UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ALEXANDRE FANHA

REARRANJO DE SÉRIES NUMÉRICAS: A INFLUÊNCIA DA REORDENAÇÃO NA SOMA

PONTA GROSSA
2021

ALEXANDRE FANHA

REARRANJO DE SÉRIES NUMÉRICAS: A INFLUÊNCIA DA REORDENAÇÃO NA SOMA

Dissertação apresentada para a obtenção do título de Mestre em Matemática na Universidade Estadual de Ponta Grossa. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Teixeira Alves

PONTA GROSSA
2021

Fanha, Alexandre

F211 Rearranjo de séries numéricas: a influência da reordenação na soma / Alexandre Fanha. Ponta Grossa, 2021.

56 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Teixeira Alves.

1. Séries. 2. Série harmônica. 3. Comutatividade. 4. Rearranjo. I. Teixeira Alves, Marcos. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Matemática. III.T.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Maria Luzia Fernandes Bertholino dos Santos- CRB9/986

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
Av. General Carlos Cavalcanti, 4748 - Bairro Uvaranas - CEP 84030-900 - Ponta Grossa - PR - https://uepg.br

TERMO

TERMO DE APROVAÇÃO

ALEXANDRE FANHA

“REARRANJO DE SÉRIES NUMÉRICAS: A INFLUÊNCIA DA REORDENAÇÃO NA SOMA”

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Ponta Grossa 17 de maio de 2021.

Membros da Banca:

Prof. Dr. Marcos Teixeira Alves (UEPG) – Presidente

Prof. Dr. Dion Ross Pasievitch Boni Alves (UNESPAR)

Prof. Dr. Marciano Pereira (UEPG)

Prof. Dr. Giuliano Gadioli La Guardia (UEPG) – Suplente

Documento assinado eletronicamente por **Adriana Aparecida Telles**, **Secretário(a)**, em 06/05/2021, às 15:19, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

Documento assinado eletronicamente por **Marcos Teixeira Alves**, **Professor(a)**, em 21/05/2021, às 17:05, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

Documento assinado eletronicamente por **Marciano Pereira**, **Professor(a)**, em 21/05/2021, às 17:40, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

Documento assinado eletronicamente por **Giuliano Gadioli La Guardia**, **Professor(a)**, em 21/05/2021, às 22:28, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

A autenticidade do documento pode ser conferida no site https://sei.uepg.br/autenticidade informando o código verificador **0478875** e o código CRC **3DE69E82**.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela minha vida e saúde, sem as quais não poderia estar fazendo o que tanto gosto, estudar matemática, e pela oportunidade de contribuir com a sociedade como professor ou com este trabalho.

À minha mãe, meu pai e minha irmã pelo apoio e incentivo, direto ou indireto, quando necessário.

Ao meu orientador professor Dr. Marcos Teixeira Alves por ter aceitado me orientar e pela paciência tanto durante a orientação da dissertação quanto com outros assuntos.

Ao professor Dr. Marciano Pereira pela orientação de iniciação científica sem a qual eu não teria condições de fazer esse mestrado e por ter me ensinado a aprender de verdade, o que eu considero a maior responsabilidade de um professor.

Ao professor Dr. Giuliano Gadioli La Guardia que foi um dos responsáveis por oportunizar minha experiência numa universidade no exterior (e pelas partidas de basquete).

À professora Dra. Luciane Grossi que, sem saber, foi uma das pessoas que me influenciaram a escolher o curso de matemática.

Aos outros professores que me ajudaram a chegar até aqui.

À minha prima Karen por me ajudar com a tradução do meu resumo.

Aos meus colegas de graduação, mestrado e iniciação científica, a todas as pessoas que me auxiliaram de alguma forma.

Finalmente, a UEPG, óbviamente, e a todos os responsáveis pela existência e divulgação das ciências no passado, presente e futuro.

RESUMO

Desde o início do Ensino Fundamental, aprendemos que "a ordem das parcelas não altera a soma", o que é válido sim para somas com um número finito de parcelas. Mas, uma vez que a matemática é uma ciência precisa e rigorosa, essa frase clássica, a menos que seja seguida de "numa soma com uma quantidade finita de parcelas", geralmente é falsa. Visto que nem sempre os livros acadêmicos que tratam de séries numéricas infinitas abordam de forma completa as séries condicionalmente convergentes, este trabalho tem como objetivo complementar esse estudo nos cursos de graduação em matemática e áreas afins, trazendo alguns teoremas que tratam da convergência de rearranjos específicos da série harmônica alternada, e também servir como estímulo aos alunos que ainda não começaram o estudo de séries apresentando uma introdução ao assunto, uma sequência pedagógica que visa facilitar a compreensão e ilustrar o comportamento de alguns rearranjos e questionando a famosa frase "a ordem das parcelas não altera a soma".

Palavras-chave: Séries. Série Harmônica. Comutatividade. Rearranjo.

ABSTRACT

From the early stages of Elementary School, we are taught that "the order of the terms doesn't alter the result of the sum", which is, indeed, valid in the case of a finite series. However, because mathematics is a precise and rigorous science, the classic saying stated above is generally false, unless it ends with "in a finite series". Because academic textbooks on infinite series don't always address the conditionally convergent series in a thorough manner, the present work aims to complement the research in undergraduate mathematics level studies and related fields, focusing on some theorems that deal with convergency in specific rearrangements of the alternating harmonic series. This dissertation also intends to provide support for undergraduate students that have not yet begun their studies, by presenting an introduction on the subject, and adding in a pedagogic sequence intended on facilitating the comprehension and illustrating how some rearrangements work, while questioning the famous statement "the order of the terms doesn't alter the result of the sum".

Keywords: Series. Harmonic Serie. Commutativity. Rearrangement.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Desde os anos iniciais do ensino fundamental começamos o estudo das somas. Partimos das somas em $\mathbb{N}$, em seguida em $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e finalmente $\mathbb{C}$. Já nas primeiras séries do ensino básico estudamos algumas propriedades da adição entre elas a comutatividade. Aprendemos no decorrer de nossos estudos na escola que "a ordem das parcelas não altera a soma", uma frase que se não estiver bem contextualizada é falsa. De fato, é necessário complementar essa afirmação. No início descobrimos que, dados x e y números reais quaisquer, vale a igualdade:

$$x + y = y + x.$$

Facilmente podemos generalizar essa ideia e provar, utilizando o Princípio da Indução, que quaisquer $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in \mathbb{R}$, com $n \in \mathbb{N}$, a soma desses números não se altera, mesmo que se faça uma reordenação qualquer das parcelas. Mas esses são todos casos em que há um número finito de parcelas. No ensino médio, ao estudarmos progressões aritméticas e geométricas, calculamos a soma dos n primeiros termos de uma P.A. ou de uma P.G. Um aluno mais atento pode se questionar, ao observar que uma P.A. (ou uma P.G.) possui infinitos termos, o que aconteceria se somássemos todos os termos dessa sequência. A resposta, considerando os conhecimentos esperados de um aluno de ensino médio, poderia parecer óbvia, "ora, ao somarmos infinitos termos o resultado é infinito". Sabemos, é claro, que isso não é tão simples.

A noção de infinito pode até ser complexa, mas é fundamental e já é utilizada desde o princípio nas escolas regulares quando ouvimos falar em reta na geometria ou quando dizemos que o conjunto dos números naturais não tem fim. Tendo em vista todo o questionamento que pode surgir a respeito de infinito e "somas infinitas", não no sentido do resultado ser infinito mas sim que há uma infinidade de parcelas, é razoável que o professor do Ensino Médio tenha um certo conhecimento acerca de somas com infinitas parcelas. Além disso, desde que um graduado em Licenciatura em Matemática também deve ser qualificado para dar aulas inclusive num curso de graduação, a necessidade de se entender um pouco melhor questões como essas se mostra ainda maior.

A grosso modo uma soma de infinitos números é chamada *Série Numérica*. O estudo das séries numéricas a nível de graduação geralmente se resume a análise da convergência ou da divergência da mesma sem se preocupar tanto com o resultado da soma, conforme pode-se verificar nas referências [6], [7], [5] e [9]. Os principais resultados a respeito de séries que vemos na graduação são os critérios de convergência, uma condição necessária para a convergência (ou uma condição suficiente para a divergência) e os tipos de convergência: absoluta, quando a soma dos valores absolutos das parcelas converge, condicional, quando a série converge mas não absolutamente, e incondicional, quando a série converge mesmo alterando-se a ordem de suas parcelas.

Como já foi descrito anteriormente, a frase clássica "a ordem das parcelas não altera a soma" não é verdadeira em todos os casos. De fato, provamos que as séries absolutamente convergentes satisfazem essa afirmação, mas as condicionalmente convergentes não, como pode ser visto em [6].

Também em [6] é demonstrado o teorema que motivou a pesquisa da comutatividade das séries: *Teorema de Riemann* sobre rearranjos que garante a equivalência entre as séries absolutamente convergentes e as comutativamente convergentes (que convergem independentemente da ordem das parcelas). Em [1], podemos encontrar o Teorema de Ohm que nos dá um algoritmo para gerar qualquer soma do tipo $\ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$, em que p e q são números naturais quaisquer, alterando para isso a ordem das parcelas da série harmônica alternada. Eis seu enunciado:

Teorema 1.1 *(Teorema de Ohm): Sejam p, q números inteiros positivos. O rearranjo da Série Harmônica Alternada denotado por $\sum a_{\phi(n)}$, colocando os p primeiros termos positivos, depois os q primeiros negativos, em seguida os próximos p positivos depois os q próximos negativos e sucessivamente, como segue,*

$$\sum a_{\phi(n)} = \underbrace{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}}_{p\ termos} - \underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2q}}_{q\ termos} + \underbrace{\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{2p+3}+\cdots+\frac{1}{4p-1}}_{p\ termos}$$
$$- \underbrace{\frac{1}{2q+2}-\frac{1}{2q+4}-\cdots-\frac{1}{4q}}_{q\ termos} + \cdots$$

converge, e

$$\sum a_{\phi(n)} = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right).$$

Ainda em [1] e também em [3] temos uma generalização do Teorema de Ohm, o *Teorema de Pringsheim* que afirma quando um rearranjo da série harmônica alternada converge e pra que valor converge nesse caso:

Teorema 1.2 *Seja $\sum a_{\phi(n)}$ um rearranjo da SHA de tal modo em que $a_{\phi(n)} < a_{\phi(n+k)}, k \in \mathbb{N}$, sempre que $\phi(n)$ e $\phi(n+k)$ forem ambos pares, ou ambos ímpares. Esse rearranjo converge para um número real estendido se, e somente se,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n}$$

existe. Nesse caso tem-se

$$\sum a_{\phi(n)} = \ln 2 + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(\frac{p_n}{n-p_n}\right)\right].$$

Além disso, [1] apresenta uma generalização para outras séries que satisfazem certas condições fixadas não necessariamente a série harmônica alternada. Seu enunciado é:

Teorema 1.3 *(Teorema de Pringsheim): Seja* (a_n) *uma sequência de números reais que satisfaz* $|a_i| \geq |a_j|$ *sempre que* $i < j, i, j \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *e* $a_{2k-1} > 0 > a_{2k}$, *com* $k \in \mathbb{N}$. *Temos:*

1. *Se* $\lim_{n\to\infty} n|a_n| = \infty$, *então há um rearranjo* $\sum a_{\phi(n)}$, *da série* $\sum a_n$, *com densidade assintótica* $\frac{1}{2}$ *tal que* $\sum a_{\phi(n)} = S$, *sendo* S *um número real qualquer.*

2. *Se* $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, *então qualquer rearranjo* $\sum a_{\phi(n)}$, *da série* $\sum a_n$, *cuja densidade assintótica* α *existe e* $0 < \alpha < 1$ *possui soma igual a série original, isto é,* $\sum a_{\phi(n)} = \sum a_n$.

Assim, no primeiro capítulo apresentamos alguns resultados importantes como pré-requisitos para os capítulos seguintes. Introduzimos a ideia de rearranjo e trazemos o primeiro dos resultados que motivam esse estudo: o *Teorema de Riemman.* Os capítulos 3 e 4 trazem o *Teorema de Ohm* e dois Teoremas de Pringsheim, com a demonstração dos dois primeiros, sendo que o último generaliza os dois anteriores e ainda garante que a *Série Harmônica Alternada* possui algumas propriedades em relação as suas reordenações um pouco diferentes das outras séries que satisfazem seu enunciado, como dito em [2].

O desfecho do referido trabalho consiste na elaboração de uma sequência pedagógica sobre o *Teorema de Ohm* com o objetivo de complementar o estudo de séries numéricas na graduação, tendo como público alvo os acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática.

2 SEQUÊNCIAS E SÉRIES

Neste capítulo faremos uma introdução ao estudo de sequências e séries apresentando alguns dos principais resultados sobre o assunto dando foco principal aos teoremas e definições necessárias para a compreensão de rearranjo de séries.

2.1 Sequências

O estudo de séries depende completamente da teoria a respeito de sequências. Sequências são estudadas já muito cedo na escola, falamos sobre a sequência de números naturais por exemplo, ou, até mesmo, quando os alunos são ordenados em fila estamos montando uma sequência.

Uma sequência é um conjunto cujos elementos podem ser indexados com números naturais, em outras palavras, podemos dizer qual é o primeiro elemento, o segundo, e assim por diante. Sendo um pouco mais rigoroso, uma sequência em um conjunto A é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais, se esta for infinita, ou um de seus subconjuntos, se for finita, e o contradomínio é o conjunto A, como segue a definição:

Definição 2.1 *Seja A um conjunto não vazio. A qualquer aplicação $x : N \to A$, com $N \subset \mathbb{N}$, damos o nome de sequência de elementos de A. Se N for finito, dizemos que a sequência é finita e se N for infinito, dizemos que a sequência é infinita. Dado $n \in N$, o elemento $x(n)$ de A é denotado por x_n. Além disso, podemos denotar essa sequência como $(x_n)_{n\in N}$, ou simplesmente, (x_n) se não houver possibilidade de ambiguidade.*

Caso o contradomínio seja o conjunto dos números reais, a aplicação $x : N \to \mathbb{R}$ é dita uma sequência de números reais.

