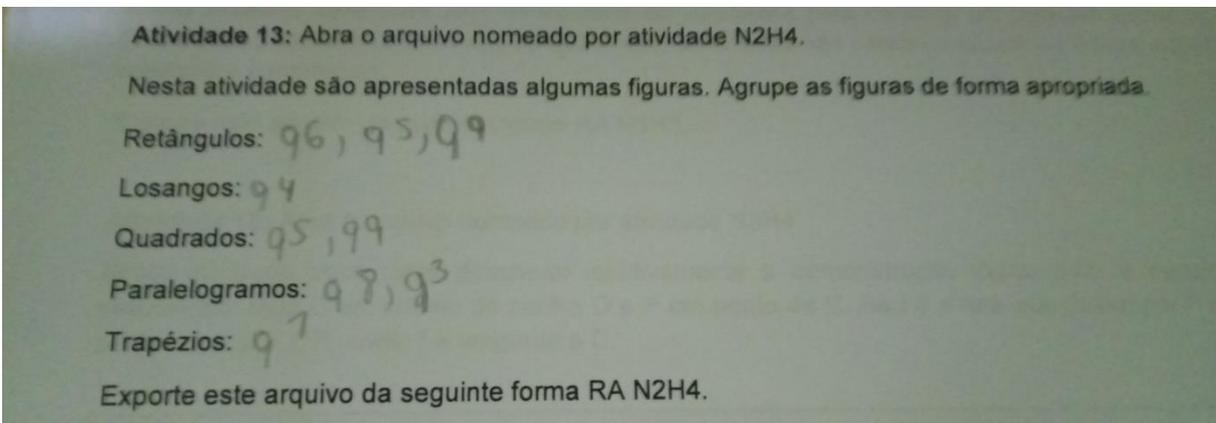
Uma classificação que também apareceu em número expressivo foi a seguinte: dois retângulos, um losango, um quadrado, dois paralelogramos e um trapézio. (Figura 5.58)

Figura 5. 58 - Atividade N2H4. Configuração com a inclusão dos quadrados nos retângulos.



Fonte: Estudante A37 – Turma NY.

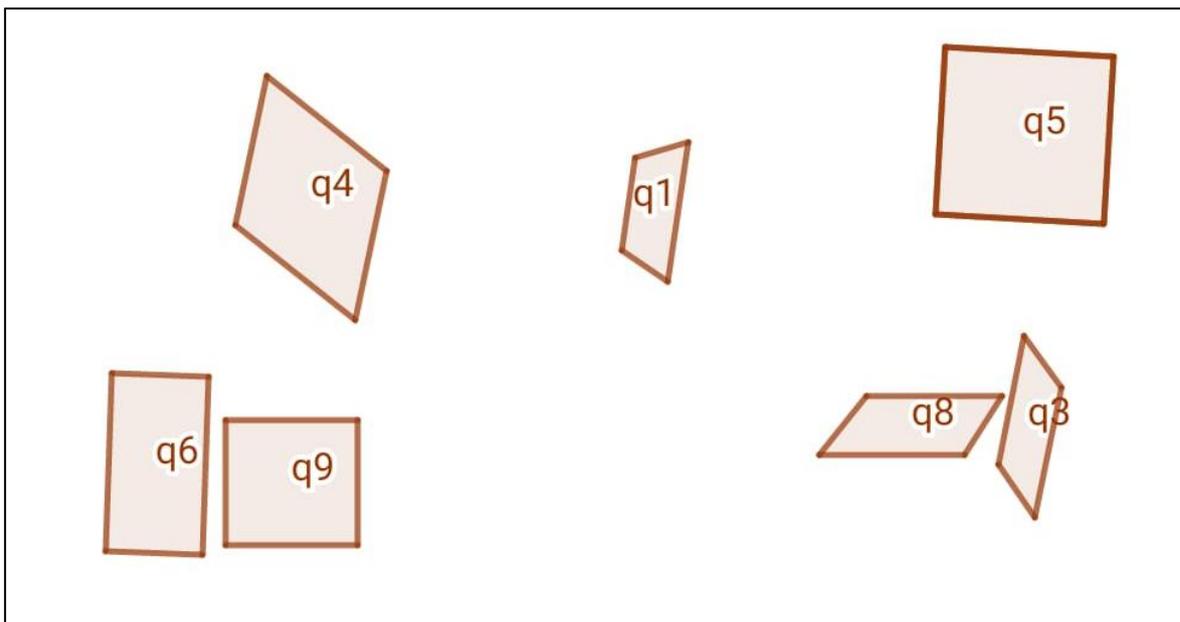
Figura 5. 59 - Atividade N2H4. Configuração com a inclusão dos quadrados nos retângulos.



Fonte: Estudante A37 – Turma NY.

Uma das expectativas esperada acerca dos estudantes do nível 2 era a inclusão de figuras em classes mais amplas, como os quadrados serem um caso especial de retângulos. Isto é observado na Figura 5.59. Um caso semelhante pode ser observado em Da Costa e dos Santos (2020), onde são analisadas as classes de figuras especificamente de quadriláteros notáveis.

Figura 5.60 - Atividade N2H4. Configuração com um erro.



Fonte: Estudante A51 – Turma NY.

Na figura 5.60, percebe-se um equívoco nos quadriláteros q5 ou q9, que são ambos quadrados e estão separados na resposta apresentada pelo estudante A51.

Na atividade 13 (N2H4), observou-se que em média 60% dos estudantes agruparam os quadriláteros utilizando-se da aptidão visual, sem submeter as figuras a análises com as ferramentas do GeoGebra, que poderiam favorecer o entendimento de características das figuras. Do mesmo modo que observado em Da Costa e dos Santos (2020), aparentemente, os licenciandos consideram apenas a aparência global das figuras, sem levar em conta suas características.

Atividade 14 (N2H5)

Na atividade 14, foi apresentada a imagem do Palácio do Planalto, Figura 4.26. O objetivo era de que os estudantes observassem os elementos matemáticos presentes na imagem e os relatassem no guia de atividades. Nesta atividade é analisada a habilidade de aplicação do nível 2 da Teoria de Van Hiele.

Na Tabela 5.9, temos um resumo dos percentuais dos elementos matemáticos mais observados pelos estudantes:

Tabela 5.9: Percentual das respostas apresentadas pelos estudantes para atividade 14. (N2H5).

	Turma NX 19 estudantes	Turma NY 9 estudantes
Retângulos	95%	77%
Quadrados	47%	66%
Triângulos	21%	33%
Arcos	0%	22%
Paralelogramos	10%	0%
Semicírculos	0%	22%
Paralelepípedo	15%	0%
Parábolas	0%	22%
Prismas	0%	22%
Cilindros	26%	11%
Trapézios	10%	0%
Retas paralelas	5%	0%
Cones	5%	0%

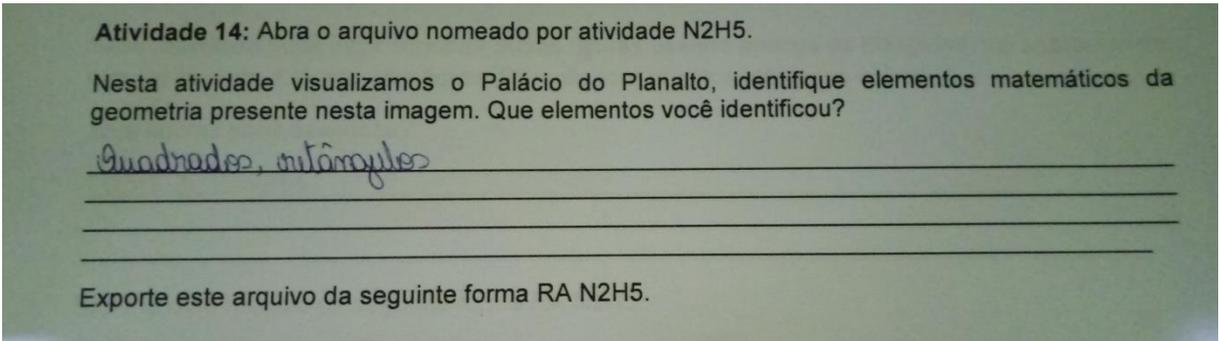
Fonte: o autor.

Na turma NY, temos poucos estudantes que chegaram até esta atividade, mas ainda assim observa-se uma grande diversidade de elementos matemáticos descritos na figura. Com certeza o retângulo e o quadrado são muito presentes nas respostas por serem figuras bem trabalhadas ao longo do caminho escolar.

Na turma NX, foram 19 estudantes que entregaram esta atividade. Da mesma maneira os quadriláteros tiveram os maiores percentuais de visualização, mas aqui temos uma diversificação maior dos elementos matemáticos apresentados. Isso demonstra que os estudantes têm uma maior convivência com este, e assim os observam na figura.

Como notadamente, os retângulos e quadrados foram os elementos de maior ocorrência. Temos um exemplo na Figura 5.61.

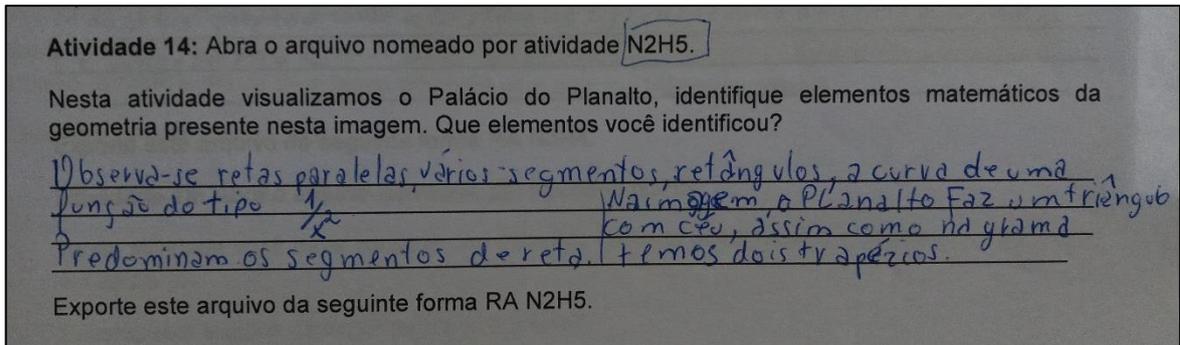
Figura 5.61 - Atividade N2H5. Identificação de quadrados e retângulos.



Fonte: Estudante A35 – Turma NY.

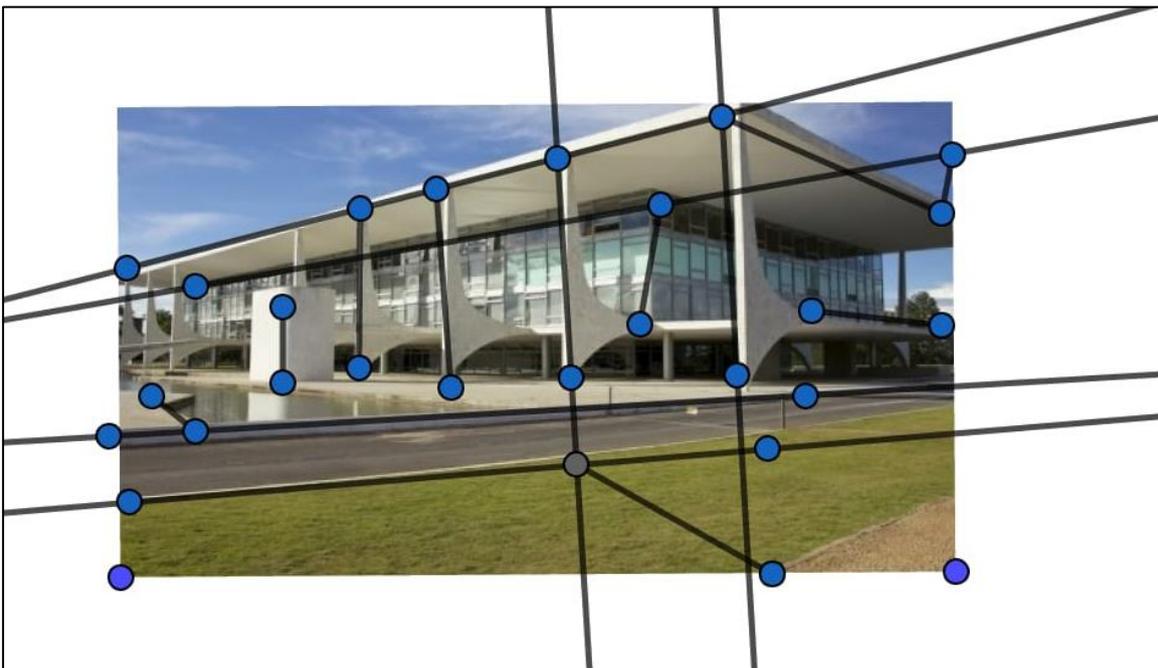
Uma identificação com mais elementos pode ser observada nas Figuras 5.62 e 5.63, onde o estudante é mais minucioso, identificou e descreveu uma variedade de elementos matemáticos.

