

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO - FÍSICA

LUIZ OTAVIO RIBEIRO SOLAK

EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA EM MODOS ACOPLADOS: CASOS
FECHADO E ABERTO

PONTA GROSSA

2021

LUIZ OTAVIO RIBEIRO SOLAK

EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA EM MODOS ACOPLADOS: CASOS
FECHADO E ABERTO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências, área de Concentração em Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências/Física

Orientador: Dr. Lucas Stori de Lara

PONTA GROSSA

2021

S684

Solak, Luiz Otavio Ribeiro

Excitação paramétrica em modos acoplados: casos fechado e aberto/ Luiz Otavio Ribeiro Solak. Ponta Grossa, 2021.
88p.

Dissertação (Mestrado em Ciências – Área de concentração – Física). Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Lucas Stori de Lara

1. Cavidades ópticas. 2. Excitação paramétrica. 3. Emaranhamento. 4. Escalas múltiplas. 5. Equação mestra. I. Lara, Lucas Stori (Orient.). II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Mestrado em Ensino de Ciências. III. T.

CDD : 530

Ficha catalográfica elaborada por Maria Luzia F. Bertholino dos Santos – CRB9/986

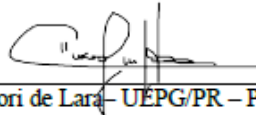
TERMO DE APROVAÇÃO

LUIZ OTAVIO RIBEIRO SOLAK

“Excitação Paramétrica em Modos Acoplados: Casos Fechado e Aberto .”

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção no grau de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Ciências – Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador:



Prof. Dr. Lucas Stori de Lara – UEPG/PR – Presidente



Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade- UEPG/PR – Titular



Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Bôas - UFSCAR– Titular

Ponta Grossa, 28 de abril de 2021.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer em primeiro lugar aos meus pais que proporcionaram toda estrutura e apoio necessários para que fosse possível meu ingresso na vida acadêmica.

Ao meu orientador Prof. Lucas Stori de Lara pela paciência, ensinamentos, assistência e compreensão ao longo de toda a execução deste trabalho.

Ao Prof. Antônio Sérgio por todos os ensinamentos, conversas, contribuições ao trabalho e especialmente pela amizade oferecida desde o princípio.

A todos meus amigos, em especial Lucas e Débora Obata, Fábio Bischof e Mateus Ribas pelo apoio, carinho e tempo de descontração oferecidos ao longo dos anos que foram imprescindíveis para o bom desenvolvimento deste trabalho.

Por fim agradeço ao programa de Pós-Graduação em Física, aos meus professores desde o período de graduação, ao suporte da agência brasileira CAPES e à Fundação Araucária.

RESUMO

A investigação de sistemas de cavidades ópticas em mecânica quântica já é bem estabelecida na literatura, porém nas últimas décadas a inserção de excitação paramétrica nas frequências destas cavidades mostrou interessantes resultados para diferentes arranjos de sistemas. Neste trabalho visamos a análise da dinâmica e extração de algumas propriedades interessantes em dois casos de um mesmo sistema, composto por duas cavidades ópticas parametricamente excitadas fracamente acopladas, porém em meio livre e dissipativo, respectivamente. A diferenciação entre estes casos requer a utilização de duas diferentes perspectivas no estudo da dinâmica de sistemas quânticos, uma delas utiliza das variáveis de quadraturas do campo eletromagnético \hat{x} e \hat{p} no método dos *invariantes quânticos*, no qual as propriedades de um sistema descrito por um hamiltoniano quadrático são extraídas de uma álgebra de construção do propagador, que no caso aqui presente usufruiu do método das escalas múltiplas (MEM) para construção das formas explícitas dos componentes do propagador. A outra utiliza da transformações destas variáveis de quadraturas nos operadores de criação e aniquilação \hat{a} e \hat{a}^\dagger juntamente com novas variáveis provenientes da consideração de reservatórios térmicos, para que assim sejam utilizados na *equação mestra* derivada das equações de Neumann-Liouville cuja solução busca descrever a dinâmica do sistema por meio da evolução de seu operador densidade. A extração das propriedades de interesse foi feita por meio de operações sobre as *matrizes das covariâncias* considerando estados iniciais gaussianos, propriedades estas como energia de flutuações, pureza, compressão de estado e emaranhamento por exemplo. Por meio da análise qualitativa destas propriedades foi possível averiguar a ação da excitação paramétrica em ambas as cavidades para os dois casos, juntamente com diferenciação do casos livre e dissipativo.

Palavras-chaves: Cavidades ópticas, excitação paramétrica, emaranhamento, escalas múltiplas, equação mestra.

ABSTRACT

The optical cavities investigation in quantum mechanics is well established in the literature, however in the last few decades the insertion of parametric excitation in cavities frequencies presented interesting results for different system arrangements. In this work we aim at the dynamics analysis and the extraction of some properties of interest in two cases of the same system, composed by two weakly coupled parametrically excited optical cavities, but in free and dissipative mediums respectively. The differentiation between these cases requires use of two perspectives in the study of quantum mechanical dynamics, one of them uses the quadrature variables of the electromagnetic fields \hat{x} and \hat{p} in the *quantum invariants* method, in which the properties of a system described by a quadratic hamiltonian are extracted from a propagator's algebra, that in the present case used the multiple scales method for the construction of the propagator components explicit forms. The other uses the transformation of these quadrature variables to the creation and annihilation operators \hat{a} and \hat{a}^\dagger along with the new variables from the considered thermal reservoir, so they are used in the *master equation* derived from the Neumann-Liouville equations whose solution seeks to describe the system dynamics through the density operator. The extraction of properties of interest was done through operations on the *covariance matrices* considering initial Gaussian states, properties such as fluctuation energy, purity, squeezing and entanglement for example. Through the qualitative analysis of these properties it was possible to ascertain the action of parametric excitation in both cavities for both cases, along with differentiation of free and dissipative cases.

Keywords: Optical cavities, parametric excitation, entanglement, multiple scale, master equation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Essa figura ilustra esquematicamente o modelo de duas cavidades ω_1 e ω_2 acopladas por uma constante η em um sistema fechado, obviamente apenas um modo de cada cavidade é selecionado em teoria, mas fixamos que o sistema pode ainda ser ilustrado como abaixo.	31
Figura 2 – Esquema ilustrativo da metodologia utilizada ao longo deste capítulo para investigação da dinâmica do sistema fechado.	42
Figura 3 – As curvas em azul representam os modos $k = 1$ e as curvas em magenta os modos $k = 2$ para as energias das flutuações $\mathcal{E}_k(\tau)$ em termos do tempo lento, onde foram variados apenas os valores $\delta = 0.25$ e $\delta = 0.15$ e o acoplamento considerado foi $\rho = 0.25$ em todos os casos, juntamente com os valores $\nu_1 = 0.75$ e $\nu_2 = 0.5$ e parâmetros reais de compressão $\xi_1 = 0.7$ e $\xi_2 = 0$	48
Figura 4 – As curvas em azul representam as incertezas $\mathcal{D}_k(\tau)$ para os modos $k = 1$ e as curvas em magenta para os modos $k = 2$ variando sobre o tempo lento, onde os parâmetros foram variados de forma idêntica aos tratados para as energias.	49
Figura 5 – As curvas em azul representam a compressão $\mathcal{S}_k(\tau)$ para os modos $k = 1$ e as curvas em magenta para os modos $k = 2$ variando sobre o tempo lento, onde os parâmetros foram variados de forma idêntica aos tratados para as propriedades anteriores.	50
Figura 6 – As curvas em azul representam a evolução normalizada das purezas $\mathcal{P}_k(\tau)$ para os primeiros modos e as curvas em magenta para os segundos modos em termos do tempo lento, onde os parâmetros foram variados de forma idêntica aos tratados nas propriedades anteriores.	51
Figura 7 – As curvas representam diferentes valores de δ , sendo respectivamente para as curvas azul, vermelha, verde $\delta = 0.25$, $\delta = 0.15$ e $\delta = 0.05$, para parâmetros análogos ao utilizados nas medidas anteriores.	52
Figura 8 – A figura abaixo trata de um esquema representativo do sistema investigado, onde duas cavidades ω_1 e ω_2 estão acoplados por uma constante g e associados a dois reservatórios térmicos R_1 e R_2 em equilíbrio térmico a uma temperatura T	62
Figura 9 – Esquema ilustrativo da metodologia utilizada ao longo deste capítulo para investigação da dinâmica do sistema aberto.	67

- Figura 10 – As curvas em azul e magenta representam respectivamente a evolução no tempo livre dos coeficientes adimensionais das energias de flutuação dos modos $k = 1, 2$ das cavidades dissipativas, foram considerados os seguintes parâmetros: $\mu = 0.9$, $v_k = 0.5$, $r_k = 0$, $\gamma = 0.4$, $\beta = 0.2$. O regime é definido pela constante de acoplamento $g = 0.1$ 70
- Figura 11 – Foram utilizados os mesmos parâmetros neste caso, de maneira que os regimes são definidos a partir da constante g de acoplamento entre as cavidades, com valores $g = 0.3$ e $g = 0.5$ respectivamente. 71

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MEM	<i>Método das Escalas Múltiplas</i>
RWA	<i>Rotating Wave Approximation (Aproximação de Onda Girante)</i>

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	10
1 INTEGRAIS DE MOVIMENTO	13
2 INVARIANTES QUÂNTICOS	20
2.1 PROPAGADOR PARA HAMILTONIANOS QUADRÁTICOS	21
2.2 APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS INVARIANTES	28
3 MÉTODO DAS ESCALAS MÚLTIPLAS E SOLUÇÕES DAS MATRIZES $\lambda(t)$	35
3.1 EQUAÇÃO DE MATHIEU	36
3.2 APLICAÇÃO DO MME E FORMAS FUNCIONAIS EXPLÍCITAS	37
4 EFEITOS DA EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA	43
4.1 MATRIZES DAS COVARIÂNCIAS	43
4.2 SISTEMA FECHADO: ENERGIAS, INCERTEZAS E COMPRESSÃO	44
4.2.1 Resultados Adquiridos: Energias e Incertezas	46
4.2.2 Resultados Adquiridos: Compressão de Estados e Pureza	48
4.3 SISTEMA FECHADO: EMARANHAMENTO E RESULTADOS	50
5 EQUAÇÃO MESTRA EM CAVIDADES ÓPTICAS	53
5.1 SISTEMAS ABERTOS E A EQUAÇÃO MESTRA	54
5.2 RESERVATÓRIOS	59
5.2.1 Reservatórios Térmicos	60
5.3 APLICAÇÃO DA EQUAÇÃO MESTRA - CAVIDADES ACOPLADAS	61
5.3.1 Resolução da Equação Mestra: Matrizes de Evolução e das Covariâncias	63
5.3.2 Formas Explícitas das Matrizes de Evolução e das Covariâncias	65
5.4 EFEITOS DA EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA: MATRIZES DAS COVARIÂNCIAS E ENERGIA DAS FLUTUAÇÕES	68
5.4.1 Resultados Adquiridos: Energias das Flutuações	69
6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	72
REFERÊNCIAS	74
APÊNDICE A HAMILTONIANOS QUADRÁTICOS E EQUAÇÕES DIFEREN- CIAIS	78
APÊNDICE B MATRIZ DAS COVARIÂNCIAS E MEDIDAS: CASO ABERTO	81

INTRODUÇÃO

Com os resultados alcançados a partir dos estudos e experimentos realizados sobre a emissão de luz por corpos negros no início do século XX, a discretização da luz destaca-se como elemento fundamental na inauguração do que se conhece hoje como Mecânica Quântica (PLANCK, 1914; HAAR, 1967). A quantização da onda eletromagnética não representa apenas um conceito contra intuitivo acerca da nossa visão de mundo e natureza, mas também uma ruptura nos modelos físicos conhecidos até o início do último século. Os quais foram moldados a partir da interpretação Newtoniana dos elementos inanimados presentes na natureza, esta que por sua vez está bem estabelecida não apenas por critérios físicos. Como toda a teoria formulada posteriormente e experimentos de grande importância na evolução do pensamento científico e da tecnologia dos últimos séculos, mas também critérios metafísicos sólidos (NEWTON, 1846).

Sendo assim, a construção de novos modelos para uma categoria inédita de fenômenos teve de ser moldada desde os princípios teóricos mais fundamentais que sustentam a nova mecânica. Estes que (frequentemente) colapsam com ideias clássicas, de características intuitivas, como por exemplo a observação de um fenômeno e a aquisição de informação referente ao mesmo. Em que nesta "nova" perspectiva depende (entre outros aspectos) da relação de comutatividade entre os agora operadores a serem observadas no sistema. Essa relação nos casos mais fundamentais é a chamada Incerteza de Heisenberg, que é considerado como uma pedra fundamental nos estudos e interpretações em Mecânica Quântica (WHEELER; ZUREK, 1983).

Embora o desenvolvimento da Mecânica Quântica, principalmente em seus primeiros anos, tenha se sucedido a partir de estruturas clássicas que se desenvolvem pela utilização de princípios alternativos aos já conhecidos (o modelo atômico de Bohr surge como um bom exemplo), a partir da terceira década do século XX com trabalhos de cientistas como Schrödinger e Heisenberg, (SCHRÖDINGER, 1926; WHEELER; ZUREK, 1983) esta área da física começa a possuir quadros próprios de interpretação, e os paralelos construídos com a Mecânica Clássica se tornam parâmetros matemáticos e de interesse meramente teórico.

Assim, problemas de natureza quântica com análogos clássicos já muito bem estabelecidos começam a ser tratados dentro de uma nova linguagem, esta que ainda está em desenvolvimento até a atualidade e que se utiliza de uma série de diferentes propostas teóricas para aquisição de novos resultados. E o trabalho a seguir trata principalmente de duas destas propostas metodológicas para investigação de sistemas já muito bem estabelecidos classicamente, porém que mostram resultados únicos da Mecânica Quântica.

O aumento de interesse em sistemas ópticos em Mecânica Quântica a partir da segunda metade do século XX, fez com que diferentes métodos de análise de dinâmica fossem desenvolvidos a partir de análogos clássicos preexistentes, como exemplo a utilização da teoria de invariantes em Mecânica Analítica (DERIGLAZOV; FILGUEIRAS, 2009), que baseia em aspectos gerais a teoria os Invariantes Quânticos (DODONOV; MAN'KO, 1989). Esta última tem

como principal objetivo a construção algébrica exata do núcleo do propagador de um sistema quântico a partir do uso de operadores específicos chamados Invariantes, o método está centrado na resolução das equações para os autovalores em termos dos blocos de matrizes $\Lambda(t)$ e $\Delta(t)$, que em sua forma funcional constituem equações diferenciais de primeira ordem, mas que a priori não proporcionam soluções analíticas.

Tal problema é contornado pela utilização do Método das Escalas Múltiplas (MME), que promove a resolução grupos de equações diferenciais de segunda ordem a partir da introdução de diferentes escalas para o parâmetro livre do sistema (tempo), as soluções destas equações possibilitam uma análise detalhada da dinâmica do sistema estudado, assim como a aquisição de medidas teóricas necessárias.

Outro exemplo de método com análogos clássicos é aqui utilizado a partir de equações de Neumann-Liouville para uma determinada densidade de estados acessíveis para um sistema, utilizando muitas vezes do operador Liouvillian (AGARWAL, 1973; BREUER; PETRUCCIONE, 2006). Estas em seu paralelo quântico descrevem a evolução do agora chamado operador densidade, e por meio desta notação gera-se o que chamamos de *Equação Mestra*, esta possibilita o estudo da dinâmica de sistemas compostos tanto abertos quanto fechados em óptica quântica, característica que juntamente com sua praticidade técnica, dá grande popularidade para seu uso em uma grande variedade de fenômenos (PURI, 2001; CARMICHAEL, 1999). As soluções propostas para a equação mestra advém do método proposto em (DODONOV; MAN'KO, 2003), por meio da introdução da matriz de evolução A , utilizada para o cálculo da matriz de evolução temporal U e por fim das matrizes das covariâncias \mathcal{M} .

O objetivo estipulado para com esse trabalho está na observação dos efeitos da excitação paramétrica em sistemas compostos por dois modos de diferentes cavidades acoplados, por meio de medidas de correlações quânticas. Foram investigados estes sistemas para um caso ideal e também foi efetuada uma extensão para o caso dissipativo. Assim, a comparação qualitativa de resultados adquiridos também integra uma das propostas do nosso desenvolvimento.

A dissertação será organizada da seguinte maneira:

O capítulo 1 é uma breve discussão acerca do estudo da dinâmica de sistemas em Mecânica Quântica, mostrando alguns dos pontos de partida teóricos no que se refere a evolução de um fenômeno de natureza quântica destacando alguns análogos clássicos, firmando a principal teoria que fundamenta este trabalho, sendo estas as Integrais de Movimento em Mecânica Quântica (LEWIS, 1967).

Os capítulos 2 e 3 tratam do primeiro modelo teórico utilizado no estudo da dinâmica de um sistema óptico deste trabalho, este que é chamado de Método dos Invariantes Quânticos, e será aplicado a um sistema fechado composto por duas cavidades ópticas acopladas excitadas parametricamente. Pelo uso de tal método, equações diferenciais de primeira ordem foram adquiridas a partir dos cálculos relacionados ao bloco de matrizes $\lambda(t)$, e estas por sua vez não

possuem soluções analíticas, problema que foi contornado por meio da utilização do Método das Escalas Múltiplas (MEM), tratado de forma aprofundada no capítulo 3.

O capítulo 4 está centrado no estudo dos efeitos da excitação paramétrica em modos de cavidades ópticas para um caso fechado. Estes efeitos são interpretados a partir das medidas teóricas executadas em ambos os fenômenos, que podem ser interpretadas como os principais resultados do trabalho, e tais medidas tratam dos elementos a seguir: energia das flutuações, incerteza, emaranhamento, pureza de estados e compressão de estados.

O capítulo 5 aborda o segundo método utilizado no estudo de sistemas ópticos em Mecânica Quântica, o qual é chamado de Método da Equação Mestra, e este por sua vez há de tratar de um sistema aberto composto por duas cavidades fracamente acopladas entre si, mas acopladas a dois reservatórios idênticos e também excitadas parametricamente. Um sistema análogo, ao primeiro, porém agora dissipativo. A equação mestra construída foi resolvida a partir do formalismo proposto por (DODONOV; MAN'KO, 2003) e elaborado com maior detalhamento por (CASTRO; DODONOV, 2014) e medidas de energia foram efetuadas e qualitativamente interpretadas.

Os resultados são resumidos e discutidos no capítulo 6, onde primeiramente são discutidas questões comparativas de naturezas teórica e prática entre os métodos utilizados no trabalho, assim como as características físicas extraídas dos dois sistemas. As conclusões finais e perspectivas para trabalhos futuros são apresentadas por fim.

1 INTEGRAIS DE MOVIMENTO

Uma característica histórica observada na evolução da ciência moderna consiste no fato de que o progresso dos estudos em um determinado tema gera uma série de limitações emergentes tanto da natureza quanto das ferramentas utilizadas em seu estudo, na Mecânica Quântica isso certamente não diferiu. Um grande número de estudiosos interessados no estudo da Dinâmica partiram dos estudos sobre evolução temporal elaborados por Dirac (DIRAC, 1927), propondo diferentes tratamentos para uma variedade significativa de sistemas, e estes não foram exceção no que refere a limitações. Um exemplo importante no desenvolvimento deste trabalho é a teoria das Integrais de Movimento (ou Invariantes Quânticos) apresentada por Lewis e Riesenfeld (LEWIS, 1967; LEWIS; RIESENFELD, 1969), a qual usufruiu diretamente dos conceitos de invariância em Mecânica Analítica e do desenvolvimento feito por Dirac para tratamento prático de uma extensa classe de sistemas quânticos, e que embasa o método utilizado na exploração do primeiro sistema deste trabalho.

Para elucidar o que são as tais Integrais de Movimento, será introduzido de antemão um análogo clássico descrito por Lewis, que embora não compartilhe da preocupação conceitual de correspondência com o mundo clássico, há de pelo menos aclarar uma das bases do pensamento que motivaram e tornaram possível a introdução dos Invariantes Quânticos no estudo de dinâmica.

A ideia comum presente tanto em casos quânticos quanto clássicos é que a determinação de um conjunto de invariantes, que são funções associadas as variáveis de interesse físico cuja variação temporal é nula, ou seja suas derivadas em termos do tempo são iguais a 0, não apenas concede grande poder analítico na execução dos cálculos, em vista que há possibilidade de se obter uma forma exata destes invariantes, como também torna o sistema propício para extração de informações acerca da evolução temporal do fenômeno. Apesar do paralelo clássico apresentado por Lewis consistir em um caso com certa especificidade, ainda sim, ilustra suficientemente o pensamento necessário de transição à teoria quântica. Iniciaremos pela introdução de um Hamiltoniano (clássico) do tipo

$$H_c = \frac{1}{2\epsilon}[p^2 + \Omega(t)], \quad (1.1)$$

aqui, ϵ representa um parâmetro real, e $\Omega(t)$ uma função real (no caso clássico), contínua e arbitrária do tempo. Lewis propôs o cálculo exato dos invariantes derivado do método de Kruskal (KRUSKAL,), que em tese consiste na existência de uma expansão em série assintótica de potência do parâmetro ϵ (em que o termo significativo tem a forma $\epsilon H/\Omega$), onde as somas parciais dos elementos desta série são os invariantes adiabáticos do sistema. Em sistemas fechados, essa teoria assintótica pode tornar-se exata, para isso, as equações de movimento devem ser autônomas e de primeira ordem, para que conseqüentemente suas soluções sejam periódicas no limite $\epsilon = 0$. Isso é possível com uma transformação na variável independente, chamada agora de s , enquanto o tempo será considerado como uma variável dependente. O sistema de equações de

movimento é obtido a partir da equação de Hamilton para s como nova variável independente e possui a seguinte forma

$$\begin{aligned}\frac{dq}{ds} &= p, \\ \frac{dp}{ds} &= -\Omega^2(t)q, \\ \frac{dt}{ds} &= \epsilon; \quad s \equiv t/\epsilon.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Como tal sistema não possui dependência explícita da variável independente (t) pode ser denominado autônomo, logo supre as condições para cálculo dos invariantes de forma exata. É importante ressaltar o fato de que a introdução da variável s não altera a natureza física do sistema, e isso pode ser verificado no limite em que $\epsilon = 0$, pois a terceira equação do sistema resultaria em t constante, ou seja, a variável independente é retomada, e as duas equações restantes são as equações associadas ao oscilador harmônico com frequência constante. O processo de aquisição dos invariantes é semelhante para uma grande variedade de métodos em Mecânica Analítica, pois consistem em transformações espaciais que proporcionam a invariância dentro de um certo domínio. Neste caso, utilizam-se as variáveis (z_1, z_2) e φ , estas devem ser selecionadas para que (q, p, t) constituam uma família de curvas fechadas, no caso anéis, nas condições de z_1 e z_2 constantes.

A utilização de um conjunto de anéis justifica a existência de φ , pois este representa a variável angular cuja revolução possua período 2π para uma travessia completa sobre o anel em questão. Este caso apresentado por Lewis possui duas fortes vantagens, a primeira consiste no fato de que a transformação pode ser explícita em termos das variáveis canônicas e de uma função $\Phi(t)$, e a segunda é de que a família de anéis associada ao novo conjunto de variáveis está contida em planos onde t é constante. Isto posto, o invariante exato é encontrado por meio destes anéis da seguinte forma

$$I = \oint_{anel} p dq.\tag{1.3}$$

Tal integral pode ser calculada em termos de φ , resultando em:

$$I = \frac{1}{2} \left[\Phi^{-2} q^2 + (\Phi p - \epsilon \Phi' q)^2 \right].\tag{1.4}$$

Em que a função $\Phi(t)$ deve satisfazer a seguinte equação diferencial,

$$\epsilon^2 \Phi'' + \Omega^2 \Phi - \Phi^{-3} = 0,\tag{1.5}$$

sendo as derivadas calculadas em termos do tempo. Uma característica muito importante deste método é que qualquer solução particular de $\Phi(t)$ pode ser empregada na estrutura do invariante, que está em termos das variáveis dinâmicas q e p . O problema reside agora no encontro de uma transformação canônica na qual uma das variáveis de interesse seja o novo invariante. No

presente caso, para uma nova coordenada e momento invariantes denotamos Q e P respectivamente, juntamente a uma nova função F geradora da transformação canônica,

$$Q = -\tan^{-1} \left[\Phi^2 \frac{p}{q} - \epsilon \Phi \Phi' \right], \quad (1.6)$$

$$P = \frac{1}{2} [\Phi^{-2} q^2 + (\Phi p - \epsilon \Phi' q)^2], \quad (1.7)$$

$$F = \frac{1}{2} \epsilon \Phi^{-1} \Phi' q^2 \pm \frac{1}{2} \Phi^{-1} q (2P - \Phi^{-2} q^2)^{1/2} \\ \pm P \operatorname{sen}^{-1} \left[\Phi^{-1} \frac{q}{2P^{1/2}} \right] + \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi P, \quad (1.8)$$

onde

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{sen}^{-1} \left[\Phi^{-1} \frac{q}{(2P)^{1/2}} \right] \leq \frac{\pi}{2}, \\ p = \frac{\partial F}{\partial q}, Q = \frac{\partial F}{\partial P}, \quad (1.9)$$

sendo n um número inteiro. E o novo Hamiltoniano transformado é escrito como

$$H_T = H_c + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \Phi^{-2} P. \quad (1.10)$$

Desta forma, são definidos os invariantes e as transformações canônicas necessárias para a nova representação das variáveis para uma forma geral quadrática de um Hamiltoniano Clássico, fazendo com que as informações acerca da dinâmica de um sistema físico com parâmetros reais possam ser extraídas e analisadas. Existe uma variedade enorme de métodos que usufruem da estrutura de invariantes dentro da Mecânica Analítica, o tratamento feito por Lewis aqui apresentado, não somente compõe um destes métodos como também foi estendido ao mundo quântico possibilitando a formulação da base de todo o desenvolvimento aplicado a primeira fase deste trabalho.

A transição de tal formulação para a Mecânica Quântica não se dá por uma relação simples de correspondência, mas sim por uma reinterpretação do uso de invariantes que usufrui de princípios da nova mecânica, porém ainda carregando uma linha de pensamento análoga no que se refere ao cálculo das transformações espaciais para novas representações das variáveis afim de uma estrutura simplificada do sistema em questão.

Lewis e Riesenfeld apresentaram os invariantes em mecânica quântica como a construção de uma transformação de fase nos autoestados do operador invariante correspondentes ao conjunto de auto valores λ , afim de que estejam corretamente associados às soluções da equação de Schrödinger, e tal associação pode ser encontrada por meio da fase derivada da solução de uma equação diferencial de primeira ordem. A priori, deixaremos a ideia de invariantes de lado para dissertar sobre o desenvolvimento que leva ao uso destes agora operadores, ou seja, uma breve introdução à evolução temporal em Mecânica Quântica (LEWIS; RIESENFELD, 1969).

Assim como em sistemas clássicos, o interesse do estudo de sistemas dinâmicos reside na análise detalhada da evolução temporal do fenômeno de interesse por meio das variáveis canonicamente conjugadas, aqui tal ideia se mantém, e se concretiza pela atuação do operador de evolução temporal \hat{U} sobre um estado de interesse na representação de Schrödinger, ou seja, aquela em que o vetor de estado $|\Psi(t)\rangle$ varia no tempo e cada observável é representada por um operador independente do tempo (DEBNATH; MIKUSINSKI, 2005), cujo valor esperado é dependente do tempo e é calculado como

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle. \quad (1.11)$$

Sendo assim, a atuação do operador de evolução temporal sobre o vetor de estado é

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle. \quad (1.12)$$

O operador evolução temporal carrega as propriedades dinâmicas de um sistema por meio de sua relação direta com o Hamiltoniano, e é descrito pela seguinte equação

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(t) dt \right). \quad (1.13)$$

Tais propriedades podem ser extraídas por meio do cálculo do propagador do sistema, e para que este seja encontrado projetamos a ação do operador de evolução temporal sob o vetor de estado no espaço das configurações

$$\langle x | \Psi(t) \rangle = \int d^3x' \langle x | \hat{U}(t, t_0) | x' \rangle \langle x' | \Psi(t_0) \rangle. \quad (1.14)$$

É possível reconhecer que tal projeção representa nada menos do que a função de onda para um estado arbitrário $\langle x | \Psi(t) \rangle$ em um tempo $t > 0$, em termos da função de onda inicial $\langle x' | \Psi(t_0) \rangle$, e dessa relação extraímos a forma geral do propagador, especificamente na representação das coordenadas

$$G(x, x'; t) = \langle x | \hat{U}(t, t_0) | x' \rangle. \quad (1.15)$$

O desenvolvimento até aqui leva a uma conclusão simples, de que o estudo da dinâmica de um sistema dentro da perspectiva aqui utilizada, se dá pela aplicação de técnicas voltadas para o cálculo do propagador, pois deste cálculo todas as propriedades da evolução temporal das variáveis podem ser estudadas e utilizadas afim de que as informações físicas do sistema possam ser extraídas. Veremos que tal tarefa não se dá de forma fácil, e para isso precisamos de uma análise mais aprofundada da atuação do operador $\hat{U}(t, t_0)$ sobre uma nova classe de operadores, os invariantes quânticos do sistema, estes serão o principal instrumento para o cálculo do propagador do sistema apresentado neste trabalho. Primeiramente, construímos a equação dinâmica para o vetor de estado, afim de sobre ela operarmos a evolução temporal

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) |\Psi\rangle = 0, \quad (1.16)$$

operando a evolução temporal,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H} \hat{U}(t, t_0), \quad (1.17)$$

com a condição inicial:

$$\hat{U}(t, t_0)_{t=t_0} = \hat{1}, \quad (1.18)$$

onde $\hat{1}$ representa o operador identidade.

Um adendo que deve ser feito aqui, é de que a partir deste ponto, os operadores aqui considerados serão hermitianos, pois tal propriedade não é desviada em momento algum no decorrer deste trabalho, logo apesar de existirem desenvolvimentos dentro deste mesmo contexto para operadores não hermitianos, não exploraremos tal contexto. Com isso se torna importante destacar as principais características de operadores hermitianos (LARA, 2007):

1. Os autovalores de um operador hermitiano são sempre reais.
2. As autofunções dos operadores hermitianos são ortogonais, ou podem ser reorganizadas para tal forma, e o conjunto destas, é completo e ortogonal.
3. Especificamente para operadores de evolução temporal $\hat{U}(t, t_0)$, se o operador Hamiltoniano é hermitiano, a evolução é unitária, ou seja

$$\hat{U}^\dagger(t, t_0) = \hat{U}^{-1}(t, t_0), \quad (1.19)$$

logo existe o operador e seu respectivo inverso.