Exemplo 2.1 *A função, $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que para cada n natural associa o seu quadrado, i.e., $x(n) = n^2$, é uma sequência.*

Uma vez que nosso objetivo é estudar somas com infinitos termos, nesta seção vamos nos ater apenas nas sequências infinitas, ou seja, sequências $(x_n)_{n\in N}$ onde $N \subset \mathbb{N}$ é infinito. Além disso, nos interessa principalmente as somas cujas parcelas são números reais, portanto vamos apresentar resultados a respeito de sequências reais.

A convergência de uma sequência é o assunto mais pertinente no nosso estudo. Queremos saber se a partir de um certo índice os termos da sequência se aproximam de um número real fixo (nesse caso a sequência converge) ou não (e dizemos que ela diverge). Rigorosamente, temos a seguinte definição.

Definição 2.2 *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Se existe $l \in \mathbb{R}$ tal que para todo real $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n > n_0$ então $|x_n - l| < \varepsilon$, dizemos que (x_n) converge e que seu limite quando n tende ao infinito é l.*

Nesse caso, escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \text{ ou } x_n \overset{n}{\longrightarrow} l$$

para denotar que x_n converge para l.

Exemplo 2.2 *A sequência $x_n = \log\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ é convergente pois existe $l = 0$ tal que, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = \lceil \frac{1}{10^\varepsilon - 1} \rceil$ [1] tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n > n_0$, então*

$$\begin{aligned}
n > \left\lceil \frac{1}{10^\varepsilon - 1} \right\rceil > \frac{1}{10^\varepsilon - 1} \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{n} < 10^\varepsilon - 1 \\
&\Rightarrow \quad 10^{-\varepsilon} - 1 < \frac{1}{n} < 10^\varepsilon - 1 \\
&\Rightarrow \quad 10^{-\varepsilon} < 1 + \frac{1}{n} < 10^\varepsilon \\
&\Rightarrow \quad 10^{-\varepsilon} < \frac{n+1}{n} < 10^\varepsilon \\
&\Rightarrow \quad -\varepsilon < \log\left(\frac{n+1}{n}\right) < \varepsilon \\
&\Rightarrow \quad \left|\log\left(\frac{n+1}{n}\right) - 0\right| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Qualquer sequência que não seja convergente é dita divergente.

A convergência de uma sequência implica numa propriedade muito útil em algumas demonstrações. Observando a Definição 2.2, a partir de um certo índice, os termos de uma sequência convergente ficam dentro de um intervalo delimitado por $l - \varepsilon$ e $l + \varepsilon$. É como se tivesse uma barreira que limita a variação da sequência a partir de um certo ponto. Isso nos motiva a definir o conceito de *sequência limitada*.

Definição 2.3 *Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita limitada se existe um número real $M > 0$, tal que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

A seguinte proposição é uma consequência imediata da convergência de uma sequência.

Proposição 2.1 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente cujo limite é $l \in \mathbb{R}$. Da definição, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - l| < \varepsilon$ sempre que $n > n_0$. Fixando ε, podemos tomar $M = \max\{|l - \varepsilon|, |l + \varepsilon|, |x_1|, |x_2|, |x_3|, ..., |x_{n_0}|\}$ de modo que $|x_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. □

Um questionamento que pode surgir quase que imediatamente após a definição de convergência é se, caso uma sequência x_n convirja para um determinado número real l,

[1] A função teto $\lceil\cdot\rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tal que $\lceil x \rceil = \min\{y \in \mathbb{Z}; x \leq y\}$. Essa função toma um número real x e retorna o menor inteiro que seja maior ou igual a x. Por exemplo, $\lceil 1,00001 \rceil = 2$.

este l é único, i.e., se uma sequência pode ou não convergir para mais de um limite. A seguinte proposição, cuja demonstração pode ser encontrada em [6], responde esta pergunta.

Proposição 2.2 *Se existe $l \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, então esse l é único.*

Muitas vezes o estudo da convergência de uma sequência (x_n) é facilitado pelo estudo da convergência de outras sequências, cujo conjunto de seus termos é um subconjunto do conjunto dos termos de (x_n), i.e., sequências restritas a um subconjunto do domínio da sequência (x_n). A essas sequências chamamos subsequências.

Definição 2.4 *Sejam $N \subset \mathbb{N}$ e $(x_n)_{n\in N}$ uma sequência. Uma subsequência de $(x_n)_{n\in N}$ é uma sequência $(x_n)_{n\in N'}$, em que $N' \subset N$.*

Na definição acima, definimos subsequência de uma forma mais geral. Neste trabalho trataremos apenas de sequências e subsequências infinitas, i.e., considerando a definição anterior, em que N, N' são infinitos e $N' \subset N$.

Nem sempre o cálculo do limite de uma sequência é simples. Não é simples calcular o limite da sequência

$$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}, \frac{1}{3}, ...),$$

ou decidir se ele existe. Mas podemos simplificar esse problema observando suas subsequências, como veremos no exemplo 2.3.

Algumas vezes pode ser mais útil estudar as subsequências da sequência em questão. Calcular o limite de uma sequência pode não ser o mais adequado pois esta pode na verdade divergir. Se existirem subsequências que convergem para limites diferentes, a sequência original não converge. De fato, isso é consequência imediata da

Proposição 2.3 *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um determinado número real l, então qualquer subsequência sua também converge para l.*

Demonstração: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência que converge para $l \in \mathbb{R}$ e suponha que exista uma subsequência $(x_k)_{k\in N}$, com $N \subset \mathbb{N}$, que não convirja para l. Nesse caso, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $n \in N$, com $n > n_0$ e $|x_n - l| \geq \varepsilon$. Mas isso implica que existe $\varepsilon > 0$ para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para algum $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ e $|x_n - l| \geq \varepsilon$, ou seja, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para l, o que é um absurdo. Logo, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $l \in \mathbb{R}$, todas as suas subsequências também convergem para l. $\square$

Muitas vezes usamos a contrapositiva dessa proposição para mostrar que a sequência diverge. Com efeito, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência tal que $x_n = (-1)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ora, as sequências $(a_n) = (x_{2n})$ e $(b_n) = (x_{4n})$ são subsequências de (x_n) que convergem para o mesmo limite, a saber, 1. No entanto, (x_n) diverge, uma vez que $(y_n) = (x_{2n+1})$ é subsequência de (x_n) e seu limite quando n tende ao infinito é -1.

Contudo, as subsequências de uma dada sequência não servem apenas para confirmar se a mesma é divergente. A seguinte proposição nos dá um método que pode facilitar o cálculo do limite de uma sequência usando o limite de suas subsequências.

Proposição 2.4 *Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais converge para um real l se, e só se, existem $N_1, N_2, ..., N_k$, com $k \in \mathbb{N}$, subconjuntos de $\mathbb{N}$ tais que $\cup_{i=1}^{k} N_i = \mathbb{N}$ e $(x_n)_{n\in N_1}, (x_n)_{n\in N_2}, ..., (x_n)_{n\in N_k}$ convergem para l.*

Demonstração: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais que converge para um real l. Da Proposição 2.3, a primeira implicação segue. Por outro lado, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais e existem $N_1, N_2, ..., N_k$, com $k \in \mathbb{N}$, subconjuntos de $\mathbb{N}$ tais que $\cup_{i=1}^{k} N_i = \mathbb{N}$ e $(x_n)_{n\in N_1}, (x_n)_{n\in N_2}, ..., (x_n)_{n\in N_k}$ convergem para l, então, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_i \in N_i$, $i \in \{1, 2, 3, ..., k\}$, tal que, para todo $n \in \cup_{i=1}^{k} N_i$, se $n > \max\{n_1, n_2, n_3, ..., n_k\}$ então

$$|x_n - l| < \varepsilon.$$

Logo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para l. □

Vamos utilizar essa última proposição no Capítulo 4 para mostrar o Teorema de Ohm usando o Teorema de Pringsheim. Para isso vamos "dividir" uma determinada sequência em várias subsequências de modo que satisfaçam a Proposição 2.4 e então poderemos encontrar o limite da sequência desejada. Vejamos como calcular o limite de uma sequência usando essa proposição.

Exemplo 2.3 *Calcular o limite da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $(1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, ...)$.*

As sequências $(y_k) = (x_{2k})$ e $(z_k) = (x_{2k-1})$, $k \in \mathbb{N}$, são subsequências de (x_n). Observe que $y_k = \frac{1}{2}$ e $z_k = \frac{k}{2k-1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e ambas convergem para $\frac{1}{2}$. Daí, pela Proposição 2.4, o limite de (x_n) é $\frac{1}{2}$.

Precisamos de apenas mais duas proposições para a próxima seção. Suas demonstrações podem ser encontradas em [6], [7] e [9]. Uma das proposições afirma um resultado sobre sequências monótonas e limitadas.

O termo monótono significa que se mantém sempre com o mesmo comportamento, não varia. Nesse sentido,

Definição 2.5 *Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita monótona se for crescente, isto é $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou decrescente quando $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Proposição 2.5 *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Exemplo 2.4 *A sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por* $x_n = \dfrac{1}{n}$ *é convergente. Observe que* $\dfrac{1}{n} \geq \dfrac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *ou seja, a sequência é decrescente. Além disso,* $-1 \leq \dfrac{1}{n} \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *então existe* $M \in \mathbb{R}$, *a saber* $M = 1$, *tal que* $\left|\dfrac{1}{n}\right| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Isso mostra que* (x_n) *é monótona e limitada, então, da Proposição 2.5,* (x_n) *é convergente.*

A última proposição que vamos utilizar dá uma condição necessária e suficiente para a convergência de uma sequência. Antes disso precisamos da

Definição 2.6 *Uma sequência* (x_n) *é dita de Cauchy, se satisfaz*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n, m \in \mathbb{N}, n, m > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Uma sequência de Cauchy de números reais é um tipo de sequência que nos permite deduzir sua convergência sem necessariamente calcularmos seu limite pois, intuitivamente, a partir de um certo índice os termos de uma sequência de Cauchy ficam sempre muito próximos uns dos outros e não só isso, ficam tão próximos quanto quisermos. Isso já dá uma boa noção (não prova!) da veracidade da próxima proposição, cuja demonstração pode ser encontrada em [6].

Proposição 2.6 *Uma sequência é convergente se, e somente se, for de Cauchy.*

Com isso, podemos começar as preliminares a respeito de séries numéricas.

2.2 Séries

As séries numéricas são utilizadas na matemática já há muito tempo. Indiretamente Arquimedes [14] calculou o valor da soma $1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots$ que resulta em $\frac{4}{3}$ no problema da quadratura da parábola. Ele não utilizou o conceito de limite mas sim o chamado Método da Exaustão. Antes mesmo da teoria de séries ser estabelecida, principalmente com os trabalhos de Cauchy, outros matemáticos já usavam somas infinitas para determinar o valor de π por exemplo, como o matemático indiano Madhava [13] no século XIV. Já no século XVII Euler [8] utiliza as somas infinitas para calcular a soma dos inversos dos quadrados perfeitos. Euler também introduziu o conceito de série hipergeométrica.

Nesta seção apresentamos alguns dos principais resultados envolvendo séries numéricas, dando prioridade àqueles que serão utilizados no decorrer deste texto.

Naturalmente, devemos começar pela definição de série.

Definição 2.7 *Uma série, ou série infinita, é a soma dos termos de uma sequência infinita de números reais, ou, equivalentemente, o limite da sequência de somas parciais dos termos de uma sequência infinita de números reais, i.e.,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

em que (x_n) *é uma sequência.*

Também podemos denotar a série da sequência (x_n) *simplesmente por* $\sum x_n$.

Observe que podemos escrever a soma das n primeiras parcelas de uma sequência como $\sum_{k=1}^{n} x_k$. À essa soma damos o nome de soma parcial de ordem k da série $\sum x_n$ e denotamos muitas vezes por S_n. Assim, a série $\sum x_n$ nada mais é que o limite de S_n quando n tende ao infinito. Logo, tudo o que vale para sequências também vale para as somas parciais facilitando muito alguns cálculos por exemplo. Isso implica que podemos estudar uma série olhando para a sequência de suas somas parciais (S_n).

O estudo de séries numéricas num curso de graduação tem como objetivo principal apresentar os principais resultados a respeito de convergência, se preocupando mais em descobrir se uma determinada série converge do que saber para qual valor ela converge, caso esta convirja. Como podemos ver em [6], [7] e [9], há muitos critérios de convergência de séries. Aqui, vamos apresentar apenas o *Critério da comparação* e o *Critério de Leibniz*, uma vez que estes serão os únicos necessários no decorrer deste texto.

Teorema 2.1 (Critério da comparação) *Dadas duas séries numéricas* $\sum x_n$ *e* $\sum y_n$*, com* $x_n, y_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$*, caso existam um real positivo* c *e um natural* n_0 *de modo que sempre se tenha* $x_n \leq cy_n$ *para todo* $n > n_0$ *então* $\sum x_n$ *converge se* $\sum y_n$ *convergir.*

Demonstração: Sejam $c \in \mathbb{R}_+^*$, $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\sum x_n$ e $\sum y_n$ séries, tais que $x_n, y_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $x_n \leq cy_n$ para todo $n > n_0$. Se $\sum y_n$ converge, então, da Proposição 1.1, a sequência de suas somas parciais, $\sum_{k=1}^{n} y_k$, é limitada e, portanto, $s'_n = \sum_{k=n_0+1}^{n} y_k$ também é. Daí, a sequência $s_n = \sum_{k=n_0+1}^{n} x_k$ é limitada, e uma vez que $x_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, (s_n) é monótona. Logo, da Proposição 1.4, (s_n) converge para algum $l \in \mathbb{R}$ e $\sum_{k=1}^{n} x_k$ converge para $l - \sum_{k=1}^{n_0} x_k$. □

Da mesma forma que ocorre com sequências, mostrar que uma série diverge pode ser muito mais simples que tentar verificar se ela converge. Uma condição necessária para a convergência de uma série é dada pelo

Teorema 2.2 *Seja* $\sum x_n$ *uma série qualquer. Se* $\sum x_n$ *converge, então* x_n *tende a* 0 *quando* n *tende ao infinito.*

Demonstração: Seja $\sum x_n$ uma série convergente. Tomando $S \in \mathbb{R}$ como seu limite, vem que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k + x_n\right) \quad &\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} x_k + \lim_{n\to\infty} x_n \\
&\Rightarrow \quad S = S + \lim_{n\to\infty} x_n \\
&\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0.
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. □

Isso significa que se $\sum x_n$ é uma série convergente, a sequência (x_n) fica tão pequena, no sentido de se aproximar de 0, quando n tende ao infinito, quanto quisermos. Vamos utilizar tal raciocínio durante a demonstração do teorema sobre rearranjo creditado a Riemann.