Figura 5.62 - Atividade N2H5. Descrição de diversos elementos matemáticos.



Fonte: Estudante A09 – Turma NX.

Figura 5.63 - Atividade N2H5. Identificação de retas e polígonos.



Fonte: Estudante A09 – Turma NX.

Com relação a atividade 14, todos que entregaram a atividade de alguma maneira identificaram e descreveram pelo menos um elemento matemático. Os acadêmicos apresentaram bons resultados em identificar e apresentar elementos matemáticos presentes na figura que lhes foi apresentada.

5.1.4 Pensamento Geométrico - Nível Três

Para este nível os acadêmicos deveriam: a partir de informações dadas ou adquiridas inferir propriedades dos objetos; solucionar problemas que associam objetos; desenvolver demonstrações utilizando regras de lógica; construir figuras específicas a partir de informações dadas; entender as diferenciações entre definições, axiomas e teoremas; identificar o que é apresentado e o que é solicitado para fazer em uma atividade; deduzir informações a partir de informações de uma figura.

Atividade 15 – N3H1

Para a atividade 15, foi apresentado na Figura 4.28 um triângulo e um ponto P. O objetivo era que o estudante utilizando as ferramentas do GeoGebra, descrevesse propriedades deste ponto P com relação ao triângulo apresentado. Nesta atividade é observada a habilidade visual do nível 3 da Teoria de Van Hiele.

Na Tabela 5.10 observa-se os resultados percentuais de cada turma:

Tabela 5.10: Percentual das respostas apresentadas pelos estudantes para atividade 15. (N3H1).

	Turma NX 9 estudantes	Turma NY 6 estudantes
P é o Baricentro do triângulo.	56%	50%
P é ponto da bissetriz.	33%	25%
P é interno ao triângulo.	11%	25%

Fonte: o autor.

Uma resposta adequada para a atividade 15 é observada na Figura 5.64, onde o estudante A17 descreve o ponto P como Baricentro do triângulo e justifica sua resposta de forma clara e objetiva.

Figura 5. 64 - Atividade N3H1. Processo de construção do baricentro.

Atividade 15: Abra o arquivo nomeado por atividade N3H1.

Nesta atividade são apresentados um triângulo e um ponto P, você deve identificar propriedades e característica deste ponto P em relação ao triângulo. O que você concluiu sobre P? Como chegou a essas conclusões?

O ponto P é o Baricentro / traçando um seguimento de um vértice ao ponto médio do lado oposto, fazendo isso para todos os vértices encontramos o Baricentro

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N3H1.

Fonte: Estudante A17 – Turma NX.

Outra resposta coerente é observada na Figura 5.65 do estudante A16.

Figura 5.65 - Atividade N3H1. P é o baricentro.

Atividade 15: Abra o arquivo nomeado por atividade N3H1.

Nesta atividade são apresentados um triângulo e um ponto P, você deve identificar propriedades e característica deste ponto P em relação ao triângulo. O que você concluiu sobre P? Como chegou a essas conclusões?

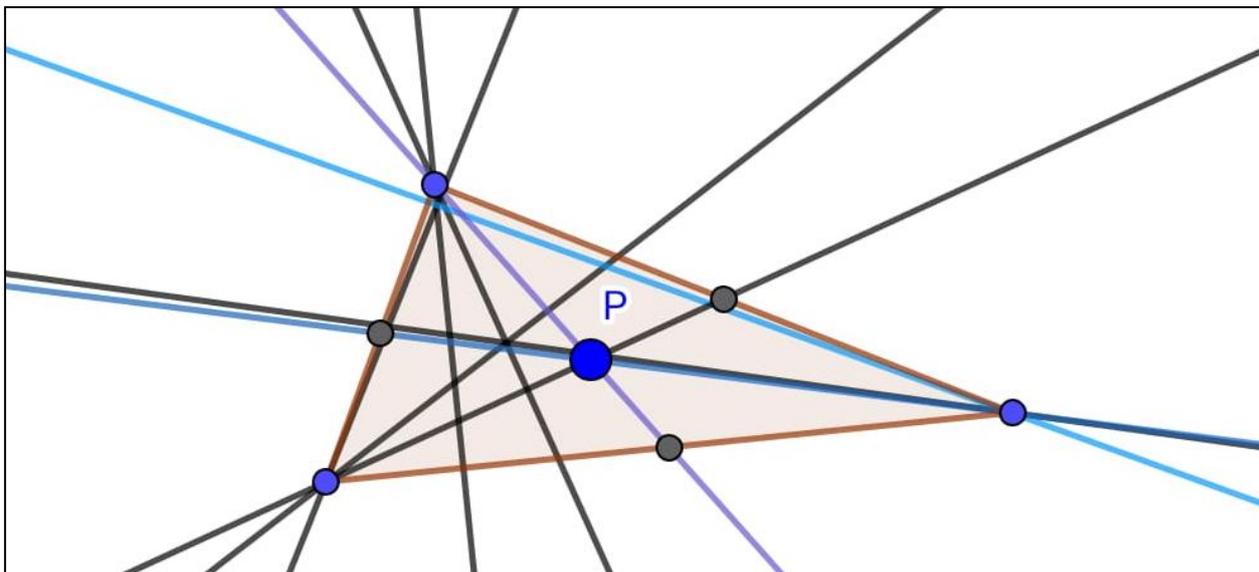
esse ponto P é o encontro dos medianas resultando no Baricentro.

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N3H1.

Fonte: Estudante A16 – Turma NX.

Na Figura 5.66, temos a tela do GeoGebra do estudante A09. Podemos observar que este utilizou as ferramentas do GeoGebra para ir construindo diversos seguimento no triângulo até conseguir aqueles que o ponto P pertencia e assim chegar à conclusão de que o ponto é o Baricentro do triângulo.

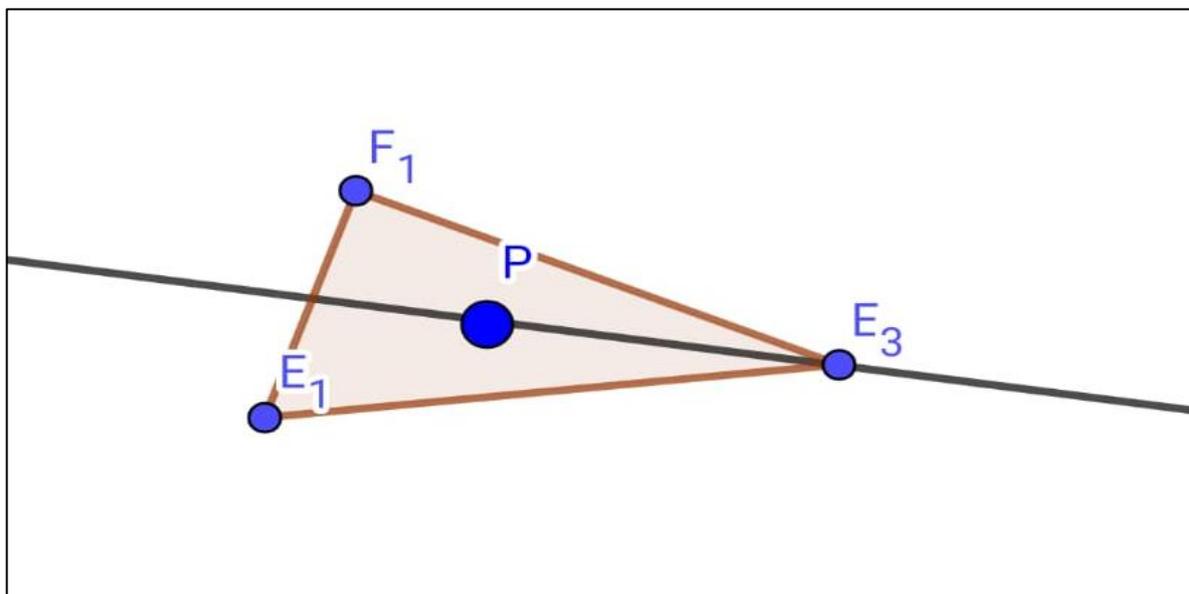
Figura 5.66 - Atividade N3H1. Ferramentas do GeoGebra para marcação do baricentro.



Fonte: Estudante A09 – Turma NX.

Já na Figura 5.67 temos o estudante A49 que utilizou apenas uma vez as ferramentas do *software* e cometeu assim um equívoco visual com a bissetriz do triângulo sem fazer comparações ou tentativas, parou no primeiro traçado e assim se confundiu na resposta.

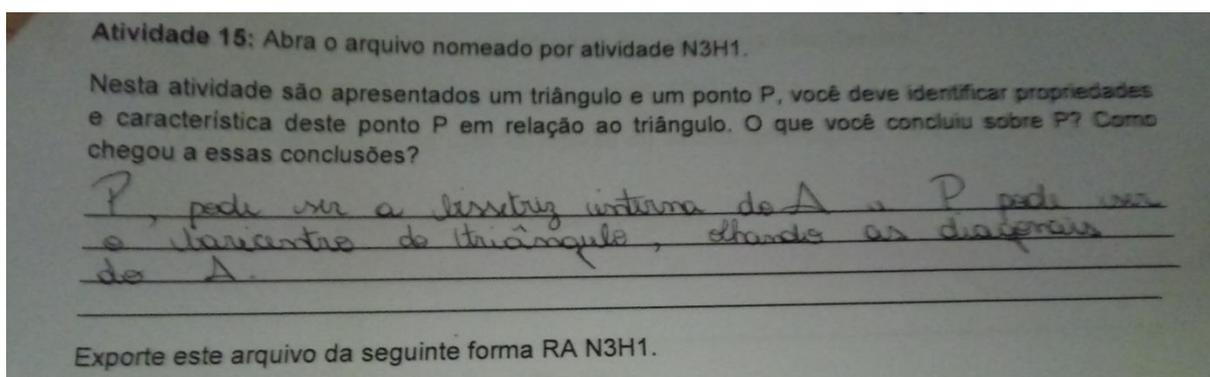
Figura 5. 67 - Atividade N3H1. Equívoco visual com a marcação da bissetriz.



Fonte: Estudante A49 – Turma NY.

Na Figura 5.68 temos um outro caso preocupante, onde o estudante A24 se confunde nas repostas não sendo afirmativo e ainda menciona as diagonais do triângulo demonstrando assim uma falha neste conteúdo.

Figura 5. 68 - Atividade N3H1. Resposta inadequada.



Fonte: Estudante A24 – Turma NX.

Em média para a atividade 15, metade dos estudantes que entregaram a atividade, conseguiram visualizar que o ponto P era o Baricentro do triângulo. Aqueles que se utilizaram das ferramentas do GeoGebra de maneira adequada, tiveram um pouco mais de facilidade para descrever as características do ponto P.

Atividade 16 (N3H2)

A atividade 16 está relacionada com a habilidade verbal do nível 3 da Teoria de Van Hiele. Nesta atividade o estudante deveria descrever, em linguagem materna, propriedades e características referentes ao um ponto Q, relacionado a um triângulo também apresentado na Figura 4.30.

As porcentagens das respostas apresentadas pelos estudantes para as atividades 16 (N3H2) estão na Tabela 5.11.

Tabela 5.11. Percentuais das respostas apresentadas pelos estudantes para a atividade 16.

Respostas apresentadas	Turma NX 9 estudantes	Turma NY 5 acadêmicos.
O ponto Q é o encontro das mediatrizes.	44%	40%
Os vértices do triângulo formam um novo triângulo com o ponto Q.	0%	20%
Q é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.	11%	0%
Equívocos nas descrições	45%	40%

Fonte: o autor.

Na Figura 5.69 vemos a resposta do estudante A09 que descreve verbalmente o ponto Q como sendo o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Figura 5.69 - Atividade N3H2. Descrição coerente com as expectativas para o ponto Q.

Atividade 16: Abra o arquivo nomeado por atividade N3H2.

Nesta atividade são apresentados um triângulo e um ponto Q, você deve identificar propriedades e característica deste ponto Q em relação ao triângulo. Descreva em linguagem materna as relações encontradas?