Explorando a última propriedade em relação a hermiticidade, da existência do inverso do operador evolução temporal, para um sistema com N graus de liberdade, existem $2N$ operadores dependentes do tempo expressos como

$$\hat{P}_j(t) = \hat{U}(t, t_0) \hat{p}_j \hat{U}^{-1}(t, t_0), \quad j = 1, \dots, N, \quad (1.20)$$

$$\hat{X}_j(t) = \hat{U}(t, t_0) \hat{x}_j \hat{U}^{-1}(t, t_0), \quad j = 1, \dots, N, \quad (1.21)$$

onde \hat{x}_j e \hat{p}_j são os operadores relacionados as variáveis canônicas, posição em momentum. Como usufruímos aqui da representação de Schrödinger, toda dependência temporal que os operadores a esquerda das equações (1.20) e (1.21), emerge da atuação dos operadores evolução temporal, pois a posição e o momentum não evoluem no tempo.

O invariante quântico é definido como um operador atuando no espaço dos estados de um sistema físico cujo valor médio não varia com a evolução do sistema (DODONOV; MAN'KO, 1989), análogo ao que foi apresentado para o sistema clássico, mas descrito agora pela notação de operadores. A propriedade matemática fundamental proveniente de tal definição se dá formalmente como

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi(t) | \hat{I}_\alpha(t) | \Psi(t) \rangle = 0. \quad (1.22)$$

O lado esquerdo de tal equação pode ser explorado de maneira que algumas importante relações possam ser extraídas, iniciando da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \langle \Psi(t) | \hat{I}_\alpha(t) | \Psi(t) \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\langle \Psi(t) | \hat{I}_\alpha(t) | \Psi(t) \rangle) + \langle \Psi(t) | \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{I}_\alpha(t) \right) | \Psi(t) \rangle + \langle \Psi(t) | \hat{I}_\alpha(t) \left(\frac{\partial}{\partial t} | \Psi(t) \rangle \right). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Por meio do conjugado hermitiano da equação de Schrödinger (1.16):

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \Psi(t) | = \langle \Psi(t) | \hat{H}(t), \quad (1.24)$$

têm-se que:

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi(t) | \hat{I}_\alpha(t) | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi(t) | \left[\frac{\partial}{\partial t} \hat{I}_\alpha(t) - \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}(t), \hat{I}_\alpha(t)] \right] | \Psi(t) \rangle. \quad (1.25)$$

Lembrando que a equação acima é obtida por meio da correspondência clássico-quântico das equações dinâmicas, a qual pode ser representada pela "troca" dos parenteses de Poisson pela presença do comutador em relação a evolução de um fenômeno em termos de sua variável livre:

$$\frac{df}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \equiv \{f, H\} \rightarrow i\hbar [f, H]. \quad (1.26)$$

Retornando ao desenvolvimento, a equação (1.25) pode ser associada a (1.22), gerando o resultado

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{I}_\alpha(t) - \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}(t), \hat{I}_\alpha(t)] = 0. \quad (1.27)$$

A relação acima corresponde a equação dinâmica para os operadores invariantes, que atuada sobre um vetor de estado, satisfaz a equação de Schrödinger (1.16). Em resumo, considerando \hat{H} como hermitiano, qualquer integral de movimento será invariante no tempo dentro do espaço das soluções da equação de Schrödinger.

Agora que a formalismo estruturante da teoria de invariantes está suficientemente expandido, este pode ser conectado com a evolução temporal

$$\langle \Psi(t) | \hat{I}_\alpha(t) | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi(0) | \hat{U}^{-1}(t, t_0) \hat{I}_\alpha(t) \hat{U}^\dagger(t, t_0) | \Psi(0) \rangle = \langle \Psi(0) | \hat{I}_\alpha(0) | \Psi(0) \rangle, \quad (1.28)$$

tais relações implicam em

$$\hat{U}^{-1}(t, t_0) \hat{I}_\alpha(t) \hat{U}(t, t_0) = \hat{I}_\alpha(0), \quad \hat{U}^{-1}(t, t_0) = \hat{U}^\dagger(t, t_0), \quad (1.29)$$

de forma que a ação de um invariante nos vetores de estado do sistema é

$$\begin{aligned} \hat{I}_\alpha(t) | \Psi(t) \rangle &= \hat{U}(t, t_0) \hat{I}_\alpha(t) \hat{U}^{-1}(t, t_0) \hat{U}(t, t_0) | \Psi(0) \rangle = \hat{U}(t, t_0) \hat{I}_\alpha | \Psi(0) \rangle, \\ &\alpha = 1, \dots, 2N, \end{aligned} \quad (1.30)$$

onde por conveniência introduzimos um novo estado $|\Phi(t)\rangle$, que denota a ação de um invariante sobre o vetor de estado original

$$|\Phi(t)\rangle = \hat{I}_\alpha(t)|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) \left(\hat{I}_\alpha(0)|\Psi(0)\rangle \right) = \hat{U}(t, t_0)|\Phi(0)\rangle, \quad \alpha = 1, \dots, 2N, \quad (1.31)$$

com isso demonstra-se que a ação de um operador invariante no vetor de estado produz uma solução da equação de Schrödinger.

Retoma-se agora os operadores invariantes já definidos que representam variáveis de interesse, mais especificamente as variáveis canonicamente conjugadas. Iniciando pelos seus valores esperados, que em conformidade com (1.22) deve ser constante, sendo assim

$$\langle \hat{X}(t) \rangle = \langle \Psi(t) | \hat{X}(t) | \Psi(t) \rangle \equiv \text{constante}. \quad (1.32)$$

Para que tal valor esperado seja explorado com mais detalhes, basta que seja usada a definição dada em (1.21)

$$\langle \hat{X}(t) \rangle = \langle \Psi(t) | \hat{U}(t, t_0) \hat{x} \hat{U}^{-1}(t, t_0) | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi(0) | \hat{x} | \Psi(0) \rangle = \langle x(0) \rangle. \quad (1.33)$$

Vê-se que o valor esperado do operador \hat{X} no decorrer da evolução temporal do sistema depende apenas do valor esperado do operador posição inicial. Logo, \hat{X} é uma integral de movimento (ou invariante) do sistema, portanto

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{X}(t) \rangle = 0. \quad (1.34)$$

Desta forma, o operador invariante \hat{X} satisfaz a equação (1.27), finalmente

$$\frac{d}{dt} \hat{X}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(t) - \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}(t), \hat{X}(t)] = 0. \quad (1.35)$$

Tal operador é então completamente determinado pelo valor inicial do operador posição, tratamento análogo mostra que para o operador \hat{P} as mesmas considerações são válidas. Com isso a estrutura algébrica e conceitual dos invariantes quânticos, ou integrais de movimento, está suficientemente introduzida. Para problemas simples como os apresentados inicialmente por Lewis e Riesenfeld, tal estrutura é suficiente e possibilita uma forma diferenciada de tratamento de sistemas quânticos, o grande problema reside no fato de que as equações diferenciais de primeira ordem para uma classe muito extensa de sistemas, não são analiticamente solúveis a priori. Para contornar tal situação, toda uma estrutura algébrica associada a Hamiltonianos Quadráticos será apresentada no próximo capítulo afim de que a base aqui explorada seja de grande utilidade no estudo de modos acoplados, e o cálculo da forma explícita destes invariantes seja efetuado para que as medidas teóricas de correlação e algumas propriedades centrais em Mecânica Quântica sejam estudadas.

2 INVARIANTES QUÂNTICOS

Como visto anteriormente, a utilização de alguma estrutura de invariantes pode oferecer grande auxílio no tratamento de sistemas quânticos mais complexos. O exemplo importante aqui explorado foi retirado dos trabalhos de Lewis-Riesenfeld, que assim como outras estruturas visa o cálculo exato ou aproximado do propagador (ou função de Green) do sistema. Estes invariantes tem grande generalidade quando se trata da estrutura do Hamiltoniano, um problema emergente é que para sistemas mais elaborados, o desenvolvimento analítico se torna inviável pelas formas adquiridas das equações diferenciais de primeira ordem. Por tal razão, métodos mais sofisticados foram desenvolvidos para cálculos de propagadores. Como esperado, a sofisticação de um método muitas vezes impõe limitações sobre a natureza do fenômeno, entretanto ainda se faz necessária a investigação aprofundada de uma classe, mesmo que limitada, de sistemas.

O método que será apresentado neste capítulo, possui o mesmo objetivo dos invariantes de Lewis-Riesenfeld, porém o cálculo do propagador é efetuado dentro de uma nova estrutura algébrica, emergente da utilização de blocos das matrizes associadas ao Hamiltoniano e aos operadores invariantes. Conectados por equações diferenciais de primeira ordem, o propagador pode por meio dessa nova estrutura ser calculado de forma exata. É importante salientar que limitação imposta pelo método ainda compreende uma classe extremamente recorrente no estudo de Mecânica Quântica e principalmente em óptica, sendo esta a de Hamiltonianos Quadráticos.

O método dos invariantes quânticos consiste no cálculo do propagador por meio da estrutura de invariantes, obedecendo a equações do tipo Schrödinger, estes provêm da estrutura blocos de matrizes a serem definidos, estes se conectam às variáveis do sistema por meio do Hamiltoniano. A forma explícita destes operadores invariantes é adquirida (geralmente) por meio de equações diferenciais de primeira ordem. Porém, como no caso a ser aqui apresentado, problemas de maior complexidade resultam em equações diferenciais de primeira ordem não analiticamente solúveis, tal problema é contornado por métodos perturbativos.

O método utilizado nas equações desenvolvidas neste trabalho, foi o Método das Escalas Múltiplas (MEM), que é recorrente em problemas perturbativos para regimes de acoplamento fraco (BENDER; BETTENCOURT, 1996b). Sua aplicação consiste na expansão da variável temporal t em termos de um parâmetro ϵ , com finalidade de resolver equações diferenciais de segunda ordem acopladas (emergentes do da álgebra de invariantes), as quais podem ser analiticamente resolvidas.

Apesar do propagador compor um elemento central na elaboração da teoria, em prática o método é utilizado a fim da obtenção de medidas teóricas acerca da produção e troca de informação deste sistema, e estas medidas não necessitam da forma explícita do propagador, mas sim da forma explícita funcional dos elementos que compõem os operadores invariantes. Pois a formulação necessária para aquisição de informação pode ser escrita em termos destes.

Ou seja, o principal objetivo a almejado nos capítulos 2 e 3 é o cálculo da forma explícita dos elementos de matrizes que compõe os invariantes de um sistema de dois modos de cavidades fracamente acoplados.

2.1 PROPAGADOR PARA HAMILTONIANOS QUADRÁTICOS

Como já introduzido na seção anterior, o propagador não terá grande valor físico no estudo efetuado neste trabalho, mas é a partir do cálculo explícito de seus componentes que são extraídos os elementos necessários para as medidas teóricas efetuadas. Mas o fato do cálculo de sua forma explícita e exata ser a motivação principal do desenvolvimento deste método faz necessária a apresentação da forma exata do mesmo. Para hamiltonianos quadráticos conforme (DODONOV; MAN'KO, 1989), o cálculo do propagador obedece, equações do tipo Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = \hat{H}(t) \Psi(t), \quad (2.1)$$

e o operador hamiltoniano $\hat{H}(t)$ deve assumir a chamada forma quadrática

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hat{q}_\alpha \mathcal{B}_{\alpha\beta}(t) \hat{q}_\beta + \mathcal{C}_\alpha(t) \hat{q}_\alpha \equiv \frac{1}{2} \hat{\mathbf{q}} B(t) \hat{\mathbf{q}} + C \hat{\mathbf{q}}, \quad (2.2)$$

onde $\hat{\mathbf{q}}$ é a quantidade vetorial que representa o conjunto de $2N$ operadores $(\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_{2N})$, os quais são definidos como

$$\hat{\mathbf{q}} = (\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{x}}), \quad \hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_N) \quad e \quad \hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N),$$

onde os elementos que possuem índices representam os operadores canonicamente conjugados. É importante destacar que os índices gregos variam de 1 a $2N$ e os índices latinos variam de 1 a N . Os coeficientes $\mathcal{B}_{\alpha\beta}(t) = \mathcal{B}_{\beta\alpha}(t)$ são funções arbitrárias do tempo, podendo ser hermitianas ou não, mas como já estabelecido, nosso interesse está voltado para operadores estritamente hermitianos. Representam-se em forma matricial, os coeficientes como blocos matriciais N -dimensionais sob as seguintes condições

$$B(t) = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}, \quad b_1(t) = \tilde{b}_1(t), \quad b_2 = \tilde{b}_3, \quad b_4 = \tilde{b}_4, \quad (2.3)$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

onde o til representa a matriz transposta. De forma mais explícita, o hamiltoniano quadrático em termos das matrizes b_i e c_i assume a seguinte forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p} b_1 \hat{p} + \hat{p} b_2 \hat{x} + \hat{x} b_3 \hat{p} + \hat{x} b_4 \hat{x}) + c_1 \hat{p} + c_2 \hat{x}. \quad (2.5)$$

O propagador já foi apresentado nas equações (1.12-1.15), se faz necessário agora associarmos os operadores invariantes à função de Green, que representa o núcleo do propagador. Isso se faz

possível se as equações (1.20) e (1.21) forem escritas na representação das coordenadas com uso do princípio da completeza, ou seja

$$\begin{aligned}\hat{P}_j(t) &= \hat{U}(t, t_0)\hat{p}_j\hat{U}^{-1}(t, t_0), \quad j = 1, \dots, N, \\ \hat{X}_j(t) &= \hat{U}(t, t_0)\hat{x}_j\hat{U}^{-1}(t, t_0), \quad j = 1, \dots, N,\end{aligned}$$

com

$$\hat{\mathcal{I}} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi |\xi\rangle \langle \xi|,$$

logo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \langle x | \hat{P}_j(t) | \xi \rangle \langle \xi | \hat{U}(t, t_0) | x' \rangle d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x | \hat{U}(t, t_0) | \xi \rangle \langle \xi | \hat{p}_j | x' \rangle d\xi, \quad (2.6)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \langle x | \hat{X}_j(t) | \xi \rangle \langle \xi | \hat{U}(t, t_0) | x' \rangle d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x | \hat{U}(t, t_0) | \xi \rangle \langle \xi | \hat{x}_j | x' \rangle d\xi, \quad (2.7)$$

onde a contagem para os operadores momenta têm-se $\alpha = 1, 2, \dots, N$ e para o operador posição continua-se como $\alpha = N+1, \dots, 2N$. Utiliza-se das coordenadas para que a partir destas últimas equações sejam obtidas $2N$ equações diferenciais para compor um sistema dependente de x_j e suas derivadas, como a seguir

$$\hat{P}_j(x, t)G(x, x'; t, t_0) = i\hbar \frac{\partial}{\partial x'_j} G(x, x'; t, t_0), \quad (2.8)$$

$$\hat{X}_j(x, t)G(x, x'; t, t_0) = i\hbar x'_j G(x, x'; t, t_0). \quad (2.9)$$

Observando tais equações, o problema há de residir na obtenção dos operadores invariantes, pois a partir daí o cálculo do propagador se torna simples. Para a obtenção dos operadores invariantes, retorna-se a equação (1.35)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{I}_\alpha(t) - [\hat{H}, \hat{I}] = 0, \quad \hat{I}_\alpha(t_0) = \hat{q}_\alpha,$$

tal equação pode ser facilmente resolvida pelo fato de que os comutadores são bem conhecidos. Isso pode ser demonstrado partindo da condição inicial mostrada acima, que resulta da análise de tempo inicial (onde $\hat{U} = \hat{1}$) das relações (1.20) e (1.21). Adicionando ao fato de que o hamiltoniano é escrito em termos de \hat{q}_α , deste operador são obtidos os seguintes comutadores

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij} \hat{1},$$

compactamente:

$$[\hat{q}_\alpha, \hat{q}_\beta] = i\hbar \Sigma_{\alpha\beta}, \quad \Sigma_{\alpha\beta} = \Sigma_{\beta\alpha}, \quad (2.10)$$

em que Σ representa os seguintes blocos de matrizes

$$\Sigma = \begin{bmatrix} O_N & E_N \\ -E_N & O_N \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

onde E_N e O_N representam respectivamente as matrizes identidade e nula de ordem N . Por fim, a relação de comutação entre os invariantes pode ser demonstrada e generalizada da seguinte forma (LARA, 2007)

$$\begin{aligned} [\hat{I}_\alpha(t), \hat{I}_\beta(t)] &= \hat{I}_\alpha(t)\hat{I}_\beta(t) - \hat{I}_\beta(t)\hat{I}_\alpha(t) \\ &= \hat{I}_\alpha(t)\hat{U}_{t,t_0}\hat{U}_{t,t_0}^{-1}\hat{I}_\beta(t) - \hat{I}_\beta(t)\hat{U}_{t,t_0}\hat{U}_{t,t_0}^{-1}\hat{I}_\alpha(t) \\ &= \hat{U}(t, t_0)[\hat{q}_\alpha, \hat{q}_\beta]\hat{U}^{-1}(t, t_0), \end{aligned}$$

logo

$$[\hat{I}_\alpha(t), \hat{I}_\beta(t)] = -i\hbar\hat{U}(t, t_0)\Sigma_{\alpha\beta}\hat{U}^{-1}(t, t_0), \quad [\hat{I}_\alpha(t), \hat{I}_\beta(t)] = -i\hbar\Sigma_{\alpha\beta}, \quad (2.12)$$

aqui elementos da mecânica analítica se fazem de grande importância. Observando a estrutura da forma (2.10) associada à equação dinâmica para o invariante (1.22), percebe-se que \hat{I} e \hat{q} são intermediadas por uma transformação canônica ponto a ponto. Em vista que transformações em \hat{I} que obedecem a condição inicial imposta, não alteram a estrutura das equações dinâmicas resultantes para tal invariante. Em conformidade com a definição para uma transformação canônica, onde uma transformação é dita canônica se esta for efetuada e a estrutura das equações de Hamilton forem inalteradas (DERIGLAZOV; FILGUEIRAS, 2009). Consequentemente, é possível definir uma relação de linearidade entre o invariante e os operadores canonicamente conjugados

$$\hat{I}_\mu(t) = \Lambda_{\mu\nu}(t)\hat{q}_\nu + \Delta_\mu(t), \quad (2.13)$$

onde $\Lambda_{\mu\nu}$ representa um bloco de matrizes de ordem $2N$ e Δ_μ uma coluna de matrizes de ordem N , estas estão sujeitas as seguintes condições iniciais

$$\Lambda(t_0) = E_{2N}, \quad \Delta(t_0) = O_{2N}. \quad (2.14)$$

Nas equações acima encontram-se os elementos principais na obtenção da evolução temporal de fenômenos susceptíveis ao tratamento aqui apresentado. A forma funcional dos elementos de matrizes que compõe os blocos $\Lambda(t)$ e $\Delta(t)$ constroem a associação entre os invariantes e os operadores \hat{q} , logo é necessária a construção de equações que possibilitam o encontro da forma explícita destes blocos. Para isso aplicamos a forma linear do invariante na equação dinâmica para o mesmo, com a atenção voltada para o termo diferencial, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{I}_\mu(t) = \frac{d\Lambda_{\mu\nu}(t)}{dt}\hat{q}_\nu + \frac{d\Delta_\mu(t)}{dt}, \quad (2.15)$$

com o termo diferencial, associado ao lado esquerdo da equação dinâmica definido, investiga-se o comutador no apêndice (A.2), iniciando por

$$[\hat{H}, \hat{I}_\mu] = \left[\frac{1}{2}\hat{q}_\alpha B_{\alpha\beta}(t)\hat{q}_\beta + C_\alpha(t)\hat{q}_\alpha, \Lambda_{\mu\nu}(t)\hat{q}_\nu + \Delta_{\mu\nu}(t) \right], \quad (2.16)$$

e finalmente

$$[\hat{H}, \hat{I}_\mu] = i\hbar(\Lambda_{\mu\nu}(t)\Sigma_{\nu\beta}B_{\beta\alpha}\hat{q}_\alpha + \Lambda_{\mu\nu}(t)\Sigma_{\nu\alpha}C_\alpha). \quad (2.17)$$

aplicando tal forma na equação dinâmica, obtemos um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem da seguinte forma

$$\frac{d\Lambda(t)}{dt} = \Lambda(t)\Sigma B(t), \quad (2.18)$$

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} = \Lambda(t)\Sigma C(t). \quad (2.19)$$

Finalmente, por meio deste conjunto se torna possível determinar a estrutura dos invariantes para qualquer sistema descrito por hamiltonianos na forma quadrática. Mas como já tratado, esse desenvolvimento foi feito por meio dos blocos de matrizes, logo se torna necessária uma investigação aprofundada dos elementos que compõe tais blocos, iniciando pela forma das matrizes $\Lambda(t)$ e $\Delta(t)$

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) & \lambda_4(t) \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

$$\Delta(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t) \\ \delta_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

com as seguintes condições iniciais

$$\Lambda(0) = \begin{bmatrix} E_N & O_N \\ O_N & E_N \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

$$\Delta(0) = \begin{bmatrix} O_N \\ O_N \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Logo, a partir das equações (2.18-2.19), podem ser obtidas as equações diferenciais de primeira ordem para cada matriz λ e δ

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_1 b_3 - \lambda_2 b_1, \quad \dot{\lambda}_2 = \lambda_1 b_4 - \lambda_2 b_2, \quad (2.24)$$

$$\dot{\lambda}_3 = \lambda_3 b_3 - \lambda_4 b_1, \quad \dot{\lambda}_4 = \lambda_3 b_4 - \lambda_4 b_2, \quad (2.25)$$

$$\dot{\delta}_1 = \lambda_1 c_2 - \lambda_4 c_1, \quad \dot{\delta}_2 = \lambda_3 c_2 - \lambda_4 c_1. \quad (2.26)$$

Algumas propriedades em relação a estrutura matricial em questão podem ser aqui apresentadas

$$\frac{d}{dt}(\Lambda\Sigma\Lambda) = \frac{d\Lambda}{dt}\Sigma\tilde{\Lambda} + \Lambda\Sigma\frac{d\tilde{\Lambda}}{dt} = \Lambda\Sigma B\Sigma\tilde{\Lambda} - \Lambda\Sigma B\Sigma\tilde{\Lambda} = 0,$$

consequentemente a matriz $\Lambda\Sigma\tilde{\Lambda}$ não varia no tempo. Logo

$$\Lambda(t_0)\Sigma\tilde{\Lambda}(t_0) = E_{2N}\Sigma E_{2N} = \Sigma \implies \Lambda\Sigma\tilde{\Lambda} = \Sigma,$$

portanto, $\Lambda\Sigma\tilde{\Lambda}$ é uma integral de movimento, logo, seu determinante há de assumir

$$\det(\Lambda\Sigma\tilde{\Lambda}) = \det\Sigma,$$

$$\det\Lambda\det\Sigma\det\tilde{\Lambda} = \det\Sigma,$$

como $\det\Sigma = 1$ e $\det\tilde{\Lambda} = \det\Lambda$, então:

$$\det\Sigma = [\det\Lambda]^2 = 1,$$

onde conclui-se que $\Lambda = \pm 1$. Mas é assumido o valor positivo para tal determinante com intuito de que a matriz $\Lambda(t)$ possua elementos contínuos para o tempo inicial. Um resultado muito importante que usufrui dos desenvolvimentos feitos até aqui é a estrutura da matriz inversa Λ^{-1}

$$\Lambda\Sigma\tilde{\Lambda} = \Sigma \implies \Lambda^{-1}\Lambda\Sigma\tilde{\Lambda} = \Lambda^{-1}\Sigma,$$

$$\Lambda^{-1}\Lambda\Sigma\tilde{\Lambda}\Sigma = \Lambda^{-1}\Sigma^2 \implies \Lambda^{-1} = \Sigma\tilde{\Lambda}\Sigma,$$

portanto

$$\Lambda^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_4 & -\lambda_2 \\ -\lambda_3 & \lambda_1 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Com isso, se torna possível apresentar algumas importantes propriedades das matrizes λ

$$\tilde{\lambda}_4\lambda_1 - \tilde{\lambda}_2\lambda_3 = \tilde{\lambda}_1\lambda_4 - \tilde{\lambda}_3\lambda_2 = E_N, \quad (2.28)$$

$$\tilde{\lambda}_4\lambda_2 = \tilde{\lambda}_2\lambda_4, \quad \tilde{\lambda}_1\lambda_3 = \tilde{\lambda}_3\lambda_1, \quad (2.29)$$

de forma com que as equações (2.18-2.29) configurem a estrutura necessária para cálculo da forma explícita das matrizes $\Lambda(t)$ e $\Delta(t)$. Porém as características do sistema presentes na estrutura das matrizes B , podem eventualmente interferir na forma das equações diferenciais (2.24-2.26). Isso faz com que estas não possuam solução analítica a priori, conseqüentemente sendo necessária a atuação de um método perturbativo como será o caso aqui apresentado. Independentemente da forma com que as matrizes sejam calculadas, os operadores invariantes podem agora ser construídos mais explicitamente, seja na representação matricial ou funcional, respectivamente

$$\begin{bmatrix} \hat{P} \\ \hat{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p} \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_N & O_N \\ O_N & E_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

$$\hat{P} = \lambda_1\hat{p} + \lambda_2(t)\hat{x} + \delta_1(t)\hat{1}, \quad \hat{X} = \lambda_3\hat{p} + \lambda_4(t)\hat{x} + \delta_2(t)\hat{1}. \quad (2.31)$$

A representação vetorial N -dimensional dos operadores invariantes na representação das coordenadas se dá como

$$P(x, t) = -i\hbar\lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 x + \delta_1, \quad (2.32)$$

$$X(x, t) = -i\hbar\lambda_3 \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_4 x + \delta_2. \quad (2.33)$$

Logo, se torna possível estabelecer o conjunto de equações de autovalores para o propagador como em (2.8-2.9), com a forma explícita dos operadores invariantes

$$\left[-i\hbar\lambda_{1,jk} \frac{\partial}{\partial x_k} + \lambda_{2,jk} x_k + \delta_{1,j} \right] G(x, x'; t, t_0) = i\hbar \frac{\partial}{\partial x'_j} G(x, x'; t, t_0), \quad (2.34)$$

$$\left[-i\hbar\lambda_{3,jk} \frac{\partial}{\partial x_k} + \lambda_{4,jk} x_k + \delta_{2,j} \right] G(x, x'; t, t_0) = i\hbar x'_j G(x, x'; t, t_0). \quad (2.35)$$

Para que o propagador possa ser calculado analiticamente, sendo os sistemas inicialmente des-correlacionados, é efetuada sua separação:

$$G(x, x'; t, t_0) = G_1(x, x') G_2(x'; t, t_0) G(t, t_0),$$

Com isso o conjunto (2.32-2.33) separa-se em um conjunto de N equações diferenciais parciais para x associada aos autovalores x' , e delas são extraídas as soluções dos termos $G_1(x, x')$ e $G_2(x'; t, t_0)$. Com tais elementos o propagador é escrito a priori em termos de $G_0(t, t_0)$ e terá a seguinte forma

$$G(x, x'; t) = \mathcal{N} G_0(t, t_0) \exp \left\{ -\frac{i}{2\hbar} \left[x\lambda_3^{-1}\lambda_4 x - 2x\lambda_3^{-1}x' + x'\lambda_1\lambda_3^{-1}x' + 2x\lambda_3^{-1}\delta_2 + 2x'\delta_1 \right] \right\}. \quad (2.36)$$

O termo $G_0(t, t_0)$ pode ser calculado por meio de uma equação do tipo Schrödinger

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(x) \right] G(x, x'; t) = 0,$$

com a seguinte condição inicial

$$G(x; x'; 0) = \delta(x_1 - x'_1) \dots \delta(x_N - x'_N) = \delta^N(x - x').$$

A utilização da equação de Schrödinger na forma funcional implica na necessidade de uma representação do operador Hamiltoniano, neste caso podem ser utilizadas as posições

$$H(x) = \frac{1}{2} \left[-\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x} b_1 \frac{\partial}{\partial x} - i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} b_2 x + x b_3 \frac{\partial}{\partial x} \right) + x b_4 x \right] - i\hbar c_1 \frac{\partial}{\partial x} + c_2 x.$$

Para que seja determinada a atuação deste operador em forma funcional na representação das coordenadas sobre a função de interesse, usufrui-se das seguintes relações

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (x \mathcal{A} x) &= -2i\hbar \mathcal{A} x, \\ -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{A} \frac{\partial}{\partial x} (x \mathcal{B} x) &= -2\hbar^2 \text{Tr}(\mathcal{A} \mathcal{B}), \end{aligned}$$

sendo \mathcal{A} e \mathcal{B} quantidades arbitrárias e simétricas. Assume-se uma forma exponencial para solução de $G_0(t, t_0)$, assim como dever ser efetuado para G_1 e G_2

$$G_0(t, t_0) = \exp[\varphi(t, t_0)],$$

onde $\varphi(t, t_0)$ representa uma fase associada a $G_0(t, t_0)$. Logo, para $\varphi(t)$ tem-se que

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \frac{1}{2}\text{Tr}[\lambda_3^{-1}\lambda_4 b_1 - b_3] + \frac{i}{\hbar} \left(c_1 \lambda_3^{-1} \delta_2 - \frac{1}{2} \delta_2 \tilde{\lambda}_3^{-1} b_1 \lambda_3^{-1} \delta_2 \right), \quad (2.37)$$

para simplificação deste problema, utilizamos das relações de inversão entre os elementos das matrizes λ e B em contraste às equações (2.18-2.19)

$$B(t) = -\tilde{\Lambda}(t)\Sigma \frac{d\Lambda(t)}{dt}, \quad (2.38)$$

$$C(t) = -\tilde{\Lambda}(t)\Sigma \frac{d\Delta(t)}{dt}, \quad (2.39)$$

Que analogamente ao conjunto de equações (2.24-2.26), são obtidas as seguintes relações

$$b_1 = \tilde{\lambda}_3 \dot{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_1 \dot{\lambda}_3, \quad b_2 = \tilde{\lambda}_3 \dot{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1 \dot{\lambda}_4, \quad (2.40)$$

$$b_3 = \tilde{\lambda}_4 \dot{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2 \dot{\lambda}_3, \quad b_4 = \tilde{\lambda}_4 \dot{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_2 \dot{\lambda}_4, \quad (2.41)$$

$$c_1 = \tilde{\lambda}_3 \dot{\delta}_1 - \tilde{\lambda}_3 \dot{\delta}_1, \quad c_2 = \tilde{\lambda}_4 \dot{\delta}_1 - \tilde{\lambda}_2 \dot{\delta}_2. \quad (2.42)$$

Com tais relações bem estabelecidas, basta que a equação (2.37) seja manipulada para que os elementos pertencentes a B e C não componham a solução do problema. Para isso, separadamente serão tratados os dois elementos dependentes de b_i e c_i , de forma que a equação resultante para a fase $\varphi(t)$ seja

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = -\frac{1}{2}\text{Tr}[\lambda_3^{-1}\dot{\lambda}_3] + \frac{i}{\hbar} \left(\dot{\delta}_1 \delta_2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta_2 \lambda_1 \lambda_3^{-1} \delta_2) \right), \quad (2.43)$$

onde,

$$\text{Tr}[\lambda_3^{-1}\dot{\lambda}_3] = \frac{d}{dt} \ln(\det \lambda_3),$$

consequentemente, a equação final para a fase é

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \ln(\det \lambda_3) + \frac{i}{\hbar} \left(\dot{\delta}_1 \delta_2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta_2 \lambda_1 \lambda_3^{-1} \delta_2) \right), \quad (2.44)$$

cuja solução é

$$\varphi(t) = \ln(\det \lambda_3)^{-\frac{1}{2}} - \frac{i}{2\hbar} \delta_2 \lambda_1 \lambda_3^{-1} \delta_2 + \frac{i}{\hbar} \int_0^t \dot{\delta}_1 \delta_2 dt'. \quad (2.45)$$

Finalmente, retorna-se a $G_0(t)$

$$G_0(t) = \mathcal{N}(\det \lambda_3)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{i}{2\hbar} \left(\delta_2 \lambda_1 \lambda_3^{-1} \delta_2 - 2 \int_0^t \dot{\delta}_1 \delta_2 dt' \right) \right\}, \quad (2.46)$$

sendo \mathcal{N} o fator de normalização $\mathcal{N} = (-2i\hbar\pi\det\lambda_3)^{-\frac{N}{2}}$. Agora, com todos os termos de separação de $G(x, x'; t, t_0)$ definidos, é possível uni-los a fim de adquirir a forma final explícita do propagador em termos apenas das matrizes que compõe os blocos Λ e Δ

$$G(x, x'; t) = (-2i\hbar\pi\det\lambda_3)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\hbar}[x\lambda_3^{-1}\lambda_4x - 2x\lambda_3^{-1}x' + x'\lambda_1\lambda_3^{-1}x' + 2x\lambda_3^{-1}\delta_2 + 2x'(\delta_1 - \lambda_1\lambda_3^{-1}\delta_2) + \delta\lambda_1\lambda_3^{-1}\delta_2 - 2\int_0^t \dot{\delta}_1\delta_2 dt']\right\}. \quad (2.47)$$

Constata-se que a dependência temporal está implícita na estrutura funcional dos elementos que compõe os blocos de matrizes $\Lambda(t)$ e $\Delta(t)$. Estes elementos são calculados em sua associação com as matrizes b_i , estas que derivam da estrutura do hamiltoniano quadrático do sistema. A priori, as formas funcionais explícitas das matrizes λ e δ são adquiridas a partir do conjunto de equações diferenciais de primeira ordem (2.24-2.26). Diante disso, o principal problema que reside na atuação deste método é a resolução deste conjunto de equações, pois uma vez que estas matrizes possuam suas formas funcionais explícitas, o cálculo do propagador ou das medidas teóricas já está propriamente definido. Mas como será visto, nem sempre este conjunto de equações pode ser calculado analiticamente em primeiro plano, necessitando da utilização de um método perturbativo, o qual apesar de ferir o cálculo exato destas matrizes, ainda proporciona resultados suficientemente aproximados para uma análise bastante detalhada da dinâmica de um sistema susceptível a tal tratamento.