A Série Harmônica Alternada (*SHA*), definida por $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, é um dos principais objetos de estudo deste trabalho. Uma das formas mais simples de se verificar a convergência dessa série é usando o

Teorema 2.3 (Critério de Leibniz) *Para que a série $\sum(-1)^{n+1}x_n$ seja convergente é suficiente que (x_n) seja uma sequência decrescente de números positivos com limite igual a 0.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência decrescente de números positivos tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Ora, do Princípio da Indução Finita, é imediato que $s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}x_k$ é uma sequência crescente e limitada por x_1, logo, da Proposição 1.4, converge, além disso,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} -x_{2n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}x_k - \sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}x_k\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}x_k - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}x_k \\
&= \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} s_{2n-1},
\end{aligned}$$

e, como $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1}$. Uma vez que (s_{2n}) e (s_{2n-1}) são subsequências de $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}x_k$, pela Proposição 1.3, o resultado segue. □

Nos próximos capítulos os conceitos de série absolutamente convergente e condicionalmente convergente são essenciais. A convergência absoluta é definida como segue.

Definição 2.8 *Seja $\sum x_n$ uma série qualquer. Dizemos que $\sum x_n$ é absolutamente convergente se a série do valor absoluto de x_n é convergente, i.e., se $\sum |x_n|$ é convergente.*

Finalizando esse capítulo, vamos apenas observar que toda série absolutamente convergente é também convergente, no entanto, a recíproca nem sempre é válida.

De fato, se $\sum |x_n|$ é convergente, então a sequência dada por $s'_n = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ é uma sequência de Cauchy. Portanto, tomando $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ e usando a desigualdade triangular, temos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > m > n_0$, então

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &> |s'_n - s'_m| \\
&= ||x_{m+1}| + |x_{m+2}| + |x_{m+3}| + \cdots + |x_n|| \\
&= |x_{m+1}| + |x_{m+2}| + |x_{m+3}| + \cdots + |x_n| \\
&\geq |x_{m+1} + x_{m+2} + x_{m+3} + \cdots + x_n| \\
&= |s_n - s_m|.
\end{aligned}
$$

Logo, (s_n) é uma sequência de Cauchy, portanto, da Proposição 1.5, convergente.

Um contraexemplo para a recíproca deste teorema é

Exemplo 2.5 *Vimos que a série* $\sum (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ *é convergente pelo Critério de Leibnitz, uma vez que o limite de* $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ *quando* n *tende ao infinito é zero. Por outro lado,*

$$
\begin{aligned}
\sum \left| (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| &= \sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln(k)] \\
&= \lim_{n\to\infty} \{[\ln(2) - \ln(1)] + [\ln(3) - \ln(2)] \\
&+ [\ln(4) - \ln(3)] + \cdots + [\ln(n+1) - \ln(n)]\} \\
&= \lim_{n\to\infty} [\ln(n+1) - \ln(1)] \\
&= \infty.
\end{aligned}
$$

Logo, a série $\sum (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ *não é absolutamente convergente.*

Este exemplo mostra a existência de séries *condicionalmente convergentes*. Uma série é dita condicionalmente convergente se for convergente mas não for absolutamente convergente.

3 REARRANJO DE SÉRIES

A comutatividade é uma propriedade que nos permite realizar operações sem nos preocuparmos com a ordem dos termos. No ensino básico, a maioria das operações que estudamos são operações binárias, i.e., que envolvem dois termos, por exemplo, a adição, a multiplicação e a subtração sobre $\mathbb{R}$. A adição sobre $\mathbb{R}$ é uma operação comutativa, i.e., dados dois números reais x e y, a soma de x com y é igual a soma de y com x. Isso pode ser generalizado para uma quantidade $n \in \mathbb{N}$ de termos utilizando o Princípio da Indução Finita. No entanto, quando tratamos de quantidades infinitas isso é um pouco diferente.

Nesse capítulo vamos apresentar tanto somas com uma infinidades de termos que podem comutar entre si e ainda assim manter o valor da soma quanto somas também com uma infinidade de termos cuja comutatividade não é válida, ou seja, cujo valor se altera de acordo com a organização das parcelas.

A essa reorganização dos termos de uma soma infinita, série, damos o nome de rearranjo. Dadas uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e uma série $\sum x_n$, um rearranjo dessa série é qualquer série $\sum y_n$, onde $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência obtida de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por meio de uma reordenação de seus termos, em outras palavras, $y_n = x_{\phi(n)}$, sendo $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção.

3.1 Séries Comutativamente Convergentes

Como já foi dito, algumas somas infinitas podem ter seus termos reorganizados sem que o valor da mesma não seja alterado. Uma vez que uma soma infinita nada mais é que uma série, chamamos essas somas cujo valor não se altera mesmo ao se reordenar seus termos de *séries comutativamente convergentes*. Formalmente, uma série $\sum x_n$ é comutativamente convergente se $\sum x_n = \sum y_n$, qualquer que seja a bijeção $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ em que $y_n = x_{\phi(n)}$, $n \in \mathbb{N}$.

O próximo resultado garante que toda série absolutamente convergente é comutativamente convergente.

Teorema 3.1 *Se $\sum x_n$ é uma série absolutamente convergente, então $\sum x_n$ é comutativamente convergente e $\sum x_n = \sum x_{\phi(n)}$, sendo $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção qualquer.*

Demonstração: Sejam $\sum x_n$ uma série absolutamente convergente e $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção. Vamos dividir a demonstração em duas partes. A primeira abrange o caso de x_n ser não negativo qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Na segunda parte demonstraremos o caso geral usando a primeira parte.

Sendo assim, considere o caso $x_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\sum x_n$ é absolutamente convergente, temos:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}, m > m_0 \Rightarrow |s_m - s| < \varepsilon, \tag{3.1}$$

em que $s_m = \sum_{k=1}^{m} x_n = \sum_{k=1}^{m} |x_n|, m \in \mathbb{N}$, e $s = \sum x_n$.

Mas, uma vez que ϕ é uma função bijetora, para todo $m \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{1, 2, 3, ..., m\} \subset \{\phi(1), \phi(2), \phi(3), ..., \phi(n)\}$, basta observar que qualquer elemento de $\{1, 2, 3, ..., m\}$ é imagem de algum natural por ϕ. Daí, tomando $s'_n = \sum_{k=1}^{n} x_{\phi(k)}$,

$$(\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N})\,(s_m \leq s'_n \Leftrightarrow -s'_n \leq -s_m \Leftrightarrow s - s'_n \leq s - s_m) \tag{3.2}$$

Como x_n é sempre não negativo, (s_m) e (s'_n) são crescentes, daí s é o supremo de $\{s_k; k \in \mathbb{N}\}$, ou seja, $s_m \leq s, \forall m \in \mathbb{N}$. Além disso, $s'_n \leq s_p$ para algum $p \in \mathbb{N}$, basta tomar $p = \max\{\phi(1), \phi(2), \phi(3), ..., \phi(n)\}$; logo $s'_n \leq s$. Usando isso em (3.2), segue que, para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n > n_0$,

$$|s'_n - s| = s - s'_n \leq s - s_m = |s_m - s|,$$

então, por (3.1),

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow |s'_n - s| \leq |s_m - s| < \varepsilon.$$

Logo, $\lim_{n\to\infty} s'_n = s$, ou seja, $\sum x_n = \sum x_{\phi(n)}$, para toda bijeção $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Isso mostra que uma série convergente de parcelas não negativas é comutativamente convergente.

Considere agora $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência qualquer tal que $\sum x_n$ seja absolutamente convergente. Tome

$$\begin{aligned} p_n &= \begin{cases} x_n, & \text{se } x_n > 0 \\ 0, & \text{se } x_n \leq 0 \end{cases}, \\ q_n &= \begin{cases} 0, & \text{se } x_n > 0 \\ -x_n, & \text{se } x_n \leq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Observe que $\sum x_n = \sum p_n - \sum q_n$ e que $p_n, q_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, pelo que provamos na primeira parte dessa demonstração, $\sum p_n$ e $\sum q_n$ são comutativamente convergentes. Além disso, qualquer permutação dos termos de (x_n) pode ser reescrita como uma permutação dos termos de (p_n) e (q_n). Sendo $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção, basta tomar $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijeções tais que $\phi_1(i) \neq \phi_1(j)$ e $\phi_2(i) \neq \phi_2(j)$, para todos $i, j \in \mathbb{N}$ com $i \neq j$, e

$$\begin{aligned} \phi_1(n) &= \phi(n), \text{ se } x_{\phi(n)} > 0, \text{ e} \\ \phi_2(n) &= \phi(n), \text{ se } x_{\phi(n)} < 0, \end{aligned}$$

daí, $x_{\phi(n)} = p_{\phi_1(n)} - q_{\phi_2(n)}$.

Então a convergência comutativa de $\sum p_n$ e $\sum q_n$ implicam na convergência comutativa de $\sum x_n$, não só isso, $\sum x_n = \sum x_{\phi(n)}$, para toda bijeção $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. $\square$

Note que não nos preocupamos com a convergência de $\sum p_n$ e $\sum q_n$ na demonstração. Na verdade ambas são convergentes. Da definição de p_n e q_n, temos que para todo $n \in \mathbb{N}$ $p_n, q_n \leq |x_n|$. Logo, uma vez que estamos supondo que $\sum |x_n|$ é convergente, do Teorema 1.1, $\sum p_n$ e $\sum q_n$ são convergentes.

3.2 O Teorema de Riemann

O teorema da seção anterior nos dá uma condição suficiente para uma série ser comutativamente convergente. No entanto, como já deve ter ficado claro, nem todas as séries satisfazem essa propriedade.

Já no século XIX Dirichlet encontrou um exemplo de rearranjo da Série Harmônica Alternada que não convergia para o mesmo valor da série original. Esse se tornou um exemplo clássico que pode ser encontrado em [6], [7], [4]. Esse exemplo consiste em mostrar que a soma

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

é igual a $\frac{3}{2}$ do valor da soma

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots . \tag{3.3}$$

De fato, suponha que (3.3) convirja para s (já sabemos que é convergente pelo Teorema 2.3), ou seja

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots , \tag{3.4}$$

daí, multiplicando ambos os membros da igualdade (3.4) por $\dfrac{1}{2}$, vem que

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

e, adicionando zeros antes da primeira parcela e entre duas parcelas quaisquer na igualdade anterior, temos

$$\frac{s}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + \cdots . \tag{3.5}$$

Somando membro a membro as equações (3.4) e (3.5), segue que:

$$\frac{3}{2}s = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

Ou seja, o valor da série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ é alterado ao se reordenar seus termos de uma forma conveniente.

Riemann também estudou os rearranjos de séries. Ele provou o teorema que garante que qualquer número real pode ser obtido por meio de uma soma infinita. Não só isso, dada uma série condicionalmente convergente, ao se rearranjar de forma adequada os seus termos a soma resultante é igual a um número real qualquer dado previamente.

Teorema 3.2 (Riemann) *Dados um número real S fixo e uma série $\sum x_n$ condicionalmente convergente, existe uma reordenação $\sum y_n$ da série $\sum x_n$, i.e., $\sum y_n = \sum x_{\phi(n)}$, em que $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma bijeção, de modo que $\sum y_n = S$.*

Demonstração: Seja $\sum x_n$ uma série condicionalmente convergente. Nesse caso, as sequências, p_n, dos termos positivos, $p_n = x_n$ se $x_n > 0$, caso contrário, $p_n = 0$, e q_n, dos termos negativos, $q_n = x_n$ se $x_n < 0$ e $q_n = 0$ se $x_n \geq 0$, de x_n são tais que $\sum p_n = +\infty$ e $\sum q_n = -\infty$, uma vez que $\sum_{k=1}^{n} p_k$ e $\sum_{k=1}^{n} q_k$ são monótonas ($\sum_{k=1}^{n} p_k$ crescente e $\sum_{k=1}^{n} q_k$ decrescente), p_n e $|q_n|$ são subsequências de $|x_n|$ e $\sum |x_n|$ não é convergente.

Considere o seguinte rearranjo de $\sum x_n$:

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} + q_1 + q_2 + \cdots + q_{m_1} + p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + \cdots + \\ p_{n_2} + q_{m_1+1} + q_{m_1+2} + \cdots + q_{m_2} + \cdots , \end{aligned} \tag{3.6}$$

em que n_k e m_k são tais que a soma parcial, s'_{n_k}, desse rearranjo até o termo p_{n_k} satisfaz $s'_{n_k} \geq S$ e $s'_{n_k-1} \leq S$ e a soma parcial, s'_{m_k}, desse rearranjo até o termo q_{m_k} satisfaz $s'_{m_k} \leq S$ e $s'_{m_k-1} \geq S$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Daí, para todo $k \in \mathbb{N}$, se $n_k \leq i \leq n_{k+1}$, $S + q_{m_k} \leq s'_i \leq S + p_{n_k}$. Ignorando os termos nulos de p_n e q_n, as sequências resultantes são subsequências de x_n, portanto, como $\sum x_n$ é convergente, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} q_n = 0$. Tomando $n_k \leq i \leq n_{k+1}$, se k tende ao infinito, o mesmo acontece com i, sendo assim $S = \lim\limits_{k\to\infty} S + q_{m_k} \leq \lim\limits_{i\to\infty} s'_i \leq \lim\limits_{k\to\infty} S + p_{n_k} = S$, ou seja, (3.6) converge para S como desejávamos. $\square$

Esse é um teorema é clássico, e aparece em muitas das referências que tratam de rearranjo de séries.

Sua demonstração nos dá uma ideia de como proceder para que a soma de uma série condicionalmente convergente seja igual a um $s \in \mathbb{R}$ desejado. No entanto, tendo um rearranjo de alguma série condicionalmente convergente, não temos uma maneira de saber qual será o valor resultante do rearranjo.