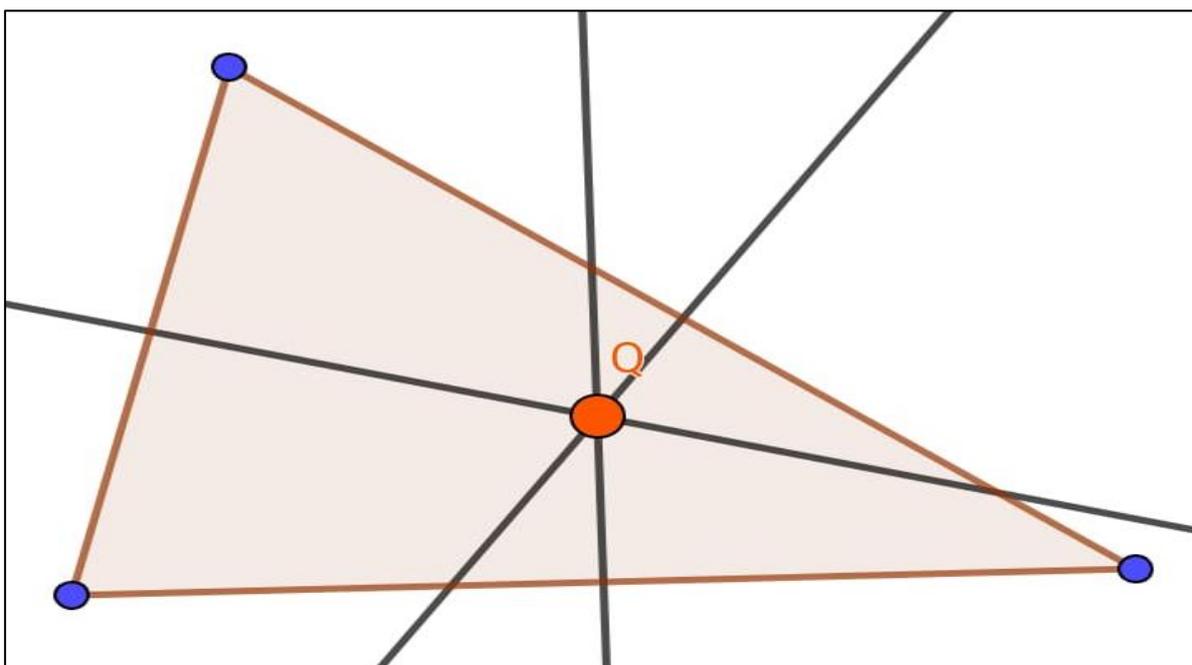
Q é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo e a distância de cada vértice à Q é a mesma

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N3H2.

Fonte: Estudante A09 – Turma NX.

Na resposta do estudante A28, vemos uma construção coerente com o proposto na atividade. Observa-se que este utilizou de uma ferramenta do GeoGebra específica para construção da mediatriz de um segmento, assim com esta tentativa comprovando que o ponto Q é o encontro das mediatrizes. (Figura 5.70)

Figura 5. 70 - Atividade N3H2. Construção coerente com as expectativas para o ponto Q.



Fonte: Estudante A28 – Turma NX.

Já na Figura 5.71 observamos a verbalização da resposta do estudante A39 que descreve o ponto Q como encontro das mediatrizes dos lados do triângulo apresentado.

Figura 5.71 - Atividade N3H2. Identificação coerente com as expectativas para o ponto Q.

Atividade 16: Abra o arquivo nomeado por atividade N3H2.

Nesta atividade são apresentados um triângulo e um ponto Q, você deve identificar propriedades e característica deste ponto Q em relação ao triângulo. Descreva em linguagem materna as relações encontradas?

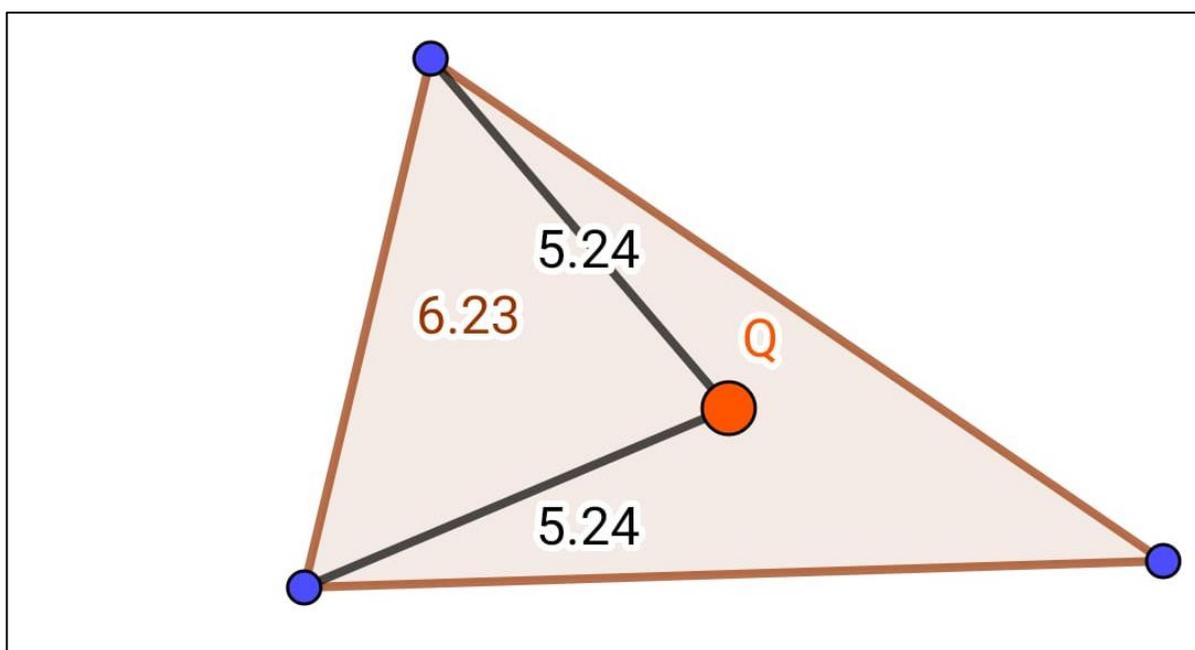
Q é ponto de encontro das mediatrizes em relação aos lados do triângulo apresentado.

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N3H2.

Fonte: Estudante A39 – Turma NY.

Uma resposta interessante foi apresentada pelo estudante A48 visualizada na Figura 5.72, pois este se utilizou de ferramentas do *software* para chegar à conclusão de que o ponto Q está equidistante dos vértices do triângulo.

Figura 5.72 – Atividade N3H2. Identificação de um triângulo isósceles formado com o ponto Q.



Fonte: Estudante A48 – Turma NY.

Na Figura 5.73 temos uma linguagem inapropriada para a atividade em que o estudante se confunde nos conceitos.

Figura 5.73 - Atividade N3H2. Equívoco de linguagem e Identificação para o ponto Q.

Atividade 16: Abra o arquivo nomeado por atividade N3H2.

Nesta atividade são apresentados um triângulo e um ponto Q, você deve identificar propriedades e característica deste ponto Q em relação ao triângulo. Descreva em linguagem materna as relações encontradas?

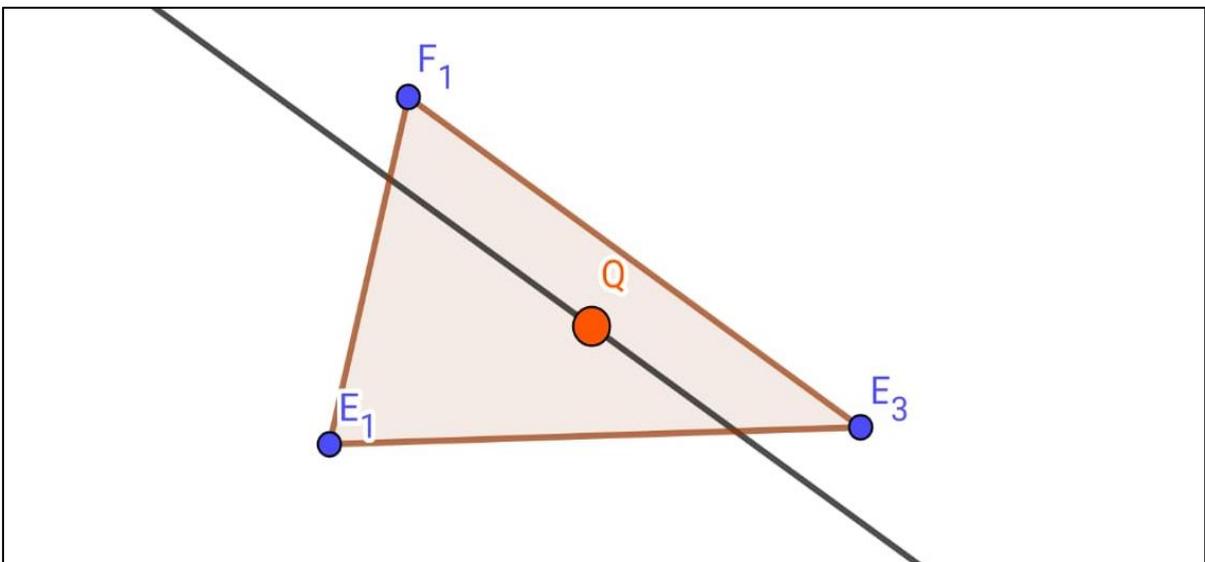
E' A BISETRIZ DO CATETO OPOSTO AO ÂNGULO

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N3H2.

Fonte: Estudante A49 – Turma NY.

Outro tipo de equívoco pode ser observado na Figura 5.74 onde o estudante se utiliza das ferramentas do GeoGebra, mas não atende as expectativas da atividade.

Figura 5.74 - Atividade N3H2. Equívoco de identificação de propriedades para o ponto Q.



Fonte: Estudante A49 – Turma NY.

De modo geral, 60% dos estudantes demonstraram respostas coerentes com os objetivos da atividade, tanto na parte de utilizar as ferramentas disponíveis, quanto em verbalizar as propriedades e características descobertas entre o ponto P e o triângulo.

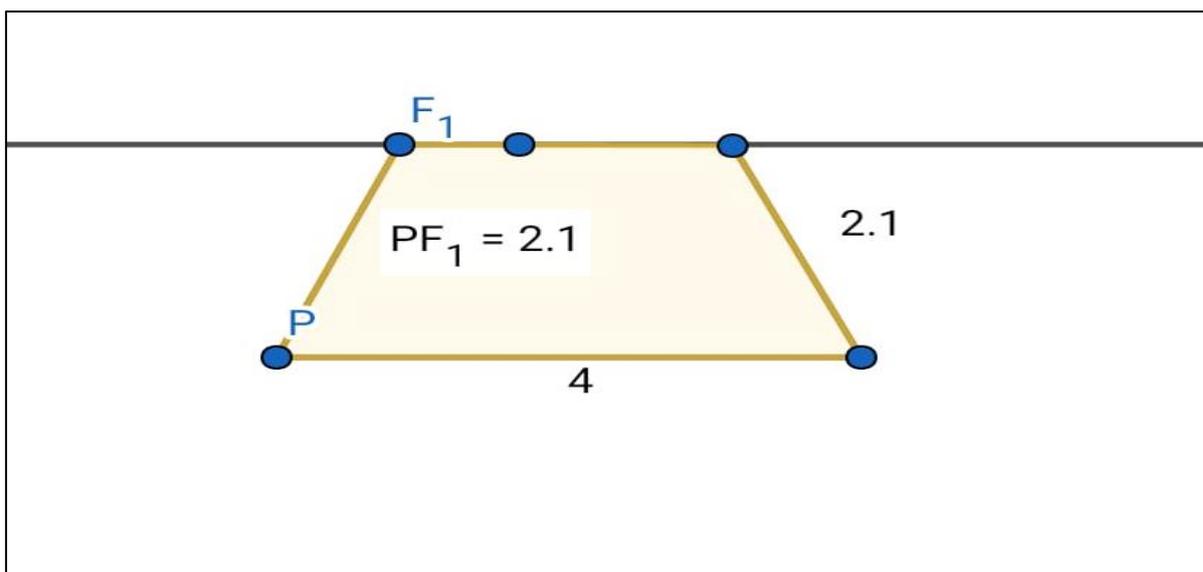
Atividade 17 (N3H3)

Esta atividade contempla a habilidade de desenho do nível 3 da teoria de Van Hiele. Para a atividade 17 o estudante deveria utilizar as ferramentas do GeoGebra para construir um trapézio isósceles de base maior, medindo quatro centímetros. Na turma NX, 9 estudantes entregaram a atividade, sendo 56% de maneira adequada e

44% de maneira inadequada. Na turma NY, apenas 4 estudantes realizaram a atividade, dentre eles 50% com apresentação adequada e 50% com apresentação inadequada.

Na Figura 5.75, observamos a resposta do estudante A09, que apresentou o desenho do trapézio pedido.