A generalidade alcançada nos resultados destes cálculos deriva também da formulação integral utilizada, por meio da função de Green, que oferece a extração de informação dos estados a qualquer momento $t > t_0$ em qualquer posição. E isso será mostrado nas próximas seções que estarão voltadas para a utilização do método aqui apresentado em um sistema composto por dois modos fracamente acoplados excitados parametricamente.

2.2 APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS INVARIANTES

Nesta seção, nossa atenção é voltada a aplicação do método dos invariantes para um sistema fechado composto por dois modos de cavidades ópticas (reduzíveis a osciladores) acopladas em regime de excitação paramétrica. Sistemas de osciladores acoplados já são bastante conhecidos na literatura (CASTRO; PERUZZO; DODONOV, 2005; SHAPIRO, 2001; TIAN; SIMMONDS; ALLMAN, 2008; EL-DIB, 2001; CHANG; SHAO; ZHOU, 2006; GROSSO; LOMBARDO; VILLAR, 2019; DODONOV; KLIMOV, 1996; DODONOV; CASTRO, 2013; PAZ; RONCAGLIA, 2008). Tal interesse provém da grande generalidade que o modelo de osciladores oferece ao estudo da física há muitos séculos, se tornando uma ferramenta fundamental na descrição de uma grande variedade de fenômenos. Principalmente a partir dos primórdios da Mecânica Quântica no estudo sobre corpos negros, onde os osciladores compõe importante papel na quantização da luz, fazendo deste modelo cada vez mais recorrente em diferentes ramos da física moderna, tanto no âmbito macroscópico quanto microscópico. E é um importante elemento de interface que compõe a transição entre o universo micro e macroscópico por meio da

Mecânica Estatística. Nosso estudo entretanto, está mais voltado para características microscópicas da natureza, e neste contexto osciladores compõe papel de grande importância na geração e troca de informações, especialmente quando tratados num contexto óptico.

Nas últimas décadas, problemas de trocas de estados entre osciladores quânticos foram investigados como em (CASTRO; PERUZZO; DODONOV, 2005; BENNET et al., 1993; DAVIDOVICH et al., 1994; MOUSSA, 1997; SUBAIRY, 1998; MILBURN; BRAUNSTEIN, 1999). Tais problemas consistem na análise da evolução temporal de dois ou mais subsistemas acoplados cuja propriedade de trocas de estados ou teletransporte quântico são investigadas. Nos nossos casos são analisados por meio das variáveis das quadraturas x e p , estudo este tem como objetivo de aferir quais são as condições que potencializam maior correlação entre seus componentes, por meio de medidas teóricas de correlação quântica. Possibilitando eventualmente obtenção de maior eficiência e controle sobre fenômenos de natureza quântica em geral. Uma importante característica presente no sistema a ser estudado é a excitação paramétrica, tal regime nasce classicamente como uma variação periódica de um parâmetro com dependência temporal no sistema, no caso o parâmetro será a frequência de ambos os modos oscilantes.

As propriedades físicas, condições de contorno, entre outros entes associados a qualquer sistema físico são oriundas da estrutura de seu Hamiltoniano. Este há de carregar as propriedades que conectam nosso interesse a natureza de forma bastante eficiente, conforme apontado em (GOLDSTEIN; POOLE; J., 1977; SAKURAY; NAPOLITANO, 2011; FEYNMAN, 1965). Para sistemas de modos acoplados, dos quais utilizam diferentes modelos de osciladores, uma série de hamiltonianos foram investigados a ponto de que a partir de uma forma geral, dependente do interesse do investigador, este seja modelado de acordo com um protocolo que delimita as transformações necessárias para uma forma eficiente de se tratar a evolução temporal do sistema para diferentes métodos. Isso pode visto em trabalhos como (CASTRO; PERUZZO; DODONOV, 2005; DODONOV; CASTRO, 2013; LARA, 2007; DODONOV; MAN'KO; MAN'KO, 1995; CASTRO, 2002).

Para nosso caso, o hamiltoniano quadrático geral toma a seguinte forma

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + \omega_1^2(t)x_1^2 + \omega_2^2(t)x_2^2) + \gamma_1(t)p_1p_2 + \gamma_2(t)p_1x_2 + \gamma_3(t)x_1p_2 + \gamma_4(t)x_1x_2, \quad (2.48)$$

onde as constantes que normalmente estão presentes em hamiltonianos como a massa e a constante de Planck são igualadas a um por meio das transformações adequadas. E os termos $\gamma_i(t)$ representam as variáveis de acoplamento, estas que podem ser dependentes ou independentes do tempo, e essa questão é extremamente relevante no desenvolvimento dos cálculos da evolução dinâmica de qualquer sistema. Questões relacionadas à engenharia de hamiltonianos de natureza análoga ao aqui tratado, e problemas mais aprofundados em relação a dependência temporal do acoplamento de subsistemas podem ser encontradas nos trabalhos de (LARA, 2007; CASTRO, 2002).

A principal alteração estrutural do hamiltoniano é configurada pela mudança das frequên-

cias ω_1 e ω_2 . Os dois componentes do sistema são submetidos a excitação paramétrica, a qual é caracterizada pela seguinte forma da frequência

$$\omega_j(t) = \sqrt{1 + \epsilon r_j(t)} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon r_j + O(\epsilon^2). \quad (2.49)$$

A introdução da excitação paramétrica em sistemas compostos pelo modelo de osciladores, historicamente se mostra como uma ferramenta eficiente na produção de informação, e seus efeitos tanto no âmbito clássico como quântico já são bastante conhecidos para uma grande variedade de sistemas, como visto em (EL-DIB, 2001; SHAPIRO, 2001; DODONOV, 1998; LARA, 2007) por exemplo.

A excitação paramétrica em geral, tem como efeitos um grande aumento na energia do sistema, assim como a potencialização das correlações entre os subsistemas em seus primeiros momentos. Uma consideração física que deve ser aqui feita, é de que as interações entre os subsistemas são independentes do tempo, e estão contidas no campo das interações fracas, de forma que as constantes de acoplamento da forma (2.48) sejam submetidas as transformações

$$\gamma_i(t) \rightarrow \epsilon \zeta_0, \quad \gamma_j(t) \rightarrow \epsilon \zeta_1, \quad i = 1, 4, \quad j = 2, 3.$$

Finalmente, o hamiltoniano que descreve o sistema composto por dois modos de cavidades eletromagnéticas, parametricamente excitados e fracamente acoplados é escrito da seguinte forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2}[\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \omega_1^2(t)\hat{x}_1^2 + \omega_2^2(t)\hat{x}_2^2] + \epsilon \zeta_0(\hat{x}_1\hat{x}_2 + \hat{p}_1\hat{p}_2) + \epsilon \zeta_1(\hat{x}_1\hat{p}_2 - \hat{p}_1\hat{x}_2). \quad (2.50)$$

O sistema foi resolvido com o auxílio do programa MAPLE para o caso $\omega_j^2(t) = 1 + 8\chi\epsilon r_j(t)$, $r_1(t)=r_2(t) = \text{sen}(\eta t)$, então é importante ressaltar que o desenvolvimento feito a partir deste ponto trata do caso onde as **frequências naturais deste sistema são iguais**, e os resultados estarão em sua totalidade ao fim deste capítulo e serão devidamente utilizados nas medidas aplicadas e discutidos no capítulo 4. Uma imagem representativa deste sistema pode ser observada pela figura 1.

O acoplamento utilizado é do tipo aproximação de onda girante (RWA) já discutida em (CASTRO; DODONOV; MIZRAHI, 2002), esta que negligencia os termos rapidamente oscilantes do hamiltoniano. Uma importante suposição inicial é de que no instante inicial os subsistemas estão desacoplados, ou seja

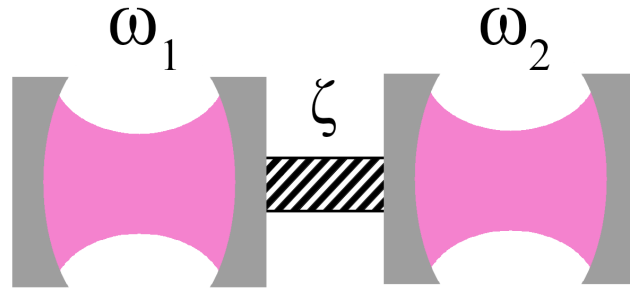
$$\psi(x_1, x_2; 0) = \psi_1(x_1)\psi(x_2). \quad (2.51)$$

Consequentemente, a função de onda nos para tempos $t > 0$ tem a seguinte forma

$$\psi(x_1, x_2; t) = \int G(x_1, x_2; x'_1, x'_2; t)\psi(x'_1, x'_2; 0)dx'_1dx'_2, \quad (2.52)$$

Com isso, iniciemos o processo de aquisição das formas funcionais das matrizes λ que compõe os blocos Λ . E isso se dá, pela forma do bloco de matrizes B , mas especificamente pelas

Figura 1 – Essa figura ilustra esquematicamente o modelo de duas cavidades ω_1 e ω_2 acopladas por uma constante η em um sistema fechado, obviamente apenas um modo de cada cavidade é selecionado em teoria, mas fixamos que o sistema pode ainda ser ilustrado como abaixo.



Fonte: o autor.

matrizes que o compõe, as matrizes b_j , e essas para nosso sistema possuem a seguinte forma

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon\zeta_0 \\ \varepsilon\zeta_0 & 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon\zeta_1 \\ \varepsilon\zeta_1 & 0 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon\zeta_1 \\ -\varepsilon\zeta_1 & 0 \end{bmatrix}, b_4 = \begin{bmatrix} \omega_1^2(t) & \varepsilon\zeta_0 \\ \varepsilon\zeta_0 & \omega_2^2(t) \end{bmatrix},$$

$$c_1 = c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

Para que o grupo de equações diferenciais de primeira ordem seja construído a partir do conjunto (2.24-2.26), são introduzidas as formas explícitas das matrizes λ_i

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}, \lambda_2 = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}, \lambda_3 = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 & \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 & \tilde{u}_4 \end{bmatrix}, \lambda_4 = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 & \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 & \tilde{v}_4 \end{bmatrix}, \quad (2.54)$$

que substituídas no conjunto (2.24-2.26) resultam no seguinte grupo de equações

$$\frac{d}{dt}u_i = -u_j\varepsilon\zeta_1 - v_i - v_j\varepsilon\zeta_0, \quad \frac{d}{dt}u_j = u_1\varepsilon\zeta_1 - v_1\varepsilon\zeta_0 - v_2, \quad (2.55)$$

$$\frac{d}{dt}v_i = u_1\omega_1(t) + u_2\varepsilon\zeta_0 - v_2\varepsilon\zeta_1, \quad \frac{d}{dt}v_i = u_1\varepsilon\zeta_0 + u_2\omega_2(t) + v_1\varepsilon\zeta_1, \quad (2.56)$$

onde $i = 1, 3$ e $j = 2, 4$ e as equações relativas as matrizes λ_3 e λ_4 são análogas aos grupos (2.55-2.56) contendo os termos \tilde{u}_i e \tilde{v}_j . As condições iniciais relativas a estas equações estão estruturadas como (2.22-2.23), aqui mais explicitamente, têm-se

$$\begin{bmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_3(0) & u_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1(0) & \tilde{v}_2(0) \\ \tilde{v}_3(0) & \tilde{v}_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

$$\begin{bmatrix} v_1(0) & v_2(0) \\ v_3(0) & v_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1(0) & \tilde{u}_2(0) \\ \tilde{u}_3(0) & \tilde{u}_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Neste estágio, por meio do cálculo das soluções do grupo de equações (2.55-2.56), e seus respectivos análogos oriundos das matrizes λ_3 e λ_4 , nosso problema estaria resolvido e as formas funcionais explícitas dos componentes destas matrizes nos forneceriam consequentemente as medidas teóricas necessárias para uma boa análise da dinâmica deste sistema. Porém como é possível observar, tais equações configuram um grupo de oito equações diferenciais de primeira ordem acopladas, e como o interesse deste trabalho está no desenvolvimento analítico da dinâmica do sistema em questão, a resolução deste sistema se torna impossível. Logo necessita-se de novas condições que possibilitem a construção de um novo grupo de equações que nos retorne a forma explícita dos componentes das matrizes λ_j , sem que sejam violadas premissas matemáticas e físicas.

Iniciemos essa nova etapa de tratamento, por meio de uma breve discussão sobre uma importante consideração vagamente introduzida a respeito das interações dos modos do campo eletromagnético. Estas são mediadas pelo acoplamento entre os modos e são suficientemente fracas, de modo que a magnitude da constante de acoplamento seja susceptível a seguinte condição

$$\varepsilon^2 \zeta_i \zeta_j \ll 1, \quad (2.59)$$

assim, a parcela do hamiltoniano que configura interação dos subsistemas

$$\hat{H}_I = \varepsilon \zeta_0 (\hat{x}_1 \hat{x}_2 + \hat{p}_1 \hat{p}_2) + \varepsilon \zeta_1 (\hat{x}_1 \hat{p}_2 - \hat{p}_1 \hat{x}_2), \quad (2.60)$$

ainda seja notável dentro da evolução dinâmica do sistema, mas esteja também dentro dos limites em que uma expansão em primeira ordem do parâmetro ε seja suficiente para análise do efeito interativo entre os dois subsistemas (CASTRO; DODONOV; MIZRAHI, 2002). Não somente as implicações físicas são centrais nas considerações sobre o acoplamento, pois sua expansão implica na transformação do conjunto (2.55-2.56) e seus análogos em um novo grupo de equações de segunda ordem analiticamente solúveis, o processo de aquisição das novas equações é de natureza analítica simples, e é exposto no apêndice (A.3).

A forma geral deste novo conjunto é

$$\frac{d^2 \lambda_j}{dt^2} - \frac{d\lambda_j}{dt} \mathcal{E}_3 + \lambda_j \mathcal{E}_4 = 0, \quad j = 1, 3, \quad (2.61)$$

$$\frac{d^2 \lambda_j}{dt^2} - \frac{d\lambda_j}{dt} \mathcal{E}_1 + \lambda_j \mathcal{E}_2 = 0, \quad j = 2, 4, \quad (2.62)$$

onde os termos \mathcal{E}_i condensam as seguintes operações matriciais que contém as matrizes b_i e suas inversas

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= b_2 - b_4^{-1} b_3 b_4 - b_4^{-1} \frac{db_4}{dt}, & \mathcal{E}_2 &= b_1 b_4 - b_2 b_4^{-1} b_3 b_4 - b_2 b_4^{-1} \frac{db_4}{dt} + \frac{db_2}{dt}, \\ \mathcal{E}_3 &= b_3 - b_1^{-1} b_2 b_1 - b_1^{-1} \frac{db_1}{dt}, & \mathcal{E}_4 &= b_4 b_1 - b_3 b_1^{-1} b_2 b_1 - b_3 b_1^{-1} \frac{db_1}{dt} + \frac{db_3}{dt}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

sendo as inversas das matrizes b_i para o nosso sistema

$$b_1^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\varepsilon^2 \zeta_0 - 1} & \frac{\varepsilon \zeta_0}{\varepsilon^2 \zeta_0^2 - 1} \\ \frac{\varepsilon \zeta_0}{\varepsilon^2 \zeta_0^2 - 1} & -\frac{1}{\varepsilon^2 \zeta_0 - 1} \end{bmatrix}, \quad b_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon \zeta_1} \\ -\frac{1}{\varepsilon \zeta_1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$b_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\varepsilon \zeta_1} \\ \frac{1}{\varepsilon \zeta_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad b_4^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\omega_2(t)}{\omega_1(t)\omega_2(t) - \varepsilon^2 \zeta_0^2} & -\frac{\varepsilon \zeta_0}{\omega_1(t)\omega_2(t) - \varepsilon^2 \zeta_0^2} \\ -\frac{\varepsilon \zeta_0}{\omega_1(t)\omega_2(t) - \varepsilon^2 \zeta_0^2} & \frac{\omega_2(t)}{\omega_1(t)\omega_2(t) - \varepsilon^2 \zeta_0^2} \end{bmatrix}. \quad (2.64)$$

Com a aplicação das matrizes \mathcal{E} no conjunto (2.61-2.62), um conjunto de dezesseis equações foram obtidos, mas pela analogia entre suas estruturas podem ser reduzidas a dois grupos. Compostos cada um por duas equações diferenciais de segunda ordem acopladas, onde desconsideramos os termos que continham a constante ε^2 ou de ordem superior. Por fim os grupos resultantes, possuem a seguinte estrutura:

$$S_1 \begin{cases} \ddot{u}_1(t) + \omega_1^2(t)u_1(t) + 2\varepsilon\zeta_1\dot{u}_2(t) + \varepsilon\zeta_0[1 + \omega_2^2(t)]u_2(t) = 0, \\ \ddot{u}_2(t) + \omega_2^2(t)u_2(t) - 2\varepsilon\zeta_1\dot{u}_1(t) + \varepsilon\zeta_0[1 + \omega_1^2(t)]u_1(t) = 0, \end{cases} \quad (2.65)$$

$$S_2 \begin{cases} \dot{v}_1(t) - \frac{\varepsilon\gamma\omega_2^2(t)r_1(t)\dot{v}_1(t)}{\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) - 1} + \omega_1^2(t)v_1(t) \\ + \left[\varepsilon\zeta_1 + \frac{\varepsilon\zeta_1(\omega_1^2(t))^2}{\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) - 1} \right] \dot{v}_2(t) + \varepsilon\zeta_0[1 + \omega_1^2(t)]v_2(t) = 0, \\ \dot{v}_2(t) - \frac{\varepsilon\gamma\omega_1^2(t)r_2(t)\dot{v}_2(t)}{\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) - 1} + \omega_2^2(t)v_2(t) \\ + \left[-\varepsilon\zeta_1 - \frac{\varepsilon\zeta_1(\omega_2^2(t))^2}{\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) - 1} \right] \dot{v}_1(t) + \varepsilon\zeta_0[1 + \omega_2^2(t)]v_1(t) = 0. \end{cases} \quad (2.66)$$

O grupo S_1 é referente as matrizes $\lambda_1(t)$ e $\lambda_3(t)$ e S_2 às matrizes $\lambda_2(t)$ e $\lambda_4(t)$ consequentemente. Uma importante característica destas equações, é que são similares as chamadas *equações de Mathieu*:

$$\ddot{u}(t) + \omega^2(t)u(t) = 0. \quad (2.67)$$

Sua aplicação já foi estudada no domínio clássico e quântico referente a problemas de oscilações não lineares e forças externas periódicas, que fazem necessária a utilização de métodos assintóticos, estas últimas se aproximam dos casos de frequências paramétricas. A principal diferença presente entre ações externas periódicas e a excitação paramétrica aqui investigada, se mostra na estrutura dos coeficientes que compõe suas soluções, pois estes são compostos por termos rapidamente oscilantes e crescentes, enquanto problemas de ação externa, podem trazer coeficientes constantes, ou de pequena variação em relação ao parâmetro livre. Estes usufruem de outros métodos perturbativos relacionados muitas vezes às equações de Duffing, ou até mesmo de Mathieu em um diferente domínio, como os métodos de Krylov-Bogoliubov-Mitropolski, Von Zeipel e Lindsted (NAYFEH, 1973). Sendo assim, usufruímos da ideia central presente na teoria da perturbação, onde extraí-se de um problema conhecido soluções aproximadas para equações de maior complexidade, para que sejam estimadas as soluções referentes às equações (2.65-2.66). Isso será possível por meio da utilização das técnicas assintóticas oferecidas pelo Método das Escalas Múltiplas (MEM), que por sua grande abrangência e eficiência

será tratado com detalhes na próxima seção deste trabalho em seu caráter clássico e quântico, para que por fim seja devidamente aplicado e as formas funcionais dos elementos presentes nas matrizes $\lambda_i(t)$ sejam extraídas e utilizadas para o cálculo das medidas teóricas apropriadas.

3 MÉTODO DAS ESCALAS MÚLTIPLAS E SOLUÇÕES DAS MATRIZES $\lambda(t)$

O MEM consiste em um método perturbativo, portanto é conveniente justificar o uso de técnicas desta natureza do ponto de vista físico. Como já introduzido, a descrição da natureza em física é majoritariamente regulada matematicamente pelo uso de equações diferenciais, como por exemplo as equações de Newton, Hamilton, Schrödinger, a equação dinâmica para operadores invariantes (1.24), entre outras. Um resultado direto da investigação de fenômenos, é de que estes tornam-se sofisticados com a aproximação dos modelos a realidade, consequentemente o número de parâmetros, condições de contorno e complexidade das soluções adequadas aumentam significativamente.

Por estas razões, as equações diferenciais adquiridas para interpretação de casos rebuscados, como exemplo as que motivaram o estudo que está sendo aqui efetuado (2.65-2.66), possuem soluções não conhecidas ou analiticamente inviáveis para que sejam estimadas. Assim, se faz necessário o uso das teorias de perturbações, que são definidas como aproximações que utilizam de expansões em série efetuadas a partir da estrutura de equações diferenciais cujas soluções e características são conhecidas para que as soluções das equações de interesse sejam estimadas (NAYFEH, 1973).

Obviamente tais aproximações necessitam de condições físicas bastante restritas para que forneçam resultados condizentes com a realidade. Aqui trataremos primeiramente dos aspectos gerais do método das escalas múltiplas, e posteriormente o traremos ao contexto quântico para que finalmente o utilizemos no problema desenvolvido ao decorrer deste capítulo. O MEM é um método muito recorrente em física teórica pela sua eficiência em sistemas de oscilações não lineares (muito presentes na natureza), dinâmica de fluidos, entre outros.

Uma das motivações existentes para uso do MEM, é de que na natureza existe uma extensa classe de fenômenos que manifestam comportamentos distintos para diferentes escalas temporais, e por meio de uma série perturbativa, o acoplamento ressonante frequentemente se mostra dentre as ordens de perturbação. Aspectos ressonantes presentes na evolução do sistema investigado neste trabalho, são de grande importância pelas implicações físicas anteriormente discutidas em relação a troca de estados e potencialização de correlações quânticas.

Porém, este acoplamento resulta no aparecimento dos chamados *termos seculares*, que não somente violam a condição de que as soluções sejam finitas, como em um contexto quântico podem contrair as relações de comutação e consequentemente a probabilidade não é conservada, mas o MEM reorganiza tais termos de forma que sejam eliminados e a análise em diferentes escalas temporais seja válida (JANOWICZ, 2002; BENDER; BETTENCOURT, 1996a; BENDER; BETTENCOURT, 1996b).

3.1 EQUAÇÃO DE MATHIEU

Os sistemas de equações diferenciais de segunda ordem acopladas (2.65-2.66) foram verificados como semelhantes à equação de Mathieu (2.67), portanto se faz necessária sua análise utilizando do MME, as soluções e tratamento utilizadas em nossas equações estarão munidas de maior baseamento teórico, seguindo o processo utilizado em (EL-DIB, 2001). A revisão teórica desta equação inicia-se com a forma da equação de Mathieu reescrita

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0,$$

onde o parâmetro ω representa a frequência associada a seguinte solução

$$u(t) = \mathcal{A} \exp(i\omega t) + c.c., \quad (3.1)$$

onde \mathcal{A} representa a amplitude associada e *c.c* seu respectivo complexo conjugado. Iniciando a expansão das escalas temporais para aplicação do MME temos

$$T_n = \varepsilon^n t,$$

Que resulta na reestruturação das derivadas temporais

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad (3.2)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2\varepsilon D_0 D_2) + \dots, \quad (3.3)$$

onde

$$D_n = \frac{d^n}{dt^n}. \quad (3.4)$$

Assume-se que a não linearidade possui ordem ε , para que $u(t)$ seja expandido como

$$u(t; \varepsilon) = \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 u_3(T_0, T_1, T_2) + \dots, \quad (3.5)$$

e reaplicado na equação de Mathieu, é gerado o seguinte conjunto acoplado de equações diferenciais

$$\begin{cases} D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = 0 \\ D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 = -2D_0 D_1 + 2q_1 u_1 \cos(2T_0) - a_2 u_1^2 \end{cases}, \quad (3.6)$$

onde $\omega > 0$. A solução geral então reescrita agora em termos das escalas temporais:

$$u_1 = \mathcal{A}(T_1, T_2) \exp i\omega T_0 + c.c. \quad (3.7)$$

Com a amplitude sendo uma função complexa dependente das escalas T_1 e T_2 , as equações referentes a u_2 e u_3 devem ser periódicas na escala temporal de ordem zero para obtenção de \mathcal{A} , porém aqui estamos interessados na aplicação do MEM e análise dos termos seculares, logo

estaremos nos limitando até segunda ordem. Utilizando a solução acima na equação de segunda ordem do sistema (3.6), é obtida a seguinte forma

$$D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 = -2i\omega D_1 \mathcal{A} \exp(i\omega T_0) - a_2 (\mathcal{A}^2 \exp(2i\omega t_0) + 2\mathcal{A}\bar{\mathcal{A}}) + q_1 \mathcal{A} \{ \exp[i(\omega + 2)T_0] + \exp[i(\omega - 2)T_0] \} + c.c. \quad (3.8)$$

Assim como no desenvolvimento feito ao início deste capítulo observamos a presença de termos seculares nos fatores exponenciais, entretanto por meio de considerações físicas associadas à ressonância se torna possível eliminá-los sem a perda de generalidade. Para que este processo seja mais próximo ao nosso caso de interesse, considera-se o caso ressonante onde ω se aproxima de um, com isso

$$1 = \omega + \varepsilon\sigma_0.$$

A relação acima introduz um pequeno desvio no valor de ω , que tem como grande vantagem a facilitação do reconhecimento dos termos seculares. Uma implicação desta equação é

$$-i(\omega - 2)T_0 = i\omega T_0 + 2i\sigma_0 T_1,$$

que utilizado em (3.8) nos retorna a seguinte condição de solução para remoção dos termos seculares

$$D_1 \mathcal{A} + \frac{1}{2\omega} i q_1 \bar{\mathcal{A}} \exp(2i\sigma_0 T_1) = 0, \quad (3.9)$$

logo, se torna possível propor a seguinte solução para u_2

$$u_2 = \frac{1}{3} \frac{a_2}{\omega^2} \mathcal{A}^2 \exp(2i\omega T_0) - \frac{1}{4} \frac{q_1}{\omega + 1} \mathcal{A} \exp[i(2 + \omega)T_0] + C.C \quad (3.10)$$

Com isso seria necessária a aplicação desta solução no sistema original afim da obtenção de u_3 para que a amplitude fosse calculada. Tal processo é bastante extenso e necessita de uma análise bastante aprofundada das condições físicas e matemáticas dos elementos que compõe este sistema. Sendo assim, a aplicação do MEM e manipulação de seus termos seculares foi suficientemente discutida para que agora seja aplicada nos nossos sistemas de interesse a partir da próxima seção, afim de que a forma explícita funcional de cada elemento das matrizes λ_j seja calculada.