Por exemplo, se quiséssemos saber o valor da série

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

o Teorema 3.2 não nos dá qualquer pista. Nem mesmo para calcular o valor da *SHA*. De fato, ao calcularmos algumas de suas somas parciais, $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, temos:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 \\
s_2 &= \frac{1}{2} = 0,5 \\
s_3 &= \frac{5}{6} = 0,8\overline{3} \\
s_4 &= \frac{7}{12} = 0,58\overline{3} \\
s_5 &= \frac{47}{60} = 0,78\overline{3} \\
s_6 &= \frac{37}{60} = 0,61\overline{6}
\end{aligned}$$

o que não nos dá qualquer dica da convergência dessa série.

Já sabemos no entanto que ela é convergente, desde que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, o Teorema 2.3 garante que existe $\lim_{n\to\infty} s_n$. Vamos utilizar uma estratégia parecida com o que faremos na demonstração do teorema do próximo capítulo para encontrar o valor da *SHA*. Observe que a sequência dada por $s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ é subsequência de (s_n) e

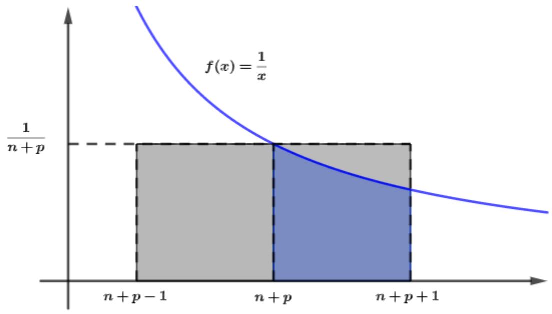
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{2k-1} + \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k} \right) - \frac{1}{2k} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} \right) + \sum_{k=1}^{n} -2\frac{1}{2k} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Agora, observe o gráfico da Figura 3.1 que ilustra a seguinte desigualdade:

$$\int_{n+p}^{n+p+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n+p} \leq \int_{n+p-1}^{n+p} \frac{dx}{x},$$

para quaisquer $n, p \in \mathbb{N}$.

Figura 3.1: Ilustração da desigualdade entre a $(n+p)$-ésima parcela da série harmônica e as integrais da função proporção inversa nos intervalos $[n+p-1, n+p]$ e $[n+p, n+p+1]$.



Fonte: O autor.

Daí,

$$\sum_{p=1}^{n} \int_{n+p}^{n+p+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{n+p} \leq \sum_{p=1}^{n} \int_{n+p-1}^{n+p} \frac{dx}{x}$$

o que equivale a

$$\begin{aligned} \int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x} \quad &\leq \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq \int_{n}^{2n} \frac{dx}{x} \\ \Leftrightarrow \ln(2n+1) - \ln(n+1) \quad &\leq \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq \ln(2n) - \ln(n) \\ \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \quad &\leq \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq \ln\left(\frac{2n}{n}\right) \end{aligned}$$

e, fazendo n tender ao infinito

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \quad \leq \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2n}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln(2) \quad \leq \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq \ln(2).$$

Daí, e da igualdade (3.7), s_{2n} converge para $\ln(2)$ e, consequentemente, a *SHA* converge para $\ln(2)$, i.e., $\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

Finalizando esta seção, observamos que uma série é comutativamente convergente se, e somente se, for absolutamente convergente. Com efeito, suponha que $\sum x_n$ seja uma série comutativamente convergente. Obviamente $\sum x_n$ não é divergente ($\sum x_{\phi(n)}$ é convergente para toda bijeção $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, em particular, $\phi(n) = n$), então só pode ser condicionalmente convergente ou absolutamente convergente. Se $\sum x_n$ for absolutamente convergente não há o que fazer. Suponha então que $\sum x_n$ convirja condicionalmente para um número real l fixo. Ora, do Teorema 3.2, existe uma bijeção $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\sum x_{\phi(n)} = l - 1$, o que é um absurdo pois $\sum x_n$ é comutativamente convergente. A recíproca segue do Teorema 3.1.

4 TEOREMA DE OHM

O nome Ohm é muito conhecido no meio da Física devido as Leis de Ohm formuladas pelo físico e matemático alemão Georg Simon Ohm (1789-1854) e pela unidade de medida que leva seu sobrenome, ohm, denotado geralmente por Ω, em homenagem ao mesmo. Já seu irmão talvez não tenha tanta fama, mas também foi matemático e é o responsável pelo teorema que dá nome a este capítulo. Martin Ohm, conseguiu seu doutorado em 1811 pela Universidade de Erlangen-Nuremberg. Anos mais tarde, foi professor na Universidade de Berlin, onde desenvolveu a teoria geral de exponenciais a^b com $a, b \in \mathbb{C}$ e pode ter sido o primeiro a usar o termo "segmento áureo".

4.1 O Teorema de Ohm

Relembrando o que vimos na seção 3.2 do capítulo anterior, o Teorema 3.2 é um resultado surpreendente, uma vez que nos mostra que a ordem das parcelas de uma soma infinita não só influencia no resultado como podem gerar qualquer número real. No entanto, o algoritmo usado na demonstração não é útil caso queiramos calcular o valor de um rearranjo dado.

O teorema que será apresentado nesse capítulo resolve justamente esse problema, nos dando o valor exato da soma para determinados rearranjos da Série Harmônica Alternada.

Doravante, denotaremos por $\sum a_{\phi(n)}$, sendo $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção específica, o rearranjo da SHA de acordo com o enunciado do próximo teorema.

Teorema 4.1 *(Teorema de Ohm): Sejam p, q números inteiros positivos. O rearranjo da Série Harmônica Alternada denotado por $\sum a_{\phi(n)}$, colocando os p primeiros termos positivos, depois os q primeiros negativos, em seguida os próximos p positivos depois os q próximos negativos e sucessivamente, como segue,*

$$\sum a_{\phi(n)} = \underbrace{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}}_{p\ termos} - \underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2q}}_{q\ termos} + \underbrace{\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{2p+3}+\cdots+\frac{1}{4p-1}}_{p\ termos}$$
$$- \underbrace{\frac{1}{2q+2}-\frac{1}{2q+4}-\cdots-\frac{1}{4q}}_{q\ termos} + \cdots$$

converge, e

$$\sum a_{\phi(n)} = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right).$$

Introduziremos agora algumas notações necessárias para a demonstração desse teorema. Sejam $H'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ a n-ésima soma parcial da SHA, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\phi(k)}$ a n-ésima soma parcial de $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)}$ e $R_n(p,q)$ a $n(p+q)$-ésima soma parcial de $\sum a_{\phi(n)}$, i.e.,

$$\begin{aligned} R_n(p,q) = &\underbrace{1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1}}_{p \text{ termos}} - \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2q}}_{q \text{ termos}} \\ &+ \cdots + \underbrace{\frac{1}{2(n-1)p+1} + \frac{1}{2(n-1)p+3} + \cdots + \frac{1}{2np-1}}_{p \text{ termos}} \\ &\underbrace{- \frac{1}{2(n-1)q+2} - \frac{1}{2(n-1)q+4} - \cdots - \frac{1}{2nq}}_{q \text{ termos}}, \end{aligned}$$

$p, q, n \in \mathbb{N}$.

Devido a sua extensão, a demonstração desse teorema será dividida em três partes, uma para cada possibilidade a seguir:

1) $p = q$;
2) $p > q$;
3) $p < q$.

Em cada caso provaremos que existe uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e uma sequência $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $R_n(p,q) = H'_{f(n)} + r_n$, e então demonstraremos que

$$\lim_{n\to\infty} R_n(p,q) = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right).$$

4.2 O rearranjo $R(p,q)$

4.2.1 Caso $p = q$

Nesta seção provaremos que se $p, q \in \mathbb{N}$ e $p = q$ então $R_n(p,q) = H'_{f(n)} + r_n$ sendo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ função tal que $f(n) = 2pn$ e $r_n = 0$ para todo n, implicando que o rearranjo $\sum a_{\phi(n)}$ não altera a soma, ou seja, $\sum a_{\phi(n)} = \lim_{n\to\infty} R_n(p,p) = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Primeiro, vejamos um exemplo:

Exemplo 4.1 *Mostrar que* $\lim_{n\to\infty} R_n(4,4) = \lim_{n\to\infty} H'_n$.
Demonstração:

Ora,

$$R_1(4,4) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} = H'_8 = H'_{8\cdot 1}.$$

Suponha que $R_n(4,4) = H'_{8n}$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$.

Da definição de $R_n(p,q)$ *vem que:*

$$\begin{aligned} R_{n+1}(4,4) &= \sum_{k=1}^{8(n+1)} a_{\phi(k)} = \sum_{k=1}^{8n} a_{\phi(k)} + \sum_{k=8n+1}^{8(n+1)} a_{\phi(k)} \\ &= R_n(4,4) + \frac{1}{2n\cdot 4+1} + \frac{1}{2n\cdot 4+3} + \frac{1}{2n\cdot 4+5} + \frac{1}{2(n+1)\cdot 4-1} \\ &- \frac{1}{2n\cdot 4+2} - \frac{1}{2n\cdot 4+4} - \frac{1}{2n\cdot 4+6} - \frac{1}{2(n+1)\cdot 4} \end{aligned}$$

Como supomos que $R_n(4,4) = H'_{8n}$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} R_{n+1}(4,4) = H'_{8n} &+ \frac{1}{2n\cdot 4+1} - \frac{1}{2n\cdot 4+2} + \frac{1}{2n\cdot 4+3} - \frac{1}{2n\cdot 4+4} \\ &+ \frac{1}{2n\cdot 4+5} - \frac{1}{2n\cdot 4+6} + \frac{1}{2(n+1)\cdot 4-1} - \frac{1}{2(n+1)\cdot 4} \\ &= H'_{8(n+1)}. \end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio da Indução Finita, $R_n(4,4) = H'_{8n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Desde que $(H'_{8n})_{n\in\mathbb{N}}$ *é subsequência de* $(H'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *segue que*

$$\ln(2) = \lim_{n\to\infty} H'_n = \lim_{n\to\infty} H'_{8n} = \lim_{n\to\infty} R_n(4,4).$$

□

Provemos agora o caso geral com $p, q \in \mathbb{N}$ e $p = q$.

Teorema 4.2 *Seja* p *inteiro positivo. Para todo* $n \in \mathbb{N}$, *temos:*

I) $R_n(p,p) = H'_{2pn}$,

II) $\sum a_{\phi(n)} = \lim_{n\to\infty} R_n(p,p) = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Demonstração:

I) $R_n(p,p) = H'_{2pn}$:

Para $n = 1$ temos:

$$\begin{aligned} R_1(p,p) &= 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2p} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p} \\ &= H'_{2p\cdot 1} \end{aligned}$$

Suponha que $R_n(p,p) = H'_{2pn}$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Daí, e da definição de $R_n(p,q)$, vem:

$$\begin{aligned} R_{n+1}(p,p) = R_n(p,p) &+ \frac{1}{2np+1} + \frac{1}{2np+3} + \cdots + \frac{1}{2(n+1)p-1} \\ &- \frac{1}{2np+2} - \frac{1}{2np+4} - \cdots - \frac{1}{2(n+1)p} \\ &= H'_{2pn} + \frac{1}{2np+1} - \frac{1}{2np+2} + \frac{1}{2np+3} \\ &- \frac{1}{2np+4} + \cdots + \frac{1}{2(n+1)p-1} - \frac{1}{2(n+1)p} \\ &= H'_{2(n+1)p}. \end{aligned}$$

Assim, pelo *Princípio da Indução Finita*, $R_n(p,p) = H'_{2pn}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

II) $\sum a_{\phi(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} R_n(p,p) = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$:

De I), uma vez que $(H'_{2pn})_{n\in\mathbb{N}}$ é subsequência de $(H'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, segue que $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(p,p) = \lim\limits_{n\to\infty} H'_n = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Resta mostrar que $\sum a_{\phi(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} R_n(p,p)$, ou seja, $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{n\to\infty} R_n(p,p)$.

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $2pn \le k < 2p(n+1)$ e $d_k = S_k - R_n(p,p)$. Daí, $k - 2pn \le 2p-1$.

De I), $R_n(p,p) = H'_{2pn}$, assim:

$$d_k = S_k - R_n(p,p) = S_k - H'_{2pn} = S_k - S_{2pn}$$

Portanto, d_k é a soma de $k-2pn$ parcelas, ou seja, existem $x_1, x_2, ..., x_{k-2pn} \in \mathbb{R}$ tais que $d_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-2pn}$ e $|x_i| \le \frac{1}{2pn+1}$, $\forall i \in \{1, 2, ..., k-2pn\}$. Mas $k - 2pn \le 2p-1$, logo

$$|d_k| = |x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-2pn}| \le |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_{k-2pn}| \le \frac{2p-1}{2pn+1}.$$

Daí, e do fato de que $n \to \infty$ se, e só se, $k \to \infty$,

$$0 = \lim_{n\to\infty} -\frac{2p-1}{2pn+1} \le \lim_{n\to\infty} d_k \le \lim_{n\to\infty} \frac{2p-1}{2pn+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d_k = 0.$$

Portanto $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{n\to\infty} R_n(p,p)$.

Concluímos então que $\sum a_{\phi(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} R_n(p,p) = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{p}\right) = \ln(2)$, em que $p = q \in \mathbb{N}$

$\square$

4.2.2 Caso $p > q$

Vejamos inicialmente um exemplo do caso $p > q$.