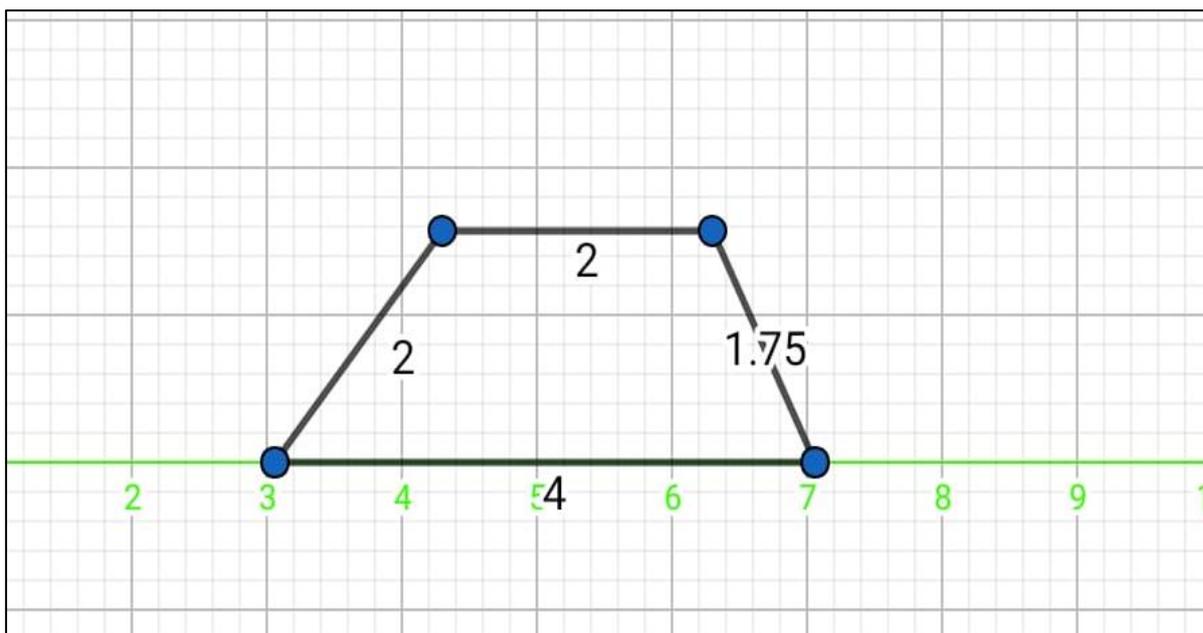
Figura 5. 75 - Atividade N3H3. Apresentação adequada para o trapézio pedido.



Fonte: Estudante A09 – Turma NX.

Como era pedido um trapézio isósceles a resposta do estudante A17 está em desacordo com o pedido, como mostra a Figura 5.76.

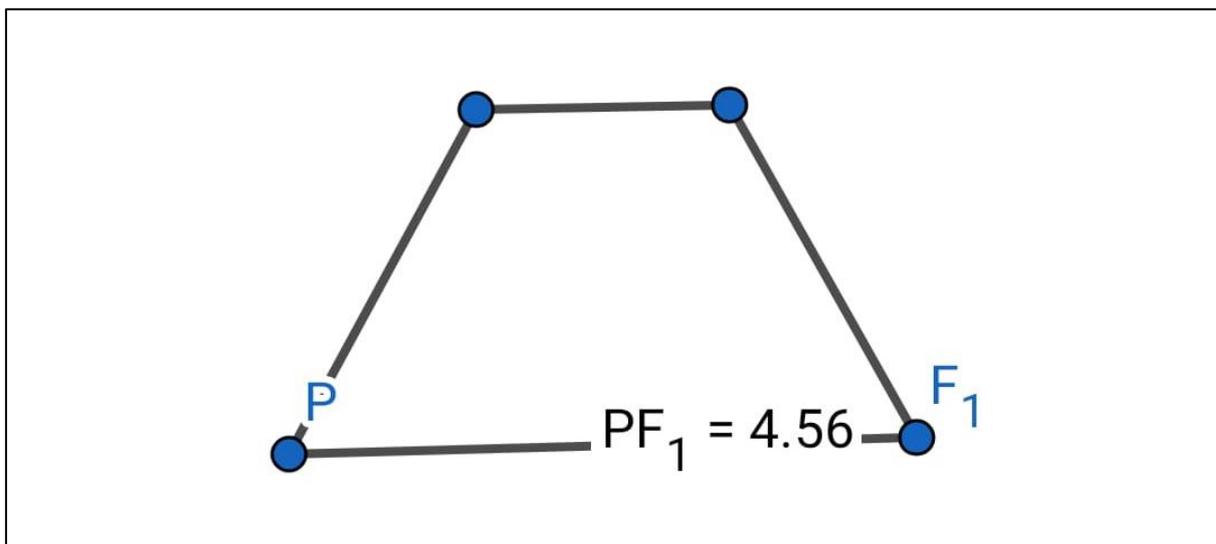
Figura 5.76 - Atividade N3H3. Apresentação equivocada com relação aos lados não paralelos.



Fonte: Estudante A17 – Turma NX.

Outro equívoco cometido pode ser observado na Figura 5.77, onde temos um trapézio com a base maior em desacordo com o especificado na atividade.

Figura 5.77 - Atividade N3H3. Apresentação equivocada com relação à medida da base maior.



Fonte: Estudante A48 – Turma NY.

Para a atividade 17, em média 55% dos estudantes conseguiu entregar a figura requerida, mesmo a figura sendo bem específica e demandando vários conhecimentos de construção geométrica. Os estudantes demonstraram que desenvolveram a habilidade gráfica do nível três da Teoria de Van Hiele.

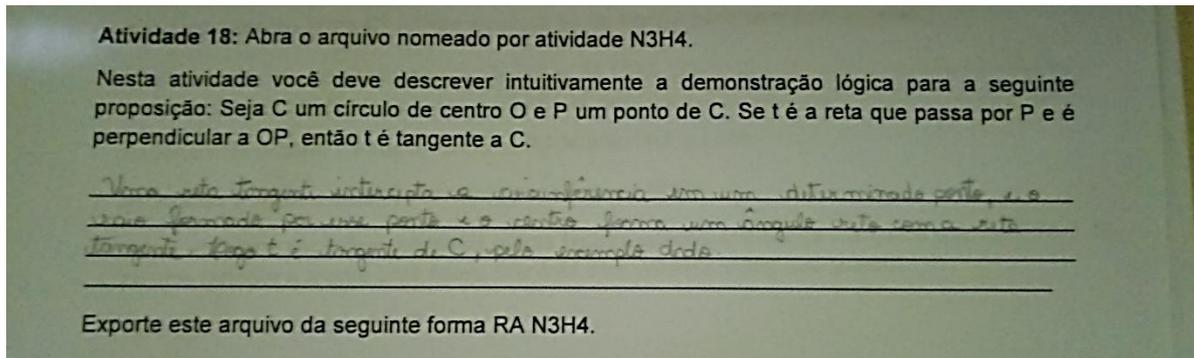
Atividade 18 (N3H4)

Nesta atividade o objetivo era de que o estudante descrevesse de maneira lógica uma demonstração para a proposição apresentada no roteiro de atividade (Figura 4.33) e a imagem correspondente (Figura 4.34), assim explorando a habilidade lógica do nível 3 da Teoria de Van Hiele.

Na turma NX, seis estudantes apresentaram alguma solução para a atividade, porém todos se equivocaram na argumentação. Sendo que 67% apresentaram uma linguagem lógico-matemática e 33% utilizaram uma linguagem informal. Na turma NY, quatro estudantes completaram esta atividade, e todos utilizaram argumentos com falhas ou insuficientes. Desses 25% utilizaram a linguagem lógico-matemática e 75% uma linguagem informal.

É possível observar nas Figura 5.78 e 5.79, a apresentação de argumentos insuficientes para a atividade por parte dos estudantes A28 e A18.

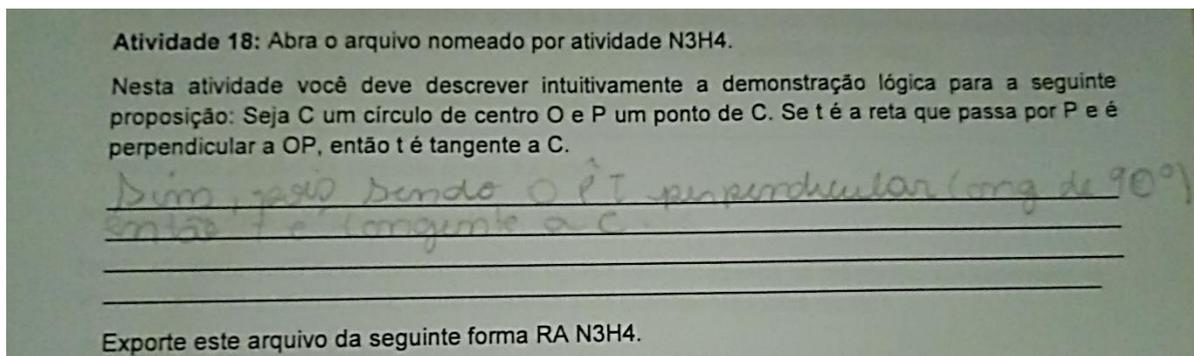
Figura 5.78 - Atividade N3H4. Apresentação com argumentos insuficientes.



Fonte: Estudante A28 – Turma NX.

No caso do estudante A28 a linguagem utilizada e a informal descrevendo os argumento de forma totalmente descritiva sem a utilização de símbolos lógico-matemáticos.

Figura 5.79 – Atividade N3H4. Apresentação com argumentos insuficientes.

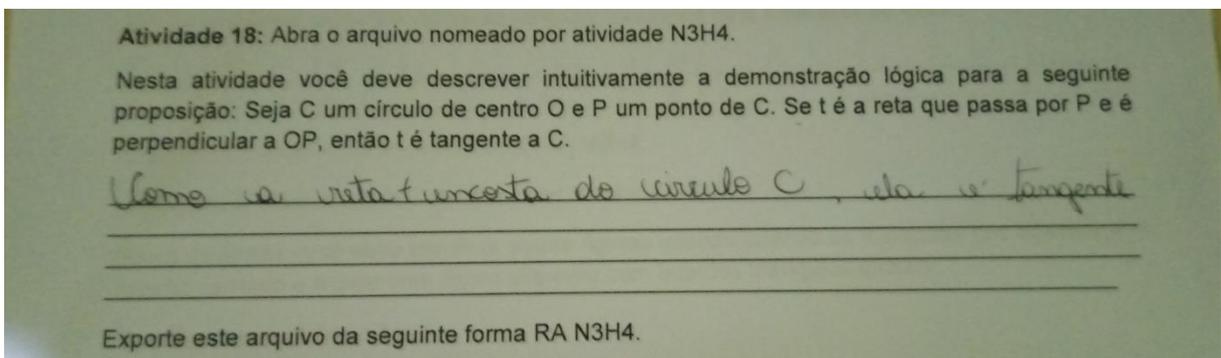


Fonte: Estudante A18 – Turma NX.

Já o estudante A18 se utiliza de alguns símbolos matemáticos, mas com argumentos insuficientes.

Na Figura 5.80 vemos uma resposta com argumentos superficiais e de forma insuficiente para o que a atividade requeria.

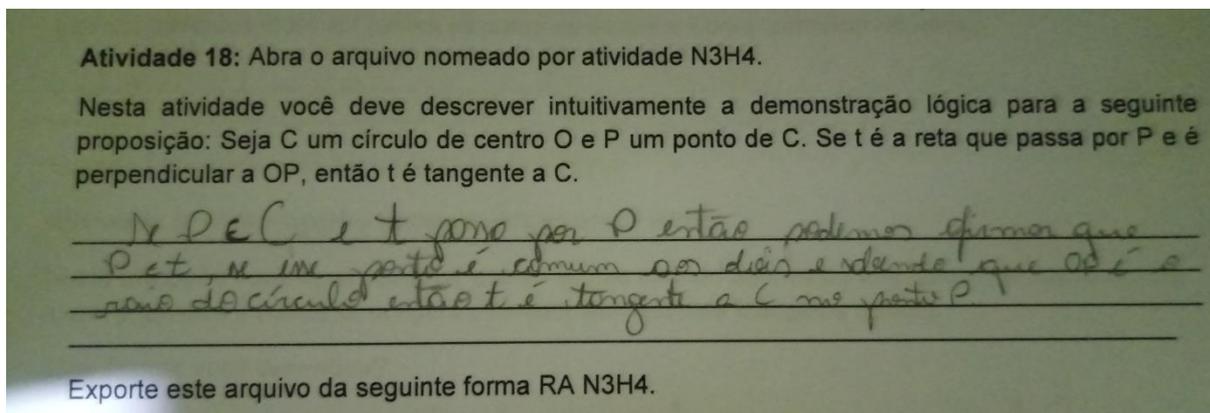
Figura 5.80 - Atividade N3H4. Apresentação com argumentos insuficientes.



Fonte: Estudante A54 – Turma NY.

Na Figura 5.81 vemos uma linguagem mais formalizada com o uso de símbolos matemáticos e a construção de uma lógica de raciocínio, mas ainda sem conseguir concretizar os argumentos.

Figura 5.81 - Atividade N3H4. Apresentação com linguagem mais formalizada, mas com argumentos insuficientes.