3.2 APLICAÇÃO DO MME E FORMAS FUNCIONAIS EXPLÍCITAS

Munidos das ferramentas necessárias para continuidade de nossos cálculos, utilizamos do parâmetro ε para a expansão das escalas temporais. Isso resulta diretamente na expansão em série destas escalas para as funções dependentes explicitamente do tempo, logo as matrizes $\lambda(t)$ que fornecem as formas funcionais que buscamos para descrição deste sistema tomam a seguinte forma

$$\lambda_k(t) = \lambda_k^{(0)}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon \lambda_k^{(1)}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 \lambda_k^{(2)}(T_0, T_1, T_2), \quad (3.11)$$

retomando aqui as derivadas temporais

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots,$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2\varepsilon D_0 D_2) + \dots,$$

basta que estas sejam devidamente atuadas sobre os elementos funcionais das matrizes λ_j para que a expansão seja conseqüentemente aplicada nos sistemas (2.65-2.66)

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} u_{10}(T_0, T_1) + \varepsilon u_{11}(T_0, T_1) & u_{20}(T_0, T_1) + \varepsilon u_{21}(T_0, T_1) \\ u_{30}(T_0, T_1) + \varepsilon u_{31}(T_0, T_1) & u_{40}(T_0, T_1) + \varepsilon u_{41}(T_0, T_1) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} v_{10}(T_0, T_1) + \varepsilon v_{11}(T_0, T_1) & v_{20}(T_0, T_1) + \varepsilon v_{21}(T_0, T_1) \\ v_{30}(T_0, T_1) + \varepsilon v_{31}(T_0, T_1) & v_{40}(T_0, T_1) + \varepsilon v_{41}(T_0, T_1) \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

que pela consideração de acoplamento fraco $\varepsilon^2 \zeta_i \zeta_j \ll 1$, a expansão foi feita até primeira ordem. Obviamente o processo é análogo para o restante das matrizes.

Finalmente, propomos as soluções para os sistemas S_1 e S_2 na forma das expansões

$$u_1(T_0, T_1, T_2) = u_{10}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_{11}(T_0, T_1, T_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.14)$$

$$u_1(T_0, T_1, T_2) = u_{20}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_{21}(T_0, T_1, T_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.15)$$

e

$$v_1(T_0, T_1, T_2) = v_{10}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon v_{11}(T_0, T_1, T_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.16)$$

$$v_1(T_0, T_1, T_2) = v_{20}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon v_{21}(T_0, T_1, T_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (3.17)$$

Estas soluções aplicadas nos sistemas, possibilitam a resolução destas equações em duas partes relativas às ordens do parâmetro ε , respectivamente para u_1 e u_2

$$u_1 \begin{cases} \varepsilon^0 & D_0^2 u_{10} + u_{10} = 0 \\ \varepsilon^1 & D_0^2 u_{11} + u_{11} = -(2D_0 D_1 - \gamma r_1(T_0))u_{10} + 2(\zeta_1 D_0 + \zeta_0)u_{20}, \end{cases} \quad (3.18)$$

$$u_2 \begin{cases} \varepsilon^0 & D_0^2 u_{20} + u_{20} = 0 \\ \varepsilon^1 & D_0^2 u_{21} + u_{21} = -(2D_0 D_1 - \gamma r_2(T_0))u_{20} + 2(-\zeta_1 D_0 + \zeta_0)u_{10}, \end{cases} \quad (3.19)$$

analogamente para v_1 e v_2 :

$$v_1 \begin{cases} \varepsilon^0 & D_0^2 v_{10} + v_{10} = 0 \\ \varepsilon^1 & D_0^2 v_{11} + v_{11} = -[2D_0 D_1 - (\gamma D_0 r_1)D_0 + \gamma r_1(T_0)]v_{10} - 2(\zeta_1 D_0 + \zeta_0)v_{20}, \end{cases} \quad (3.20)$$

$$v_2 \begin{cases} \varepsilon^0 & D_0^2 v_{20} + v_{20} = 0 \\ \varepsilon^1 & D_0^2 v_{21} + v_{21} = -[2D_0 D_1 - (\gamma D_0 r_2)D_0 + \gamma r_2(T_0)]v_{20} - 2(-\zeta_1 D_0 + \zeta_0)v_{10}. \end{cases} \quad (3.21)$$

É importante ressaltar, que para o conjunto de equações associadas aos v_j , a aplicação do MEM resultou em equações de grande complexidade e sem soluções analíticas a priori, de modo que se fez necessária as suas simplificações por meio da utilização de séries de Taylor, mas como é possível observar, suas formas finais são pertinentes ao problema em questão. Com isso, o problema reside na proposição das soluções e cálculo dos coeficientes das mesmas.

As soluções propostas, devem estar em consonância com as condições iniciais para as matrizes $\lambda_j(0)$ apresentadas nas equações (2.57-2.58), que juntamente com as equações (2.55-2.56) resultam nas seguintes condições para tempo zero

$$\dot{\lambda}_1(0, 0, 0) = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & \zeta_1 \\ -\zeta_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\lambda}_2(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} \omega_1(0) & 0 \\ 0 & \omega_2(0) \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & \zeta_0 \\ \zeta_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\dot{\lambda}_3(0, 0, 0) = - \begin{bmatrix} \omega_1(0) & 0 \\ 0 & \omega_2(0) \end{bmatrix} + -\varepsilon \begin{bmatrix} 0 & \zeta_0 \\ \zeta_0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dot{\lambda}_4(0, 0, 0) = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & \zeta_1 \\ -\zeta_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Assim, as soluções propostas para ordem zero dos conjuntos de equações (3.18-3.21) juntamente aos seus análogos, ou seja, para as matrizes λ_i^0 , tem a forma

$$\lambda_i^0 = A_{ij} \exp(iT_0) + B_{ij} \exp(-iT_0), \quad (3.24)$$

consequentemente:

$$\lambda_j^0 = A_{ij} \exp(iT_0) + B_{ij} \exp(-iT_0). \quad (3.25)$$

Por meio da análise destas soluções sobre as condições iniciais, adquirimos o seguinte conjunto de coeficientes para as soluções de ordem zero

$$A_{i1}(0) = \frac{1}{2}, \quad A_{i2}(0) = 0, \quad B_{i1}(0) = \frac{1}{2}, \quad B_{i2}(0) = 0, \quad , \quad (3.26)$$

$$A_{i4}(0) = \frac{1}{2}, \quad A_{i3}(0) = 0, \quad B_{i4}(0) = \frac{1}{2}, \quad B_{i3}(0) = 0, \quad , \quad (3.27)$$

para λ_1 e λ_3 , e

$$A_{i1}(0) = -i\frac{1}{2}, \quad A_{i2}(0) = 0, \quad B_{i1}(0) = -i\frac{1}{2}, \quad B_{i2}(0) = 0, \quad , \quad (3.28)$$

$$A_{i4}(0) = -i\frac{1}{2}, \quad A_{i3}(0) = 0, \quad B_{i4}(0) = -i\frac{1}{2}, \quad B_{i3}(0) = 0, \quad , \quad (3.29)$$

para λ_2 e λ_4 . Utilizamos a partir deste ponto, método semelhante as equações de Duffing e de Mathieu, para que possamos desenvolver sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem associadas aos coeficientes das soluções de ordens superiores $A_{ik}(T_1)$ e $B_{ik}(T_1)$ a partir do tratamento dos termos seculares. Também é necessário recordar que estes cálculos foram resolvidos para dois casos. O caso em questão utilizou da seguinte forma para as funções $r(T_0)$

$$r_1(t) = r_2(t) = \text{sen}(\eta t) \implies \omega_1^2(t) = \omega_2^2(t) = 1 + 8\delta\varepsilon \text{sen}(2t) \quad (3.30)$$

, e o caso para $r_1 = r_2$ também foi desenvolvido, e apresentaremos apenas os seus resultados. O caso de ressonância paramétrica é alcançado para $\eta = 2$, logo, o conjunto de equações diferenciais para os coeficientes das soluções gerais são separados em dois grupos

$$\begin{aligned}
-i\frac{1}{2}\gamma B_{i1} + 2i\zeta_1 A_{i2} + 2iD_1 A_{i1} + 2\zeta_0 A_{i2} &= 0 \\
\frac{1}{2}\gamma A_{i1} - 2i\zeta_1 B_{i2} - 2iD_1 B_{i1} + 2\zeta_0 B_{i2} &= 0 \\
-i\frac{1}{2}\gamma B_{i2} - 2i\zeta_1 A_{i1} - 2iD_1 A_{i2} + 2\zeta_0 A_{i1} &= 0 \\
i\frac{1}{2}\gamma A_{i2} + 2i\zeta_1 B_{i1} - 2iD_1 B_{i2} + 2\zeta_0 B_{i1} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

para $i = 1, 3$ e

$$\begin{aligned}
i\frac{1}{2}\gamma B_{i1} + 2i\zeta_1 A_{i2} + 2\zeta_0 A_{i2} + 2iD_1 A_{i1} &= 0 \\
-\frac{1}{2}\gamma A_{i1} - 2i\zeta_1 B_{i2} + 2\zeta_0 B_{i2} - 2iD_1 B_{i1} &= 0 \\
i\frac{1}{2}\gamma B_{i2} - 2i\zeta_1 A_{i1} + 2iD_1 A_{i2} + 2\zeta_0 A_{i1} &= 0 \\
-i\frac{1}{2}\gamma A_{i2} + 2i\zeta_1 B_{i1} - 2iD_1 B_{i2} + 2\zeta_0 B_{i1} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.32}$$

para $i = 2, 4$. Apesar da estrutura similar ao longo das matrizes λ , as condições iniciais geram diferença e estruturam as soluções destes coeficientes. Estas configuram os efeitos da excitação paramétrica nos componentes do sistema, introduzimos agora a fase ϕ de acoplamento que compõe a forma final das matrizes λ por meio de alguns parâmetros que devem ser apresentados

$$\zeta_0 = \rho \text{sen}(\phi), \quad \zeta_1 = -\rho \text{cos}(\phi), \tag{3.33}$$

em que o parâmetro $\gamma = \delta$ é introduzido e compõe as relações

$$\beta = -\sqrt{2}\delta(\zeta_1), \quad \alpha = \zeta_0^2 + \zeta_1^2 - \delta^2 \tag{3.34}$$

onde as escalas temporais possuem a forma

$$T_0 = t, \quad \delta T_1 = \tau, \quad T_2 = \rho T_1 = \mu. \tag{3.35}$$

É importante destacar que para o caso de frequências diferentes, há uma mudança no parâmetro β

$$\beta_{fd} = \sqrt{2}\delta(\zeta_0 - \zeta_1).$$

Com isso a forma final explícita das matrizes λ foi adquirida, onde o efeito da excitação paramétrica está diretamente associado a escala μ , e se torna importante ressaltar a condição de que a intensidade da excitação paramétrica δ possui valor pequeno seguindo a condição $\delta^2 < \rho^2 \ll 1$ e a fase ϕ escolhida foi igual a zero. Finalmente, as soluções aproximadas possuem a seguinte forma para λ_1 , onde $\chi = 4\rho^2\delta^2$

$$u_1(t, \tau, \mu) = \text{cos}(\tau) \text{cos}(t) [\cosh(\mu) + \text{senh}(\mu)\chi], \tag{3.36}$$

$$u_2(t, \tau, \mu) = -[\chi \cosh(\mu) + \sinh(\mu)]\text{sen}(\tau) \cos(t), \quad (3.37)$$

$$u_3(t, \tau, \mu) = [\chi \cosh(\mu) + \sinh(\mu)]\text{sen}(\tau) \cos(t), \quad (3.38)$$

$$u_4(t, \tau, \mu) = \cos(\tau) \cos(t)[\cosh(\mu) + \sinh(\mu)\chi], \quad (3.39)$$

para λ_2 :

$$v_1(t, \tau, \mu) = [\cosh(\mu) + \sinh(\mu)\chi]\text{sen}(t) \cos(\tau), \quad (3.40)$$

$$v_2(t, \tau, \mu) = -[\chi \cosh(\mu) + \sinh(\mu)]\text{sen}(\tau)\text{sen}(t), \quad (3.41)$$

$$v_3(t, \tau, \mu) = [\chi \cosh(\mu) + \sinh(\mu)]\text{sen}(\tau)\text{sen}(t), \quad (3.42)$$

$$v_4(t, \tau, \mu) = [\cosh(\mu) + \sinh(\mu)\chi]\text{sen}(t) \cos(\tau), \quad (3.43)$$

para λ_3 :

$$\tilde{u}_1(t, \tau, \mu) = -[\cosh(\mu) - \sinh(\mu)\chi]\text{sen}(t) \cos(\tau), \quad (3.44)$$

$$\tilde{u}_2(t, \tau, \mu) = [\chi \cosh(\mu) - \sinh(\mu)]\text{sen}(t)\text{sen}(\tau), \quad (3.45)$$

$$\tilde{u}_3(t, \tau, \mu) = -[\chi \cosh(\mu) - \sinh(\mu)]\text{sen}(t)\text{sen}(\tau), \quad (3.46)$$

$$\tilde{u}_4(t, \tau, \mu) = -[\cosh(\mu) - \sinh(\mu)\chi]\text{sen}(t) \cos(\tau), \quad (3.47)$$

e para λ_4 :

$$\tilde{v}_1(t, \tau, \mu) = [\cosh(\mu) - \sinh(\mu)\chi] \cos(\tau) \cos(t), \quad (3.48)$$

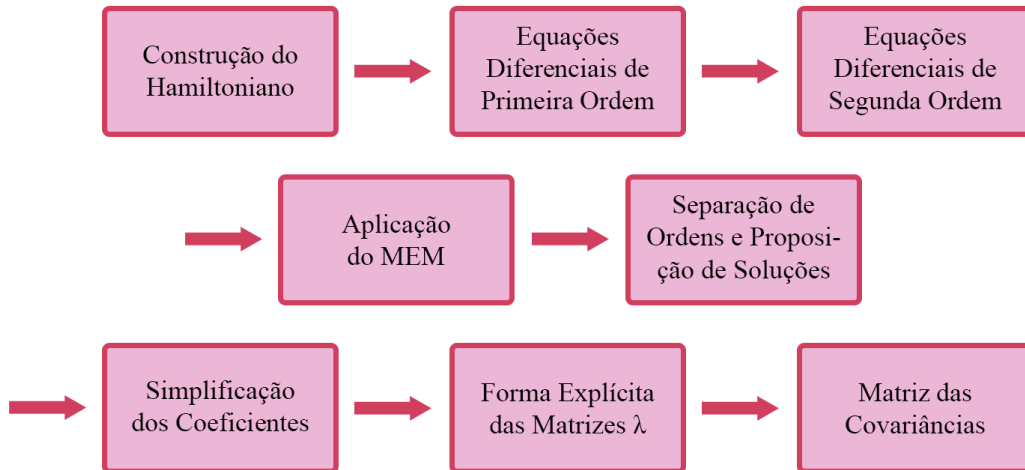
$$\tilde{v}_2(t, \tau, \mu) = -[\chi \cosh(\mu) - \sinh(\mu)]\text{sen}(\tau) \cos(t), \quad (3.49)$$

$$\tilde{v}_3(t, \tau, \mu) = [\chi \cosh(\mu) - \sinh(\mu)]\text{sen}(\tau) \cos(t), \quad (3.50)$$

$$\tilde{v}_4(t, \tau, \mu) = [\cosh(\mu) - \sinh(\mu)\chi] \cos(\tau) \cos(t). \quad (3.51)$$

Com isso, se torna possível a aquisição das medidas teóricas associadas ao sistema por meio das matrizes das covariâncias, sendo estas: energia, pureza, compressão e dois tipos de emaranhamento. Tanto as matrizes das covariâncias, quanto as interpretações destes resultados e suas respectivas medidas serão tratadas com detalhes no capítulo 4. No desenvolvimento deste

Figura 2 – Esquema ilustrativo da metodologia utilizada ao longo deste capítulo para investigação da dinâmica do sistema fechado.



Fonte: o autor.

capítulo, se tornou possível estabelecer os elementos necessários para descrição da dinâmica de um sistema fechado composto por dois modos acoplados parametricamente excitados, como pode ser observado em tese na figura 2. Transição esta demarcada pela inserção da notação de operadores e conseqüentemente da quantização canônica.

Mais especificamente quando trata-se da classe dos hamiltonianos quadráticos, aplica-se um desenvolvimento de descrição precisa da dinâmica do nosso sistema de interesse, que se dá por meio dos blocos de matrizes Λ derivados dos operadores invariantes (2.32-2.33). É importante ressaltar que as matrizes λ_i são construídas em termos do propagador deste sistema, oriundo do operador de evolução temporal, mas devida a alta complexidade da forma final do propagador, as interpretações devem emergir das medidas teóricas efetuadas utilizando das matrizes das covariâncias.

O cálculo da forma funcional dos elementos de matrizes necessários para as medidas foi possível por meio dos sistemas de equações diferenciais acopladas de segunda ordem (2.65-2.66), resolvidos com uso do MEM, método que utiliza de uma série perturbativa para expansão da varável livre t em diferentes escalas, resultando finalmente na aquisição das soluções analíticas (3.33-3.51). Assim, se torna possível a análise de seu análogo aberto apresentada no capítulo 5, a qual possibilitará a devida comparação entre ambos os casos por métodos consideravelmente alternativos.

4 EFEITOS DA EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA

4.1 MATRIZES DAS COVARIÂNCIAS

Nos capítulos 2 e 3, a dinâmica de um sistema composto por dois modos acoplados dos campos eletromagnéticos representados pelas variáveis \hat{x}_i e \hat{p}_i foi investigada pelo uso da teoria dos invariantes quânticos, a qual proporciona a construção do propagador utilizando das matrizes $\lambda_j(t)$. Como já discutido anteriormente, embora o método vise a construção exata do propagador do sistema, a aquisição desta não representa grande interesse neste trabalho, pois sua forma explícita não retorna informações de valor num contexto físico, pelo fato de que tal forma se mostrou deveras extensa, sendo assim, para que a dinâmica do sistema seja devidamente interpretada, se fez necessário o uso de um diferente instrumento de medida teórica, este é chamado de matriz das covariâncias, mas antes desta ser apresentada propriamente neste primeiro caso, é pertinente a retomada do contexto em que o sistema foi tratado.

Iniciamos esta breve contextualização pela forma geral do hamiltoniano quadrático (2.2) utilizada

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hat{q} \mathcal{B}(t) \hat{q}, \quad \hat{q} \equiv (\hat{p}, \hat{x}) \quad (4.1)$$

onde a matriz $\mathcal{B}(t)$ é uma matriz de ordem $2N$ simétrica representada com as seguintes propriedades

$$\mathcal{B}(t) = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}, \quad b_1(t) = \tilde{b}_1(t), \quad b_2 = \tilde{b}_3, \quad b_4 = \tilde{b}_4. \quad (4.2)$$

Especificamente para hamiltonianos quadráticos, se utilizarmos dos operadores de Heisenberg, a forma de um operador em qualquer tempo $t > 0$ é definido pela seguinte relação linear a partir de seu valor inicial

$$\hat{q}_\mu(t) = \mathcal{L}_{\mu\alpha}(t) \hat{q}_\alpha(0) \quad (4.3)$$

onde $\mathcal{L}_{\mu\alpha}$ representa os elementos da matriz simplética. Consequentemente a operação inversa existe e é descrita em termos da matriz $\Lambda(t)$, calculada ao longo dos capítulos 2 e 3 para evolução dos operadores invariantes

$$\hat{q}_0(t) = \Lambda(t) \hat{q}. \quad (4.4)$$

Sendo $\hat{q}_0(t)$ o operador integral de movimento no quadro de Schrödinger (DODONOV; MAN'KO, 1989; DODONOV; MAN'KO; MAN'KO, 1995), logo, a equação (4.3) há de implicar para os valores médios das componentes das quadraturas uma forma análoga aos operadores, porém independente de representação

$$\langle \hat{q}_\mu(t) \rangle = \mathcal{L}_{\mu\alpha}(t) \langle \hat{q}_\alpha \rangle(0). \quad (4.5)$$

Tal relação estendida para os segundos momentos toma a seguinte forma:

$$\langle \hat{q}_\mu \hat{q}_\nu(t) \rangle = \mathcal{L}_{\mu\alpha}(t) \langle \hat{q}_\alpha \hat{q}_\beta \rangle(0) \tilde{\mathcal{L}}_{\beta\nu}(t) \quad (4.6)$$

Tais relações são suficientes para que a matriz das covariâncias denotada por $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mu\nu}$ no caso fechado seja introduzida. Seus elementos derivam diretamente dos momentos estatísticos apresentados anteriormente da seguinte maneira

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \langle \hat{q}_\mu \hat{q}_\nu + \hat{q}_\nu \hat{q}_\mu \rangle - \langle \hat{q}_\mu \rangle \langle \hat{q}_\nu \rangle. \quad (4.7)$$

Sendo tal matriz composta pelos momentos estatísticos, conseqüentemente sua evolução temporal se dá de forma análoga

$$\mathcal{M}(t) = \mathcal{L}(t) \mathcal{M}(0) \tilde{\mathcal{L}}(t). \quad (4.8)$$

Com a equação (4.4), se torna simples a obtenção da matriz \mathcal{L} se conhecida a forma de inversão da matriz $\Lambda(t)$ já introduzida no capítulo 2

$$\Lambda \Sigma \tilde{\Lambda} \equiv \Sigma \implies \Lambda^{-1} = \Sigma \tilde{\Lambda} \Sigma^{-1} = -\Sigma \tilde{\Lambda} \Sigma = \mathcal{L} \quad (4.9)$$

Que implica na forma mais explícita da matriz $\mathcal{L}(t)$ em termos das matrizes λ_j , logo os elementos da matriz das covariâncias são calculados com uso da equação (4.8), e as medidas propostas nas próximas seções podem ser descritas em termos da notação aqui introduzida.

4.2 SISTEMA FECHADO: ENERGIAS, INCERTEZAS E COMPRESSÃO

Nesta seção serão apresentados os métodos de aquisição de algumas propriedades de grande interesse em sistemas quânticos, juntamente com seus resultados gráficos em relação ao tempo. Sendo estas as energias dos modos, as incertezas de Schrödinger-Robertson (DODONOV; MAN'KO, 1989; DODONOV; KURMYSHEV; MAN'KO, 1980; SCHRÖDINGER, 1930; ROBERTSON, 1929), o coeficiente de compressão de estados (de vácuo) e a pureza dos modos. O emaranhamento será tratado na próxima seção por apresentar resultados bastante interessantes. Iniciemos esta introdução dos métodos com a formulação cuja compressão de estados é extraída por meio das energias de flutuação de vácuo juntamente a incerteza de Schrödinger-Robertson. Os máximos e mínimos das variâncias são descritos como

$$\sigma_{\pm} = \mathcal{E} \pm \sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathcal{D}} = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{E} \mp \sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathcal{D}}}. \quad (4.10)$$

Enquanto as energias \mathcal{E} e incertezas \mathcal{D} são escritas em termos das variâncias dos operadores canonicamente conjugados

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_p), \quad \mathcal{D} = \sigma_x \sigma_p - \sigma_{xp}^2. \quad (4.11)$$

Sendo a variância definida como

$$\sigma_a = \langle \hat{a}^2 \rangle - \langle \hat{a} \rangle^2, \quad \sigma_{ab} = \frac{1}{2} \langle \hat{a} \hat{b} + \hat{b} \hat{a} \rangle - \langle \hat{a} \rangle \langle \hat{b} \rangle.$$

Estes resultados já configuram o coeficiente de compressão \mathcal{S} o qual é definido pela razão entre o valor mínimo da variância (4.10) e a variância adimensional do vácuo que possui valor

1/2. Associando as formas (4.6), (4.7) com as equações acima, se torna possível escrever o coeficiente de compressão em termos das matrizes das covariâncias

$$\mathcal{S}_k = 2 \left[\mathcal{E}_k - \sqrt{\mathcal{E}_k^2 - \mathcal{D}_k} \right] = 2\mathcal{D}_k \left[\mathcal{E}_k + \sqrt{\mathcal{E}_k^2 - \mathcal{D}_k} \right]^{-1}, \quad (4.12)$$

tais matrizes se mostram presentes como

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} (\mathcal{M}_{pp}^k + \mathcal{M}_{xx}^k), \quad \mathcal{D}_k = \mathcal{M}_{xx}^k \mathcal{M}_{pp}^k - [\mathcal{M}_{xp}^k]^2, \quad (4.13)$$

agora fazendo possível a demonstração da forma utilizada de cálculo do produto invariante de incerteza de Schrödinger-Robertson

$$\mathcal{D}_k = \mathcal{M}_{xx}^k \mathcal{M}_{pp}^k - [\mathcal{M}_{xp}^k]^2 \geq \frac{1}{4} \quad (4.14)$$

Espera-se de um sistema como o investigado aqui estados que possuem valores significativos de energia de flutuações, sabe-se que esse caso é encontrado para estados fortemente comprimidos, ou seja, a razão para coeficiente de compressão toma a seguinte forma

$$\mathcal{S}_k \approx \mathcal{D}_k / \mathcal{E}_k \ll 1, \quad \text{se } \mathcal{E}_k \gg \mathcal{D}_k,$$

recorrente para *estados gaussianos*, como os tratados neste desenvolvimento. As relações acima tem como implicação principal $\mathcal{D} = 1/4$ (DODONOV; MAN'KO; MAN'KO, 1995), fazendo com que a matriz das covariâncias no instante inicial $\mathcal{M}(0)$ possua a seguinte estrutura

$$\mathcal{M}(0) = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 & 0 & \mathcal{R}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_1 & 0 & \mathcal{R}_2 \\ \mathcal{R}_1 & 0 & \mathcal{X}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2 & 0 & \mathcal{X}_2 \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

em que seus elementos satisfazem a incerteza de Schrödinger-Robertson

$$\mathcal{P}_k \mathcal{X}_k - \mathcal{R}_k^2 \equiv 4\mathcal{D}_k^{(0)} \geq 1, \quad (4.16)$$

lembrando que o índice $k = 1, 2$ está aqui associado aos modos de cada cavidade, assim com tal matriz estabelecida, a sua dinâmica está completamente prescrita pela equação (4.8). Estes elementos para os tempos iniciais configuram a parametrização associada a compressão dos estados de vácuo ocupados pelos modos das cavidades, matematicamente

$$\mathcal{P}_k = 2\mathbf{v}_k [\cos(2\xi_k) + \sinh(2\xi_k) \cos(v_k)], \quad (4.17)$$

$$\mathcal{X}_k = 2\mathbf{v}_k [\cos(2\xi_k) - \sinh(2\xi_k) \cos(v_k)], \quad (4.18)$$

$$\mathcal{R}_k = -2\mathbf{v}_k \sinh(2\xi_k) \sin(v_k), \quad (4.19)$$

$$\mathcal{U}_k = \mathcal{P}_k - \mathcal{X}_k, \quad \mathbf{v}_k = \sqrt{D_k^{(0)}} \geq \frac{1}{2}, \quad v_k \leq 2\pi, \quad \xi_k \geq 0 \quad (4.20)$$

De forma que o coeficiente de compressão e a energia de flutuação do vácuo relativo ao k -ésimo modo para o tempo inicial possam já ser calculados, fazendo com que os parâmetros iniciais

já estejam devidamente estipulados para as medidas a serem efetuadas para tempos $t > 0$, os resultados citados acima são

$$\mathcal{S}_k^{(0)} = 2\mathbf{v}_k \exp(-2|\xi_k|), \quad (4.21)$$

$$\mathcal{E}_k^{(0)} = \frac{1}{4}(\mathcal{P}_k + \mathcal{X}_k) = \mathbf{v}_k \cosh(2\xi_k). \quad (4.22)$$

A parametrização dos componentes para tempos iniciais estão claramente de acordo com a relação de incerteza (4.14) por meio do parâmetro $\mathbf{v}_k = 1/2$ e independem da fase imposta v_k . É considerado que os modos de oscilação de cada cavidade são independentes, de forma que os termos \mathcal{R}_k sejam nulos por meio de uma rotação no espaço de fase. A última consideração levantada consiste na estrutura simétrica das matriz das covariâncias em termos das variáveis das quadraturas, que é reduzida a seguinte disposição em blocos

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

cuja propriedade $Q_{jk} = \tilde{Q}_{kj}$ é fundamental para tal redução assim como para as correlações entre os modos, e seus elementos obedecem aos segundos momentos estatísticos apresentados ao início desta seção

$$\mathcal{Q}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \langle \hat{q}_\alpha \hat{q}_\beta + \hat{q}_\beta \hat{q}_\alpha \rangle - \langle \hat{q}_\alpha \rangle \langle \hat{q}_\beta \rangle$$

e os operadores acima correspondem as quantidades canonicamente conjugadas, ou seja $\hat{q} = (\hat{x}_1, \hat{p}_1, \hat{x}_2, \hat{p}_2)$, onde os termos à direita da da equação quando cruzados são denominados *covariâncias cruzadas*.

A forma explícita dos elementos necessários para as medidas teóricas estão bem estabelecidas para o tempo inicial, e sua dinâmica já é conhecida e foi apresentada ao longo deste capítulo, nos resta agora apresentar o desenvolvimento necessário para extração dos resultados em tempos $t > 0$, iniciemos pela compactação das matrizes das covariâncias necessárias para os cálculos que foram efetuados neste trabalho, e em seguida a forma analítica das propriedades de interesse (energia e incertezas) adquirida por meio das matrizes $\lambda_j(t)$ sejam apresentadas e por fim outros resultados como a compressão e a pureza sejam explanados e investigados propriamente.