Exemplo 4.2 *Mostrar que*

$$R_n(4,2) = H'_{2\cdot n\cdot 4} + \left(\frac{1}{2\cdot n\cdot 2+2} + \frac{1}{2\cdot n\cdot 2+4} + \cdots + \frac{1}{2\cdot n\cdot 4}\right).$$

Demonstração: Observe que, pela definição de $R_n(p,q)$,

$$\begin{aligned} R_n(p,q) &= \left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2q}\right) + \cdots \\ &+ \left(\frac{1}{2(n-1)p+1} + \frac{1}{2(n-1)p+3} + \cdots + \frac{1}{2np-1}\right) \\ &- \left(\frac{1}{2(n-1)q+2} + \frac{1}{2(n-1)q+4} + \cdots + \frac{1}{2nq}\right) \end{aligned}$$

para todos $n, p, q \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\begin{aligned} R_n(4,2) &= \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) + \cdots + \\ &+ \left(\frac{1}{2\cdot 4(n-1)+1} + \frac{1}{2\cdot 4(n-1)+3} + \frac{1}{2\cdot 4(n-1)+5} + \frac{1}{2\cdot 4n-1}\right) \\ &- \left(\frac{1}{2\cdot 2(n-1)+2} + \frac{1}{2\cdot 2n}\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) + \cdots + \\ &+ \left(\frac{1}{2\cdot 4(n-1)+1} + \frac{1}{2\cdot 4(n-1)+3} + \frac{1}{2\cdot 4(n-1)+5} + \frac{1}{2\cdot 4n-1}\right) \\ &- \left(\frac{1}{2\cdot 2(n-1)+2} + \frac{1}{2\cdot 2n}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{2\cdot 2n+2} + \frac{1}{2\cdot 2n+4} + \cdots + \frac{1}{2\cdot 4n}\right. \\ &- \left.\frac{1}{2\cdot 2n+2} - \frac{1}{2\cdot 2n+4} - \cdots - \frac{1}{2\cdot 4n}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2\cdot 4n}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{2\cdot 2n+2} + \frac{1}{2\cdot 2n+4} + \cdots + \frac{1}{2\cdot 4n}\right) \\ &= H'_{2\cdot 4n} + \left(\frac{1}{2\cdot 2n+2} + \frac{1}{2\cdot 2n+4} + \cdots + \frac{1}{2\cdot 4n}\right) \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 4.3 *Sejam p e q inteiros positivos com $p > q$. Para todo $n \in \mathbb{N}$:*

I) $R_n(p,q) = H'_{2pn} + \left(\frac{1}{2\cdot qn+2} + \frac{1}{2\cdot qn+4} + \cdots + \frac{1}{2\cdot pn}\right)$,

II) $\sum a_{\phi(n)} = \lim_{n\to\infty} R_n(p,q) = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$.

Demonstração:

I) Da definição de $R_n(p,q)$ temos:

$$\begin{aligned}
R_n(p,q) &= \left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2q}\right)+\cdots\\
&+ \left(\frac{1}{2(n-1)p+1}+\frac{1}{2(n-1)p+3}+\cdots+\frac{1}{2np-1}\right)\\
&- \left(\frac{1}{2(n-1)q+2}+\frac{1}{2(n-1)q+4}+\cdots+\frac{1}{2nq}\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2q}\right)+\cdots\\
&+ \left(\frac{1}{2(n-1)p+1}+\frac{1}{2(n-1)p+3}+\cdots+\frac{1}{2np-1}\right)\\
&- \left(\frac{1}{2(n-1)q+2}+\frac{1}{2(n-1)q+4}+\cdots+\frac{1}{2nq}\right)\\
&+ \left(-\frac{1}{2nq+2}-\frac{1}{2nq+4}-\cdots-\frac{1}{2np}\right.\\
&+ \left.\frac{1}{2nq+2}+\frac{1}{2nq+4}+\cdots+\frac{1}{2np}\right). \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

Na igualdade acima, adicionamos e subtraímos as parcelas negativas de modo a termos a mesma quantidade de parcelas positivas e negativas, no entanto isso gera parcelas positivas extras que estão entre o terceiro e quarto parêntese na próxima igualdade. De (4.1),

$$\begin{aligned}
R_n(p,q) &= \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2np-1}-\frac{1}{2np}\right)\\
&+ \left(\frac{1}{2nq+2}+\frac{1}{2nq+4}+\cdots+\frac{1}{2np}\right)\\
&= H'_{2np}+\left(\frac{1}{2nq+2}+\frac{1}{2nq+4}+\cdots+\frac{1}{2np}\right).
\end{aligned}$$

II) Mostraremos agora que $\sum a_{\phi(n)} = \lim_{n\to\infty} R_n(p,q) = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$. De I), $R_n(p,q) = H'_{2pn} + \left(\frac{1}{2\cdot qn+2} + \frac{1}{2\cdot qn+4} + \cdots + \frac{1}{2\cdot pn}\right)$ e, como H'_{2pn} é uma subsequencia de H'_n que nós já sabemos que converge para $\ln 2$ quando $n \to \infty$, resta mostrar que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\cdot qn+2}+\frac{1}{2\cdot qn+4}+\cdots+\frac{1}{2\cdot pn}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$.

Ora,

$$\left(\frac{1}{2\cdot qn+2}+\frac{1}{2\cdot qn+4}+\cdots+\frac{1}{2\cdot pn}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{qn+1}+\frac{1}{qn+2}+\cdots+\frac{1}{pn}\right)$$

mas

$$\left(\frac{1}{qn+1}+\frac{1}{qn+2}+\cdots+\frac{1}{pn}\right)\leq\int_{qn}^{pn}\frac{1}{x}dx.$$

Provemos essa desigualdade.

Qualquer que seja $x\in\mathbb{R}, x>-1$ tem-se [1]

$$\frac{x}{x+1}\leq\ln(1+x)$$

daí, como $qn\geq 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{qn+1} &= \frac{\frac{1}{qn}}{1+\frac{1}{qn}}\\
&\leq \ln\left(1+\frac{1}{qn}\right)\\
&= \ln\left(\frac{qn+1}{qn}\right)\\
&= \ln(qn+1)-\ln(qn)\\
&= \int_{1}^{qn+1}\frac{1}{x}dx-\int_{1}^{qn}\frac{1}{x}dx\\
&= \int_{1}^{qn+1}\frac{1}{x}dx+\int_{qn}^{1}\frac{1}{x}dx\\
&= \int_{qn}^{qn+1}\frac{1}{x}dx.
\end{aligned}$$

Suponha agora

$$\left(\frac{1}{qn+1}+\frac{1}{qn+2}+\cdots+\frac{1}{qn+k}\right)\leq\int_{qn}^{qn+k}\frac{1}{x}dx$$

para algum $k\in\mathbb{N}$.

---

[1] A função $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{x+1}$ tem derivada positiva para $x>0$ e negativa para $-1<x<0$, mas $f(0)=0$, então o resultado segue.

Daí, usando o mesmo argumento anterior

$$\begin{aligned}
\frac{1}{qn+k+1} &= \frac{\dfrac{1}{qn+k}}{1+\dfrac{1}{qn+k}} \\
&\leq \ln\left(1+\frac{1}{qn+k}\right) \\
&= \ln\left(\frac{qn+k+1}{qn+k}\right) \\
&= \ln(qn+k+1)-\ln(qn+k) \\
&= \int_1^{qn+k+1}\frac{1}{x}dx - \int_1^{qn+k}\frac{1}{x}dx \\
&= \int_1^{qn+k+1}\frac{1}{x}dx + \int_{qn+k}^{1}\frac{1}{x}dx \\
&= \int_{qn+k}^{qn+k+1}\frac{1}{x}dx.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\int_{qn}^{qn+k+1}\frac{1}{x}dx = \int_{qn}^{qn+k}\frac{1}{x}dx + \int_{qn+k}^{qn+k+1}\frac{1}{x}dx$$

então, da hipótese de indução,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{qn+1}+\frac{1}{qn+2}+\cdots+\frac{1}{qn+k}+\frac{1}{qn+k+1}\right) &\leq \int_{qn}^{qn+k}\frac{1}{x}dx + \int_{qn+k}^{qn+k+1}\frac{1}{x}dx \\
&= \int_{qn}^{qn+k+1}\frac{1}{x}dx.
\end{aligned}$$

Logo, do *Princípio da Indução*,

$$\left(\frac{1}{qn+1}+\frac{1}{qn+2}+\cdots+\frac{1}{qn+k}+\frac{1}{qn+k+1}\right) \leq \int_{qn}^{qn+k+1}\frac{1}{x}dx$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Uma vez que $pn = qn + k$, com $k \in \mathbb{N}$, pois $p > q$, então

$$\left(\frac{1}{qn+1}+\frac{1}{qn+2}+\cdots+\frac{1}{pn}\right) \leq \int_{qn}^{pn}\frac{1}{x}dx.$$

Daí, temos que

$$\left(\frac{1}{2qn+2}+\frac{1}{2qn+4}+\cdots+\frac{1}{2pn}\right) \leq \frac{1}{2}\int_{qn}^{pn}\frac{1}{x}dx, \tag{4.2}$$

como desejávamos.

Por outro lado, para todo $z \in \mathbb{R}, z > -1$, tem-se [1]

$$\ln(1+z) \leq z.$$

Então, fazendo $z = \dfrac{1}{x}$, sendo $x \in \mathbb{R}, x > 1$

$$\begin{aligned} \int_x^{x+1} \frac{1}{y} dy &= \ln(x+1) - \ln(x) \\ &= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ &= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \\ &\leq \frac{1}{x} \end{aligned}$$

e, em particular, fazendo $x = qn + k$,com $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{qn+k}^{qn+k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{qn+k}$$

daí

$$\begin{aligned} \int_{qn+1}^{pn+1} \frac{1}{x} dx &= \int_{qn+1}^{qn+2} \frac{1}{x} dx \int_{qn+2}^{qn+3} \frac{1}{x} dx + \cdots + \int_{pn}^{pn+1} \frac{1}{x} dx \\ &\leq \frac{1}{qn+1} + \frac{1}{qn+2} + \cdots + \frac{1}{pn} \end{aligned}$$

o que implica

$$\frac{1}{2} \int_{qn+1}^{pn+1} \frac{1}{x} dx \leq \left(\frac{1}{2qn+2} + \frac{1}{2qn+4} + \cdots + \frac{1}{2pn}\right). \tag{4.3}$$

Assim, de (4.2) e (4.3),

$$\frac{1}{2} \int_{qn+1}^{pn+1} \frac{1}{x} dx \leq \left(\frac{1}{2qn+2} + \frac{1}{2qn+4} + \cdots + \frac{1}{2pn}\right) \leq \frac{1}{2} \int_{qn}^{pn} \frac{1}{x} dx. \tag{4.4}$$

Observe que

$$\int_{qn+1}^{pn+1} \frac{1}{x} dx = \ln(pn+1) - \ln(qn+1) = \ln\left(\frac{pn+1}{qn+1}\right)$$

[1] A função $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x - \ln(1+x)$ tem derivada positiva para $x > 0$ e negativa para $-1 < x < 0$, mas $f(0) = 0$, então o resultado segue.

e

$$\int_{qn}^{pn} \frac{1}{x} dx = \ln(pn) - \ln(qn) = \ln\left(\frac{pn}{qn}\right) = \ln\left(\frac{p}{q}\right).$$

Daí, e de (4.4), segue que

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{pn+1}{qn+1}\right) \leq \left(\frac{1}{2qn+2} + \frac{1}{2qn+4} + \cdots + \frac{1}{2pn}\right) \leq \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right). \tag{4.5}$$

Sendo assim,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{px+1}{qx+1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right).$$

Então, pelo *Teorema do Confronto* e por (4.5),

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2qn+2} + \frac{1}{2qn+4} + \cdots + \frac{1}{2pn}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right). \tag{4.6}$$

Uma vez que $R_n(p,q) = H'_{2pn} + \left(\frac{1}{2\cdot qn+2} + \frac{1}{2\cdot qn+4} + \cdots + \frac{1}{2\cdot pn}\right)$ e H'_{2pn} converge para $\ln 2$ quando $n \to \infty$, concluímos então por (4.6) que

$$\sum a_{\phi(n)} = \lim_{n\to\infty} R_n(p,q) = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right).$$

□

4.2.3 Caso $q > p$

Já provamos que $\lim_{n\to\infty} R_n(p,q) = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$ para $p = q$ e $p > q$. Resta provar então o caso $q > p$, o que faremos nesta seção. Mas, como fizemos nas seções anteriores, vamos verificar o que acontece num caso particular e então provamos o caso genérico.

Exemplo 4.3 *Provar que* $R_n(1,3) = H'_{2n\cdot 3} - \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{2n\cdot 3 - 1}\right)$.

Demonstração: Observe que, pela definição de $R_n(p,q)$,

$$\begin{aligned} R_n(p,q) &= \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2q}\right) + \cdots \\ &+ \left(\frac{1}{2(n-1)p+1} + \frac{1}{2(n-1)p+3} + \cdots + \frac{1}{2np-1}\right) \\ &- \left(\frac{1}{2(n-1)q+2} + \frac{1}{2(n-1)q+4} + \cdots + \frac{1}{2nq}\right) \end{aligned}$$

para todos $n, p, q \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\begin{aligned} R_n(1,3) &= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1}\right) \\ &- \left(\frac{1}{2(n-1)3+2} + \frac{1}{2(n-1)3+4} + \frac{1}{2n \cdot 3}\right). \end{aligned}$$

Como queremos que apareça $H'_{2n\cdot 3}$, somamos e subtraímos as parcelas com denominador ímpar que faltam de modo a gerar o $H'_{2n\cdot 3}$:

$$\begin{aligned} R_n(1,3) &= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1}\right) \\ &- \left(\frac{1}{2(n-1)3+2} + \frac{1}{2(n-1)3+4} + \frac{1}{2n \cdot 3}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{2n \cdot 3 - 1}\right) \\ &- \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{2n \cdot 3 - 1}\right). \end{aligned}$$

Reorganizando algumas parcelas, obtemos

$$\begin{aligned} R_n(1,3) &= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n\cdot 3 - 1} - \frac{1}{2n \cdot 3}\right) \\ &- \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{2n \cdot 3 - 1}\right) \\ &= H'_{2n\cdot 3} - \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{2n \cdot 3 - 1}\right). \end{aligned}$$

□

Vamos agora para o caso geral.

Teorema 4.4 *Sejam p e q inteiros positivos com $q > p$. Para todo $n \in \mathbb{N}$:*

I) $R_n(p,q) = H'_{2qn} - \left(\frac{1}{2pn+1} + \frac{1}{2pn+3} + \cdots + \frac{1}{2qn-1}\right)$,

II) $\sum a_{\phi(n)} = \lim_{n\to\infty} R_n(p,q) = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$.