Fonte: Estudante A48 – Turma NY.

É nítido observar que a argumentação é uma falha nos estudantes pesquisados, pois nenhum conseguiu desenvolver uma demonstração lógica para a proposição apresentada.

Atividade 19 (N3H5)

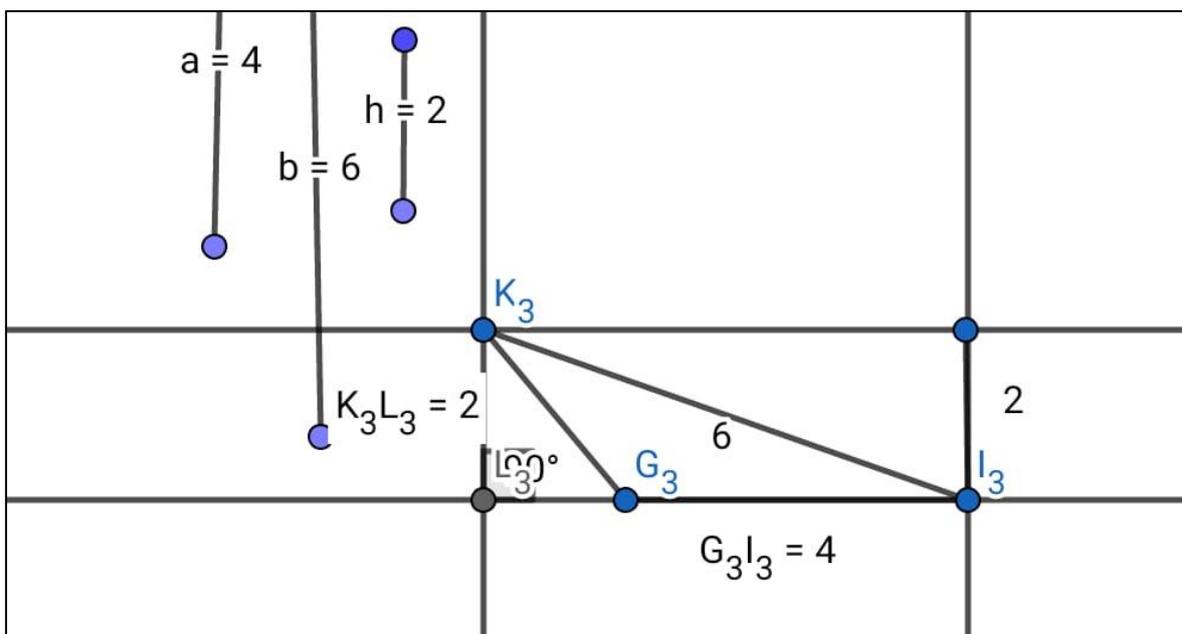
Para a atividade 19, é analisada a habilidade de aplicação do nível 3 da Teoria de Van Hiele. Nesta atividade os estudantes deveriam utilizar-se das ferramentas do GeoGebra para construir um triângulo conhecendo dois de seus lados e a sua altura, conforme apresentado na Figura 4.35.

Na turma NY, tem-se que apenas dos cinco estudantes que entregaram a atividade, 60% entregaram o triângulo pedido e 40% construíram um triângulo com as dimensões inadequadas.

Já na turma NX, sete estudantes entregaram a atividade. Desses 86% entregaram formas adequadas para o triângulo e 14% apresentaram uma forma inconsistente para a atividade.

Na Figura 5.82, é mostrada a resposta do estudante A09, onde podemos observar um triângulo que atende as expectativas da atividade.

Figura 5.82 - Atividade N3H5. Maneira coerente de construção do triângulo.

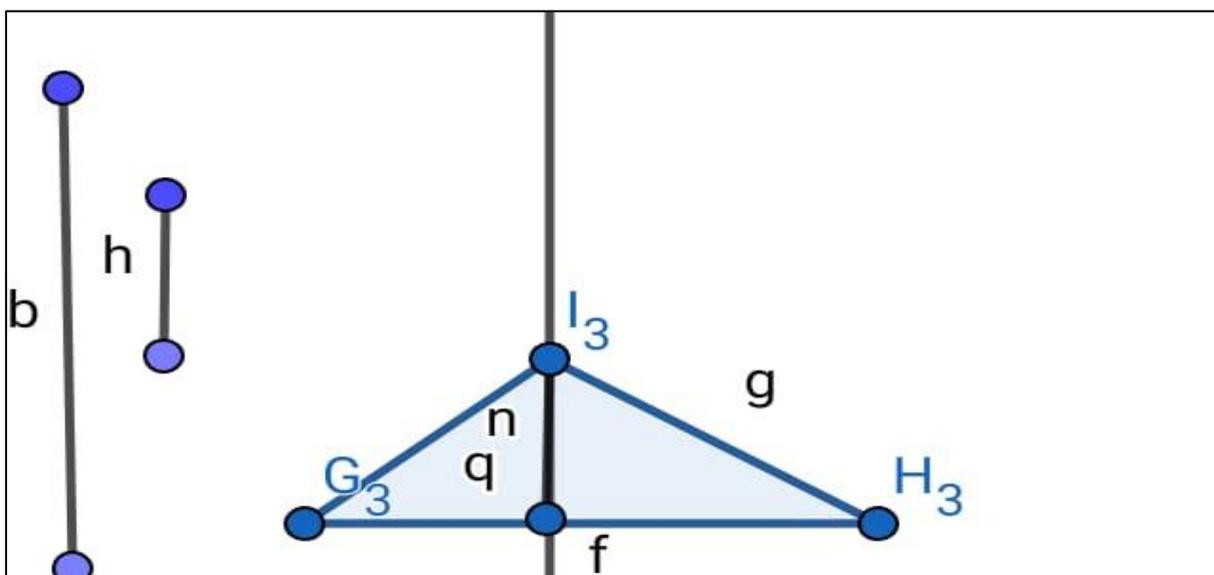


Fonte: Estudante A09 – Turma NX.

A Figura 5.82 mostra uma forma coerente de construção do triângulo pedido, utilizando conceitos matemáticos práticos e demonstrando a consolidação da habilidade de aplicação de diversos temas para a solução de um problema.

As Figuras 5.83 e 5.84, demonstram as atividades de estudantes que não aplicaram conceitos matemáticos para o desenvolvimento do triângulo.

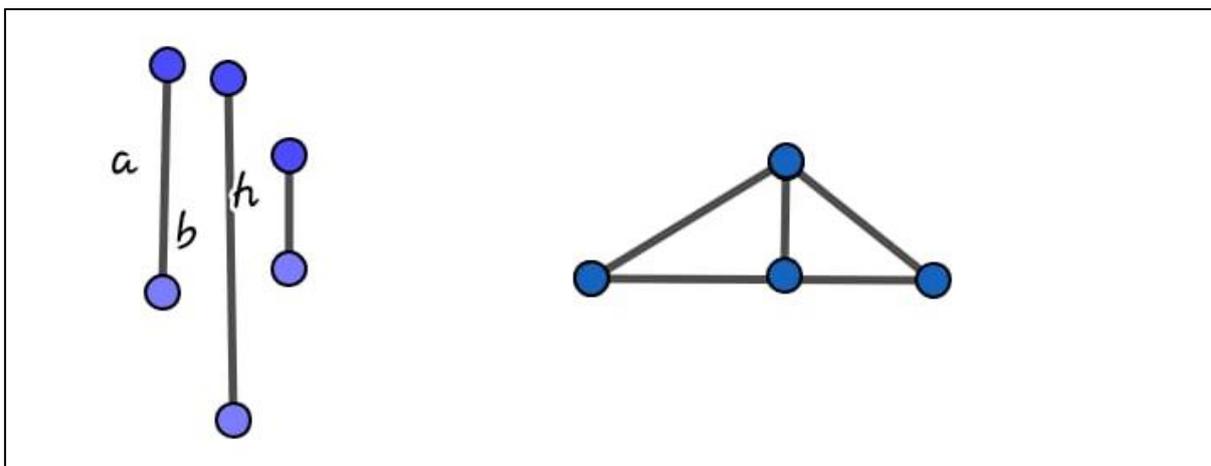
Figura 5.83 - Atividade N3H5. Ajuste manual das medidas dos triângulos.



Fonte: Estudante A28 – Turma NX.

Em observação no dia da atividade pode-se constatar que o estudante A28 tentou ajustar de forma manual as dimensões do triângulo arrastando os vértices para que estes parecessem estar condizentes com a atividade.

Figura 5.84 - Atividade N3H5. Ajuste manual das medidas dos triângulos.

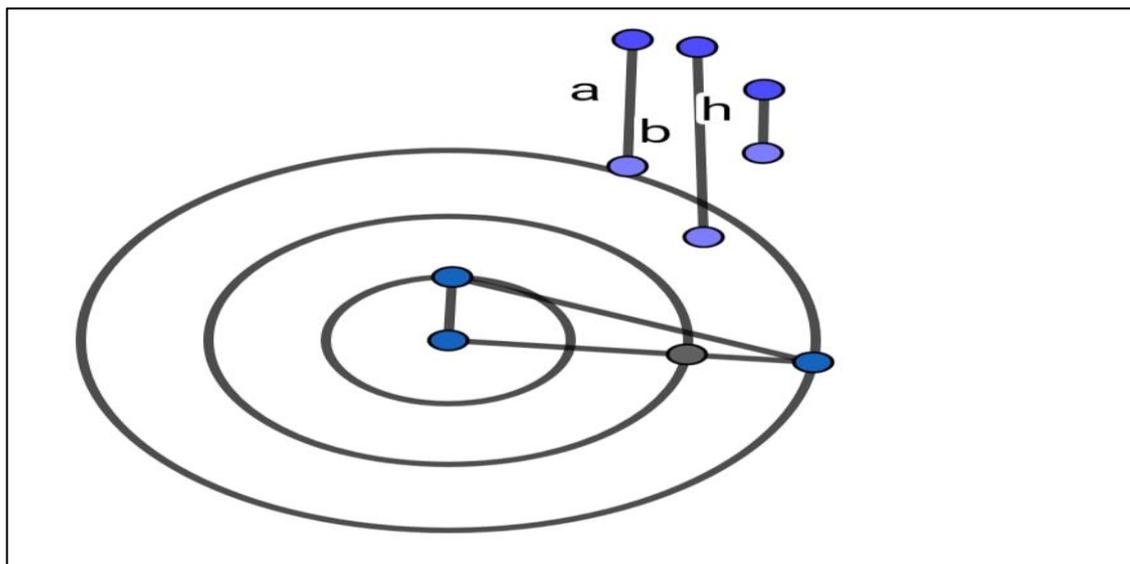


Fonte: Estudante A38 – Turma NY.

Como já mencionado os acadêmicos A28 e A38 tentaram construir o triângulo apenas arrastando e ajustando as medidas fornecidas de forma manual.

Na figura 5.85 foi utilizado comandos de circunferência para deslocar as medidas dos lados do triângulo pedido e assim tentar construí-lo.

Figura 5.85 - Atividade N3H5. Construção de forma estranha do triângulo.

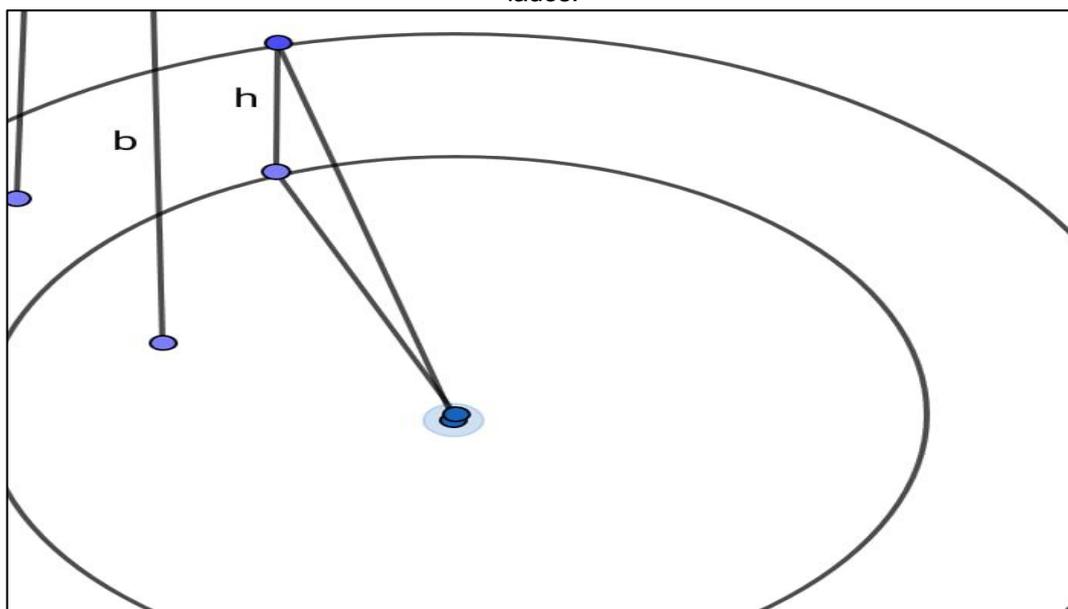


Fonte: Estudante A34 – Turma NY.