4.2.1 Resultados Adquiridos: Energias e Incertezas

Iniciemos os resultados adquiridos para as medidas de energia e coeficiente de incerteza de Schrödinger-Robertson, reafirmando que a partir das matrizes das covariâncias representadas pelas equações (4.8) associadas diretamente às formas explícitas das matrizes λ_j por meio da equação (4.9), e da matriz das covariâncias para os tempos iniciais considerando estados de vácuo comprimidos (4.15) para um sistema de osciladores quânticos acoplados excitados parametricamente, extraem-se inicialmente as energias de flutuações pela seguinte forma (DONOV; MIZRAHI, 2004; ANDREATA; A.V.; V.V., 2002)

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} (\mathcal{M}_{pp}^k + \mathcal{M}_{xx}^k) \quad (4.24)$$

que de forma explícita, em termos das matrizes λ_j adquiridas pela aplicação do MEM são representadas como

$$\mathcal{E}_1(\tau) = \frac{1}{2} \left\{ [\mathbf{v}_1 C_1^{(-)}(\mu)] \cos(\tau)^2 + [\mathbf{v}_2 C_2^{(+)}(\mu)] \text{sen}(\tau)^2 \right\}, \quad (4.25)$$

$$\mathcal{E}_2(\tau) = \frac{1}{2} \left\{ [\mathbf{v}_1 C_1^{(+)}(\mu)] \text{sen}(\tau)^2 + [\mathbf{v}_2 C_2^{(-)}(\mu)] \cos(\tau)^2 \right\}, \quad (4.26)$$

onde:

$$C_{j=1,2}^{(\pm)}(\mu) = [\alpha^2 + 1] \cosh(2\xi_j) \cosh(2\mu) \pm [\alpha^2 - 1] \cos(2\xi_j) - 2\alpha \text{senh}(2\xi_j) \text{senh}(2\mu),$$

e $\alpha = 4\rho^2\delta^2$, lembrando que $\tau = \delta t$ e $\mu = \rho\tau$, ou seja, os resultados estão intrinsecamente ligados ao parâmetros de acoplamento e de excitação paramétrica δ e ρ , consideramos também a fase ϕ de acoplamento por causa prática. De forma análoga, calculamos os produtos invariantes de incerteza de Schrödinger por meio da relação geral:

$$\mathcal{D} = \mathcal{M}_{xx}^k \mathcal{M}_{pp}^k - [\mathcal{M}_{xp}^k]^2, \quad (4.27)$$

que para cada um dos modos possui as seguintes formas explícitas:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1(\tau) &= -\frac{1}{64} \mathbf{v}_1^2 D^{(-)} [\cos(4\tau) + 4 \cos(2\tau) + 3] \\ &+ \frac{1}{64} \mathbf{v}_2^2 D^{(+)} [\cos(4\tau) - 4 \cos(2\tau) + 3] + \frac{1}{32} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 F^{(-)} (-1 + \cos(4\tau)), \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_2(\tau) &= -\frac{1}{64} \mathbf{v}_1^2 D^{(+)} [\cos(4\tau) - 4 \cos(2\tau) + 3] \\ &+ \frac{1}{64} \mathbf{v}_2^2 D^{(-)} [\cos(4\tau) + 4 \cos(2\tau) + 3] + \frac{1}{32} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 F^{(+)} (-1 + \cos(4\tau)), \end{aligned} \quad (4.29)$$

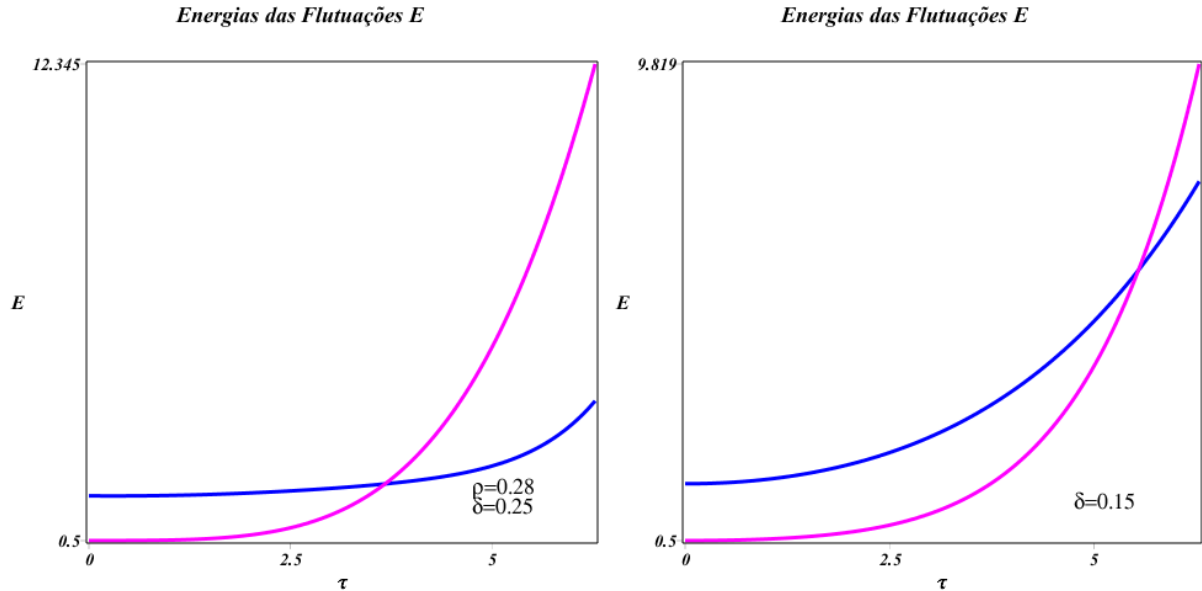
onde:

$$\begin{aligned} D^{(\pm)}(\mu) &= 4(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 + 1) \cosh(2\mu), \\ &\pm [(\alpha - 1)^2(\alpha + 1)^2 \cosh(4\mu) - (\alpha^4 + 10\alpha^2 - 1)], \\ F^{(\pm)}(\mu) &= \pm 8\alpha(\alpha^2 - 1) \text{senh}(2\xi_1 - 2\xi_2) \text{senh}(2\mu) \\ &+ \cosh(2\xi_1 - 2\xi_2) [(\alpha - 1)^2(\alpha + 1)^2 \cosh(4\mu) - \alpha^4 + 10\alpha^2 - 1] \end{aligned}$$

Estas formas analíticas acima para $\mathcal{E}_k(\tau)$ e $\mathcal{D}_k(\tau)$ de ambos os modos possibilitam uma análise qualitativa do efeito de excitação paramétrica de forma gráfica, iniciamos pelas energias apresentadas na figura 3, onde a variação do parâmetro δ mostra que o aumento da intensidade associada a excitação paramétrica não necessariamente implica na potencialização de seu efeito, conhecido pelo crescimento acelerado do coeficiente $\mathcal{E}(\tau)$, reafirmando a relação $\delta < \rho \ll 1$, pois pela análise visual é claro o aumento de energia para ambos os modos quando trata-se de $\delta = 0.15$, enquanto que para tal parâmetro próximo de ρ , um dos modos nos primeiros instantes do fenômeno é claramente favorecido.

Agora a análise qualitativa para os valores dos coeficientes invariantes de incerteza \mathcal{D}_k retornou alguns conceitos interessantes, pela averiguação da figura 4, notamos que o comportamento dos valores de incertezas evoluem de forma análoga às energias, tal aumento indica

Figura 3 – As curvas em azul representam os modos $k = 1$ e as curvas em magenta os modos $k = 2$ para as energias das flutuações $\mathcal{E}_k(\tau)$ em termos do tempo lento, onde foram variados apenas os valores $\delta = 0.25$ e $\delta = 0.15$ e o acoplamento considerado foi $\rho = 0.25$ em todos os casos, juntamente com os valores $\nu_1 = 0.75$ e $\nu_2 = 0.5$ e parâmetros reais de compressão $\xi_1 = 0.7$ e $\xi_2 = 0$



Fonte: o autor.

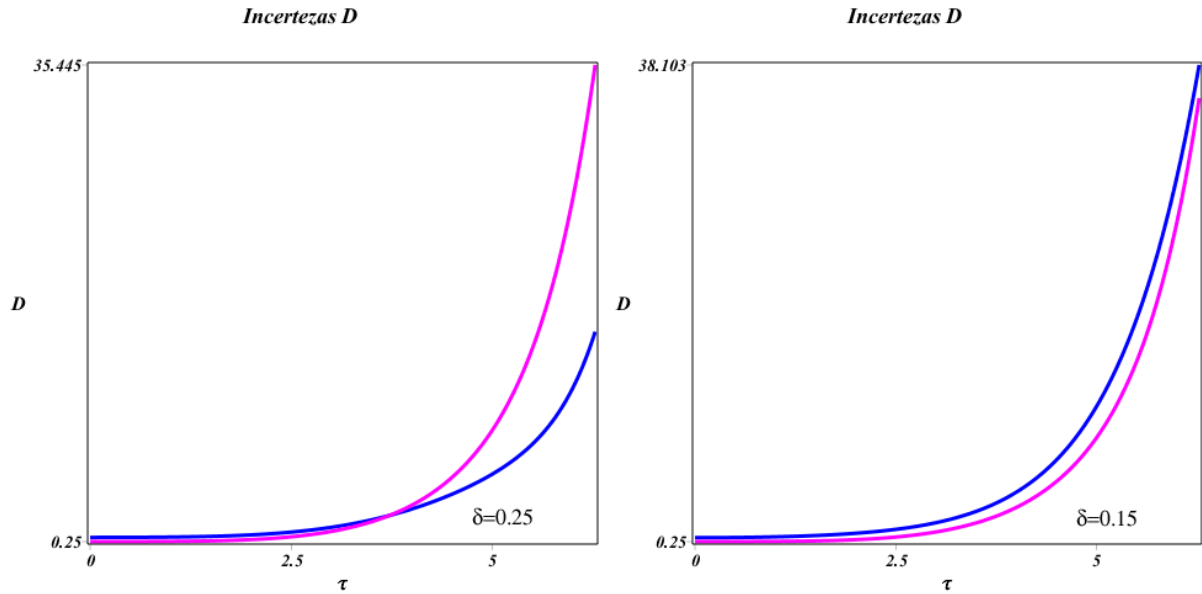
Fonte: o autor.

que quando os dois modos acoplados são excitados parametricamente o aumento abrupto de energia resulta na explosão do valor das incertezas entre as covariâncias, indicando que há uma alta produção de informação e os estados a partir dos primeiros instantes convergem para intensas sobreposições, porém tal conclusão pode ser atestada com maior propriedade por meio das medidas a serem apresentadas na próxima seção, sendo estas as purezas e compressão de estados. Até aqui, nota-se que em contraste aos resultados calculados para um sistema onde apenas um dos modos acoplados é parametricamente excitado (LARA, 2007), que as energias tomam valores significativamente mais elevados e que as incertezas tomam caráter assintótico desde os primeiros instantes da evolução do fenômeno, resultado do grande crescimento de energia.

4.2.2 Resultados Adquiridos: Compressão de Estados e Pureza

Uma importante propriedade a ser explorada, consiste na compressão dos estados que descrevem a dinâmica dos osciladores, em vista de que a evolução deste sistema é prescrito pelos seus estados iniciais $t = 0$ considerados aqui comprimidos, torna-se interessante investigar o comportamento de algum valor associado a compressão. E isso se torna possível por meio da medida de $\mathcal{S}_k(\tau)$ que está prescrita pelas relações (4.12) e depende da energia das flutuações do vácuo juntamente aos coeficientes das incertezas, quantidades já calculadas e com forma analítica já conhecida. Prosseguimos com as análises qualitativas sendo agora únicas, pois as formas analíticas para os valores $\mathcal{S}_k(\tau)$ são longas e complexas, não oferecendo grandes conclusões a partir de suas observação, sendo assim, por meio da análise da figura 5, percebemos

Figura 4 – As curvas em azul representam as incertezas $\mathcal{D}_k(\tau)$ para os modos $k = 1$ e as curvas em magenta para os modos $k = 2$ variando sobre o tempo lento, onde os parâmetros foram variados de forma idêntica aos tratados para as energias.



Fonte: o autor.

Fonte: o autor.

que a compressão de estados também possui aumento significativo a partir dos valores iniciais propostos, provavelmente causado pelos altos valores das incertezas, tal comportamento variou muito pouco pela mudança dos parâmetros associados, mantendo-se sempre fortemente crescente, condizendo com o crescimento enorme de energia observado na figura 3, também foi novamente atestado o efeito da variação do parâmetro δ , o qual atua de forma mais eficiente sobre o sistema em um valor mais próximo de zero.

A segunda propriedade a ser aqui discutida é a pureza dos estados $\mathcal{P}_k(\tau)$, a qual está intrinsecamente associada ao manejo dos estados iniciais, considerados desacoplados e independentes, logo espera-se que para o instante inicial a pureza seja máxima. A medida de $\mathcal{P}(\tau)$ é efetuada por meio da seguinte relação:

$$\mathcal{P}_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\mathcal{D}_k(\tau)}} \quad (4.30)$$

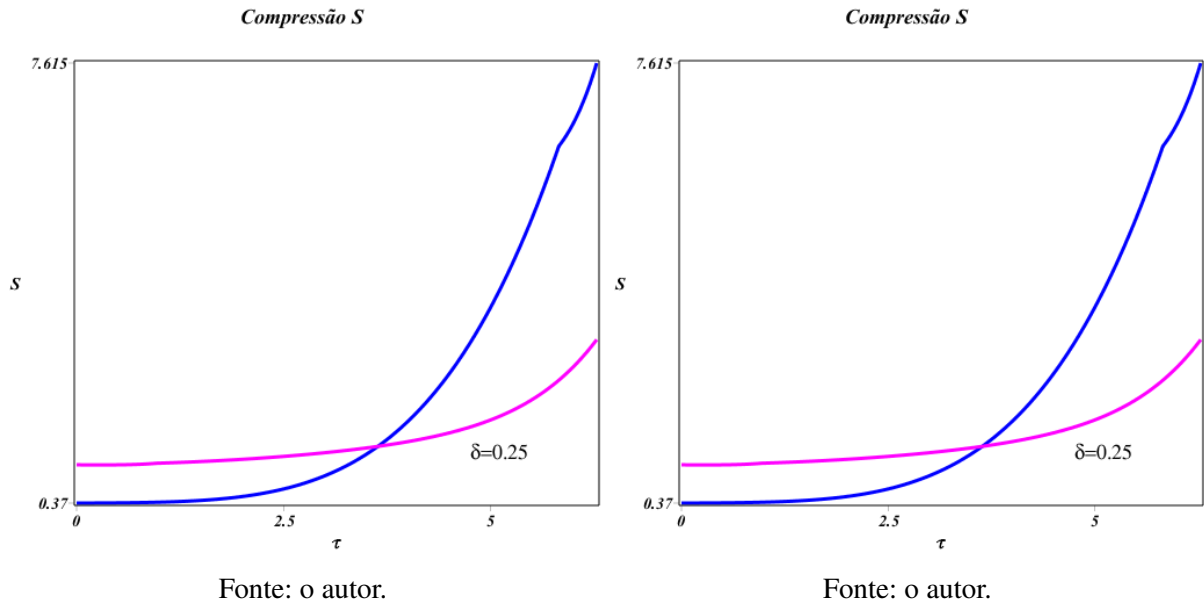
onde a condição de normalização:

$$0 \leq \text{Tr}\rho_k^2 \leq 1$$

é considerada.

Mesmo antes de se observar qualitativamente a figura 6, não é difícil averiguar que a pureza há de decrescer rapidamente, em vista de que seus valores dependem diretamente do inverso das formas (4.28-4.29) das medidas de incerteza, porém destas medidas se extraem algumas interessantes hipóteses, primeiramente é que a correlação quântica entre os modos deve ser mais presente nos instantes iniciais da evolução temporal do sistema, em vista de que os

Figura 5 – As curvas em azul representam a compressão $S_k(\tau)$ para os modos $k = 1$ e as curvas em magenta para os modos $k = 2$ variando sobre o tempo lento, onde os parâmetros foram variados de forma idêntica aos tratados para as propriedades anteriores.



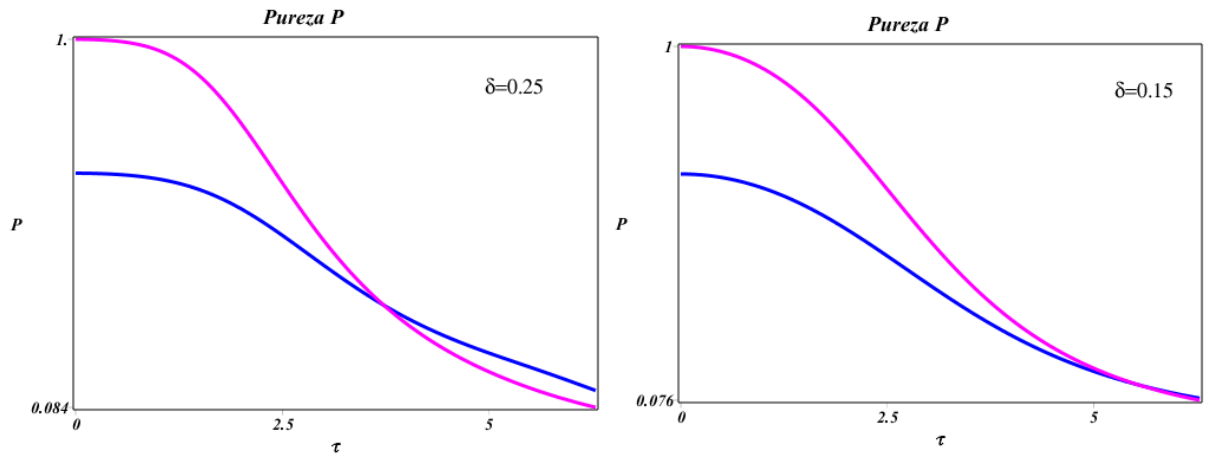
altos valores de energia e baixos valores de pureza observados a partir dos instantes iniciais implicam em uma grande produção de informação e alto nível de superposição de estados, duas características que influenciam negativamente no emaranhamento de sistemas bipartidos para estados gaussianos. Uma característica interessante deste caso, quando os dois osciladores são parametricamente excitados, é de que a troca de estados não é observada, isso é provavelmente resultante do aumento abrupto das energias e das propriedades dependentes destas, gerando grande "desordem" nas interações entre os modos ocasionada exatamente pelo acoplamento entre dois componentes potencialmente energéticos.

Com tais medidas obtidas, já se poderia aferir de forma hipotética algumas características como a duração e magnitude da correlação quântica deste sistema, que mostrou grande ruptura em relação aos sistemas compostos por uma cavidade excitada parametricamente acoplada a um oscilador harmônico, pois o efeito da excitação paramétrica aqui parece suprimir as propriedades quânticas rapidamente pela alta energia que esta oferece a ambos os modos. Não nos prenderemos a formulações destas hipóteses em vista de que uma medida de emaranhamento foi executada para o sistema e será apresentada e analisada a seguir.

4.3 SISTEMA FECHADO: EMARANHAMENTO E RESULTADOS

Sendo uma das propriedades mas investigadas até a atualidade, o emaranhamento trata de um tipo de correlação o qual viola o princípio da localidade, o qual até o início da mecânica quântica não havia sido questionado, principalmente pelo fato de que o universo macroscópico é local. Discussões a cerca da possibilidade de um efeito não apenas não local como instantâneo

Figura 6 – As curvas em azul representam a evolução normalizada das purezas $\mathcal{P}_k(\tau)$ para os primeiros modos e as curvas em magenta para os segundos modos em termos do tempo lento, onde os parâmetros foram variados de forma idêntica aos tratados nas propriedades anteriores.



Fonte: o autor.

Fonte: o autor.

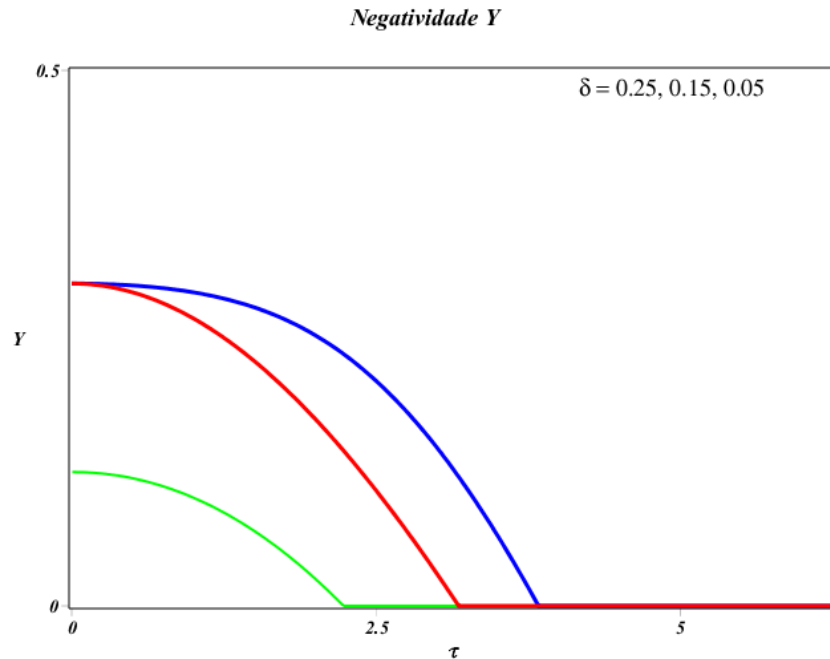
levantaram tal propriedade como uma medida eficiente das propriedades quânticas de sistemas, e os resultados alcançados neste sistema corroboram com tal premissa. Retomamos aqui a notação cruzada das covariâncias Q_{12} e Q_{21} , já bem utilizada na literatura com resultados interessantes a cerca do emaranhamento (CASTRO; DODONOV, 2003; DODONOV; MIZRAHI, 2004; DUAN et al., 2000; WERNER; WOLF, 2001; SIMON, 2000; MARIAN, 1992; SCHEEL; WELSCH, 2001), estas matrizes serão os instrumentos de medida da correlação entre os modos, aqui chamada de \mathcal{Y} . Esta correlação será aqui medida por meio de sua *negatividade logarítmica*, apresentada como

$$\mathcal{Y} = -\log_{10} \left[\Delta Q - \sqrt{\frac{\Delta Q - 4 \det Q}{2}} \right], \quad \Delta Q = Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12}. \quad (4.31)$$

Fixemos aqui que existem inúmeras medidas de emaranhamento, provenientes de diferentes entropias e métodos de aquisição, (BARNETT; PHOENIX, 1989; MANN; SANDERS; MUNRO, 1995; BENNETT et al., 1996; BRAUNSTEIN, 1996; VEDRAL; PLENIO, 1998; WOOTTERS, 1998), e até mesmo utilizando das covariâncias cruzadas (CASTRO; DODONOV, 2003). Em geral para sistemas de estados gaussianos com variáveis contínuas o emaranhamento é definido a partir da entropia de von Neumann e consequentes. Como a notação das matrizes das covariâncias estão em termos dos elementos das matrizes λ_j , o efeito da excitação paramétrica nas correlações entre os modos pode ser analisada completamente. Sendo assim, por meio do manejo algébrico dos elementos das matrizes das covariâncias aplicados na forma (4.27), construímos a figura 7, que qualitativamente nos indica que o efeito da excitação paramétrica dependente do fator δ potencializa o emaranhamento nos instantes iniciais.

Porém o resultado mais interessante adquirido por tal medida é a presença da *morte súbita* do emaranhamento no sistema, indicada pelo valor nulo de \mathcal{Y} . A causa aparente de tal

Figura 7 – As curvas representam diferentes valores de δ , sendo respectivamente para as curvas azul, vermelha, verde $\delta = 0.25$, $\delta = 0.15$ e $\delta = 0.05$, para parâmetros análogos ao utilizados nas medidas anteriores.



fenômeno é a superpopulação de fótons produzidos pelas vibrações dos modos das cavidades, hipótese que corrobora com as medidas anteriores em vista de que as energias de flutuações \mathcal{E}_k possuem alto crescimento, juntamente com as incertezas \mathcal{D}_k de acordo com as figuras 3 e 4 enquanto as purezas decrescem rapidamente como na figura 6. Ou seja, o grande aumento de energia das flutuações aliada a superpopulação de fótons produzidos implica na perda de algumas propriedades quânticas, sendo assim se torna possível investigar os limites dos parâmetros iniciais afim de que as propriedades quânticas talvez sejam conservadas e o efeito da excitação paramétrica ainda seja averiguado, e tal análise é esperada em trabalhos futuros.

Com isso, as medidas associadas ao sistema fechado composto por dois modos de cavidades eletromagnéticas foram elaboradas e analisadas, e alguns resultados interessantes foram adquiridos, principalmente em relação aos resultados conhecidos para sistemas de cavidades acopladas onde apenas uma das cavidades é parametricamente excitada. O sistema em tese mostra-se como um sistema altamente energético, eficiente na produção de informação porém de vida curta em relação a propriedades quânticas, com rápida sobreposição de estados que indicam o início de regimes clássicos para tempos mais longos.

5 EQUAÇÃO MESTRA EM CAVIDADES ÓPTICAS

Em sistemas físicos, uma descrição mais fidedigna da natureza pode prover da consideração de dissipações, e tal aproximação é possível pela introdução de um sistema aberto, por tal razão o sistema aqui desenvolvido será análogo ao sistema tratado nos capítulos anteriores. Ou seja, composto por duas cavidades fracamente acopladas parametricamente excitadas, porém com a importante consideração da dissipação por meio do contato destes com um reservatório térmico cada. Este sistema foi proposto como uma pequena extensão do caso fechado, e tem como intuito principal viabilizar a investigação de um caso dissipativo de cavidades acopladas excitadas parametricamente, pois a estrutura algébrica para um estudo mais aprofundado está estabelecida.

A imposição de um reservatório, implica não somente em um número enorme de graus de liberdade para as variáveis dinâmicas, como também na evolução não unitária do sistema (BREUER; PETRUCCIONE, 2006), inviabilizando assim a utilização do método dos invariantes por exemplo. Logo a investigação será efetuada por uso do método da Equação Mestre na forma de Lindblad utilizando das soluções apropriadas apresentadas em (DODONOV; MAN'KO, 2003), este tratamento é derivado da equação de Neumann-Liouville

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t) = \hat{L}\rho(t), \quad (5.1)$$

onde \hat{L} representa o superoperador liouvilliano, assim chamado por operar não sobre funções mas sobre outros operadores. Neste caso, utilizamos deste na estrutura de operadores

$$\hat{L}\rho(t) \equiv [H, \rho(t)],$$

sendo $\rho(t)$ o operador densidade do sistema. A divisão de um sistema em diferentes subsistemas é primordial quando tratamos de sistemas desta natureza, pois estes possibilitam assim a consideração não apenas de um reservatório mas também da interação entre este e o subsistema relativo às cavidades em questão. Tais considerações demandam o uso de uma representação alternativa da Mecânica Quântica conhecido como Quadro das Interações, muito apropriado para o estudo da evolução de sistemas por meio de sua matriz densidade reduzida, em termos gerais, é caracterizado por introduzir o hamiltoniano de interação dos subsistemas por meio de uma pequena transformação na estrutura geral do hamiltoniano convencional, que há de configurar o comportamento do sistema em sua totalidade por meio das aproximações pertinentes às propriedades físicas do fenômeno.

O método da equação mestra abriga os conceitos aqui introduzidos e há de viabilizar a medida de energia dos modos que serão apresentados ao fim do capítulo, de forma que alguns resultados adquiridos por meio do método dos invariantes sejam comparados, juntamente com as técnicas para aquisição dos mesmos. Para isso o desenvolvimento deste capítulo será feito pela introdução e investigação de elementos centrais na aplicação da técnica em questão, como

a utilização de sistemas abertos, o quadro de interações e o uso de reservatórios, para que por fim a equação mestra seja resolvida e seus resultados sejam apresentados como os elementos das matrizes das covariâncias $M(t)$ e de evolução temporal $U(t)$, utilizadas na execução das medidas de energia das flutuações \mathcal{E} .

5.1 SISTEMAS ABERTOS E A EQUAÇÃO MESTRA

A teoria de sistemas abertos é de suma importância no âmbito da óptica quântica, pois nesta área geralmente investigam-se fontes luminosas de diferentes naturezas, as quais exigem a consideração de dissipações que obviamente necessitam ser reformuladas dentro do contexto da Mecânica Quântica. Em vista de que as equações fundamentais deste campo de estudo não prescrevem fenômenos de natureza irreversível a priori. Fontes luminosas de interesse tiveram como objeto principal o estudo do Laser, porém uma variedade enorme de sistemas que exigem diferentes métodos de tratamento são responsáveis pelo fortalecimento da óptica quântica e sua consequente ascensão tecnológica nas últimas décadas. Métodos estes decorrentes por exemplo da equação de Schrödinger, das equações de Heisenberg, análise de expansões perturbativas, entre outros (CARMICHAEL, 1993; GARDINER; ZOLLER, 2000).

Sistemas para investigação de fontes de luz comprimida, decaimento atômico e cavidades eletromagnéticas prescrevem uma parcela enorme de fenômenos de interesse nesta área, e como esperado, nossa atenção estará voltada para as últimas em vista de que já foram investigadas ao decorrer deste trabalho para o caso de sistema fechado. Este obviamente necessitará de uma contextualização bastante alternativa, porém ainda comparável do ponto de vista físico.

O estudo aprofundado da dinâmica de cavidades como fontes fotoemissivas em termos práticos não difere da investigação de problemas da mesma área, pois em tese qualquer tipo de fonte há de emitir fótons de forma irreversível sendo detectados ou não. Exemplos da investigação de sistemas como estes podem ser encontrados em (GROSSO; LOMBARDO; VILLAR, 2019; DODONOV; CASTRO, 2013; DODONOV; DODONOV, 2013; CASTRO; DODONOV, 2014), e estes serão de grande valia para o desenvolvimento do sistema deste trabalho.

O modelo de cavidades que será desenvolvido neste capítulo é análogo ao tratado no capítulo anterior, e no contexto óptico pode ser associado a sistemas de Efeito Casimir Quântico. Investigado há aproximadamente cinco décadas com um aparato geral histórico e técnico que pode ser encontrado em (DODONOV, 2020), nosso caso trata de um sistema onde duas cavidades Casimir serão fracamente acopladas e associadas a um reservatório térmico a fim de que a sua produção de fótons seja analisada juntamente a suas propriedades quânticas de interesse.

Métodos por meio da evolução unitária não se mostram adequados para sistemas abertos, com isso a dinâmica deve ser analisada por meio da equação de movimento da matriz densidade, chamada Equação Mestra (BREUER; PETRUCCIONE, 2006). Os aspectos gerais da sua construção serão discutidas por meio de um caso genérico conforme (PURI, 2001), as-

sim as características do caso de interesse possam ser devidamente aplicadas e seu método de resolução seja explorado nas próximas seções. Iniciamos pela introdução de um hamiltoniano geral na forma

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{H}_{RS} \equiv \hat{H}_0 + \hat{H}_{RS}, \quad (5.2)$$

onde \hat{H}_S e \hat{H}_R representam respectivamente os hamiltonianos do sistema e de seu reservatório, e quando unidos denotam o chamado hamiltoniano livre \hat{H}_0 , enquanto \hat{H}_{RS} é associado a interação entre estes subsistemas. A evolução temporal do hamiltoniano total \hat{H} será descrita pelo operador densidade, que em termos de seu valor inicial

$$\hat{\rho}(t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right] \hat{\rho}(0) \exp\left[\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right] \equiv \exp[\hat{L}t]\hat{\rho}(0), \quad (5.3)$$

onde reintroduzimos o superoperador Liouvillian. Aplicando a forma (5.2) na equação acima, a evolução temporal do operador densidade mais explicitamente é

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) &= \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t\right] \overleftarrow{T} \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau \hat{H}_I(\tau)\right] \hat{\rho}(0) \\ &\cdot \overrightarrow{T} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau \hat{H}_I(\tau)\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t\right], \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde \hat{H}_I representa o hamiltoniano de interação

$$\hat{H}_I(t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t\right] \hat{H}_{RS} \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t\right], \quad (5.5)$$

este que usufrui do quadro das interações. Necessário para aproximações imprescindíveis no desenvolvimento de uma equação mestra solúvel do ponto de vista matemático sem grande perda de generalidade física, como a aproximação de Born-Markov, que será discutida no desenvolvimento deste capítulo.