Demonstração:

I) Da definição de $R_n(p,q)$ temos:

$$\begin{aligned} R_n(p,q) &= \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2q}\right) + \cdots \\ &+ \left(\frac{1}{2(n-1)p+1} + \frac{1}{2(n-1)p+3} + \cdots + \frac{1}{2np-1}\right) \end{aligned}$$

$$- \quad \left(\frac{1}{2(n-1)q+2} + \frac{1}{2(n-1)q+4} + \cdots + \frac{1}{2nq}\right)$$

para todos $n, p, q \in \mathbb{N}$. Daí, como $q > p$ e queremos escrever $R_n(p,q)$ em função de H_{2qn}, somamos e subtraímos as parcelas em função de p, i.e., com denominador ímpar, que faltam para completar H_{2qn}, isto é,

$$\begin{aligned}
R_n(p,q) &= \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2q}\right) + \cdots \\
&+ \left(\frac{1}{2(n-1)p+1} + \frac{1}{2(n-1)p+3} + \cdots + \frac{1}{2np-1}\right) \\
&- \left(\frac{1}{2(n-1)q+2} + \frac{1}{2(n-1)q+4} + \cdots + \frac{1}{2nq}\right) \\
&+ \left(\frac{1}{2pn+1} + \frac{1}{2pn+3} + \cdots + \frac{1}{2qn-1}\right) \\
&- \left(\frac{1}{2pn+1} + \frac{1}{2pn+3} + \cdots + \frac{1}{2qn-1}\right).
\end{aligned}$$

Reorganizando algumas parcelas, temos

$$\begin{aligned}
R_n(p,q) &= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2qn-1} - \frac{1}{2qn}\right) \\
&- \left(\frac{1}{2pn+1} + \frac{1}{2pn+3} + \cdots + \frac{1}{2qn-1}\right) \\
&= H'_{2qn} - \left(\frac{1}{2pn+1} + \frac{1}{2pn+3} + \cdots + \frac{1}{2qn-1}\right).
\end{aligned}$$

II) Vamos agora calcular o limite de $R_n(p,q)$ e, como fizemos no caso $p > q$, mostrar que $\sum a_{\phi(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} R_n(p,q) = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$. Mostremos então que

$$\lim_{n\to\infty} -\left(\frac{1}{2pn+1} + \frac{1}{2pn+3} + \cdots + \frac{1}{2qn-1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right).$$

Ora, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}, x > -1$,

$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x). \tag{4.7}$$

Daí, tomando $k \in \mathbb{N}$ e $x = \dfrac{1}{pn - \dfrac{1}{2}}$, uma vez que $p, n \geq 1$, temos:

$$\frac{1}{pn+\frac{1}{2}} = \frac{\dfrac{1}{pn-\frac{1}{2}}}{1 + \dfrac{1}{pn-\frac{1}{2}}} \overset{(4.7)}{\leq} \ln\left(1 + \frac{1}{pn-\frac{1}{2}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \ln\left(\frac{pn+\frac{1}{2}}{pn-\frac{1}{2}}\right) \\
&= \int_{pn-\frac{1}{2}}^{pn+\frac{1}{2}} \frac{1}{x}dx.
\end{aligned}
$$

Usando o mesmo argumento, temos, tomando $x = \dfrac{1}{pn + \dfrac{2k-1}{2}}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{pn+\frac{2k+1}{2}} = \frac{\dfrac{1}{pn+\frac{2k-1}{2}}}{1+\dfrac{1}{pn+\frac{2k-1}{2}}} &\overset{(4.7)}{\leq} \ln\left(1+\frac{1}{pn+\frac{2k-1}{2}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{pn+\frac{2k+1}{2}}{pn+\frac{2k-1}{2}}\right) \\
&= \int_{pn+\frac{2k-1}{2}}^{pn+\frac{2k+1}{2}} \frac{1}{x}dx.
\end{aligned}
$$

Como $q > p$, então $qn = pn+k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, o que implica $qn-\dfrac{1}{2} = pn+\dfrac{2k-1}{2}$, donde:

$$
\begin{aligned}
-\left(\frac{1}{2pn+1}+\frac{1}{2pn+3}+\cdots+\frac{1}{2qn-1}\right) &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{pn+\dfrac{1}{2}}+\frac{1}{pn+\dfrac{3}{2}}+\cdots+\frac{1}{qn-\dfrac{1}{2}}\right) \\
&\overset{(4.7)}{\geq} -\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{pn+\dfrac{1}{2}}{pn-\dfrac{1}{2}}\right)+\ln\left(\frac{pn+\dfrac{3}{2}}{pn+\dfrac{1}{2}}\right)\right. \\
&+ \left.\cdots+\ln\left(\frac{qn-\dfrac{1}{2}}{qn-\dfrac{3}{2}}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\int_{pn-\frac{1}{2}}^{pn+\frac{1}{2}}\frac{1}{x}dx+\int_{pn+\frac{1}{2}}^{pn+\frac{3}{2}}\frac{1}{x}dx+\cdots\right. \\
&+ \left.\int_{qn-\frac{3}{2}}^{qn-\frac{1}{2}}\frac{1}{x}dx\right) \\
&= -\frac{1}{2}\int_{pn-\frac{1}{2}}^{qn-\frac{1}{2}}\frac{1}{x}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{qn-\frac{1}{2}}^{pn-\frac{1}{2}}\frac{1}{x}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{pn-\frac{1}{2}}{qn-\frac{1}{2}}\right). \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, dado $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$,

$$\ln(1+x) \leq x.$$

Então, tomando $x = \dfrac{1}{pn + \frac{2k-1}{2}}$, com $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\int_{pn+\frac{2k-1}{2}}^{pn+\frac{2k+1}{2}} \frac{1}{x}dx = \ln\left(\frac{pn+\frac{2k+1}{2}}{pn+\frac{2k-1}{2}}\right) &= \ln\left(1+\frac{1}{pn+\frac{2k-1}{2}}\right) \\
&\overset{(4.9)}{\leq} \frac{1}{pn+\frac{2k-1}{2}}.
\end{aligned}$$

Daí, como $qn - \dfrac{1}{2} = pn + \dfrac{2k-1}{2}$, para algum $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ln\left(\frac{pn+\frac{1}{2}}{qn+\frac{1}{2}}\right) &= \frac{1}{2}\int_{qn+\frac{1}{2}}^{pn+\frac{1}{2}} \frac{1}{x}dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_{pn+\frac{1}{2}}^{qn+\frac{1}{2}} \frac{1}{x}dx \\
&= -\frac{1}{2}\left(\int_{qn-\frac{1}{2}}^{qn+\frac{1}{2}} \frac{1}{x}dx + \int_{qn-\frac{3}{2}}^{qn-\frac{1}{2}} \frac{1}{x}dx + \cdots \int_{pn+\frac{1}{2}}^{pn+\frac{3}{2}} \frac{1}{x}dx\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{qn+\frac{1}{2}}{qn-\frac{1}{2}}\right) + \ln\left(\frac{qn-\frac{1}{2}}{qn-\frac{3}{2}}\right) + \cdots \ln\left(\frac{pn+\frac{3}{2}}{pn+\frac{1}{2}}\right)\right) \\
&\overset{(4.9)}{\geq} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{pn+\dfrac{1}{2}} + \frac{1}{pn+\dfrac{3}{2}} + \cdots + \frac{1}{qn-\dfrac{1}{2}}\right) \\
&= -\left(\frac{1}{2pn+1} + \frac{1}{2pn+3} + \cdots + \frac{1}{2qn-1}\right).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

De (4.8) e (4.9),

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{pn-\frac{1}{2}}{qn-\frac{1}{2}}\right) \leq -\left(\frac{1}{2pn+1} + \frac{1}{2pn+3} + \cdots + \frac{1}{2qn-1}\right) \leq \frac{1}{2}\ln\left(\frac{pn+\frac{1}{2}}{qn+\frac{1}{2}}\right). \tag{4.10}$$

Mas,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{pn-\frac{1}{2}}{qn-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{pn+\frac{1}{2}}{qn+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right),$$

daí, de (4.10), pelo ***Teorema do Confronto***,

$$\lim_{n\to\infty} -\left(\frac{1}{2pn+1}+\frac{1}{2pn+3}+\cdots+\frac{1}{2qn-1}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$$

Então, por I), dados $p, q \in \mathbb{N}$,

$$\sum a_{\phi(n)} = \lim_{n\to\infty} R_n(p,q) = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right).$$

$\square$

Dos **Teorema 4.2**, **Teorema 4.3** e **Teorema 4.4**, concluímos o que desejávamos, i.e.,

$$\sum a_{\phi(n)} = \lim_{n\to\infty} R_n(p,q) = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$$

para todos $p, q \in \mathbb{N}$.

Isso prova que uma soma nem sempre é a mesma se comutarmos as parcelas. De fato, o ***Teorema de Ohm*** mostra que podemos usar a série harmônica alternada e reordenar seus termos de modo que a soma seja qualquer número que se possa escrever na forma $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$, com p e q inteiros positivos.

5 TEOREMA DE PRINGSHEIM

Alfred Pringsheim [10] (2 Setembro 1850 a 25 Junho 1941) foi um matemático alemão de família judia que trabalhou principalmente com funções reais e complexas. Graduou-se em Berlim em 1868 e submeteu sua tese de doutorado à Universidade de Munich em 1877, onde trabalhou durante toda a sua carreira.

Entre seus principais trabalhos há um critério analítico para uma função C^∞ em um intervalo ilimitado, cuja prova original de Pringsheim possuía um erro que foi corrigido posteriormente. Também publicou muitos trabalhos sobre análise complexa com foco na teoria da somabilidade de séries infinitas.

5.1 O Teorema de Pringsheim para a Série Harmônica Alternada

O ***Teorema de Ohm*** nos dá uma maneira de rearranjar os termos da Série Harmônica Alternada de modo a se conseguir qualquer soma na forma $\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$, com p e q inteiros positivos. Mas, e quanto a outras séries condicionalmente convergentes? Poderíamos rearranjar os termos de alguma outra série que não a harmônica alternada e obter uma fórmula parecida com a de Ohm? É isso que pretendemos estudar nesse capítulo.

Doravante, dada uma série $\sum a_{\phi(n)}$ que é um rearranjo da *SHA* como definido no enunciado do *Teorema 5.1* a seguir, denotaremos por p_n a quantidade de elementos positivos do conjunto $\{a_{\phi(1)}, a_{\phi(2)}, a_{\phi(3)}, ..., a_{\phi(n)}\}$.

Teorema 5.1 *Seja* $\sum a_{\phi(n)}$ *um rearranjo da SHA de tal modo em que* $a_{\phi(n)} > a_{\phi(n+k)}, k \in \mathbb{N}$, *sempre que* $\phi(n)$ *e* $\phi(n+k)$ *forem ambos pares, ou ambos ímpares. Esse rearranjo converge para um número real estendido se, e somente se,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{n}$$

existe. Nesse caso tem-se

$$\sum a_{\phi(n)} = \ln 2 + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(\frac{p_n}{n-p_n}\right)\right].$$

Antes de provarmos esse teorema vamos analisar alguns itens necessários para tal.

A sequência (E_n) definida por:

$$E_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n, n \in \mathbb{N}$$

é decrescente.

De fato, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k+1} - \int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx \leq 0$, somando $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i} - \ln k$ em ambos os membros dessa desigualdade vem que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}-\ln k+\frac{1}{k+1}-\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}dx\leq\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}-\ln k \;&\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i}-\ln(k+1)\leq\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}-\ln k\\ &\Leftrightarrow\; E_{k+1}\leq E_k.\end{aligned}$$

Além disso, (E_n) é convergente. Como, para todo $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, $\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k-1}$, daí

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{k}\int_{i-1}^{i}\frac{1}{x}dx\leq\sum_{i=2}^{k}\frac{1}{i-1} \;&\Leftrightarrow\; \ln k\leq\sum_{i=2}^{k}\frac{1}{i-1}\\ &\Leftrightarrow\; \ln k\leq\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i}\\ &\Leftrightarrow\; \ln k\leq\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i}+\frac{1}{k}\\ &\Leftrightarrow\; \ln k\leq\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\\ &\Leftrightarrow\; 0\leq\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}-\ln k.\end{aligned}$$

Então $E_k > 0$, para todo $k \geq 2$. Mas $E_1 = 1 > 0$. Logo $E_k > 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Ou seja, (E_n) é uma sequência monótona (decrescente) e limitada, a saber, $|E_n| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, (E_n) é convergente, pela Proposição 2.5.

Mais do que isso, como E_n pode ser reescrito como

$$E_n=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx\right),$$

então (E_n) é a sequência das somas parciais da série $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx\right)$ que é absolutamente convergente. Provemos isto:

Dado $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}\leq\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx\leq\frac{1}{k-1} \;&\Leftrightarrow\; 0\leq\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx-\frac{1}{k}\leq\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\\ &\Leftrightarrow\; \sum_{k=2}^{n}\left(\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx-\frac{1}{k}\right)\leq\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n}\left|\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx-\frac{1}{k}\right| \le \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\\
&\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n}\left|\frac{1}{k}-\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx\right| \le -\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)\\
&\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n}\left|\frac{1}{k}-\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx\right| \le -\left(\frac{1}{n}-1\right)\\
&\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left|\frac{1}{k}-\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx\right| \le \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\\
&\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left|\frac{1}{k}-\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx\right| \le 1.
\end{aligned}
$$

Logo, $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\left|\frac{1}{k}-\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx\right|$ converge, como desejávamos.

O limite de E_n quando n tende ao infinito é chamado de *constante de Euler-Mascheroni*, ou simplesmente *constante* γ *de Euler* devido ao fato de ele ter sido o primeiro a defini-la. A importância dessa constante não será discutida aqui, vale observar no entanto que a mesma aparece no cálculo de algumas integrais envolvendo a função exponencial e^x e tem relação com a função Zeta de Riemann.[1]

Agora podemos demonstrar o Teorema 5.1.

Demonstração:[Demonstração do Teorema 5.1]

Seja $\sum a_{\phi(n)}$ um rearranjo da *SHA* como no enunciado do Teorema 5.1.