O estudante A34 (Figura 5.85) tentou construir o triângulo pedido de maneira forçada sem aplicar conceitos matemáticos.

A resposta do estudante A29 apresentada na Figura 5.86 mostra que ele se confundiu com o conceito da altura do triângulo colocando-a como um de seus lados.

Figura 5.86 - Atividade N3H5. Tentativa de construção do triângulo utilizando as três medidas como lados.



Fonte: Estudante A29 – Turma NX.

Essa atividade objetivou investigar a habilidade de aplicação do nível 3. Em geral 61% dos estudantes que entregaram a atividade apresentaram uma resposta correta para o triângulo solicitado. Mesmo com as ferramentas que possuíam, muitos estudantes tiveram dificuldade em desenvolvê-la.

Quanto a utilização do *software*, os acadêmicos relataram que isso melhorou a forma como eles viram as figuras, e que as ferramentas do GeoGebra facilitaram a investigação, corroborando com o apresentado em Assad (2017). O fato do uso dos celulares também foi positivo segundo os estudantes, pois não necessitou de espaço diferenciado. Como os acadêmicos já estão acostumados com seu próprio aparelho tornou-se fácil a adaptação. A experiência do uso do GeoGebra se mostrou positiva, possibilitando até seu uso em outras atividades acadêmicas.

No próximo capítulo serão apresentadas as considerações finais, com uma síntese dos resultados obtidos, considerando os níveis de Pensamento Geométrico da Teoria de Van Hiele.

6 CONCLUSÃO

A disciplina de Matemática é considerada por muitos como uma das mais complexas da grade curricular nos vários níveis de escolaridade. Dentre os conteúdos desta área, a geometria se destaca, seja em relação às dificuldades encontradas pelos professores quanto ao domínio e forma de ser ensinado seus conteúdos ou pelos alunos no sentido de abstrair os conceitos e compreendê-los.

Os motivos que levaram a geometria a alcançar este patamar, é assunto de diversas pesquisas científicas que remontam mais de três décadas de discussões no campo histórico, epistemológico e didático pedagógico, e ainda é tema de muitas pesquisas.

Na literatura científica, muitos autores têm se dedicado à temática “Ensino de Geometria” no Brasil, como Pavanello (1989; 1993; 2015), Lorenzato (1995), Fiorentini (1995), Nacarato e Passos (2003) entre muitos outros.

Procurou-se neste trabalho abordar tópicos referentes as tecnologias educacionais em especial ao *software* GeoGebra, pois estes propiciam melhores condições para analisar situações problemas e explorá-las de uma forma mais ampla e adequada e assim possibilitar ao estudante melhores chances de aprendizagem.

Para a base teórica desta dissertação optou-se por discutir os níveis do pensamento geométrico segundo a Teoria de Van Hiele assim como habilidades a eles associados.

Como intenção principal desta pesquisa temos a investigação e análise dos níveis do pensamento geométrico dos acadêmicos ingressantes no primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática. Para tanto optou-se por realizar atividades com o apoio do *software* GeoGebra instalado nos próprios celulares dos acadêmicos visto que isto possibilita a interação destes estudantes com as tecnologias educacionais.

A geometria muitas vezes é deixada de lado frente a outras áreas da matemática, às vezes por falta de conhecimento ou habilidade, assim favorecendo dificuldades dos estudantes, apontam Lorenzato (1995) e Pavanello (1993). Tais dificuldades já aparecem no Ensino Fundamental como vemos nos trabalhos de Dall’Alba (2015), Costa (2016), Silva (2017) e Souza (2018); já nos trabalhos de Da Costa e Dos Santos (2016), Silva Filho (2015), Assad (2017) e Ferreira (2018) tem-se abordados os problemas no Ensino médio onde essas dificuldades aumentam diante

de conhecimentos mais avançados, muitas vezes incompatíveis com o nível de pensamento dos estudantes.

Já no Ensino Superior Kalleff (2015) analisa durante 17 anos licenciandos dos dois períodos finais de um curso de Matemática e conclui que muitos apresentam dificuldades na interpretação de desenhos e o cálculo de volumes. Da Costa e Dos Santos (2017) mostram futuros professores de matemática ainda no nível 0, ou seja, a Geometria vivenciada por esses estudantes talvez não tenha favorecido o desenvolvimento do pensamento geométrico. Mesmo na pós-graduação observa-se dificuldades significativas na aprendizagem de geometria como evidenciado nos trabalhos de Leivas (2014) e Leivas (2017).

Diante do exposto e levando em conta que nosso objetivo era de investigar o nível do pensamento geométrico que os acadêmicos ingressantes no primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Pública do Paraná, apresentam segundo a Teoria de Van Hiele. Na próxima seção mostraremos os resultados alcançados pelos estudantes nas atividades propostas para assim analisarmos em que nível geométrico estes se encontram.

6.1 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

No capítulo anterior os resultados foram apresentados de forma individual, atividade por atividade, para que pudéssemos traçar um panorama mais autêntico em relação aos participantes e as peculiaridades de cada nível e de cada habilidade. Agora, apresentamos uma síntese dos resultados obtidos por cada turma e divididos nos respectivos níveis, assim como os percentuais de estudantes que entregaram as atividades e quais eram condizentes com o esperado para o nível e habilidade avaliados naquela atividade.

As turmas NX e NY eram compostas por 29 e 28 estudantes, respectivamente. Nos quadros apresentados na sequência utilizamos algumas notações: o percentual de atividades entregues pela turma é representado pelo símbolo (% Atv_Ent), enquanto o percentual de atividades adequadas pelo símbolo (% Atv_Adq), sendo este percentual calculado sobre o total do % Atv_Ent.

Na Tabela 6.1 é exposto o resumo das cinco primeiras atividades relacionadas com o nível 0 (Visualização).

Tabela 6.1: Resumo das atividades do nível 0.

Nível 0 (Visualização)				
	Turma NX		Turma NY	
	% Atv_Ent	% Atv_Adq	% Atv_Ent	% Atv_Adq
Atividade 1 N0H1 Habilidade Verbal	100%	97%	100%	89%
Atividade 2 N0H2 Habilidade Visual	100%	57%	96,46%	44%
Atividade 3 N0H3 Habilidade de Desenho ou Gráfica	100%	100%	92,86%	100%
Atividade 4 N0H4 Habilidade Lógica	96,55%	–	92,86%	–
Atividade 5 N0H5 Habilidade Aplicação	96,55%	44%	92,86%	36%

Fonte: o autor.

Devido ao alto percentual de entrega das atividades, é possível inferir que houve uma boa adaptação dos acadêmicos com o aplicativo GeoGebra, e com os procedimentos para a entrega das atividades.

Percebe-se, que na atividade 3, com maior percentual de entrega das atividades refere-se à habilidade gráfica, muitos acadêmicos deram asas à imaginação. A segunda atividade com maior percentual foi a atividade 1, em que os estudantes visualizavam os polígonos e deveriam agrupá-los usando uma característica comum. Na atividade 4, não é registrado o percentual, pois a mesma apresentou uma variedade de respostas e pontos de vistas diferentes, gerando ambiguidades.

Nas atividades 2 e 5 aparecem índices baixos quanto às habilidades visuais e de aplicação. Na Atividade 5, o baixo desempenho pode também estar relacionado com o fato que a maioria dos estudantes possivelmente podem não ter prestado atenção ao enunciado que solicitava a utilização apenas dos triângulos contidos na figura.

Diante ao dados apresentados, pode-se dizer que os acadêmicos atingiram as expectativas para o nível 0 da Teoria de Van Hiele, com ressalvas quanto às habilidades de Visualização e Aplicação que não foram alcançadas em sua totalidade.

A fim de discutirmos os resultados quanto ao nível 1, Análise, a Tabela 6.2 apresenta um resumo dos resultados obtidos nas quatro atividades.

Tabela 6.2: Resumo das atividades do nível 1.

Atividades	Nível 1 (Análise)			
	Turma NX		Turma NY	
	% Atv_Ent	% Atv_Adq	% Atv_Ent	% Atv_Adq
Atividade 6 N1H1 Habilidade Verbal	96,55%	–	92,86%	–
Atividade 7 N1H2 Habilidade Visual	89,66%	61%	85,71%	60%
Atividade 8 N1H3 Habilidade de Desenho ou Gráfica	75,86%	80%	71,43%	80%
Atividade 9 N1H4 Habilidade Lógica e Aplicação	79,31%	43%	75%	35%

Fonte: o autor.

Analisando a Tabela 6.2, observa-se uma queda progressiva na quantidade de atividades entregues, as quais se devem pelos motivos explanados no início do capítulo 5. Para a atividade 6, não é registrado o percentual, pois ela apresentou várias respostas e pontos de vistas diferentes, gerando ambiguidades.

Novamente observa-se que a atividade 8, que envolve habilidade gráfica, apresenta o maior percentual de adequação das respostas. É importante ressaltar que para desenhar o polígono, a interpretação das propriedades matemáticas era fundamental, assim, 20% dos participantes não conseguiram interpretá-las.

A atividade 7 correspondente à habilidade Visual, enquanto a nona atividade e neste nível foram colocadas juntas as habilidades Lógica e Aplicação como uma só. É importante destacar que na atividade 7 muitos estudantes não utilizaram as ferramentas do *software* para checagem de suas respostas, confiando apenas no aspecto visual e assim se equivocando na classificação. Na atividade 9, é aparente a dificuldade dos acadêmicos quanto a colocar figuras em subgrupos de quadriláteros, muitas vezes basearam-se no contexto visual, deixando de lado as características e propriedades das figuras. Este resultados são corroborados com os apresentados por Da Costa e Dos Santos (2020) e Da Costa (2020) quando discute as dificuldades em definir quadriláteros notáveis, e como as definições dúbias apresentadas em alguns livros didáticos contribuem para o não entendimento das conexões entre

quadriláteros, como o fato de um quadrado ser retângulo e losango e ainda ser paralelogramo.

Desta forma, pode-se dizer que os acadêmicos atingiram as expectativas para o nível 1 da Teoria de Van Hiele, com ressalvas quanto às habilidades de Visualização e de Lógica e Aplicação.

A Tabela 6.3 apresenta resumidamente os resultados obtidos para o nível 2 (Dedução informal) da Teoria de Van Hiele.

Tabela 6.3: Resumo das atividades do nível 2.

Nível 2 (Dedução Informal)				
Atividades	Turma NX		Turma NY	
	% Atv_Ent	% Atv_Adq	% Atv_Ent	% Atv_Adq
Atividade 10 N2H1 Habilidade Visual	65,52%	50%	39,29%	54%
Atividade 11 N2H2 Habilidade Verbal	55,17%	54%	39,29%	35%
Atividade 12 N2H3 Habilidade de Desenho ou Gráfica	58,62%	65%	32,14%	66%
Atividade 13 N2H4 Habilidade Lógica	62,07%	40%	32,14%	50%
Atividade 14 N2H5 Habilidade Aplicação	65,52%	—	32,14%	—

Fonte: o autor.

Em relação às atividades entregues do nível 2, a queda na quantidade de atividades entregues foi mais significativa. É importante destacar a queda na entrega das atividades da turma NY devido ao fato de alguns estudantes não terem comparecido na data de realização das atividades do nível 2 e 3.

Assim como nos dois primeiros níveis, a atividade 12 que envolve habilidade gráfica, apresenta o maior percentual de adequação das respostas. Para resolver essa atividade era necessário identificar uma das três características presentes nas figuras para construir a quarta figura. A maioria dos estudantes que conseguiu resolver a atividade de maneira adequada utilizou pelo menos uma das ferramentas do GeoGebra para analisar as figuras.

A atividade 10, embora esteja relacionada à habilidade visual, ela também trabalhou a habilidade verbal, já que no roteiro o estudante precisava identificar os

quadriláteros e as propriedades relativas às diagonais. Observa-se que pouco mais da metade dos estudantes conseguiram resolvê-la. Na atividade 11, o percentual foi ainda menor, refere-se às habilidades visual e verbal, em que os estudantes deveriam ver a imagem e descrever a relação entre as circunferências, duas a duas. Estes conteúdos são estudados no Ensino Médio e possivelmente ficaram lacunas na sua aprendizagem ou até mesmo não foram vistos.

Quanto à Habilidade Lógica, da atividade 13, temos aqui um caso parecido com o que se pode observar em Da Costa e dos Santos (2020), onde os estudantes se baseiam, predominantemente, na definição habitual e visual dos quadriláteros, sem se preocupar com suas propriedades. Na atividade 14, referente à habilidade Aplicação, não é registrado o percentual, pois a mesma apresentou variedades de respostas e pontos de vistas de resolução, gerando ambiguidades.