Este quadro se destaca no contexto da óptica quântica pelo fato de que sua dinâmica pode ser completamente desenvolvida em termos do hamiltoniano livre como é possível notar pela forma acima. Assim contribuindo com um grau elevado de praticidade no decorrer dos cálculos necessários (BREUER; PETRUCCIONE, 2006). Retornando para análise de $\rho(t)$, uma estipulação física necessária é de que apesar do fenômeno ser composto por diferentes partes o interesse de investigação é completamente voltado para o sistema, de forma que as propriedades do reservatório sejam presentes apenas como parâmetros e não como funções (CARMICHAEL, 1993), para isso aplica-se o traço do operador densidade sobre as variáveis do reservatório

$$\hat{\rho}_S = \text{Tr}_R[\hat{\rho}(t)]. \quad (5.6)$$

Também há de se considerar que o acoplamento entre os subsistemas ocorre a partir $t = 0$, ou seja inicialmente o sistema e o reservatório são desacoplados

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_S(0) \otimes \hat{\rho}_R(0) \implies \text{Tr}_S \hat{\rho}_S(0) = \text{Tr}_S \hat{\rho}_R(0) = 1,$$

e por meio da aplicação destas condições em (5.4) juntamente com a operação do traço (5.6), obtém-se o operador densidade no quadro das interações $\hat{\rho}_{SI}(t)$ da seguinte forma

$$\hat{\rho}_{SI}(t) = \hat{D}(t), \quad \hat{\rho}_S(t) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{St} \right] \hat{\rho}_S(0) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{St} \right], \quad (5.7)$$

onde o superoperador $\hat{D}(t)$ não somente denota a evolução temporal do sistema, como dele serão resultantes as variáveis do reservatório. Este opera como

$$\begin{aligned} \hat{D}(t)\hat{\rho}_S(0) &= \text{Tr}_R \left\{ \overleftarrow{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \hat{H}_I(\tau) \right] \hat{\rho}_R(0) \hat{\rho}_S(0) \overrightarrow{T} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \hat{H}_I(\tau) \right] \right\} \\ &\equiv \text{Tr}_R \left\{ \overleftarrow{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \hat{L}_I(\tau) \right] \rho_R(0) \right\} \hat{\rho}_S(0). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Então aplica-se a integração gerada pelo operador de ordenação temporal que possui a seguinte estrutura

$$\begin{aligned} \overleftarrow{T} \exp \left[\int_{t_0}^t d\tau \hat{A}(\tau) \right] &= 1 + \int_{t_0}^t + \int_{t_0}^t d\tau_2 \int_{t_0}^{\tau_2} d\tau_1 \hat{A}(\tau_2) \hat{A}(\tau_1) + \dots \\ &+ \int_{t_0}^t d\tau_n \int_{t_0}^{\tau_n} d\tau_{n-1} \dots \int_{t_0}^{\tau_2} d\tau_1 \hat{A}(\tau_n) \dots \hat{A}(\tau_1) \dots \end{aligned}$$

que implica em

$$\hat{D}(t) = 1 + \hat{d} \equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t d\tau_n \int_0^{\tau_n} d\tau_{n-1} \dots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \text{Tr}_R \left\{ \hat{L}_I(\tau_n) \dots \hat{L}_I(\tau_1) \hat{\rho}_R(0) \right\} \quad (5.9)$$

Por conveniência, $\hat{D}(t)$ pode ser rearranjando como

$$\hat{D}(t) = \exp \left[\sum_{m=1}^{\infty} \hat{M}_m(t) \right], \quad \sum_{m=1}^{\infty} \hat{M}_m(t) = \ln(1 + \hat{d}), \quad (5.10)$$

em que \hat{M}_k tem as primeiras formas explícitas por meio da expansão logarítmica em \hat{d}

$$\begin{aligned} \hat{M}_1(t) &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \text{Tr}_R \left[\hat{L}(\tau) \hat{\rho}_R(0) \right], \\ \hat{M}_2(t) &= \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_0^t d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \text{Tr}_R \left[\hat{L}_I(\tau_2) \hat{L}_I(\tau_1) \hat{\rho}_R(0) \right] - \frac{1}{2} \hat{M}_1^2(t), \end{aligned}$$

e assim por diante. A mera aplicação destas formas acima na primeira equação descrita em (5.7) possibilitaria a determinação do operador densidade do sistema, porém a forma do superoperador $\hat{D}(t)$ é deveras complexa fazendo necessária a aplicação de aproximações referentes a questões físicas práticas. Uma aproximação conveniente quando sistemas ópticos são tratados é chamada da aproximação de Born, a qual consiste na consideração de que a ação do hamiltoniano de interação \hat{H}_{RS} é muito menor do que a ação do hamiltoniano livre, ou seja, a interação entre o reservatório e o sistema é pequena suficiente para que a evolução temporal do operador

densidade do reservatório seja irrelevante e apenas seu valor inicial seja de interesse para a dinâmica do sistema. Com isso são desprezados os termos de segunda ordem da expansão (5.10), e por meio dessa aproximação se torna possível assumir que

$$\text{Tr}_R[\hat{H}_I(t)\hat{\rho}_R(0)] = 0 \implies \hat{M}_1 = 0,$$

logo, uma descrição mais eficiente da evolução de $\hat{\rho}_{SI}$ é introduzida

$$\hat{\rho}_{SI}(t) = \exp\left(\hat{M}_2(t)\right)\hat{\rho}_s(0). \quad (5.11)$$

Esta aproximação possui caráter extremamente prático em relação aos cálculos, porém algumas assunções de caráter físico devem ser tomadas para que estas questões práticas sejam devidamente justificadas, sendo estas (GARDINER; ZOLLER, 2000):

1. O operador densidade associado ao reservatório é inalterado por meio das interações com o sistema.
2. O fato de que a interação seja irrelevante para o reservatório não a elimina, ou seja, esta ainda é significativa para o sistema. Tal consideração emerge do fato de que se considera o sistema possui dimensões muito menores do que o reservatório.

Utiliza-se então de uma ferramenta recorrente no estudo da dinâmica para que seja calculada a equação cujo operador $\hat{\rho}_{SI}(t)$ obedece, sendo esta a diferenciação sobre seu parâmetro livre, no caso o tempo, que há de gerar equação análoga a de Neumann-Liouville para o operador densidade do sistema no quadro das interações. Com isso, levando em consideração a aproximação de Born, onde os termos a partir da segunda ordem são desprezados, é obtida

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{SI}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \text{Tr}_R \left[\hat{H}_I(t), \left[\hat{H}_I(t-\tau), \hat{\rho}_R(0)\hat{\rho}_{SI}(t) \right] \right]. \quad (5.12)$$

A evolução temporal do operador densidade está suficientemente estabelecida para que o hamiltoniano seja explorado de forma mais explícita, afim de que a equação mestra possua um estrutura mais sólida do ponto de vista analítico. Considerando o hamiltoniano de interação \hat{H}_{RS} na forma:

$$\hat{H}_{RS} = \hbar \sum_{k=1}^N \left(\hat{S}_k^\dagger \hat{R}_k + \hat{R}_k^\dagger \hat{S}_k \right), \quad (5.13)$$

onde \hat{R}_k e \hat{S}_k representam respectivamente operadores associados ao reservatório e ao sistema. Se aplicados na forma do hamiltoniano de interação no quadro das interações prescrito pela equação (5.5) obtém-se

$$\hat{H}_I(t) = \hbar \sum_{k=1}^N \left(\hat{S}_{kI}^\dagger(t) \hat{R}_{kI}(t) + \hat{R}_{kI}^\dagger(t) \hat{S}_{kI}(t) \right) \quad (5.14)$$

como esperado

$$\hat{S}_{kI}(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t\right) \hat{S}_k \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t\right) = \exp(-i\Omega_k t) \hat{S}_k, \quad (5.15)$$

$$\hat{R}_{kI}(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}_R t\right) \hat{R}_k \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_R t\right). \quad (5.16)$$

Restando apenas a aplicação de (5.14) em (5.12), que por meio do retorno ao quadro de Heisenberg proporcionado pelas duas equações acima, resulta na equação de Neumann-Liouville e consequentemente na forma geral para a equação mestra de um sistema associado a um reservatório

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_S, \hat{\rho}_S] + \hat{L}_{S_0}\hat{\rho}_S \equiv \hat{L}_S \quad (5.17)$$

explicitamente, a ação do superoperador liouvilliano é explicitamente

$$\begin{aligned} \hat{L}_S \hat{\rho}_S &= -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_S, \hat{\rho}_S] + \\ &+ \sum_{k,l} \left[\left(\hat{S}_k^\dagger \hat{\rho}_S \hat{S}_l - \hat{\rho}_S \hat{S}_l \hat{S}_k^\dagger \right) W_{lk}^{(1)} + \left(\hat{S}_k \hat{\rho}_S \hat{S}_l^\dagger - \hat{\rho}_S \hat{S}_l^\dagger \hat{S}_k \right) W_{lk}^{(2)} + \right. \\ &\left. + \left(\hat{S}_k^\dagger \hat{\rho}_S^\dagger \hat{S}_l^\dagger - \hat{\rho}_S^\dagger \hat{S}_l^\dagger \hat{S}_k^\dagger \right) W_{lk}^{(3)} + \left(\hat{S}_k \hat{\rho}_S \hat{S}_l - \hat{\rho}_S \hat{S}_l \hat{S}_k \right) W_{lk}^{(4)} + h.c. \right]. \quad (5.18) \end{aligned}$$

onde os termos $W_{lk}^{(n)}$ representam as médias temporais associadas aos operadores do reservatório

$$W_{lk}^{(1)} = \int_0^\infty d\tau \exp(i\Omega_l \tau) \text{Tr} \left[\hat{R}_{lI}^\dagger(t-\tau) \hat{R}_{kI}(t) \hat{\rho}_R(0) \right] d\tau, \quad (5.19)$$

$$W_{lk}^{(2)} = \int_0^\infty d\tau \exp(-i\Omega_l \tau) \text{Tr} \left[\hat{R}_{lI}(t-\tau) \hat{R}_{kI}^\dagger(t) \hat{\rho}_R(0) \right] d\tau, \quad (5.20)$$

$$W_{lk}^{(3)} = \int_0^\infty d\tau \exp(-i\Omega_l \tau) \text{Tr} \left[\hat{R}_{lI}(t-\tau) \hat{R}_{kI}(t) \hat{\rho}_R(0) \right] d\tau, \quad (5.21)$$

$$W_{lk}^{(4)} = \int_0^\infty d\tau \exp(i\Omega_l \tau) \text{Tr} \left[\hat{R}_{lI}^\dagger(t-\tau) \hat{R}_{kI}^\dagger(t) \hat{\rho}_R(0) \right] d\tau. \quad (5.22)$$

Onde o limite superior infinito das integrais é resultante da aproximação de Markov, que deriva de duas importantes considerações

1. O tempo associado a correlação τ_c é extremamente pequeno em relação ao tempo de observação t .
2. Os efeitos de memória relacionados a interação do reservatório para com o sistema podem ser desprezados.

É clara a forte correlação entre tais considerações, e sua emergência a partir de pontos práticos já é conhecida, sabendo que a frequência óptica (derivada de τ_c) associada ao reservatório está na ordem de THz, enquanto para o sistema se configura na ordem de MHz. E uma de suas principais consequências de cunho físico consiste na estipulação de duas escalas temporais,

uma escala associada ao sistema e uma associada ao decaimento das correlações do reservatório (CARMICHAEL, 1999).

Analisando as equações (5.16-5.18), observa-se que o superoperador liouvillianamente da apresentação prévia é agora subdividido em duas partes. Isso é justificado pelo fato de que a introdução de um subsistema associado a um reservatório infere ao sistema total uma parcela de evolução irreversível, observada pela ação do superoperador \hat{L}_{S_0} e o comutador representa a dinâmica livre do sistema. Por fim, observa-se que para um sistema fechado \hat{L}_{S_0} é desprezado e a equação de Neumann-Liouville é resgatada em sua forma original (1.40). Por meio deste desenvolvimento ficam claras as propriedades gerais e a funcionalidade da equação mestra, porém a construção desta para um problema prático como o proposto neste trabalho depende diretamente da engenharia de reservatórios, fazendo-se necessária uma breve análise sobre reservatórios recorrentes no estudo de sistemas dissipativos em óptica quântica, mais especificamente reservatório térmicos. Tal análise será efetuada na próxima seção a fim de que nossa equação mestra de interesse não seja apenas enunciada como justificada conceitualmente.

5.2 RESERVATÓRIOS

A elaboração de uma equação mestra associada a sistemas abertos que possua eficiência em relação a exigências físicas, ou seja possua grau aceitável de reprodutibilidade depende diretamente da engenharia do reservatório escolhido, em vista de que este há de influenciar diretamente na dinâmica do sistema. Uma variedade enorme de reservatórios munidos de grande diversidade de distribuições espectrais já e conhecida e oferece grande eficiência no desenvolvimento de sistemas abertos em física teórica. Neste trabalho voltaremos nossa atenção para reservatórios populados por infinitos osciladores harmônicos, presentes em diversos sistemas em óptica quântica (LEUCHS; BETH, 2003), principalmente compostos por cavidades eletromagnéticas ou átomos.

Como já proposto, iniciemos uma breve introdução sobre os principais pontos em relação ao estudo reservatórios pertinentes ao nosso desenvolvimento pelo modelo de banho de osciladores. Este consiste na consideração de um número infinito de osciladores harmônicos, implicando em um hamiltoniano separado em duas partes das quais se associam a evolução livre do banho de osciladores e as correlações com o sistema em questão, este último compartilhado com o sistema evidentemente. O hamiltoniano que representa a evolução livre do componentes do reservatório pode ser descrito como

$$\hat{H}_R = \hbar \sum_k \omega_{Rk} \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k. \quad (5.23)$$

De forma que o hamiltoniano (5.2) possa ser reescrito como

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hbar \sum_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \hbar \sum_i \left[\hat{R}_i \hat{S}_i^\dagger + \hat{R}_i^\dagger \hat{S}_i \right]. \quad (5.24)$$

Se torna clara a necessidade de se propor uma forma mais explícita para o operador \hat{R}_i em termos dos operadores \hat{b}_k , por generalidade utiliza-se uma função linear de \hat{b}_i , logo

$$\hat{R}_i = \sum_k \left[\mathfrak{g}_{ik} \hat{b}_k + \mathfrak{g}_{ik}^* \hat{b}_k^\dagger \right],$$

porém, a utilização de tal forma em contexto prático, especialmente no caso de interesse deste trabalho, tal forma gera enorme complexidade no desenvolvimento dos cálculos apropriados, pra que isso seja averiguado, basta a observação do conjunto (5.19-5.22) de equações. À vista disso, lança-se mão da aproximação de onda girante já utilizada previamente no capítulo 2 para a descrição do acoplamento entre ambas as cavidades, resultando na seguinte relação

$$\hat{R} = \sum_k \mathfrak{g}_{ik} \hat{b}_k \quad (5.25)$$

onde \mathfrak{g}_{ik} é a constante de acoplamento sistema-reservatório resultante da consideração de função linear para \hat{R}_i .

Sendo assim, a estrutura geral dos componentes do reservatório já está modelada, mas para que haja aplicação deve-se especificar a que tipos de estados os osciladores estão associados. Nas subseções a seguir, trataremos respectivamente de três tipos recorrentes de reservatórios derivados do tipo de generalização aqui introduzida, os reservatórios térmicos e térmicos comprimidos, com isso os elementos necessários para a construção da equação mestra do segundo sistema desenvolvido neste trabalho serão suficientes para que os resultados sejam devidamente justificados.

5.2.1 Reservatórios Térmicos

A primeira aferição sobre ocupação de estados por parte dos componentes do reservatório será a de maior importância para o desenvolvimento de nossos cálculos, sendo esta a de estados térmicos. Este modelo consiste em um banho de osciladores harmônicos em equilíbrio térmico a uma determinada temperatura T , e o operador densidade associado a tal sistema é representado como

$$\hat{\rho}_{ET} = \prod_{k=1} (1 - \exp(-\beta_k)) \exp\left(-\beta_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k\right), \quad \beta_k = \frac{\hbar \omega_{Rk}}{k_B T}, \quad (5.26)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann. Para que sejam calculadas as funções $W^{(n)lk}$ de correlação utilizamos das propriedades já conhecidas sobre campos térmicos quantizados (conceito já utilizado para a equação acima), que proporcionam as seguintes relações

$$\begin{aligned} \langle \hat{b}(\omega_{Rk}) \rangle &= \langle \hat{b}^\dagger(\omega_{Rk}) \rangle = 0, \\ \langle \hat{b}^\dagger(\omega_{Rk}) \hat{b}(\omega_{Rl}) \rangle &= \bar{n}(\omega_{Rk}) \delta(\omega_{Rk} - \omega_{Rl}), \quad \bar{n} = \frac{1}{\exp(\beta_k) - 1}, \\ \langle \hat{b}(\omega_{Rl}) \hat{b}^\dagger(\omega_{Rk}) \rangle &= (\bar{n}(\omega_{Rk}) + 1) \delta(\omega_{Rk} - \omega_{Rl}), \\ \langle \hat{b}(\omega_{Rl}) \hat{b}(\omega_{Rk}) \rangle &= \langle \hat{b}^\dagger(\omega_{Rl}) \hat{b}^\dagger(\omega_{Rk}) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Se a interação for considerada em RWA, utiliza-se (5.16) com a forma mais explícita do operador associado ao reservatório prescrita em (5.25) se torna possível calcular algumas relações necessárias para que sejam estimadas as funções de correlação $W^{(n)ij}$

$$\begin{aligned}\langle \hat{R}_{jI}^\dagger(t - \tau) \hat{R}_{iI}(t) \rangle &= \sum_k \mathfrak{g}_{jk}^* \mathfrak{g}_{ik} \exp(-i\omega_k \tau) \bar{n}(\omega_k), \\ \langle \hat{R}_{jI}(t - \tau) \hat{R}_{iI}^\dagger(t) \rangle &= \sum_k \mathfrak{g}_{jk}^* \mathfrak{g}_{ik} \exp(i\omega_k \tau) (\bar{n}(\omega_k) + 1), \\ \langle \hat{R}_{jI}(t - \tau) \hat{R}_{iI}(t) \rangle &= \langle \hat{R}_{jI}^\dagger(t - \tau) \hat{R}_{iI}^\dagger(t) \rangle = 0.\end{aligned}$$

Pelo tamanho do reservatório, é pertinente que a distribuição de frequências seja alterado da sua natureza discreta para contínua por meio de uma densidade $h(\omega)$ de osciladores, tal mudança deve ser executada pela seguinte correspondência

$$\sum_k f_k \rightarrow \int_0^\infty d\omega h(\omega) f(\omega).$$

Sendo assim, as funções de correlação $W_{(lk)}^{(n)}$ tomam as seguintes formas:

$$\begin{aligned}W_{ij}^{(1)} &= \gamma_{ij}(\Omega_i) \bar{n}(\Omega_i) + i\tilde{\Omega}_{ij}^{(1)}, \\ W_{ij}^{(2)} &= \gamma_{ij}(\Omega_i + 1) \bar{n}(\Omega_i) - i\tilde{\Omega}_{ij}^{(2)}, \\ W_{ij}^{(3)} &= 0, \\ W_{ij}^{(4)} &= 0,\end{aligned}$$

em que

$$\gamma_{ij} = \pi \sum_k \mathfrak{g}_{ik}^* \mathfrak{g}_{jk} \delta(\omega_k - \Omega_i), \quad \tilde{\Omega}_{ij}^{(1)} = P \sum_k \frac{\mathfrak{g}_{lk}^* \mathfrak{g}_{jk} \bar{n}(\omega_k)}{\Omega_i - \omega_k}.$$

O termo de frequência $\tilde{\Omega}_{ij}^{(2)}$ é encontrado basicamente pela troca do número médio por $\bar{n}(\omega_k) + 1$.

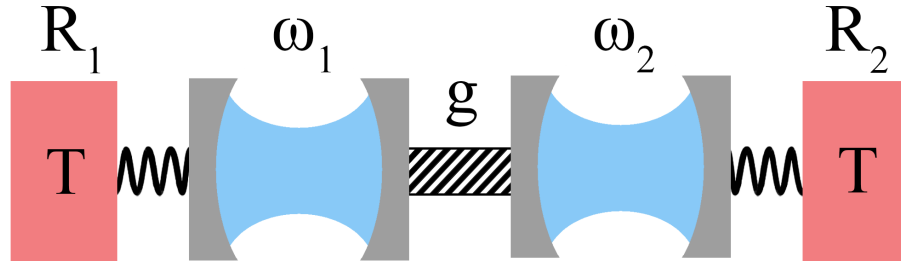
Com isso, basta a aplicação das funções de correlação na equação mestra (4.17) para que um oscilador harmônico dissipativo seja tratado como o encontrado na literatura (PURI, 2001). Deve se reafirmar que a aproximação de acoplamento RWA deve ser utilizada para que estes resultados $W_{ij}^{(n)}$ sejam adquiridos, caso contrário as duas últimas funções possuem valores não nulos e a equação mestra necessita tratamento alternativo ao proposto neste trabalho.

5.3 APLICAÇÃO DA EQUAÇÃO MESTRA - CAVIDADES ACOPLADAS

Com os conceitos gerais da equação mestra bem estabelecidos, por meio das aproximações pertinentes e ação de reservatório sob sua estrutura, inicia-se o estudo da dinâmica do sistema proposto por meio de suas considerações específicas. Tal investigação se inicia pela introdução dos operadores centrais no desenvolvimento, analogamente ao desenvolvimento em (CASTRO; DODONOV, 2014), introduzimos o hamiltoniano de uma cavidade restrita a um modo como

$$\hat{H}_c = \omega_c(t) a^\dagger a - i\chi_c (a^2 - a^{\dagger 2}), \quad \chi_c = \frac{1}{4\omega_c(t)} \frac{d\omega_c(t)}{dt}, \quad (5.28)$$

Figura 8 – A figura abaixo trata de um esquema representativo do sistema investigado, onde duas cavidades ω_1 e ω_2 estão acopladas por uma constante g e associados a dois reservatórios térmicos R_1 e R_2 em equilíbrio térmico a uma temperatura T .



Fonte: o autor.

onde considera-se na frequência $\omega_c(t)$ o regime de excitação paramétrica assim como no capítulo 2, denotado agora por

$$\omega_c(t) = 1 + 2\eta\varepsilon\delta_0\text{sen}(\eta t) \quad (5.29)$$

onde a dependência temporal explícita denotada por $\omega_c(t)$ é abreviada a partir daqui por simplicidade, lembrando que os operadores bosônicos a e a^\dagger provém das seguintes transformações das variáveis de quadraturas

$$\hat{x}_c = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_c + \hat{a}_c^\dagger), \quad \hat{p}_c = i\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_c^\dagger - \hat{a}_c)$$

lembrando que $\hbar = \omega_0 = 1$. Portanto, estendemos tal modelo de modo que o hamiltoniano efetivo associado a evolução do sistema composto por duas cavidades acopladas dissipativas é configurado como

$$\hat{H}_{ef} = \omega_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \omega_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 - i\chi_1(\hat{a}_1^2 - \hat{a}_1^{\dagger 2}) - i\chi_2(\hat{a}_2^2 - \hat{a}_2^{\dagger 2}) + g(\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2\hat{a}_1^\dagger), \quad (5.30)$$

onde g representa uma constante de acoplamento entre as cavidades real positiva. E uma representação visual deste sistema pode ser verificada na figura 8.

Por mais que esteja bem definido, tal hamiltoniano ainda é suscetível a aproximações, as quais oferecem grande facilitação dos cálculos e conseqüentemente da resolução da equação mestra. Opera-se uma transformação canônica sobre o hamiltoniano acima de para que se sejam eliminados os dois primeiros termos que o compõe, e juntamente com a consideração do acoplamento RWA, as exponenciais relativas aos termos de compressão são desconsideradas (CASTRO; DODONOV, 2014). Logo, para os fatores ε , e g suficientemente pequenos, onde contribuições de segunda ordem são negligenciadas, para $\eta = 2$ assim como no capítulo ante-

rior, o hamiltoniano transformado independente do tempo possui a seguinte forma

$$\hat{H}^{**} = g(\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2\hat{a}_1^\dagger) - i\beta[(\hat{a}_1^2 - \hat{a}_1^{2\dagger}) + (\hat{a}_2^2 - \hat{a}_2^{2\dagger})], \quad (5.31)$$

onde $\beta \equiv \varepsilon/4$ denota a intensidade da excitação paramétrica. Sendo assim, recorreremos aos resultados encontrados para construção da equação mestra (5.18-5.22) aliados às formas das funções de correlação apresentadas na subseção 5.3.1 a fim de que a seguinte equação mestra seja construída

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}}{dt} = & -i [\hat{H}^{**}, \hat{\rho}] - \mu\gamma_2\nu_1(\hat{a}_1\hat{a}_1^\dagger\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{a}_1\hat{a}_1^\dagger - 2\hat{a}_1^\dagger\hat{\rho}\hat{a}_1) \\ & - \mu\gamma_2(1 + \nu_1)(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 - 2\hat{a}_1\hat{\rho}\hat{a}_1^\dagger) \\ & - \gamma_2\nu_2(\hat{a}_2\hat{a}_2^\dagger\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{a}_2\hat{a}_2^\dagger - 2\hat{a}_2^\dagger\hat{\rho}\hat{a}_2) \\ & - \gamma_2(1 + \nu_2)(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 - 2\hat{a}_2\hat{\rho}\hat{a}_2^\dagger) \end{aligned} \quad (5.32)$$

em que γ_2 é o coeficiente de dissipação da segunda cavidade, $\mu \equiv \gamma_1/\gamma_2$ é considerado como o grau de eficiência do sistema em vista de que por controle deste fator se avalia a sua dissipação, e $\nu_{1,2}$ representam o número médio de excitações do reservatório térmico. Não é difícil observar os aspectos apresentados na seção 5.1, em que separa-se ação do superoperador liouvillian em suas partes livre e irreversível, e obviamente a parcela irreversível contém os termos dissipativos emergentes dos parâmetros de reservatório.

5.3.1 Resolução da Equação Mestra: Matrizes de Evolução e das Covariâncias

Se faz necessária a agora, a resolução desta equação, aqui desenvolvida por com auxílio do programa MAPLE, e deriva do desenvolvimento presente em (DODONOV; MAN'KO, 2003), é estendido para casos de osciladores acoplados sob condições semelhantes às aqui impostas em (CASTRO; DODONOV, 2014). Inicia-se tal processo considerando um sistema de N graus de liberdade cuja descrição pode ser feita em termos de $2N$ operadores $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_{2N}$, cujos comutadores são

$$[\hat{z}_\alpha, \hat{z}_\beta] = \Sigma_{\alpha\beta} = -\Sigma_{\beta\alpha},$$

onde os coeficientes complexos $\Sigma_{\alpha\beta}$ constituem uma matriz em blocos $2N \times 2N$ antissimétrica Σ . Juntamente com estes operadores, se impõe a matriz S , a qual descreve a seguinte transformação munida das seguintes propriedades

$$\hat{z}^\dagger = S\hat{z}, \quad S * S = E_{2N}, \quad \Sigma^\dagger = S\Sigma\tilde{S}$$

onde a matriz E_{2N} possui o mesmo significado da mostrada no capítulo 2. Com isso, se é considerado um sistema descrito por meio de seu operador densidade $\hat{\rho}$, obtém-se a seguinte forma equivalente a equação mestra em termos da combinações quadráticas dos operadores \hat{z}_j

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \hat{z}L\hat{z}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{z}R\hat{z} + \hat{z}R\hat{\rho}\hat{z} \quad (5.33)$$

sendo L , R e K matrizes $2N \times 2N$ que devem obedecer aos critérios de ρ , como por exemplo a hermeticidade:

$$L = \tilde{S}R^\dagger S, \quad R = \tilde{S}L^\dagger S, \quad K = \tilde{S}K^\dagger S,$$

e tais matrizes preservam a normalização de $\hat{\rho}$ sob a condição:

$$\text{Tr}[\hat{\rho}(t)] = 1 \rightarrow L + R + \tilde{K} = 0. \quad (5.34)$$

Quando comparadas a forma proposta em (5.33) com a equação mestra (5.18) emergem as algumas importantes relações, mas primeiramente deve ser feita a seguinte consideração: de que os operadores do sistema são combinações lineares dos operadores \hat{z} e o hamiltoniano é descrito em forma quadrática

$$\hat{S}_j = \varphi_{j\alpha} \hat{z}_\alpha, \quad \hat{H} = \frac{1}{2} \hat{z} B \hat{z}, \quad B = \tilde{B}$$

logo

$$K = 2\tilde{P}siS, \quad L = -\frac{i}{2\hbar}B - \frac{1}{2}\tilde{K}, \quad R = \frac{i}{2\hbar}B = \frac{1}{2}\tilde{K}, \quad \Psi_{\alpha\beta} = \sum_j \varphi_{j\alpha}^* \varphi_{j\beta}. \quad (5.35)$$

onde $\Psi_{\alpha\beta}$ representa os elementos da matriz Ψ , matriz hermitiana, não negativa e definida.

A descrição física da dinâmica de um sistema susceptível a tal desenvolvimento depende diretamente da matriz A , derivada dos valores médios $\langle \hat{z} \rangle$ pela seguinte relação

$$\frac{d\langle \hat{z} \rangle}{dt} = A\langle \hat{z} \rangle, \quad A = \Sigma(L - \tilde{R}) = -\Sigma \left[\frac{i}{\hbar}B + \frac{1}{2}(\tilde{K} - K) \right]. \quad (5.36)$$

Em termos físicos, uma observação importante que pode ser feita, é de que se a matriz $\Sigma^{-1}A$ é simétrica, pode se assumir que $K = 0$, ou seja, trata-se de um sistema fechado, mas se existir uma parte antissimétrica não nula (como nosso caso), trata-se de $K \neq 0$. O significado físico de tal matriz se mostra mais claro quando introduzimos a matriz das covariâncias, o principal elemento de extração de informação deste sistema físico, esta evolui da seguinte forma

$$\dot{M} = AM + M\tilde{A} + D, \quad D \equiv \Sigma\tilde{K}\Sigma \quad (5.37)$$

onde D é a chamada de matriz de difusão, com ela percebemos que a presença de K não nulo na descrição de um sistema físico está fortemente relacionada com a parte irreversível (dissipativa) deste sistema.