Uma vez que há p_n parcelas positivas em $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{\phi(k)}$, então a quantidade de parcelas negativas nessa soma é $q_n = n - p_n$. Portanto, uma vez que as parcelas positivas são da forma $\dfrac{1}{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$ e as parcelas negativas são da forma $\dfrac{1}{2k}$, $k \ge 1$, podemos escrever

$$
\sum_{k=1}^{n} a_{\phi(k)} = \sum_{k=1}^{p_n}\frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{q_n}\frac{1}{2k}.
$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p_n}\frac{1}{2k-1} &= \sum_{k=1}^{p_n}\frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{p_n}\frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{p_n}\frac{1}{2k}\\
&= \sum_{k=1}^{2p_n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{p_n}\frac{1}{2k}\\
&= E_{2p_n} + \ln(2p_n) - \sum_{k=1}^{p_n}\frac{1}{2k}
\end{aligned}
$$

[1]Consulte [15]

$$
\begin{aligned}
&= E_{2p_n} + \ln(2p_n) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p_n}\frac{1}{k} \\
&= E_{2p_n} + \ln(2p_n) - \frac{1}{2}\left(E_{p_n} + \ln(p_n)\right).
\end{aligned}
$$

Da mesma forma, podemos reescrever $\displaystyle\sum_{k=1}^{q_n}\frac{1}{2k}$, como segue

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{q_n}\frac{1}{2k} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q_n}\frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2}\left(E_{q_n} + \ln(q_n)\right).
\end{aligned}
$$

Daí, uma vez que $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = \gamma$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_{\phi(k)} &= \lim_{n\to\infty}\left[E_{2p_n} + \ln(2p_n) - \frac{1}{2}\left(E_{p_n} + \ln(p_n)\right) - \frac{1}{2}\left(E_{q_n} + \ln(q_n)\right)\right] \\
&= \gamma + \lim_{n\to\infty}\left[\ln 2 + \ln(p_n)\right] - \frac{1}{2}\gamma - \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2}\ln(p_n) - \frac{1}{2}\gamma + \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2}\ln(q_n) \\
&= \ln 2 + \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(p_n) - \frac{1}{2}\ln(q_n)\right] \\
&= \ln 2 + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right] \\
&= \ln 2 + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(\frac{p_n}{n-p_n}\right)\right].
\end{aligned}
$$

□

O limite de $\dfrac{p_n}{n}$ quando n tende ao infinito é chamado de *densidade assintótica* dos termos positivos do rearranjo $\sum a_{\phi(n)}$. Tomando $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{n} = \alpha$, uma vez que $\dfrac{p_n}{n-p_n} = \dfrac{\frac{p_n}{n}}{1-\frac{p_n}{n}}$, se $\alpha \in \mathbb{R}$, então o Teorema 5.1 garante que

$$
\sum a_{\phi(n)} = \ln 2 + \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right].
$$

Verifiquemos que esse teorema realmente generaliza o *Teorema de Ohm* (uma prova alternativa pode ser encontrada em [12]). Suponha que façamos um rearranjo da *SHA* colocando as p primeiras parcelas positivas, depois as q primeiras parcelas negativas, então as p próximas positivas, em seguidas as q próximas negativas, e assim por diante, ou seja,

$$\sum a_{\phi(n)} = \underbrace{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}}_{p \text{ termos}} - \underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2q}}_{q \text{ termos}} + \underbrace{\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{2p+3}+\cdots+\frac{1}{4p-1}}_{p \text{ termos}}$$
$$- \underbrace{\frac{1}{2q+2}-\frac{1}{2q+4}-\cdots-\frac{1}{4q}}_{q \text{ termos}} + \cdots$$

Precisamos calcular a densidade assintótica das parcelas positivas desta série. Para simplificar, vejamos um exemplo de como fazer isso.

Exemplo 5.1 *Tomando $p = 2$ e $q = 3$, o rearranjo da SHA ficaria da seguinte forma:*

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots .$$

Sendo p_n a quantidade de parcelas positivas até a n-ésima parcela do rearranjo, temos

$$\begin{aligned}
\frac{p_1}{1} &= \frac{1}{1} = \frac{2\cdot 1 - 1}{5\cdot 1 - 4} = \frac{p\cdot 1 - (p-1)}{(p+q)\cdot 1 - ((p+q)-1)}\\
\frac{p_2}{2} &= \frac{2}{2} = \frac{2\cdot 1}{5\cdot 1 - 3} = \frac{p\cdot 1 - (p-2)}{(p+q)\cdot 1 - ((p+q)-2)}\\
\frac{p_3}{3} &= \frac{2}{3} = \frac{2\cdot 1}{5\cdot 1 - 2} = \frac{p\cdot 1 - (p-2)}{(p+q)\cdot 1 - ((p+q)-3)}\\
\frac{p_4}{4} &= \frac{2}{4} = \frac{2\cdot 1}{5\cdot 1 - 1} = \frac{p\cdot 1 - (p-2)}{(p+q)\cdot 1 - ((p+q)-4)}\\
\frac{p_5}{5} &= \frac{2}{5} = \frac{2\cdot 1}{5\cdot 1} = \frac{p\cdot 1 - (p-2)}{(p+q)\cdot 1 - ((p+q)-5)}\\
\frac{p_6}{6} &= \frac{3}{6} = \frac{2\cdot 2 - 1}{5\cdot 2 - 4} = \frac{p\cdot 2 - (p-1)}{(p+q)\cdot 2 - ((p+q)-1)}\\
\frac{p_7}{7} &= \frac{4}{7} = \frac{2\cdot 2}{5\cdot 2 - 3} = \frac{p\cdot 2 - (p-2)}{(p+q)\cdot 2 - ((p+q)-2)}\\
\frac{p_8}{8} &= \frac{4}{8} = \frac{2\cdot 2}{5\cdot 2 - 2} = \frac{p\cdot 2 - (p-2)}{(p+q)\cdot 2 - ((p+q)-3)}\\
\frac{p_9}{9} &= \frac{4}{9} = \frac{2\cdot 2}{5\cdot 2 - 1} = \frac{p\cdot 2 - (p-2)}{(p+q)\cdot 2 - ((p+q)-4)}\\
\frac{p_{10}}{10} &= \frac{4}{10} = \frac{2\cdot 2}{5\cdot 2} = \frac{p\cdot 2 - (p-2)}{(p+q)\cdot 2 - ((p+q)-5)}\\
\frac{p_{11}}{11} &= \frac{5}{11} = \frac{2\cdot 3 - 1}{5\cdot 3 - 4} = \frac{p\cdot 3 - (p-1)}{(p+q)\cdot 3 - ((p+q)-1)}\\
\frac{p_{12}}{12} &= \frac{6}{12} = \frac{2\cdot 3}{5\cdot 3 - 3} = \frac{p\cdot 3 - (p-2)}{(p+q)\cdot 3 - ((p+q)-2)}
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

Ou seja, podemos dividir a sequência $\frac{p_n}{n}$ *em* 5 *subsequências, a saber,* $\frac{2n-1}{5n-4}$, $\frac{2n}{5n-3}$, $\frac{2n}{5n-2}$, $\frac{2n}{5n-1}$ *e* $\frac{2n}{5n}$. *Ora,*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{5n-4} &= \frac{2}{5} = \frac{p}{p+q} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{5n-3} &= \frac{2}{5} = \frac{p}{p+q} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{5n-2} &= \frac{2}{5} = \frac{p}{p+q} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{5n-1} &= \frac{2}{5} = \frac{p}{p+q} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{5n} &= \frac{2}{5} = \frac{p}{p+q}.
\end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 2.4, a densidade assintótica das parcelas positivas do rearranjo é $\frac{2}{5}$.

Outro exemplo para fixar a ideia:

Exemplo 5.2 *Tomando agora* $p = 1$ *e* $q = 2$*, a sequência* $\frac{p_n}{n}$ *fica*

$$\begin{aligned}
\frac{p_1}{1} &= \frac{1}{1} = \frac{1}{3\cdot 1-2} = \frac{p\cdot 1-(p-1)}{(p+q)\cdot 1-((p+q)-1)} \\
\frac{p_2}{2} &= \frac{1}{2} = \frac{1}{3\cdot 1-1} = \frac{p\cdot 1-(p-1)}{(p+q)\cdot 1-((p+q)-2)} \\
\frac{p_3}{3} &= \frac{1}{3} = \frac{1}{3\cdot 1} = \frac{p\cdot 1-(p-1)}{(p+q)\cdot 1-((p+q)-3)} \\
\frac{p_4}{4} &= \frac{2}{4} = \frac{2}{3\cdot 2-2} = \frac{p\cdot 2-(p-1)}{(p+q)\cdot 2-((p+q)-1)} \\
\frac{p_5}{5} &= \frac{2}{5} = \frac{2}{3\cdot 2-1} = \frac{p\cdot 2-(p-1)}{(p+q)\cdot 2-((p+q)-2)} \\
\frac{p_6}{6} &= \frac{2}{6} = \frac{2}{3\cdot 2} = \frac{p\cdot 2-(p-1)}{(p+q)\cdot 2-((p+q)-3)} \\
\frac{p_7}{7} &= \frac{3}{7} = \frac{3}{3\cdot 3-2} = \frac{p\cdot 3-(p-1)}{(p+q)\cdot 3-((p+q)-1)} \\
\frac{p_8}{8} &= \frac{3}{8} = \frac{3}{3\cdot 3-1} = \frac{p\cdot 3-(p-1)}{(p+q)\cdot 3-((p+q)-2)}
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

As sequências $\frac{k}{3k-2}$, $\frac{k}{3k-1}$ *e* $\frac{k}{3k}$ *são subsequências da sequência* $\frac{p_n}{n}$ *e todas convergem para* $\dfrac{1}{3}$. *Logo, pela Proposição 2.4, a densidade assintótida do rearranjo da SHA para* $p = 1$ *e* $q = 2$ *é* $\frac{1}{3}$.

Nos dois exemplos que acabamos de apresentar, a estratégia para se calcular a densidade assintótica das parcelas positivas do rearranjo da *SHA* foi encontrar subsequências de $x_n = \frac{p_n}{n}$ que cobrem todos os elementos de (x_n) e cujos limites podem ser calculados facilmente.

Considere então um rearranjo da *SHA* como nos exemplos anteriores com p e q naturais quaisquer. Nesse caso as sequências

$$\frac{pn-(p-1)}{(p+q)n-(p+q-1)}, \frac{pn-(p-2)}{(p+q)n-(p+q-2)}, \frac{pn-(p-3)}{(p+q)n-(p+q-3)}, \dots,$$
$$\frac{pn-(p-(p-1))}{(p+q)n-(p+q-(p-1))}, \frac{pn}{(p+q)n-(q)}, \frac{pn}{(p+q)n-(q-1)}, \frac{pn}{(p+q)n-(q-2)}, \dots,$$
$$\frac{pn}{(p+q)n-(q-(q-1))} \text{ e } \frac{pn}{(p+q)n}$$

são subsequências da sequência $\frac{p_n}{n}$, e todas convergem para $\frac{p}{p+q}$. Então, da Proposição 2.4, a densidade assintótica das parcelas positivas desse rearranjo é

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n} = \frac{p}{p+q}.$$

Logo, pelo Teorema 5.1, o rearranjo converge para

$$\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{p}{p+q}}{1-\frac{p}{p+q}}\right) = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right),$$

como desejávamos.

5.2 O Teorema de Pringsheim Generalizado

O teorema da seção anterior ainda se aplicava apenas à *Série Harmônica Alternada*, mas ele mostra que o valor do rearranjo depende da sua densidade assintótica. No entanto, isso não vale para outras séries. É isso o que diz o próximo teorema cuja demonstração pode ser encontrada em [11].

Teorema 5.2 (Pringsheim) *Seja* (a_n) *uma sequência de números reais que satisfaz* $|a_i| \geq |a_j|$ *sempre que* $i < j, i, j \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *e* $a_{2k-1} > 0 > a_{2k}$, *com* $k \in \mathbb{N}$. *Temos:*

1. *Se* $\lim_{n\to\infty} n|a_n| = \infty$, *então há um rearranjo* $\sum a_{\phi(n)}$ *da série* $\sum a_n$, *com densidade assintótica* $\frac{1}{2}$ *tal que* $\sum a_{\phi(n)} = S$, *sendo* S *um número real qualquer.*

2. *Se* $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, *então qualquer rearranjo* $\sum a_{\phi(n)}$ *da série* $\sum a_n$, *cuja densidade assintótica* α *existe e* $0 < \alpha < 1$ *possui soma igual a série original, i.e.,* $\sum a_{\phi(n)} = \sum a_n$.

Simplificando, há séries que ao serem rearranjadas de forma a manter a densidade assintótica ainda podem ter resultados diferentes, ou rearranjos com densidades assintóticas diferentes ainda podem ter a mesma soma.

Observe que o Teorema 3.1 dá uma forma de descobrir a soma de uma reordenação da *SHA* em que as parcelas são reordenadas de uma forma muito específica colocando as p primeiras parcelas positivas, em seguida as primeiras q parcelas negativas, então as próximas p parcelas positivas, daí as próximas q parcelas negativas, e assim por diante.

Já o Teorema 4.1 dá uma fórmula para encontrar a soma de qualquer rearranjo da *SHA* onde a subsequência das parcelas positivas do rearranjo é igual a subsequência das parcelas positivas da *SHA* e subsequência das parcelas negativas do rearranjo é igual a subsequência das parcelas negativas da *SHA*, ou seja, é mais geral que o Teorema 3.1.

Também é garantido pelo Teorema 4.1 que a soma de determinados rearranjos da *SHA* dependem exclusivamente da densidade assintótica do mesmo. Enquanto isso, o Teorema 4.2 mostra que isso não ocorre com várias outras séries condicionalmente convergentes, ou seja, a *SHA* é um caso diferenciado.

6 PROPOSTA DE UMA SEQUÊNCIA PEDAGÓGICA

Apresentamos neste capítulo uma sequência pedagógica desenvolvida com o objetivo de apresentar aos alunos a ideia de rearranjo de séries, mostrar que existem somas cujas parcelas não satisfazem a propriedade comutativa, apresentar o Teorema de Riemann e o Teorema de Ohm para séries condicionalmente convergentes e verificar a vantagem do Teorema de Ohm sobre o Teorema de Riemann para se calcular o valor de um rearranjo dado. Separamos essa proposta em duas seções, uma com as questões a serem trabalhadas com os alunos e outra com as respostas esperadas.