Por meio dos resultados apresentados, pode-se dizer que os acadêmicos apresentam as habilidades do nível 2 da Teoria de Van Hiele parcialmente desenvolvidas, o que gera certa preocupação, pois segundo Walle (2009) e Assad (2017) um estudante ao ingressar no ensino médio deve encontrar-se no nível 2.

Por fim, quanto ao nível 3, Dedução formal, os resultados são apresentados na Tabela 6.4.

Tabela 6.4: Resumo das atividades do nível 3.

Atividades	Nível 3 (Dedução formal)			
	Turma NX		Turma NY	
	% Atv_Ent	% Atv_Adq	% Atv_Ent	% Atv_Adq
Atividade 15 N3H1 Habilidade Visual	31,03%	56%	21,43%	50%
Atividade 16 N3H2 Habilidade Verbal	31,03%	55%	17,86%	40%
Atividade 17 N3H3 Habilidade de Desenho ou Gráfica	31,03%	56%	14,29%	50%
Atividade 18 N3H4 Habilidade Lógica	20,69%	0%	14,29%	0%
Atividade 19 N3H5 Aplicação	24,14%	86%	17,86%	60%

Fonte: o autor.

A Tabela 6.4 nos mostra que uma porcentagem pequena de estudantes que entregaram as atividades, sobretudo na turma NY nas atividades 16, 17 e 18. Esta

porcentagem deve-se em parte pelo não comparecimento de alguns estudantes no segundo dia de aplicação das atividades.

Observa-se que no nível 3 (Dedução formal) os estudantes não demonstram clareza e aprofundamento nos conceitos geométricos. Para a atividade 18 referente à habilidade lógica não houve solução coerente, todas apresentavam argumentos falhos e falta de formalismo matemático. Isto provavelmente pelo fato de a atividade envolver uma demonstração lógica formal, e os estudantes não terem muito contato com este tipo de formalidade nos Ensinos Fundamental e Médio. Para a habilidade gráfica e aplicação percebeu-se erros comuns dos estudantes quando tentaram construir as figuras pedidas de forma totalmente manual, sem utilizar conceitos matemáticos e nem dos recursos computacionais disponíveis.

De modo geral, ao observar os quatro quadros referentes aos quatro níveis, 0, 1, 2 e 3, percebe-se que a turma NX foi mais participativa nas atividades e a que alcançou melhores resultados quanto a respostas coerentes com o que cada habilidade objetivava.

Considerando que nas atividades referentes aos níveis 0 e 1, a quantidade de atividades entregues foi de 75% nas duas turmas, as inferências apontadas nestes níveis podem ser generalizadas, já que a amostra é representativa. Desta forma podemos concluir que os participantes atingiram o nível 1, sendo a habilidade gráfica a mais desenvolvida e a lógica necessitando ser aprimorada.

Entretanto, nas atividades referentes aos níveis 2 e 3, a quantidade de atividades entregues das duas turmas, ou seja, de participantes da atividade, foi bem abaixo do esperado, sendo que no nível 3 menos de 30% (em média) dos estudantes participaram das atividades e a metade destes entregaram as atividades. Devido à pouca representatividade da amostra, as inferências apontadas nestes níveis não podem ser generalizadas às turmas. Os resultados quanto às habilidades mais e menos desenvolvidas parecem permanecer iguais aos níveis anteriores. Nessa pequena amostra os acadêmicos apresentam as habilidades parcialmente desenvolvidas em relação aos níveis 2 e 3 do desenvolvimento do pensamento geométrico, porém chama a atenção que no nível 3 a habilidade lógica ficou zerada, mas pode representar a falta de maturidade formal dedutiva ou a escolha da atividade pelo pesquisador não foi adequada.

É importante ressaltar que os estudantes presentes em sala, nas atividades dos níveis 2 e 3, fizeram todas as etapas anteriores e se mostraram os mais

comprometidos das turmas, já que persistiram e foram até o final de todas as atividades.

Da Costa e Dos Santos (2016) apontam que conforme a Teoria de Van Hiele os estudantes devem sair do Ensino Médio com o nível dois completo e situados no nível três e assim ingressarem na Universidade,

Diante dos resultados apresentados, pouco dos estudantes investigados encontram-se desenvolvendo e operando o pensamento geométrico do nível 3, que como vemos em Santos (2015), Costa Junior (2014) é o nível esperado por um estudante do Ensino Superior.

Embora pequena a amostra investigada, é possível observar inúmeras lacunas e defasagens no pensamento geométrico dos acadêmicos participantes dessa pesquisa. Resultados similares que corroboram com os apresentados, são observados nos trabalhos de Da Costa e Dos Santos (2017), Santos (2015), Viera (2017b) e Da Costa e Dos Santos (2020). É possível que um dos fatores que influencia para estes baixos resultados seja a temática do abandono do ensino da geometria, assim como citado nos estudos Walle (2009), Pavanello (1989; 1993; 2015), Lorenzato (1995).

Diante disto é possível dizer que os objetivos traçados nesta pesquisa foram alcançados no que se refere em investigar os níveis do pensamento geométrico dos acadêmicos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática. Um dado importante é de que a maioria dos estudantes fazem uso constante dos *Smartphones* e assim a aplicação das atividades ocorreu de forma tranquila e proveitosa. Sobre o uso dos recursos computacionais percebe-se que a motivação para o uso do *software* é crescente e os resultados apontam que auxiliam no desenvolvimento de habilidades do pensamento geométrico.

A defasagem apresentada pelos acadêmicos neste trabalho é preocupante, visto que muitas das dificuldades estão relacionadas com conceitos básicos do Ensino Fundamental como: diagonais de quadriláteros, classificação de quadriláteros, circunferências entre outros.

No decorrer da pesquisa a maior dificuldade enfrentada pelo pesquisador foi o atraso e ausência dos estudantes, assim enquanto alguns entregavam as últimas atividades outros estavam nas primeiras. Observou-se muitas vezes que alguns participantes da pesquisa consultaram material de disciplinas em curso, internet ou pediam dicas aos colegas que já tinham feito a atividade anteriormente, mesmo sendo

solicitado que não fosse feita consultas. Outra dificuldade apontada foi análise dos dados, devido ao volume de informações coletadas, o pesquisador precisou pedir a prorrogação de prazo de defesa no programa de mestrado.

Apesar das dificuldades apresentadas, a pesquisa desenvolvida apresentou resultados importantes, e abre oportunidades para pesquisas futuras como a análise dos resultados sobre a luz da teoria de Duval a respeito da análise semiótica apresentada por estes estudantes ou repetir a pesquisa com os mesmos participantes quando estiverem no último ano do curso.

Diante dos resultados apresentados é de suma importância apresentá-lo para os professores da disciplina de Geometria e Desenho Geométrico com a finalidade de fortalecer o ensino e aprendizagem e sugerir um planejamento específico para os conceitos que mais apresentam dificuldade. Por fim destacamos a importância do desenvolvimento de pesquisas que utilizem a Teoria de Van Hiele, pois essa, possibilita uma melhor compreensão do pensamento geométrico dos estudantes e assim pode facilitar que o professor identifique as lacunas existentes e o auxilie na tomada de decisões em sala de aula, com foco na aprendizagem dos conceitos em Geometria.

REFERÊNCIAS

- AIRES, A. P.; CAMPOS, H.; POÇAS, R. Raciocínio geométrico raciocínio geométrico r versus definição de conceitos versus definição de conceitos versus: a definição de quadrado com alunos de 6.º ano de escolaridade. **Revista Latino-americana de Investigación en Matemática Educativa**. Portugal, v.18 n.2, p. 151-176, dez 2015. DOI: 10.12802/relime.13.1821. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5448259>, Acesso em 01 mar. 2019.
- AMADO, N.; SANCHEZ, J.; PINTO, J. A. Utilização do GeoGebra na Demonstração Matemática em Sala de Aula: o estudo da reta de Euler. **Boletim Eletrônico de Educação Matemática. Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 52, p. 637-657, ago. 2015. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a11>. Acesso em 01 mar. 2019.
- AMORIM, F. V; SOUSA, G. C. de; SALAZAR, J. V. Atividades com GeoGebra para o ensino de Cálculo. *In*: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais [...]** Recife, 2011.
- ANDRADE, P. F. **A sala de aula de matemática: influências de um curso de formação continuada sobre o uso do GeoGebra articulado com atividades matemáticas**. 2017. Dissertação (Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Rio Claro. 2017.
- ASSAD, A. **Usando o Geogebra para analisar os níveis do pensamento geométrico dos alunos do ensino médio na perspectiva de Van Hiele**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2017.
- AWILA, H. F. D. **Uma análise da contribuição do GeoGebra como recurso interativo para o estudo de áreas e volumes**. 2017. Dissertação (Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física). Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria. 2017.
- BAIRRAL, M. A.; MARQUES, F. De J. R. Onde se localizam os pontos notáveis de um triângulo? Futuros professores de matemática interagindo no ambiente vmt com GeoGebra. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.18, n.1, p. 111-130, 2016. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/24076/pdf> . Acesso em: 10 abr. 2019.
- BARROS, R. C. D. P. **Contribuições do software GeoGebra para o aprendizado da geometria segundo a teoria de Van Hiele**. Trabalho de Conclusão de Curso de Especialista em Educação em Matemática e Ciências, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2017.
- BERTOLDI, O. M. N. **Construções e Relações de Inscrição e Circunscrição de Polígonos Regulares na Circunferência utilizando o Software Geogebra**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Rio Grande. Rio Grande, 2019.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC/ESF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC/ESF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+): Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio – versão ampliada**. Brasília, DF: MEC, 2017.

BORBA, M.C.; PENTEADO, M.G. **Informática e Educação Matemática**. ed.3 Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BORSOI, C. **GeoGebra 3D no ensino médio: uma possibilidade para a aprendizagem da geometria espacial**. 2016. Dissertação (Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2016.

BORTOLOSSI, H. J. O uso do *software* gratuito GeoGebra no ensino e na aprendizagem de estatística e probabilidade. **VIDYA**, Santa Maria, v. 36, n. 2, p. 429-440, 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/1804>. Acesso em: 10 abr. 2019.

CASTRO, A. L. D. **Matemática e o currículo da era digital: os desafios para a inovação na prática educativa**. 2018. Tese (Doutorado do Programa De Pós-Graduação Em Educação Para A Ciência). Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Bauru. 2018.

CORDEIRO, E; MIRANDA, L; MORAIS, C; ALVES, P. Abordagens da Matemática no Ensino Superior com o GeoGebra e sua Relação com os Estilos de Aprendizagem. *In: CONGRESSO MUNDIAL DE ESTILOS DE APRENDIZAGEM*. INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA, 7., 2016, Bragança. **Anais [...]** Bragança: IPB, 2016.

COSTA, A. P. D. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental: um estudo sob a luz da teoria vanhieliana**. 2016. Dissertação (Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife. 2016.

COSTA, A. P. D; SANTOS, M. R. dos. O pensamento geométrico de professores de matemática em formação inicial. **Educação Matemática Em Revista – RS**, Rio Grande do Sul, v.2, n. 18, p. 18 – 32, 2017.

COSTA, A. M. **Encadeamentos didáticos baseados na teoria de Van Hiele: uma proposta de ensino-aprendizagem do conceito formal de convergência de**

sequências no ensino médio. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, 2017.

COSTA JÚNIOR, J. R.; SILVA, J. B. R. da. A geometria pela ótica da teoria de Van Hiele: uma análise do nível de desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos de um curso de licenciatura em matemática. *In: ENCONTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 8., 2014, Campina Grande. **Anais [...]** Campina Grande: UEPB, 2014.

DA COSTA, A. P. A geometria na educação básica: um panorama sobre o seu ensino no Brasil. **Revista Educação Matemática em Foco**. Paraíba. v.9, n.1, p. 128-152, 2020. Disponível em: <http://revista.uepb.edu.br/index.php/REVEDMAT/article/viewFile/5017/3550> . Acesso em: 26 mar. 2021.

DA COSTA, A. P.; DOS SANTOS, M. R.; O pensamento geométrico na licenciatura em Matemática: uma análise à luz de Duval e Van-Hiele. **Educação Matemática Debate**. Montes Claros, v. 10, p. 1-20, 2020. DOI: 10.24116/emd.e202004. Disponível em: <https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/1150> . Acesso em: 26 mar. 2021.

DALL'ALBA, C. S. **Possibilidades de utilização do software GeoGebra no desenvolvimento do pensamento geométrico de um grupo de alunos do sexto ano do ensino fundamental.** 2015. Dissertação (Mestrado do Programa de Pós - Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Luterana do Brasil. Canoas. 2015.