As solução para as equações (5.36) e (5.37) para casos dissipativos são propostas como

$$\langle \hat{z} \rangle_t = U(t)\langle \hat{z} \rangle_0, \quad (5.38)$$

$$M_t = U(t)M_0\tilde{U}(t) + \int_0^t d\tau U(t-\tau)D\tilde{U}(t-\tau), \quad U(t) = \exp^{At} \mu. \quad (5.39)$$

Com isso se torna importante introduzir a forma explícita das matrizes M , U e D em termos de seus respectivos blocos:

$$M = \begin{bmatrix} M_1^1 & M_1^2 \\ M_2^1 & M_2^2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} U_1^1 & U_1^2 \\ U_2^1 & U_2^2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_1^2 & 0 \\ 0 & D_2^2 \end{bmatrix}. \quad (5.40)$$

Onde M e U são ambas simétricas. Se for assumida não correlação no tempo inicial, consequentemente $M_1^2(0) = M_2^2(0) = 0$ e o mesmo para U_i^j . Logo a forma explícita das matrizes que compõem os blocos de M pode ser calculada

$$\begin{aligned}
M_1^1(t) &= U_1^1 M_1^1(0) U_1^1 + U_1^2 M_2^2(0) U_2^1 + \sum_{k=1}^2 \int_0^t U_1^k(t-\tau) D_k^k U_k^1(t-\tau) d\tau, \\
M_2^2(t) &= U_2^2 M_2^2(0) U_2^2 + U_2^1 M_1^1(0) U_1^2 + \sum_{k=1}^2 \int_0^t U_2^k(t-\tau) D_k^k U_k^2(t-\tau) d\tau, \\
M_1^2(t) &= U_1^1 M_1^1(0) U_1^2 + U_1^2 M_2^2(0) U_2^1 + \sum_{k=1}^2 \int_0^t U_1^k(t-\tau) D_k^k U_k^2(t-\tau) d\tau. \quad (5.41)
\end{aligned}$$

5.3.2 Formas Explícitas das Matrizes de Evolução e das Covariâncias

A partir disso, para que a dinâmica do sistema seja estabelecida e por consequência sejam extraídas as informações físicas de interesse para o trabalho, podemos mostrar como as representações introduzidas na subseção anterior se adequam ao nosso sistema, iniciando pelas matrizes L e \tilde{L}

$$L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\beta & 0 & -i - 2\mu\gamma\nu_1 & -ig \\ 0 & -\beta & -ig & -i - 2\gamma\nu_2 \\ -i - 2\mu\gamma(1 + \nu_1) & -ig & \beta & 0 \\ -ig & -2\gamma(1 + \nu_2) & 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\beta & 0 & -i - 2\mu\gamma(1 + \nu_1) & -ig \\ 0 & -\beta & -ig & -2\gamma(1 + \nu_2) \\ -i - 2\mu\gamma\nu_1 & -ig & \beta & 0 \\ -ig & -i - 2\gamma\nu_2 & 0 & \beta \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

assim como para R e \tilde{R} :

$$R = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \beta & 0 & -2\mu\gamma\nu_1 & ig \\ 0 & \beta & ig & -2\gamma\nu_2 \\ -2\mu\gamma(1 + \nu_1) & ig & -\beta & 0 \\ ig & -2\gamma(1 + \nu_2) & 0 & -\beta \end{bmatrix}, \quad (5.44)$$

$$\tilde{R} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \beta & 0 & -2\mu\gamma(1 + \nu_1) & ig \\ 0 & \beta & ig & -2\gamma(1 + \nu_2) \\ -2\mu\gamma\nu_1 & ig & -\beta & 0 \\ ig & -2\gamma\nu_2 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

e finalmente K e \tilde{K} :

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\gamma\mu\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\gamma(1+\nu_2) \\ 2\gamma\mu(\nu_1+1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\gamma\nu_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.46)$$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\gamma\mu(\nu_1+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\gamma\nu_2 \\ 2\gamma\mu\nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\gamma(\nu_2+1) & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.47)$$

Conseqüentemente, por meio das relações (5.36) é obtida a matriz A que no nosso caso é

$$A = \begin{bmatrix} -\mu\gamma & 2\beta & -ig & 0 \\ 2\beta & -\mu\gamma & 0 & ig \\ -ig & 0 & -\gamma & 2\beta \\ 0 & ig & 2\beta & -\gamma \end{bmatrix}. \quad (5.48)$$

A partir deste ponto os cálculos se resumem a um problema de auto valores, com intuito de se conhecer o operador evolução temporal $\hat{U}(t)$, sendo assim lança-se mão da equação característica da qual são extraídas as raízes da seguinte equação algébrica

$$p(z) \equiv \det(A - zE) = 0 \implies z^4 + h_3z^3 + h_2z^2 + h_1z + h_0 = 0 \quad (5.49)$$

onde os coeficientes são expressos como

$$\begin{aligned} h_3 &= 2\gamma(\mu + 1) \\ h_2 &= (\mu^2 + 4\mu + 1)\gamma - 8\beta^2 + 2g^2 \\ h_1 &= (\mu + 1)2\mu\gamma^3 + [(-8\beta^2 + 2g^2)\mu - 8\beta^2 + 2g^2]\gamma \\ h_0 &= \gamma^4\mu^2 + (-4\beta^2\mu^2 + 2g^2\mu - 4\beta^2)\gamma^2 + 16\beta^4 - 8\beta^2g^2 + g^4 \end{aligned} \quad (5.50)$$

A solução analítica das relações acima pode ser adquirida, e as raízes podem ser escritas

$$B_{\pm}^2 = \frac{1}{2}\gamma(\mu - 1) \pm 2\beta \quad (5.51)$$

$$R_{\pm}^2 = \frac{1}{4}[\pm(\mu - 1)\gamma + 4\beta]^2 - g^2. \quad (5.52)$$

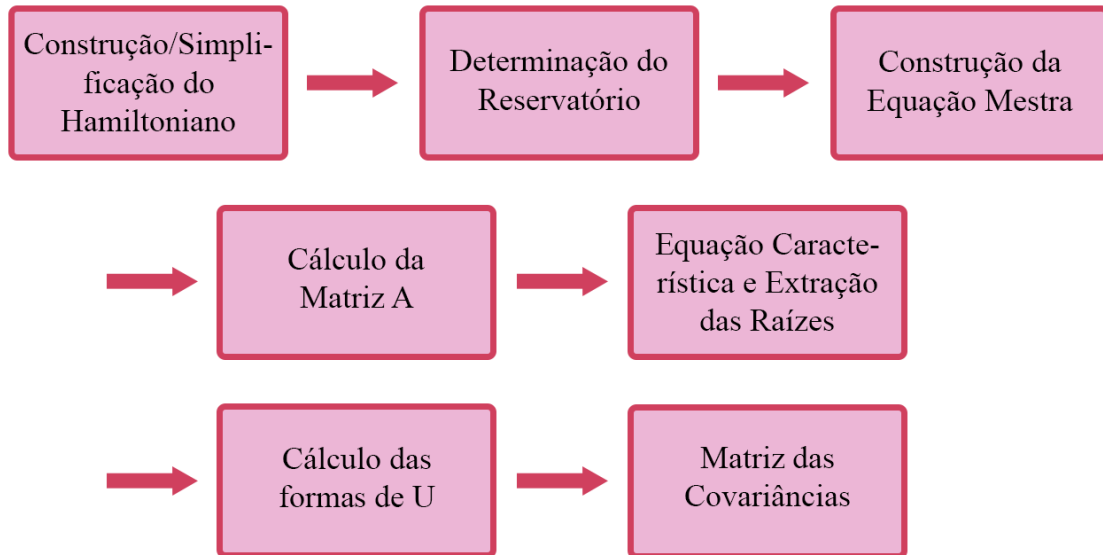
Com isso, utilizamos da seguinte notação para que os elementos da matriz U sejam escritos

$$U_{11} = \frac{1}{2}(F_+\sigma_4 + F_-\sigma_1), \quad (5.53)$$

$$U_{22} = \frac{1}{2}(K_+\sigma_4 - K_-\sigma_1), \quad (5.54)$$

$$U_{12} = -\frac{g}{2}(iG_+\sigma_3 + G_0\sigma_2), \quad (5.55)$$

Figura 9 – Esquema ilustrativo da metodologia utilizada ao longo deste capítulo para investigação da dinâmica do sistema aberto.



Fonte: o autor.

onde os termos $\sigma_{1,\dots,4}$ representam as matrizes de Pauli, e os termos restantes são

$$\begin{aligned}
 F_{\pm} &= [\pm C_- + C_+ \mp B_+ S_- - B_- S_+] E_- \\
 K_{\pm} &= [\pm C_- + C_+ \pm B_+ S_- + B_- S_+] E_- \\
 G_{\pm} &= (S_- \pm S_+) E_-,
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

e

$$E_- = \exp(-\xi t), \quad C_{\pm} = \cosh(R_{\pm} t), \quad S_{\pm} = \sinh(R_{\pm} t). \tag{5.57}$$

Onde $\xi = 1/2(B_+ + B_-) + \lambda$. Sendo assim, a forma explícita dos elementos da matriz evolução estão devidamente construídos e a matriz das covariâncias pode ser calculada por meio das relações (5.41). Esta possui seus elementos constituídos de formas bastante complexas, e serão devidamente utilizados para as medidas teóricas efetuadas neste sistema nas próximas seções, em vista de que esta matriz é o ponto central da extração de informação a cerca do sistema aqui tratado de forma que sua análise mais aprofundada esteja dentro do contexto dos efeitos da excitação paramétrica atuada sobre as cavidades.

Até agora foi possível a partir de uma aproximação metodológica alternativa à proposta para o sistema fechado, moldar os instrumentos necessários para estudo aprofundado da

dinâmica de um sistema quântico aberto análogo ao sistema de cavidades acopladas descrito no capítulo anterior (figura 9). Embora haja grande diferença em relação aos métodos, ao fim, nos deparamos com o mesmo problema a ser investigado. Sendo este os efeitos da excitação paramétrica no acoplamento entre duas cavidades ópticas, o mais interessante deste problema é que o instrumento chave para a análise das informações contidas em ambos os sistemas é coincidente, sendo este as matrizes das covariâncias. Embora sejam constituídas a partir de dois diferentes contextos físicos, possuem a mesma representatividade e aplicação para ambos os problemas propostos neste trabalho, isso poderá ser observado nas seções a seguir.

5.4 EFEITOS DA EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA: MATRIZES DAS COVARIÂNCIAS E ENERGIA DAS FLUTUAÇÕES

Como já realizado no capítulo 4, é necessária uma breve introdução da teoria utilizada para as medidas do sistema aberto. Esta também se dá por meio da matriz das covariâncias e de sua evolução temporal que também está fortemente relacionada aos momentos estatísticos, porém num contexto dissipativo a parte irreversível da evolução temporal do sistema exige um tratamento diferenciado, que foi brevemente introduzido pelas equações presentes em (5.41). Ou seja, por fim a matriz das covariâncias para o sistema aberto denotada como M_i^j estará escrita em termos das funções apresentadas em (5.56-5.57) com algumas novas elaborações. Iniciemos esse segundo desenvolvimento por meio de sua estrutura em blocos

$$M = \begin{bmatrix} M_1^1 & M_1^2 \\ M_2^1 & M_2^2 \end{bmatrix}, \quad M_j^i = \begin{bmatrix} M_{i1}^{j1} & M_{i1}^{j2} \\ M_{i2}^{j1} & M_{i2}^{j2} \end{bmatrix}. \quad (5.58)$$

onde supomos cada modo $k = 1, 2$ em estados térmicos comprimidos com energia média adimensional $v_k \geq 1/2$. Onde as equações (5.41) associam os valores iniciais das matrizes da covariâncias aos elementos da matriz de evolução temporal $U(t)$ a qual carrega as informações dinâmicas do sistema. Dividimos a forma geral das matrizes da covariâncias em duas partes $V_i^j(t)$ e $L_i^j(t, \gamma)$ representando respectivamente a evolução livre e irreversível das matrizes que compõe os blocos da forma acima da matriz das covariâncias

$$M_i^j(t) = V_i^j(t) + L_i^j(t, \gamma), \quad (5.59)$$

e por semelhança às estruturas (5.41) possuem as seguintes formas

$$V_i^j(t) = U_i^1 M_1^1(0) U_1^j + U_i^2 M_2^2(0) U_2^j, \quad (5.60)$$

$$L_i^j(t, \gamma) = \int_0^t [U_i^1(t-\tau) D_1^1 U_1^j(t-\tau) + U_i^2(t-\tau) D_2^2 U_2^j(t-\tau)] d\tau, \quad (5.61)$$

onde observa-se as matrizes D_i^j de difusão para $L_i^j(t, \gamma)$ indicando a contribuição da dissipação para a evolução do sistema.

5.4.1 Resultados Adquiridos: Energias das Flutuações

Finalmente os efeitos da dissipação na dinâmica deste sistema serão apresentados e analisados, juntamente com alguns possíveis aspectos comparativos dos resultados encontrados em vista de que algumas considerações feitas neste caso diferenciam a natureza fenomenológica do caso original fechado. Iniciemos a aquisição dos resultados pelas formas que os possibilitam, começando pelas energias da flutuações, as quais resultam diretamente do desenvolvimento presente nos Apêndices (B.1) e (B.2). Em tese os coeficientes adimensionais associados às energias $\mathcal{E}_k(t)$ para o modo de cada uma das cavidades são calculadas a partir das matrizes das covariâncias (CASTRO; DODONOV, 2014)

$$M_k^k(t) = \mathcal{E}_k(t)\sigma_1 + \mathcal{B}_k(t)\sigma_0, \quad (5.62)$$

onde σ_1 e σ_4 são as matrizes de Pauli como indicadas no apêndice (B.1) e $\mathcal{B}_k(t)$ são os valores médios dos operadores de criação e aniquilação. Para maior clareza dos parâmetros e considerações utilizados, retomamos a forma explícita da matriz das covariâncias em termos das suas partes livre $V_i^j(t)$ e dissipativa $L_i^j(t, \gamma)$

$$M_i^j(t) = V_i^j(t) + L_i^j(t, \gamma), \quad (5.63)$$

lembrando que

$$\begin{aligned} V_i^j(t) &= U_i^1 M_1^1(0) U_1^j + U_i^2 M_2^2(0) U_2^j, \\ L_i^j(t, \gamma) &= \int_0^t [U_i^1(t-t') D_1^1 U_1^j(t-t') + U_i^2(t-t') D_2^2 U_2^j(t-t')] dt'. \end{aligned} \quad (5.64)$$

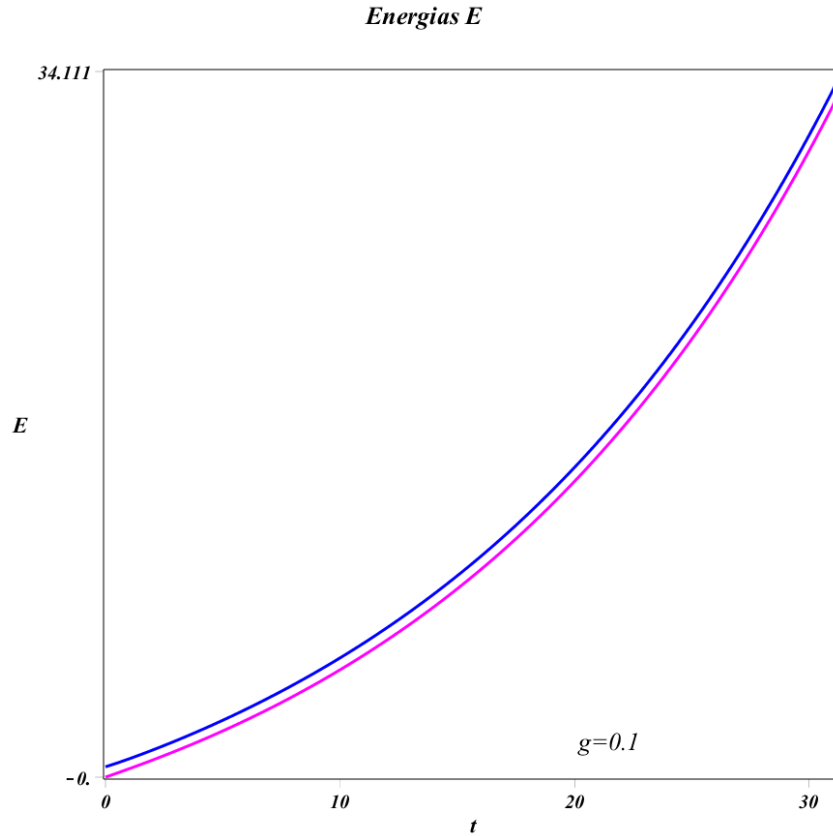
Para a matriz $M_i^j(0)$, selecionamos estados térmicos, aspecto que diferencia de certa forma o caso aberto do tratado nas últimas seções visto que foram considerados estados comprimidos de vácuo, os estados escolhidos para ocuparem os valores iniciais das covariâncias tem como justificativa a praticidade de sua forma, há ainda intenção de que esse caso seja estendido para estados também comprimidos, mas tal problema toma grandes proporções analíticas e necessitaria de uma grande repaginação analítica e conceitual para execução. Sendo assim, a matriz das covariância do instante inicial atua com a seguinte parametrização

$$M_k^k(0) = \sum_{p=1}^3 \mathfrak{w}_p^{kk} \sigma_p + \mathfrak{w}_4^{kk} \sigma_4 = \mathfrak{c}_k \sigma_1 + \mathfrak{s}_k \sigma_4, \quad \mathfrak{c}_k = v_k \cosh(2r_k), \quad \mathfrak{s}_k = -v_k \sinh(2r_k), \quad (5.65)$$

onde para nossos cálculos, claramente $\mathfrak{s}_k = 0$.

É importante salientar que a consideração dos estados iniciais é primordial para a evolução dinâmica do sistema, e é esse aspecto que (além da presença do reservatório) há de gerar diferença entre os dois casos. Como visto, para o sistema fechado, consideramos estados comprimidos de vácuo, enquanto aqui são estados térmicos não comprimidos. Isso faz com que

Figura 10 – As curvas em azul e magenta representam respectivamente a evolução no tempo livre dos coeficientes adimensionais das energias de flutuação dos modos $k = 1, 2$ das cavidades dissipativas, foram considerados os seguintes parâmetros: $\mu = 0.9$, $v_k = 0.5$, $r_k = 0$, $\gamma = 0.4$, $\beta = 0.2$. O regime é definido pela constante de acoplamento $g = 0.1$.



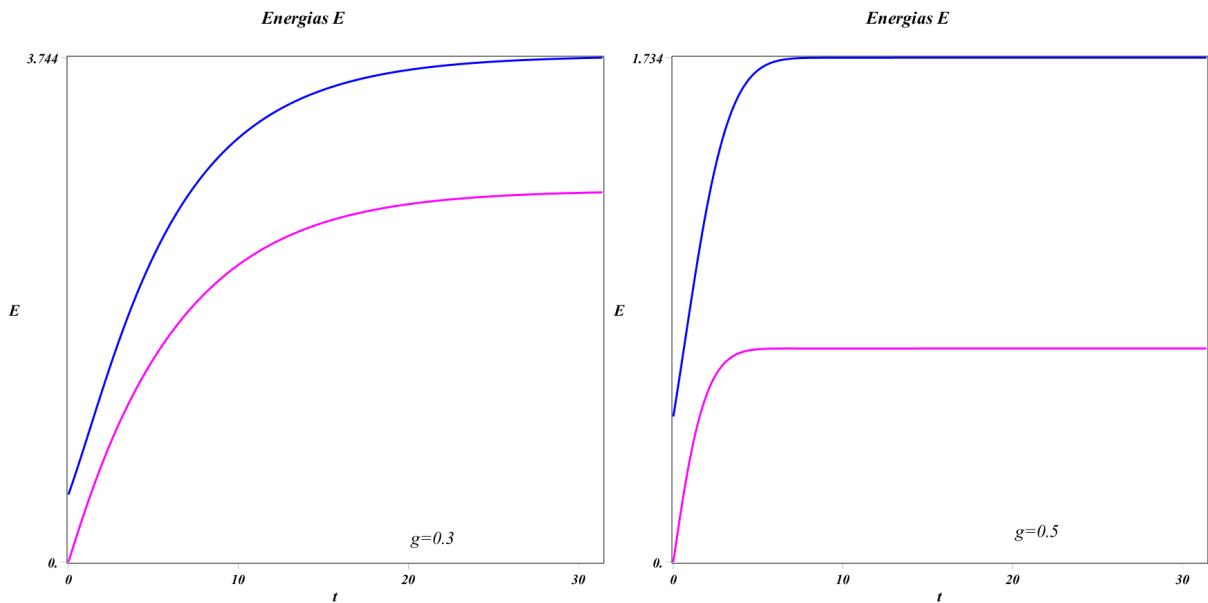
Fonte: o autor.

apesar de associados a dois sistemas semelhantes, resultados comparativos de natureza *quantitativa* se tornam inviáveis, pois tratamos da evolução dos modos em estados iniciais distintos.

Sendo assim, por meio da implementação do processo presente nos apêndices (B.1) e (B.2) relativo a aquisição dos coeficientes adimensionais $\mathcal{E}_k(t)$ no software MAPLE se torna possível tomar a análise qualitativa da evolução deste coeficiente juntamente com sua forma analítica.

Apresentadas algumas importantes propriedades do sistema, se torna possível a análise qualitativa das energias de flutuações do sistema de cavidades acopladas em meios dissipativos, a fim de reconhecer os efeitos de dissipação na excitação paramétrica dos modos. Os coeficientes foram calculados por meio da equação (5.62), mas suas formas analíticas são de grande complexidade e extensão, de forma que sua introdução aqui se faz desnecessária. Estes foram construídos pela fixação dos seguintes parâmetros: fator de dissipação relativa das cavidades $\mu = 0.9$, dissipação na cavidade $k = 2$ $\gamma = 0.4$, intensidade da excitação paramétrica $\beta = 0.2$, fator de difusão $\tilde{v} = v + 1/2 = 1$ e para os estados iniciais $r_k = 0$ e $v_k = 0.5$. Estes também foram representados graficamente sobre a investigação de três regimes definidos a partir do grau

Figura 11 – Foram utilizados os mesmos parâmetros neste caso, de maneira que os regimes são definidos a partir da constante g de acoplamento entre as cavidades, com valores $g = 0.3$ e $g = 0.5$ respectivamente.



Fonte: o autor.

Fonte: o autor.

de acoplamento entre as cavidades g , observa-se para $g = 0.1$ na figura 10 situação análoga ao caso aberto, onde há um crescimento exponencial de energia esperado pela excitação paramétrica implicando numa provável produção enorme de fótons, em que a presença de um meio dissipativo e a eficiência relativa das cavidades não parecem surtir um efeito a priori.

Já nos casos para grau superior de acoplamento, pela figura 11 observamos um comportamento bastante interessante. Para um valor $g = 0.3$ o crescimento se torna mais lento em vista que para o mesmo intervalo temporal o valor máximo de energia é significativamente menor e a curva parece tender a uma forma assintótica, o que pode ser verificado com completa certeza no caso para $g = 0.5$. Onde a energia evolui rapidamente para um comportamento assintótico, indicando que a presença do reservatório atua de forma que os modos das cavidades assumam regime de equilíbrio no sistema.

Isso pode demonstrar então, a ação dos reservatórios em um sistema análogo ao apresentado nos capítulos anteriores. Maior detalhamento fenomenológico a partir de medidas teóricas pode ser extraído deste problema, em vista de que sua dinâmica já está prescrita pelas soluções da equação mestra. Assim sua matriz das covariâncias, medidas como distribuição de fótons, compressão de estados, correlações e diferentes arranjos de estados iniciais são de grande interesse para uma investigação completa de sistemas como este, e com certeza configuram perspectivas futuras deste trabalho.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Ao longo da execução deste trabalho foi possível partindo de preceitos bem estabelecidos em dinâmica, estabelecer a evolução dinâmica de dois sistemas análogos diferenciados pela natureza aberta ou fechada, compostos por dois modos de duas cavidades acopladas, ambas parametricamente excitadas. Para o caso fechado, utilizamos de uma função matemática com intuito de estabelecer a dinâmica de um sistema conhecida como o propagador (função de Green) do sistema, que embora nesta primeira teoria esteja contida em um diferente conceito, está implícita no método de Dirac quando apresentado o operador de evolução temporal $U(t, t_0)$ presente nos dois casos tratados neste trabalho. Quando extraído o propagador deste operador, sua forma explícita é calculada pelo método dos invariantes quânticos, investigada a fundo ao longo dos capítulos 2 e 3, e o processo presente utiliza do bloco de matrizes $\Lambda(t)$. Quando explorado explicitamente a partir da resolução de um grupo complexo de equações diferenciais de segunda ordem resultante de um tratamento perturbativo (MEM), oferece formas funcionais necessárias não somente para o cálculo do propagador mas também para execução de medidas teóricas. Estas centrais nos aspectos de reprodutibilidade e comparação com problemas já existentes em física.

O caso dissipativo concebido como extensão do caso fechado não está centrado na aquisição de um propagador, já que a imposição de um meio dissipativo (reservatório) implica num número enorme de graus de liberdade e por consequência interações entre seus componentes. Mas está voltado para o estabelecimento da dinâmica a partir de operadores estatísticos e suas respectivas interações, que podem ser devidamente mediados (com aproximações adequadas) pela construção da chamada equação mestra. A solução proposta para a equação mestra esta também associada ao operador evolução temporal, que juntamente às matrizes das covariâncias proporcionam a possibilidade de análise qualitativa de propriedades de interesse de sistemas investigados em óptica quântica.

Em ambos os casos, as matrizes das covariâncias diferentemente manipuladas foram instrumento do cálculo de coeficientes adimensionais que indicam o comportamento dos sistemas investigados em termos de diferentes propriedades, como energia, pureza, correlações, entre outras. Lembrando que a escolha dos estados iniciais dificulta uma comparação mais aprofundada (quantitativa) entre os dois sistemas, resultando em conjecturas de como a ação do reservatório altera algumas propriedades deste sistema.

Foi possível observar por uma análise qualitativa destes coeficientes para o caso fechado, um crescimento exponencial da energia de flutuação no vácuo em ambos os modos, que resultam diretamente um crescimento exponencial de outras propriedades, como as incertezas de Schrödinger-Robertson e compressão de estados, assim como a diminuição instantânea da pureza dos estados ocupados nestas cavidades, sem troca aparente de estados entre os modos. Quando medida a correlação quântica (emaranhamento) deste sistema, observou-se o fenômeno de morte súbita do emaranhamento, resultado condizente com o comportamento aparente de su-

perpopulação dos estados de ocupação de fótons na cavidade.

Para o caso aberto, apenas as energias das flutuações foram calculadas, mas estas mostraram resultados de grande interesse, que incitam a investigação de outras propriedades no futuro. Em termos do coeficiente de acoplamento das cavidades, diferentes regimes foram qualitativamente analisados e observa-se que o aumento do acoplamento implica em um comportamento de aumento de energia até um máximo em que se verifica evolução assintótica, sendo este máximo cada vez menor em magnitude para maiores valores de acoplamento. Indicando assim que a presença do reservatório pode implicar em um regime de equilíbrio de produção de fótons nestas, porém para outras análises devem ser tomadas e cuidadosamente interpretadas. Porém assim mesmo, os resultados adquiridos foram suficientes para demonstração do estabelecimento da dinâmica de um sistema análogo ao anteriormente tratado porém agora em meio dissipativo.

Com tais conclusões bem estabelecidas, perspectivas são desenvolvidas ao longo de trabalho, em relação a ambos os casos aqui investigados, sendo estas:

1. **Caso Fechado:** Investigação do sistema para frequências naturais *diferentes*, para fim de observação no efeito de uma diferença de fase em um sistema de alta energia como o visto no caso ressonante.
2. **Caso Aberto:** Medidas das funções de distribuição de fótons e correlação entre os modos das cavidades, extensão para reservatórios térmicos comprimidos e extensão para estados iniciais térmicos comprimidos, pois a compressão de estados se mostra como uma propriedade central nos efeitos quânticos de interesse da atualidade.

Tais perspectivas serão exploradas em trabalhos futuros, por meio da publicação em periódicos indexados.

REFERÊNCIAS

- AGARWAL, G. *Master Equation Method in Quantum Optics*. Radarweg 29, 1043 NX, Amsterdam: Elsevier, 1973. 13–18 p.
- ANDREATA, M. A.; A.V., D.; V.V., D. Entanglement of resonantly coupled field modes in cavities with vibrating boundaries. *Journal of Russian Laser Research*, v. 23, p. 531—564, nov 2002.
- BARNETT, S. M.; PHOENIX, S. J. D. Entropy as a measure of quantum optical correlation. *Physiscal Review A*, v. 40, p. 2404–2409, Sep 1989.
- BENDER, C.; BETTENCOURT, L. M. Multiple-scale analysis of quantum systems. *Physical Review D*, v. 54, n. 12, p. 7710–7723, dec 1996.
- BENDER, C. M.; BETTENCOURT, L. M. A. Mutiple-scale analysis of the quantum anharmonic oscillator. *Physical Review Letters*, v. 77, n. 22, p. 4114–4117, may 1996.
- BENNET, C. H. et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Physical Review Letters*, v. 70, n. 13, p. 1895–1899, mar 1993.
- BENNETT, C. H. et al. Concentrating partial entanglement by local operations. *Physical Review A*, v. 53, p. 2046–2052, Apr 1996.
- BRAUNSTEIN, S. L. Geometry of quantum inference. *Physics Letters A*, v. 219, p. 169–174, Aug 1996.
- BREUER, H. P.; PETRUCCIONE, F. *The Theory of Open Quantum Systems*. Great Clarendon Street, Oxford OX2 6DP: oxford, 2006. 109–139 p.
- CARMICHAEL, H. *An Open Systems Approach to Quantum Optics*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1993.
- CARMICHAEL, H. J. *Statistical Methods in Quantum Optics*. Berlin, Germany: Springer, 1999. 1-18 p. ISBN 3-540-54882-3.
- CASTRO, A. S. M. de. *Emaranhamento, Compressão e Troca de Estados em Sistemas Quânticos Acoplados não Estacionário*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR), 2002.
- CASTRO, A. S. M. de; DODONOV, V. V. Covariance measures of intermode correlations and inseparability for continuous variable quantum systems. *Journal of Optics B*, v. 5, p. S593—S608, oct 2003.
- CASTRO, A. S. M. de; DODONOV, V. V. Continuous monitoring of the dynamical casimir effect with a damped detector. *Physical Review A*, v. 89, p. 063816, jun 2014.
- CASTRO, A. S. M. de; DODONOV, V. V.; MIZRAHI, S. S. Quantum state exchange between coupled modes. *Journal of Optics B*, v. 4, p. S191–S199, mar 2002.