6.1 Sequência Pedagógica

Público alvo: Graduandos dos cursos de Matemática e áreas afins.
Problematização: Uma soma finita se comporta da mesma forma que uma soma infinita? A propriedade comutativa é válida para somas com qualquer número de parcelas? Sempre que se altera a ordem das parcelas a soma existe? Se existe, há como determiná-la?
Conteúdos: Séries condicionalmente convergentes, série harmônica alternada, Teorema de Riemann para séries condicionalmente convergentes e o Teorema de Ohm para a série harmônica alternada.
Objetivo: Construir uma base sólida no entendimento de tópicos relacionados com reodenação de séries, em especial na aplicação do Teorema de Ohm para a série harmônica alternada.
Recursos: Lápis ou caneta, quadro, folha com o procedimento descrito abaixo, computador, celular ou tablet e o software Geogebra.

Procedimento:
1) Com o auxílio do programa Geogebra, construa o gráfico da sequência cujo termo geral é a n-ésima soma da série harmônica alternada, ou seja, da sequência (x_n), em que $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. É possível intuir a convergência de (x_n)? Construindo o gráfico da reta $x = \ln(2)$, intuitivamente, é possível verificar a convergência de (x_n)?

2) Escolha um número real s, com $|s| \leq 10$, e construa o gráfico da reta $x = s$. Construa então o gráfico dos 10 primeiros termos da sequência (a_n) cujo primeiro termo é igual a soma das primeiras parcelas positivas da série harmônica alternada (SHA) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{k}$ na ordem em que aparecem até a primeira parcela em que ocorre $a_1 > s$, o segundo termo é igual ao primeiro mais a soma das primeiras parcelas negativas da SHA na ordem em que aparecem até a primeira parcela em que ocorre $a_2 < s$ e assim por diante com $a_3, a_4, ...$. Apenas com base no gráfico construído responda:

a) há algum padrão de comportamento dos termos de (a_n)?

b) os termos da sequência (a_n) parecem se aproximar de algum valor à medida em que n aumenta?

c) pode-se intuir se (a_n) converge, ou não?

d) se a sequência (a_n) converge, há alguma forma de se calcular seu limite?

3) Construa agora o gráfico da sequência (b_n) sendo

$$\begin{aligned} b_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{6(n-1)+1} + \frac{1}{6(n-1)+3} + \frac{1}{6(n-1)+5} \\ - \frac{1}{6(n-1)+2} - \frac{1}{6(n-1)+4} - \frac{1}{6(n-1)+6} \end{aligned}$$

Após a construção do gráfico, responda:

a) é possível verificar se a sequência (b_n) se comporta da mesma forma que a sequência (a_n) construída na questão anterior?

b) pode-se intuir a convergência de (b_n)?

4) Verifique que para $n = 1$, a sequência (b_n) da questão anterior é igual a sexta soma parcial da SHA. Verifique também que para b_2 é igual a décima segunda soma parcial da SHA.

5) Mais genericamente, verifique que $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{6n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

6) Considere agora a sequência (y_n) com

$$\begin{aligned} y_n = \underbrace{1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1}}_{p \text{ termos}} - \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2p}}_{p \text{ termos}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2(n-1)p+1} + \frac{1}{2(n-1)p+3} + \cdots + \frac{1}{2np-1}}_{p \text{ termos}} \\ - \underbrace{\frac{1}{2(n-1)p+2} - \frac{1}{2(n-1)p+4} - \cdots - \frac{1}{2np}}_{p \text{ termos}}, \end{aligned}$$

sendo p um inteiro estritamente positivo qualquer fixo.

Sabendo que a SHA converge para $\ln(2)$ e que (y_n) pode ser obtida da SHA apenas comutando seus termos de uma forma conveniente, pode-se intuitivamente concluir algo sobre a convergência de (y_n)? Podemos então concluir que a comutatividade é válida para a SHA, i.e., ao reordenar as parcelas da SHA a soma não é alterada?

7) Da questão 3) à questão 4), o termo geral das sequências consideradas nada mais são que somas parciais da SHA com a ordem das parcelas alteradas somando-se as p primeiras parcelas positivas, em seguida p as primeiras parcelas negativas, então as p próximas

parcelas positivas, daí as p próximas parcelas negativas, e assim por diante. Ou seja, somamos sempre um mesmo número de parcelas positivas e negativas. E se, ao invés disso, somássemos uma quantidade p de parcelas positivas e uma quantidade q de parcelas negativas, com $p \neq q$, a sequência resultante ainda seria convergente? Pode-se, usando o Teorema de Riemann verificar isso facilmente?

8) A sequência (y_n) da questão 6) é um caso particular de

$$R_n(p,q) = \underbrace{1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1}}_{p \text{ termos}} - \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2q}}_{q \text{ termos}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2(n-1)p+1} + \frac{1}{2(n-1)p+3} + \cdots + \frac{1}{2np-1}}_{p \text{ termos}}$$
$$- \underbrace{\frac{1}{2(n-1)q+2} - \frac{1}{2(n-1)q+4} - \cdots - \frac{1}{2nq}}_{q \text{ termos}},$$

em que p e q são inteiros quaisquer maiores ou iguais do que 1 fixos. Sendo (x_n) a sequência definida na questão 1) calcule o que se pede:

a) $R_1(2,2) - x_4$;
b) $R_2(2,2) - x_8$;
c) $R_3(2,2) - x_{12}$;
d) $R_1(2,1) - x_3$;
e) $R_2(2,1) - x_6$;
f) $R_3(2,1) - x_9$.

9) Pelos cálculos feitos na questão 8), pode-se concluir que qualquer rearranjo da SHA converge e, além disso, para o mesmo limite da SHA?

10) O Teorema de Ohm garante que $R_n(p,q)$, em que p e q são inteiros quaisquer maiores ou iguais do que 1 fixos, converge para $\ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$. Sendo assim, encontre p e q inteiros tais que $R_n(p,q)$ converge para:

a) $\ln(2)$;
b) $\ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$;
c) $-\frac{1}{2}\ln(2)$.

11) Usando o Teorema de Riemann tente encontrar o limite de $R_n(15,4)$ quando n tende ao infinito.

12) Usando o Teorema de Ohm faça o mesmo que na questão 10), ou seja, tente calcular o limite de $R_n(15,4)$ quando n tende ao infinito.

6.2 Respostas esperadas

1) Não se tem um indicativo claro, mas a sequência parece se aproximar de um valor desconhecido. Com o gráfico da reta $x = \ln(2)$ tem-se a impressão de que os valores da sequência se aproximam cada vez mais de $\ln(2)$, indicando uma possível convergência.

2) a) Os termos de (a_n) parecem "rodear" o gráfico da reta $x = s$, se aproximando por cima até um certo índice, então por baixo, e repetindo isso;

b) Sim, parecem se aproximar de s;

c) Pode-se intuir a convergência de (a_n) para s, mas não há qualquer garantia de convergência uma vez que é uma sequência infinita;

d) Se a sequência convergir, provavelmente converge para s.

3) a) Não;

b) O comportamento da sequência (b_n) não apresenta um padrão claro, portanto não é possível intuir sua convergência.

4) Da definição de b_n

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \\ &= x_6 \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} b_2 &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} \\ &= x_{12} \end{aligned}$$

5) Da definição de b_n segue que,

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = b_1.$$

Supondo válida a igualdade para algum $n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\sum_{k=1}^{6(n+1)} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{6n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \sum_{k=6n+1}^{6n+6} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$
\begin{aligned}
&= b_n + \frac{1}{6n+1} - \frac{1}{6n+2} + \frac{1}{6n+3} - \frac{1}{6n+4} + \frac{1}{6n+5} - \frac{1}{6n+6} \\
&= b_n + \frac{1}{6n+1} + \frac{1}{6n+3} + \frac{1}{6n+5} - \frac{1}{6n+2} - \frac{1}{6n+4} - \frac{1}{6n+6} \\
&= b_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Pelo Princípio da Indução Finita, a igualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

6) Não há um padrão simples no comportamento dos termos de (y_n) sendo difícil intuir qualquer coisa a respeito de sua convergência. Não é possível concluir sobre a veracidade da comutatividade para a SHA.

7) Da mesma forma que na questão 6) não é possível descobrir um padrão simples que indique a convergência dessa reordenação. Não, o Teorema de Riemann não dá pistas sobre a convergência da mesma.

8) Em todos os itens a resposta é 0.

9) Não se pode concluir que qualquer rearranjo da SHA converge para o mesmo limite, nem mesmo se este converge. Mas, intuitivamente, alguns rearranjos parecem convergir para o mesmo limite.

10) a) $p = 1$ e $q = 1$;
b) $p = 1$ e $q = 2$;
c) $p = 1$ e $q = 8$;

11) O Teorema de Riemann não indica o valor de um rearranjo. Portanto, não é possível calcular o limite de $R_n(15, 4)$ com $n \to \infty$.

12) Pelo Teorema de Ohm, temos:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(15, 4) = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{15}{4}\right).$$

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A propriedade comutativa de uma operação tem grande importância na Matemática. Em álgebra, por exemplo, um grupo abeliano é munido de uma operação que deve ser comutativa, o mesmo vale para um anel, onde a "adição" deve ser comutativa. Uma vez que no Ensino Médio professores de matemática devem trabalhar com sequências como as progressões aritmética e geométrica, e estas podem ser infinitas, a compreensão de somas infinitas, ou séries, é necessária para um maior domínio do conteúdo e, consequentemente, para um melhor ensino do mesmo.

Com este trabalho pudemos ver que a comutatividade da adição não é válida para qualquer soma com um número infinito de parcelas usando o Teorema de Riemann para séries condicionalmente convergentes. Além disso, possivelmente complementando um curso de séries numéricas, com o Teorema de Ohm encontramos uma forma mais detalhada de como se conseguir somas específicas da forma $\ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$, com $p, q \in \mathbb{N}$, reordenando os termos dessa série de forma a termos p parcelas positivas, então q parcelas negativas, e assim por diante, sempre repetindo isso com as parcelas em cada "bloco" aparecendo na mesma ordem que na SHA.

Com o Teorema de Pringsheim para a SHA vimos uma espécie de generalização do Teorema de Ohm, no sentido em que descobrimos o limite de rearranjos mais gerais que do teorema anterior, podendo calcular a soma de alguns rearranjos cujo número de parcelas positivas e negativas em cada "bloco" não são necessariamente os mesmos bastando descobrir a densidade assintótica das parcelas positivas, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{n}$, em que p_n é o número de parcelas positivas na n-ésima soma parcial do rearranjo. Apresentamos ainda uma generalização desse teorema ainda creditada a Pringsheim que, juntamente com o teorema anterior, garante que a SHA tem um corportamento diferente de outras séries condicionalmente convergentes cujas somas não dependem unicamente de suas densidades assintóticas enquanto a SHA depende.

Finalmente, desde que um dos principais objetivos deste trabalho é de auxiliar na formação de professores de Matemática, apresentamos uma sequência pedagógica que pode ser usada nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral como forma de enriquecer o conteúdo de séries e ainda mostrar a utilidade dos teoremas de Ohm e de Pringsheim para a SHA, uma vez que o Teorema de Riemann não nos dá pistas de qual o valor da soma dado um rearranjo específico.

REFERÊNCIAS

[1] AGANA, M. J. **The classical theory of rearrangements**. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Boise State University, Boise, 2015.

[2] COWEN, C. C. **Rearranging the Alternating Harmonic Series**. Disponível em: https://www.math.iupui.edu/~ccowen/ButlerAHslides.pdf Acesso em: 15 jun. 2021.

[3] COWEN, C. C.; DAVIDSON, K. R.; KAUFMAN, R. P. Rearranging the Alternating Harmonic Series. **The American Mathematical Monthly**, [S.L.], v. 87, n. 10, p. 817, dez. 1980. Disponível em: http://dx.doi.org/10.2307/2320794. Acesso em: 15 jun. 2021.

[4] GALANOR, S. **Riemann's Rearrangement Theorem**. Disponível em: https://sites.math.washington.edu/~morrow/335_17/history%20of%20rearrangements.pdf. Acesso em: 14 jun. 2021

[5] LEITHOLD, L. **Cálculo Com Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994.

[6] LIMA, E. L. **Análise Real**: funções de uma variável. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[7] LIMA, E. L. **Curso de análise**. 7. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1992.

[8] MONKS, K. M. **Euler's Calculation of the Sum of the Reciprocals of the Squares**: a mini-primary source project for calculus II students. Disponível em: https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/euler-s-calculation-of-the-sum-of-the-reciprocals-of-the-squares-a-mini-primary-source-project-for. Acesso em: 15 jun. 2021.

[9] MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar**: introdução à análise. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[10] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Alfred Pringsheim**. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pringsheim/. Acesso em: 15 jun. 2021.

[11] PRINGSHEIM, A. Üeber die Werthveränderungen bedingt convergenter Reihen und Producte. **Mathematische Annalen**, [S.L.], v. 22, n. 4, p. 455-503, dez. 1883. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1007/bf01443263. Acesso em: 15 jun. 2021.

[12] RIDDLE, L. H. **Rearranging the Alternating Harmonic Series**. Disponível em: `https://larryriddle.agnesscott.org/series/rearrang.pdf`. Acesso em: 15 jun. 2021.

[13] SARMA, K. V. **A History of the Kerala School of Hindu Astronomy**: in perspective. Hoshiarpur: Vishveshvaranand Institute, 1972. Disponível em: `https://www.rarebooksocietyofindia.org/book_archive/196174216674_10153030067961675.pdf`. Acesso em: 15 jun. 2021.

[14] SWAIN, G.; DENCE, T. Archimedes' Quadrature of the Parabola Revisited. **Mathematics Magazine**, [S.L.], v. 71, n. 2, p. 123, 1 abr. 1998. Disponível em: `https://www.jstor.org/stable/2691014`. Acesso em: 15 jun. 2021.

[15] WEISSTEIN, E. W. **Euler-Mascheroni Constant**, Disponível em: `https://mathworld.wolfram.com/Euler-MascheroniConstant.html`. Acesso em: 15 jun. 2021.