FARIAS, S. A. D. D. **Ensino aprendido de triângulos: um estudo de caso no curso de licenciatura em matemática a distância.** 2014. Tese (Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Educação). Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, 2014.

FERREIRA, F. E. **Ensino e aprendizagem dos poliedros regulares via a teoria de Van Hiele com origami.** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São José do Rio Preto. 2013

FERREIRA, K. A. D. F. R. **Pensamento geométrico dos alunos do ensino médio de uma escola pública de Campo Novo do Parecis – MT.** 2018 Dissertação (Mestrado do Programa de Pós - Graduação em Educação). Universidade Federal de Mato Grosso. Cuiabá. 2018.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GÓES, B. H. P. **Um enfoque construtivista de retas paralelas e perpendiculares e suas aplicações sob o ponto de vista da teoria de Van Hiele.** 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amapá. Macapá. 2017

HONORATO, V. D. S. **Elaborando atividades matemáticas com o software GeoGebra.** 2018. Dissertação (Mestrado do Programa De Pós-Graduação Em

Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Rio Claro. 2018.

KALEFF, A. M. M. R; MOURÃO, O. D S. Licenciandos de Matemática sabem interpretar desenhos e calcular volumes de sólidos elementares construídos por pequenos cubos?. **Boletim do LABEM**, Niterói, v.6, n.11, p. 1-9, jul./dez. 2015. Disponível em: <http://www.labem.uff.br/novo/index.php/labem/article/view/65>. Acesso em: 26 mar.2021.

LADEIRA, V. P; ROSA, M. Dispositivos Móveis como Instrumentos Mediáticos para o Ensino e Aprendizagem em Matemática na Aprendizagem Móvel. **Revista Interdisciplinar SULEAR**. Belo Horizonte. v.1, n. 3. p. 96-121, nov. 2018.

LEIVAS, J. C. P. Ensino de geometria: uma experiência investigativa em uma aula de mestrado profissionalizante. **Educação Matemática em Pesquisa**. São Paulo, v.16, n.4, p.1181-1199, nov. 2014.

LEIVAS, J. C. P. Investigando o último nível da teoria de Van Hiele com alunos de Pós-Graduação - A generalização do Teorema de Pitágoras. **VIDYA**, Santa Maria, v. 37, n. 2, p. 515-531, jul./dez 2017.

LORENZATO, S. Por que não Ensinar Geometria? **A educação matemática em revista**. Blumenau, v.3, n.4, p. 3-13, jan. /jul. 1995.

MARTINS, E. N. **Uma abordagem construtivista do teorema de Tales sob a perspectiva da teoria de Van Hiele**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Seropédica. 2014.

MONFORTE, L. D. S. S. **Semelhanças no GeoGebra e o modelo de Van Hiele**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2017.

NAGATA, R. D. S. **Os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico: o aprendizado do conteúdo de polígonos numa perspectiva do modelo Van Hiele**. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba. 2016.

PACHÊCO, F. F. F.; PACHÊCO, G. F. Geometria plana: um estudo sobre o quadrado com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental sob a ótica da Teoria de Van Hiele. **Revista Principia**. João Pessoa, v.1, n.33, p. 50-57, mai. 2017. DOI: 10.18265/1517-03062015. Disponível em: <https://periodicos.ifpb.edu.br/index.php/principia/article/view/1047>. Acesso em: 26 mar. 2021.

PARANÁ. Secretaria De Estado Da Educação Do Paraná. Departamento De Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Da Educação Básica Matemática**. Paraná. 2008.

PAVANELLO, R.M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetike**. São Paulo. v1.n1. p.1-12. jan./dez. 1993. Disponível em <http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/view/2611/2353>. Acesso em: 10 abr. 2019.

RODRIGUES, S. D. S. A. **A Teoria de Van Hiele aplicada aos triângulos: uma sequência didática para o 8º ano do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual Do Norte Fluminense Darcy Ribeiro - Campos Dos Goytacazes. Rio de Janeiro. 2015.

SAMPAIO, R. S. **Geometria e visualização: ensinando volume com o software GeoGebra**. Dissertação (Mestrado do Programa De Pós-Graduação Em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Rio Claro. 2018.

SANTOS, F. T. M. D. Desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico de Van Hiele: Um olhar sobre a utilização de *software* para mudança de níveis de aprendizagem geométrico dos quadriláteros. *In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS- GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*. 18., 2014, Recife. **Anais** [...] Recife: UFP, 2014.

SANTOS, J. C. **Uma análise do nível de pensamento geométrico de alunos concluintes do curso de licenciatura em matemática: contribuições da teoria de van Hiele**. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática. Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande. 2015.

SANTOS, J. M. S. R. D. **A teoria de Van Hiele no estudo de áreas de polígonos e poliedros**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual Do Norte Fluminense Darcy Ribeiro - Campos Dos Goytacazes. Rio de Janeiro. 2015.

SANTOS, R. A. D. **Poliedros de Platão: uma abordagem segundo o modelo de Van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Oeste do Pará. Santarém. 2014.

SILVA, B. A. C. D. **Geometria no ciclo de alfabetização: um estudo sobre as atitudes dos alunos do ciclo de alfabetização diante da geometria e suas relações com a aprendizagem**. 2017. Dissertação (Mestrado do Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência). Universidade Estadual Paulista. Bauru. 2017.

SILVA FILHO, G. B. D. **Geometria espacial no Ensino Médio: uma abordagem concreta**. 2015. Dissertação (Mestrado de Programa de Pós - Graduação em Ensino Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande. 2015.

SILVA, J. L. D; OLIVEIRA, C. A. D. Possibilidades pedagógicas do uso das tecnologias móveis no ensino de Matemática na perspectiva da m – learning. **BOEM**. Joinville, v. 6, n. 11, p. 200-221, 2018. DOI:10.5965/2357724X06112018200. Disponível em:

<https://www.revistas.udesc.br/ind/ex.php/boem/article/view/11918> . Acesso em: 26 mar.2021.

SILVA, N. M. R. D; SANTOS, M. L; RAMOS, A. J. Ensino de geometria: ações do PIBID e a Teoria de Van Hiele. *In: ENCONTRO INTERNACIONAL DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES*. 11.,2018, Aracaju. **Anais [...]** Aracaju, 2018.

SILVA, T. A. F. **Área de figuras planas: uma abordagem segundo o modelo de Van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico no 7º ano do ensino fundamental**. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Oeste do Pará. Santarém. 2018.

SILVA, O. P. M. D. **A Teoria de Ausubel e o Modelo dos van Hiele aplicados à Geometria: Uma Proposta Didática**. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal De Campina Grande. Campina Grande. 2018.

SOUZA, C. F. D. **Estudo de quadriláteros, reflexões e rotações no plano, segundo a teoria de van Hiele: uma experiência com alunos do 9º ano do ensino fundamental**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Rural Do Rio De Janeiro. Seropédica. 2014.

SOUZA, P. P. F. D. C. **O desenvolvimento do pensamento geométrico: uma proposta de recurso didático por meio da HQ**. 2018. Dissertação (Mestrado do Programa de Pós-graduação em Docência para a Educação Básica) Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Bauru. 2018.

STORMOWSKI, V. **Formação de professores de matemática para o uso de tecnologia: uma experiência com o GeoGebra na modalidade EAD**. 2015. Tese (Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2015.

VIEIRA, A. A. **Tecnologias utilizadas na formação de professores nas disciplinas de geometria e desenho geométrico na universidade federal de juiz de fora entre 1980 e 2010: enfoque histórico e epistemológico**. 2017. Dissertação (Mestrado do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora. 2017.

VIEIRA, N. S. O. **A formação matemática do pedagogo: reflexões sobre o ensino de geometria**. 2017. Dissertação (Mestrado do Programa de Pós-Graduação de Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Federal do Ceará. Fortaleza. 2017.

WALLE, J.A.V. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ZANELLA, I. A. **Diferentes representações na geometria euclidiana por meio do uso do GeoGebra: um estudo com futuros professores de matemática**. 2018. Tese (Doutorado do Programa de Pós - Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática). Universidade Estadual de Maringá. Maringá. 2018.

APÊNDICE A – ROTEIRO DE ATIVIDADES.
Roteiro de atividades no *software* GeoGebra.

Atividade 1: Abra o arquivo nomeado por atividade N0H1.

Nesta atividade você deve agrupar as figuras de acordo com alguma característica que você identificar.

Qual característica você utilizou para agrupar as figuras:

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N0H1.

Atividade 2: Abra o arquivo nomeado por atividade N0H2.

Nesta atividade você deve agrupar as figuras com seus respectivos nomes.

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N0H2.

Atividade 3: Abra o arquivo nomeado por atividade N0H3.

Nesta atividade você deve construir figuras geométricas usando as ferramentas do GeoGebra que representem alguma coisa de seu cotidiano.

Que figuras geométricas você desenhou? O que elas representam?

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N0H3.

Atividade 4: Abra o arquivo nomeado por atividade N0H4.

Nesta atividade você deve identificar quais retas são paralelas, quais são perpendiculares e quais são concorrentes entre si? (utilize as cores ou os nomes para identificar as retas.)

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N0H4.

Atividade 5: Abra o arquivo nomeado por atividade N0H5.

Nesta atividade você deve construir outras figuras usando apenas os triângulos que aparecem no arquivo (arraste e monte uma figura diferente com quantos triângulos quiser).

Que figuras você desenhou?

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N0H5.

Atividade 6: Abra o arquivo nomeado por atividade N1H1.

Nesta atividade você deve identificar dentre as retas apresentadas os diferentes polígonos que se formam nas interseções das retas. Utilize a ferramenta polígono para marcar os polígonos encontrados.

Quais foram os polígonos encontrados?

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N1H1.

Atividade 7: Abra o arquivo nomeado por atividade N1H2.

Nesta atividade você deve agrupar os triângulos com suas respectivas classificações.

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N1H2.

Atividade 8: Abra o arquivo nomeado por atividade N1H3.

Nesta atividade você deve criar um polígono com as seguintes características: a) tenho quatro lados. B) os lados opostos são iguais. C) tem pelo menos um ângulo reto. D) um lado é maior que o outro. E) as diagonais se cruzam ao meio. F) as diagonais são congruentes.

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N1H3.

Atividade 9: Abra o arquivo nomeado por atividade N1H4.

Nesta atividade você deve agrupar as figuras de acordo com algumas características que você identificar.

Nomeie as características e quais figuras estão relacionadas:

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N1H4.

Atividade 10: Abra o arquivo nomeado por atividade N2H1.

Nesta atividade são apresentados alguns quadriláteros, quais as propriedades que você identifica em relação as diagonais?

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N2H1.

Atividade 11: Abra o arquivo nomeado por atividade N2H2.

São apresentadas algumas circunferências, a cada duas circunferências, classifique-as quanto a posição relativa entre elas (tangentes, secantes, internas e externas),

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N2H2.

Atividade 12: Abra o arquivo nomeado por atividade N2H3.

A partir das figuras apresentadas, crie uma nova figura com a característica que você identificou.

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N2H2.

Atividade 13: Abra o arquivo nomeado por atividade N2H4.

Nesta atividade são apresentadas algumas figuras. Agrupe as figuras de forma apropriada.

Retângulos:

Losangos:

Quadrados:

Paralelogramos:

Trapézios:

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N2H4.

Atividade 14: Abra o arquivo nomeado por atividade N2H5.

Nesta atividade visualizamos o Palácio do Planalto, identifique elementos matemáticos da geometria presente nesta imagem. Que elementos você identificou?

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N2H5.

Atividade 15: Abra o arquivo nomeado por atividade N3H1.

Nesta atividade são apresentados um triângulo e um ponto P, você deve identificar propriedades e característica deste ponto P em relação ao triângulo. O que você concluiu sobre P? Como chegou a essas conclusões?

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N3H1.

Atividade 16: Abra o arquivo nomeado por atividade N3H2.

Nesta atividade são apresentados um triângulo e um ponto Q, você deve identificar propriedades e característica deste ponto Q em relação ao triângulo. Descreva em linguagem materna as relações encontradas?

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N3H2.

Atividade 17: Abra o arquivo nomeado por atividade N3H3.

Nesta atividade você deve usar os recursos do GeoGebra para construir um trapézio isósceles (Sendo um trapézio isósceles aquele que possui seus lados não paralelos iguais) com base maior medindo 4 centímetros.

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N3H3.

Atividade 18: Abra o arquivo nomeado por atividade N3H4.

Nesta atividade você deve descrever intuitivamente a demonstração lógica para a seguinte proposição: Seja C um círculo de centro O e P um ponto de C . Se t é a reta que passa por P e é perpendicular a OP , então t é tangente a C .

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N3H4.

Atividade 19: Abra o arquivo nomeado por atividade N3H5.

Nesta atividade você deve construir um triângulo formado pelos fixados a seguir: os lados (a e b) e a altura (h).

Exporte este arquivo da seguinte forma RA N3H5.