- CASTRO, A. S. M. de; PERUZZO, J. F.; DODONOV, V. V. Quantum state exchange between indirectly coupled modes. *Physical Review A*, v. 71, n. 3, p. 032319, 2005.
- CHANG, P.; SHAO, B.; ZHOU, J. Continuous variable entanglement in the system of a mesoscopic josephson junction with a thermal cavity field. *Physics Letters A*, v. 354, p. 48–53, jan 2006.
- DAVIDOVICH, L. et al. Teleportation of an atomic state between two cavities using nonlocal microwave fields. *Physical Review A*, v. 50, n. 2, p. R895–R898, aug 1994.
- DEBNATH, L.; MIKUSINSKI, P. *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*. 5. ed. 30 Corporate Drive, Suite 400, Burlington, MA 01803, USA: Elsevier, 2005.
- DERIGLAZOV, A. A.; FILGUEIRAS, J. G. *Formalismo Hamiltoniano e transformações canônicas em mecânica clássica*. 1. ed. Rua Enéias Luís Carlos Barbanti, 193 - Freguesia do Ó, São Paulo: Livraria da Física, 2009. 58–72 p.
- DIRAC, P. The physical interpretation of the quantum dynamics. *Proc. Roy. Soc. Lond.A*, v. 113, p. 621—641, 1927.
- DODONOV, A. V.; DODONOV, V. V. Photon statistics in the dynamical casimir effect modified by a harmonic oscillator detector. *Physica Scripta*, v. 153, p. 014017, mar 2013.
- DODONOV, V.; KURMYSHEV, E.; MAN'KO, V. Generalized uncertainty relation and correlated coherent states. *Physics Letters A*, v. 79, p. 150–152, 1980.
- DODONOV, V.; MAN'KO, V. *Invariants and the Evolution of Nonstationary Quantum Systems*. New York: Nova Science, 1989. 103 p.
- DODONOV, V. V. Dynamical casimir effect in a nondegenerate cavity with losses and detuning. *Physical Review A*, v. 58, n. 5, p. 4147–4152, nov 1998.
- DODONOV, V. V. Fifty years of the dynamical casimir effect. *Physics*, v. 2, n. 1, p. 67–104, feb 2020.
- DODONOV, V. V.; CASTRO, A. S. M. de. Parametric excitation of a cavity field mode coupled to a harmonic oscillator detector. *Journal of Physics A*, v. 46, n. 39, p. 395304, sep 2013.
- DODONOV, V. V.; KLIMOV, A. B. Generation and detection of photons in a cavity with a resonantly oscillating boundary. *Physical Review A*, v. 53, n. 4, p. 2664–2682, Apr 1996.
- DODONOV, V. V.; MAN'KO, O. V.; MAN'KO, V. Quantum nonstationary oscillator: Models and applications. *Journal of Russian Laser Research*, v. 16, n. 1, p. 1–56, feb 1995.
- DODONOV, V. V.; MAN'KO, V. I. *Theory of Nonclassical States of Light*. 11 New Fetter Lane, London: Taylor and Francis, 2003. 169–174 p.
- DODONOV, V. V. D. A. V.; MIZRAHI, S. S. Separability dynamics of two-mode gaussian states in parametric conversion and amplification. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 38, p. 683–696, nov 2004.
- DUAN, L. M. et al. Inseparability criterion for continuous variable systems. *Physical Review Letters*, v. 84, n. 12, p. 197–234, Mar 2000.

- EL-DIB, Y. O. Nonlinear mathieu equation and coupled resonance mechanism. *Chaos Solitons and Fractals*, v. 12, p. 705–720, jan 2001.
- FEYNMAN, A. R. H. R. P. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. United States of America: McGraw-Hill, 1965. 25–36 p.
- GARDINER, C.; ZOLLER, P. *Quantum Noise: A Handbook of Markovian and Non-Markovian Quantum Stochastic Methods with Applications to Quantum Optics*. 2. ed. Germany: Springer-Verlag, 2000.
- GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; J., S. *Classical Mechanics*. 3. ed. 75 Arlington Street, Suite 300, Boston MA 02116 USA: Addison Wesley, 1977. 1–33 p.
- GROSSO, N. F. D.; LOMBARDO, F. C.; VILLAR, P. I. Photon generation via dynamical casimir effect in an optomechanical cavity as a closed quantum system. *Physical Review A*, v. 100, p. 062516, Dec 2019.
- HAAR, D. T. *The Old Quantum Theory*. 44-01 21st Street, Long Island City, New York: Pergamon Press, 1967. 91–107 p.
- JANOWICZ, M. Method of multiple scales in quantum optics. *Physics Reports*, v. 375, n. 5, p. 327–410, oct 2002.
- KRUSKAL, M. *Journal of Mathematical Physics*, n. 4, p. 806–828.
- LARA, L. S. de. *Excitação Paramétrica em Modos Acoplados*. 2007.
- LEUCHS, G.; BETH, T. *Quantum Information Processing*. 1. ed. [S.l.]: Wiley-VHC, 2003.
- LEWIS, H. R. Classical and quantum systems with time-dependent harmonic-oscillator-type hamiltonians. *Physical Review Letters*, v. 18, n. 13, p. 510–512, Mar 1967.
- LEWIS, H. R.; RIESENFELD, W. B. An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field. *Journal of Mathematical Physics*, v. 10, n. 8, p. 1458–1473, aug 1969.
- MANN, A.; SANDERS, B. C.; MUNRO, W. J. Bell's inequality for an entanglement of nonorthogonal states. *Physical Review A*, v. 51, p. 989–991, Feb 1995.
- MARIAN, P. Higher-order squeezing and photon statistics for squeezed thermal states. *Physical Review A*, v. 45, p. 2044–2051, Feb 1992.
- MILBURN, G. J.; BRAUNSTEIN, S. L. Quantum teleportation with squeezed vacuum states. *Physical Review A*, v. 60, n. 2, p. 937–942, aug 1999.
- MOUSSA, M. H. Y. Teleportation with identity interchange of quantum states. *Physical Review A*, v. 55, n. 5, p. R3287–R3290, may 1997.
- NAYFEH, A. H. *Perturbation Methods*. 1. ed. United States of America: John Wiley and Sons, 1973.
- NEWTON, I. *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. 45 Liberty Street, New York: Daniel Adee, 1846. 73–84 p.

- PAZ, J. P.; RONCAGLIA, A. J. Dynamics of the entanglement between two oscillators in the same environment. *Physical Review Letters*, v. 100, n. 22, p. 220401, jun 2008.
- PLANCK, M. *The Theory of Heat Radiation*. Blakiston, 2. 1012 Walnut Street: The Maple, 1914. 144–154 p.
- PURI, R. *Mathematical Methods of Quantum Optics*. Berlin, Germany: Springer, 2001. 155-167 p. ISBN 978-3-642-08732-5.
- ROBERTSON, H. P. The uncertainty principle. *Physical Reviews*, v. 34, p. 163–164, Jul 1929.
- SAKURAY, J. J.; NAPOLITANO, J. *Modern Quantum Mechanics*. 2. ed. Sansome Street, San Francisco CA 94111: Addison-Wesley, 2011. 80–89 p.
- SCHEEL, S.; WELSCH, D.-G. Entanglement generation and degradation by passive optical devices. *Physical Review A*, v. 64, p. 063811, Nov 2001.
- SCHRÖDINGER, E. Quantisierung als Eigenwertproblem. *Annalen Phys.*, v. 386, n. 18, p. 109–139, 1926.
- SCHRÖDINGER, E. Zum heisenbergschen unschärfepinzip. *Ber. Kgl. Akad. Wiss.*, v. 19, p. 296–303, 1930.
- SHAPIRO, V. E. Rotating class of parametric resonance processes in coupled oscillators. *Physical Letters A*, v. 290, n. 5-6, p. 288–296, nov 2001.
- SIMON, R. Peres-horodecki separability criterion for continuous variable systems. *Physical Review Letters*, v. 84, p. 2726–2729, Mar 2000.
- SUBAIRY, M. Quantum teleportation of a field state. *Physical Review A*, v. 58, n. 6, p. 4368–4372, dec 1998.
- TIAN, L.; SIMMONDS, R. W.; ALLMAN, M. S. Parametric coupling between macroscopic quantum resonators. *New Journal of Physics*, v. 10, p. 115001, nov 2008.
- VEDRAL, V.; PLENIO, M. B. Entanglement measures and purification procedures. *Physical Review A*, v. 57, p. 1619–1633, Mar 1998.
- WERNER, R. F.; WOLF, M. M. Bound entangled gaussian states. *Physical Review Letters*, v. 86, p. 3658–3661, apr 2001.
- WHEELER, J. A.; ZUREK, W. H. *Quantum Theory and Measurement*. 41 William Street, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1983. 62–86 p.
- WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Physical Review Letters*, v. 80, p. 2245–2248, Mar 1998.

APÊNDICE A – HAMILTONIANOS QUADRÁTICOS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Neste apêndice iremos explorar alguns desenvolvimentos matemáticos a fim de esclarecer alguns conceitos utilizados ao longo do segundo capítulo deste trabalho, relacionado ao método dos invariantes quânticos. Com ênfase na estrutura dos hamiltonianos quadráticos e sua atuação sobre as relações iniciais propostas ao início do capítulo juntamente com os cálculos necessários para serem obtidas as equações diferenciais de segunda ordem (2.67-2.68).

A.1 HAMILTONIANOS QUADRÁTICOS: FORMAS MATRICIAIS

A forma utilizada na representação matricial de hamiltonianos quadráticos consiste em:

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \hat{p}_1 & \hat{p}_2 & \hat{x}_1 & \hat{x}_2 \end{bmatrix} B_{ij}(t) \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + C_{ij}(t) \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

onde os elementos de $B_{ij}(t)$ compõe os blocos de matrizes $b_i(t)$ centrais na conexão das propriedades do sistema com o cálculo das matrizes λ_j . As matrizes $B_{ij}(t)$ e $C_{ij}(t)$ são convertidas para a estrutura de blocos da seguinte forma:

$$B_{ij}(t) = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{44} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix}, \quad C_{ij}(t) = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{31} \\ C_{41} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

de forma que:

$$b_1 = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} B_{13} & B_{14} \\ B_{23} & B_{24} \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} B_{31} & B_{32} \\ B_{41} & B_{42} \end{bmatrix}, \quad b_4 = \begin{bmatrix} B_{33} & B_{34} \\ B_{43} & B_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

sem que a estrutura da matriz $C_{ij}(t)$ não nos interessa pelo fato de não ter sido utilizada ao longo do trabalho. Então agora tomamos o produto na forma (A.1) mais explicitamente:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2} [\hat{p}_1 B_{11} \hat{p}_1 + \hat{p}_1 B_{21} \hat{p}_2 + \hat{p}_1 B_{31} \hat{x}_1 + \hat{p}_1 B_{41} \hat{x}_2 \\ &+ \hat{p}_2 B_{12} \hat{p}_1 + \hat{p}_2 B_{22} \hat{p}_2 + \hat{p}_2 B_{32} \hat{x}_1 + \hat{p}_2 B_{42} \hat{x}_2 \\ &+ \hat{x}_1 B_{13} \hat{p}_1 + \hat{x}_1 B_{23} \hat{p}_2 + \hat{x}_1 B_{33} \hat{x}_1 + \hat{x}_1 B_{34} \hat{x}_2 \\ &+ \hat{x}_2 B_{14} \hat{p}_1 + \hat{x}_2 B_{24} \hat{p}_2 + \hat{x}_2 B_{34} \hat{x}_1 + \hat{x}_2 B_{44} \hat{x}_2] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Compactando a relação acima:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p} b_1 \hat{p} + \hat{p} b_2 \hat{x} + \hat{x} b_3 \hat{p} + \hat{x} b_4 \hat{x}) \quad (\text{A.5})$$

lembrando que $b_1 = \tilde{b}_1$, $b_2 = \tilde{b}_3$ e $b_4 = \tilde{b}_4$, onde $B_{ij}(t) = B_{ji}(t)$.

A.2 COMUTADOR

Um cálculo imprescindível para o desenvolvimento da teoria de invariantes é do comutador entre o hamiltoniano em sua forma quadrática com o operador invariante (1.37):

$$[\hat{H}, \hat{I}_\mu] = \left[\frac{1}{2} \hat{q}_\alpha B_{\alpha\beta}(t) \hat{q}_\alpha, \Lambda_{\mu\nu}(t) \hat{q}_\nu + \Delta_\mu(t) \right] \quad (\text{A.6})$$

Explorando a relação acima mais explicitamente:

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{I}_\mu] &= \left[\frac{1}{2} \hat{q}_\alpha B_{\alpha\beta}(t) \hat{q}_\alpha, \Lambda_{\mu\nu}(t) \hat{q}_\nu \right] + \left[\frac{1}{2} \hat{q}_\alpha B_{\alpha\beta}(t) \hat{q}_\alpha, \Delta_\mu(t) \right] \\ &= \left[\frac{1}{2} \hat{q}_\alpha B_{\alpha\beta}(t) \hat{q}_\alpha, \Lambda_{\mu\nu}(t) \hat{q}_\nu \right] \\ &= \left[\frac{1}{2} \hat{q}_\alpha B_{\alpha\beta}(t) \hat{q}_\beta, \Lambda_{\mu\nu}(t) \hat{q}_\nu \right] + [C_\alpha(t) \hat{q}_\alpha, \Lambda_{\mu\nu}(t) \hat{q}_\nu]. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Agora dando continuidade separadamente para cada um dos termos a direita da última igualdade acima:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} \hat{q}_\alpha B_{\alpha\beta}(t) \hat{q}_\beta, \Lambda_{\mu\nu}(t) \hat{q}_\nu \right] &= \frac{1}{2} \Lambda_{\mu\nu}(t) [\hat{q}_\alpha B_{\alpha\beta}(t) \hat{q}_\beta, \hat{q}_\nu] \\ &= \frac{1}{2} \Lambda_{\mu\nu}(t) \{ B_{\alpha\beta}(t) \hat{q}_\beta [\hat{q}_\alpha, \hat{q}_\nu] + [B_{\alpha\beta}(t) \hat{q}_\beta, \hat{q}_\nu] \hat{q}_\alpha \} \\ &= \frac{1}{2} \Lambda_{\mu\nu}(t) \{ -i\hbar B_{\alpha\beta}(t) \hat{q}_\beta \Sigma_{\alpha\nu} - i\hbar B_{\alpha\beta}(t) \Sigma_{\beta\nu} \hat{q}_\alpha \} \\ &= i\hbar \frac{1}{2} \{ \Lambda_{\mu\nu}(t) \Sigma_{\mu\nu} B_{\alpha\beta}(t) \hat{q}_\beta + \Lambda_{\mu\nu}(t) \Sigma_{\nu\beta} B_{\beta\alpha}(t) \hat{q}_\alpha \} \\ &= i\hbar \{ \Lambda_{\mu\nu}(t) \Sigma_{\nu\beta} B_{\beta\alpha}(t) \hat{q}_\alpha \} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

agora para o segundo termo:

$$\begin{aligned} [C_\alpha(t) \hat{q}_\alpha, \Lambda_{\mu\nu}(t) \hat{q}_\nu] &= \Lambda_{\mu\nu}(t) [C_\alpha(t) \hat{q}_\alpha, \hat{q}_\nu] \\ &= \Lambda_{\mu\nu}(t) \{ [\hat{q}_\alpha, \hat{q}_\nu] C_\alpha + \hat{q}_\alpha [C_\alpha, \hat{q}_\nu] \} \\ &= i\hbar \Lambda_{\mu\nu}(t) \Sigma_{\nu\alpha} C_\alpha \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

para que unindo as duas partes da operação novamente seja alcançado o seguinte resultado:

$$[\hat{H}, \hat{I}_\mu] = i\hbar \{ \Lambda_{\mu\nu}(t) \Sigma_{\nu\beta} B_{\beta\alpha}(t) \hat{q}_\alpha + \Lambda_{\mu\nu}(t) \Sigma_{\nu\alpha} C_\alpha \} \quad (\text{A.10})$$

A.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

No desenvolvimento do segundo capítulo deste trabalho, se fez necessária a transformação de um grupo de oito equações de primeira ordem (2.24-2.25) em dois grupos de duas equações cada (2.67-2.68), os quais foram denominados posteriormente S_1 e S_2 . Aqui será explicitado o processo necessário para tal transformação, feita possível por meio da aquisição das matrizes \mathcal{E}_i , cruciais para a simplificação de um modelo bastante complexo de equações

diferenciais, inicia-se tal processo resgatando os grupos de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_1 b_3 - \lambda_2 b_1, \quad \dot{\lambda}_2 = \lambda_1 b_4 - \lambda_2 b_2, \quad (\text{A.11})$$

$$\dot{\lambda}_3 = \lambda_3 b_3 - \lambda_4 b_1, \quad \dot{\lambda}_4 = \lambda_3 b_4 - \lambda_4 b_2, \quad (\text{A.12})$$

agora seleciona-se apenas uma destas, pois este processo é reproduzível para qualquer índice. Tomamos λ_1 por exemplo e o diferenciamos novamente:

$$\ddot{\lambda}_1 = \dot{\lambda}_1 b_3 + \lambda_1 \dot{b}_3 - \dot{\lambda}_2 b_1 - \lambda_2 \dot{b}_1. \quad (\text{A.13})$$

Substituem-se agora as derivadas de primeira ordem apresentadas no primeiro grupo na equação acima:

$$\ddot{\lambda}_1 = (\lambda_1 b_3 - \lambda_2 b_1) b_3 + \lambda_1 \dot{b}_3 - (\lambda_1 b_4 - \lambda_2 b_2) b_1 - \lambda_2 \dot{b}_1, \quad (\text{A.14})$$

e agora elimina-se o termo λ_2 por manipulação algébrica:

$$\lambda_2 b_1 = \lambda_1 b_3 - \dot{\lambda}_1, \quad (\text{A.15})$$

como as matrizes b_j são simétricas, temos que:

$$\lambda_2 = \lambda_1 b_3 b_1^{-1} - \dot{\lambda}_1 b_1^{-1}, \quad (\text{A.16})$$

com isso, aplicamos a expressão acima na forma (A.13) obtendo:

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda}_1 &= [\lambda_1 b_3 - (\lambda_1 b_3 b_1^{-1} - \dot{\lambda}_1 b_1^{-1}) b_1] b_3 + \lambda_1 \dot{b}_3 \\ &\quad - [\lambda_1 b_4 - (\lambda_1 b_3 b_1^{-1} - \dot{\lambda}_1 b_1^{-1}) b_2] b_1 - (\lambda_1 b_3 b_1^{-1} - \dot{\lambda}_1 b_1^{-1}) \dot{b}_1 \\ &= \lambda_1 b_3 b_3 - \lambda_1 b_3 b_1^{-1} b_1 b_3 - \lambda_1 b_3 b_1^{-1} b_1 b_3 + \dot{\lambda}_1 b_1^{-1} b_1 b_3 + \lambda_1 \dot{b}_3 - \lambda_1 b_4 b_1 \\ &\quad + \lambda_1 b_3 b_1^{-1} b_2 b_1 - \dot{\lambda}_1 b_1^{-1} b_2 b_1 - \lambda_1 b_3 b_1^{-1} \dot{b}_1 + \dot{\lambda}_1 b_1^{-1} \dot{b}_1, \\ \ddot{\lambda}_1 &= \dot{\lambda}_1 (b_3 - b_1^{-1} b_2 b_1 + b_1^{-1} \dot{b}_1) - \lambda_1 (b_4 b_1 - b_3 b_1^{-1} b_2 b_1 - b_3 b_1^{-1} \dot{b}_1 - \dot{b}_3). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Com isso adquirimos as formas (2.67-2.68), se o processo for repetido para λ_2 então:

$$\dot{\lambda}_2 = \lambda_1 b_4 - \lambda_2 b_2, \quad (\text{A.18})$$

uma nova diferenciação remete a:

$$\ddot{\lambda}_2 = \dot{\lambda}_1 b_4 + \lambda_1 \dot{b}_4 - \dot{\lambda}_2 b_2 - \lambda_2 \dot{b}_2. \quad (\text{A.19})$$

para que seja eliminada a dependência de λ_1 :

$$\lambda_1 = \lambda_2 b_2 b_4^{-1} - \dot{\lambda}_2 b_4^{-1}, \quad (\text{A.20})$$

de modo que por processo análogo ao já demonstrado sejam adquiridos:

$$\ddot{\lambda}_2 = -\dot{\lambda}_2 (b_2 - b_4^{-1} b_3 b_4 + b_4^{-1} \dot{b}_4) - \lambda_2 (b_1 b_4 - b_2 b_4^{-1} b_3 b_4 - b_2 b_4^{-1} \dot{b}_4 + \dot{b}_2), \quad (\text{A.21})$$

por fim, são reduzidos os termos dentro dos parênteses nas relações (A.17) e (A.21) às matrizes \mathcal{E}_i e são obtidas as seguintes equações diferenciais de segunda ordem:

$$\ddot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_1 \mathcal{E}_3 + \lambda_1 \mathcal{E}_4 = 0, \quad \ddot{\lambda}_2 + \dot{\lambda}_2 \mathcal{E}_1 + \lambda_2 \mathcal{E}_2 = 0. \quad (\text{A.22})$$

Lembrando que as equações para λ_3 e λ_4 são obtidas de forma análoga.

APÊNDICE B – MATRIZ DAS COVARIÂNCIAS E MEDIDAS: CASO ABERTO

A matriz das covariâncias foi o instrumento necessário na aquisição das medidas de ambos os casos tratados ao longo deste trabalho, como os desenvolvimentos do caso fechado são bastante claros e diretos do ponto de vista analítico e já possuem esclarecimento na literatura (LARA, 2007; CASTRO; DODONOV, 2003), tratemos neste apêndice do desenvolvimento analítico necessário no tratamento destas importantes matrizes juntamente com as operações a partir delas das quais são extraídas as medidas apresentadas no capítulo 5.

B.1 ENERGIA DAS FLUTUAÇÕES: PARTE LIVRE

Inicia-se o processo de aquisição das energias das flutuações pela separação da matriz das covariâncias em blocos de matrizes na seguinte forma

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1^1 & \mathbf{M}_1^2 \\ \mathbf{M}_2^1 & \mathbf{M}_2^2 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{M}_i^j] = \begin{bmatrix} M_{i1}^{j1} & M_{i1}^{j2} \\ M_{i2}^{j1} & M_{i2}^{j2} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Supomos a fim de simplificação que inicialmente os modos ($k = 1, 2$) ocupam estados térmicos com energia média $v_k \geq 1/2$. De forma que:

$$\mathbf{M}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1^1(0) & \mathbf{M}_1^2(0) \\ \mathbf{M}_2^1(0) & \mathbf{M}_2^2(0) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_1^1(0) = \begin{bmatrix} M_{11}^{11} & M_{11}^{12} \\ M_{12}^{11} & M_{12}^{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2^2(0) = \begin{bmatrix} M_{21}^{21} & M_{21}^{22} \\ M_{22}^{21} & M_{22}^{22} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

com $M_{11}^{12} = M_{12}^{11}$ e $M_{21}^{22} = M_{22}^{21}$. Podemos também assumir por generalidade a priori parametrização para estados térmicos comprimidos (embora os resultados extraídos ocupem apenas estados térmicos):

$$\mathbf{M}_k^k(0) = \sum_{p=1}^3 \mathfrak{w}_p^{kk} \sigma_p + \mathfrak{w}_4^{kk} \sigma_4 = \mathfrak{c}_k \sigma_1 + \mathfrak{s}_k \sigma_4, \quad \mathfrak{c}_k = v_k \cosh(2r_k), \quad \mathfrak{s}_k = -v_k \sinh(2r_k), \quad (\text{B.3})$$

com

$$\mathfrak{w}_1^{kk} = \mathfrak{c}_k, \quad \mathfrak{w}_2^{kk} = 0, \quad \mathfrak{w}_3^{kk} = 0, \quad \mathfrak{w}_4^{kk} = \mathfrak{s}_k, \quad (\text{B.4})$$

logo:

$$\mathfrak{w}_1 = \begin{bmatrix} \mathfrak{c}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{c}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{w}_4 = \begin{bmatrix} \mathfrak{s}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{s}_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

reforçamos aqui a seguinte divisão na forma da matriz das covariâncias:

$$\mathbf{M}_i^j(t) = \mathbf{V}_i^j(t) + \mathbf{L}_i^j(t, \gamma), \quad (\text{B.6})$$

onde a evolução livre de dissipação consiste em:

$$\mathbf{V}_i^j(t) = \mathbf{U}_i^1 \mathbf{M}_1^1(0) \mathbf{U}_1^j + \mathbf{U}_i^2 \mathbf{M}_2^2(0) \mathbf{U}_2^j. \quad (\text{B.7})$$

e a evolução dissipativa é definida pela forma integral:

$$\mathbf{L}_i^j(t, \gamma) = \int_0^t [\mathbf{U}_i^1(t - \tau) \mathbf{D}_1^1 \mathbf{U}_1^j(t - \tau) + \mathbf{U}_i^2(t - \tau) \mathbf{D}_2^2 \mathbf{U}_2^j(t - \tau)] d\tau, \quad (\text{B.8})$$

e adotamos nestes cálculos a seguinte notação para as matrizes de evolução temporal \mathbf{U}_i^j :

$$\mathbf{U}_i^j = \sum_{p=1}^3 \mathbf{u}_p^{ij} \sigma_p + \mathbf{u}_4^{ij} \sigma_4, \quad (\text{B.9})$$

que para os índices $p = 1, 2, 3$ o bloco é definido por:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} F_- & 0 \\ 0 & -K_- \end{bmatrix}, & \mathbf{u}_2 &= -\frac{g}{2} \begin{bmatrix} 0 & G_- \\ G_- & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{u}_3 &= -\frac{ig}{2} \begin{bmatrix} 0 & G_+ \\ G_+ & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{u}_4 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} F_+ & 0 \\ 0 & K_+ \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Voltando nossa atenção primeiramente para a estrutura das matrizes $\mathbf{V}_i^j(t)$, as escrevemos mais explicitamente como:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i^j(t) &= \mathbf{U}_i^1 \mathbf{M}_1^1(0) \mathbf{U}_1^j + \mathbf{U}_i^2 \mathbf{M}_2^2(0) \mathbf{U}_2^j \\ &= \sum_{k=1}^2 \left[\sum_{p=1}^3 \mathbf{u}_p^{ik} \sigma_p + \mathbf{u}_4^{ik} \sigma_4 \right] \left[\sum_{r=1}^3 \mathbf{w}_r^{kk} \sigma_r + \mathbf{w}_4^{kk} \sigma_4 \right] \left[\sum_{q=1}^3 \mathbf{u}_q^{kj} \sigma_q + \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_4 \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

A partir deste ponto, retomamos a ideia de que índices repetidos representam soma entre estes, em que índices superiores denotam o espaço do elemento do bloco de matrizes e não o elemento de matriz do bloco. Assim:

$$\mathbf{V}_i^j(t) = (\mathbf{u}_p^{ik} \sigma_p + \mathbf{u}_4^{ik} \sigma_4) (\mathbf{w}_r^{kk} \sigma_r + \mathbf{w}_4^{kk} \sigma_4) (\mathbf{u}_q^{kj} \sigma_q + \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_4). \quad (\text{B.12})$$

aplicando a propriedade distributiva na equação acima obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i^j(t) &= \mathbf{u}_p^{ik} \mathbf{w}_r^{kk} \mathbf{u}_q^{kj} \sigma_p \sigma_r \sigma_q + \mathbf{u}_p^{ik} \mathbf{w}_r^{kk} \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_p \sigma_r \sigma_4 + \mathbf{u}_p^{ik} \mathbf{w}_4^{kk} \mathbf{u}_q^{kj} \sigma_p \sigma_4 \sigma_q + \mathbf{u}_p^{ik} \mathbf{w}_4^{kk} \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_p \sigma_4 \sigma_4 \\ &+ \mathbf{u}_4^{ik} \mathbf{w}_r^{kk} \mathbf{u}_q^{kj} \sigma_4 \sigma_r \sigma_q + \mathbf{u}_4^{ik} \mathbf{w}_r^{kk} \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_4 \sigma_r \sigma_4 + \mathbf{u}_4^{ik} \mathbf{w}_4^{kk} \mathbf{u}_q^{kj} \sigma_4 \sigma_4 \sigma_q + \mathbf{u}_4^{ik} \mathbf{w}_4^{kk} \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_4 \sigma_4 \sigma_4. \end{aligned}$$

sendo σ_4 a matriz identidade temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i^j(t) &= \mathbf{u}_p^{ik} \mathbf{w}_r^{kk} \mathbf{u}_q^{kj} \sigma_p \sigma_r \sigma_q + \mathbf{u}_p^{ik} \mathbf{w}_r^{kk} \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_p \sigma_r + \mathbf{u}_p^{ik} \mathbf{w}_4^{kk} \mathbf{u}_q^{kj} \sigma_p \sigma_q + \mathbf{u}_p^{ik} \mathbf{w}_4^{kk} \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_p \\ &+ \mathbf{u}_4^{ik} \mathbf{w}_r^{kk} \mathbf{u}_q^{kj} \sigma_r \sigma_q + \mathbf{u}_4^{ik} \mathbf{w}_r^{kk} \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_r + \mathbf{u}_4^{ik} \mathbf{w}_4^{kk} \mathbf{u}_q^{kj} \sigma_q + \mathbf{u}_4^{ik} \mathbf{w}_4^{kk} \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_4, \end{aligned}$$

e com a devida alteração nos índices a equação acima é reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i^j(t) &= \mathbf{u}_p^{ik} \mathbf{w}_r^{kk} \mathbf{u}_q^{kj} \sigma_p \sigma_r \sigma_q + \mathbf{u}_p^{ik} \mathbf{w}_q^{kk} \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_p \sigma_q + \mathbf{u}_p^{ik} \mathbf{w}_4^{kk} \mathbf{u}_q^{kj} \sigma_p \sigma_q + \mathbf{u}_p^{ik} \mathbf{w}_4^{kk} \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_p \\ &+ \mathbf{u}_4^{ik} \mathbf{w}_p^{kk} \mathbf{u}_q^{kj} \sigma_p \sigma_q + \mathbf{u}_4^{ik} \mathbf{w}_p^{kk} \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_p + \mathbf{u}_4^{ik} \mathbf{w}_4^{kk} \mathbf{u}_p^{kj} \sigma_p + \mathbf{u}_4^{ik} \mathbf{w}_4^{kk} \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_4. \end{aligned}$$

simplificamos aqui a notação sobre os índices:

$$\sum_{k=1}^2 u_p^{ik} \mathfrak{w}_r^{kk} u_q^{kj} \equiv u_p^{ik} \mathfrak{w}_r^{kk} u_q^{kj} \equiv u_p \mathfrak{w}_r u_q. \quad (\text{B.13})$$

Obtendo então:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= u_p \mathfrak{w}_r u_q \sigma_p \sigma_r \sigma_q + u_p \mathfrak{w}_q u_4 \sigma_p \sigma_q + u_p \mathfrak{w}_4 u_q \sigma_p \sigma_q + u_4 \mathfrak{w}_p u_q \sigma_p \sigma_q \\ &+ u_p \mathfrak{w}_4 u_4 \sigma_p + u_4 \mathfrak{w}_p u_4 \sigma_p + u_4 \mathfrak{w}_4 u_p \sigma_p + u_4 \mathfrak{w}_4 u_4 \sigma_4, \end{aligned}$$

implicando em:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= u_p \mathfrak{w}_r u_q \sigma_p \sigma_r \sigma_q + (u_p \mathfrak{w}_q u_4 + u_p \mathfrak{w}_4 u_q + u_4 \mathfrak{w}_p u_q) \sigma_p \sigma_q \\ &+ (u_p \mathfrak{w}_4 u_4 + u_4 \mathfrak{w}_p u_4 + u_4 \mathfrak{w}_4 u_p) \sigma_p + u_4 \mathfrak{w}_4 u_4 \sigma_4. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Usufruimos a seguir das seguintes identidades das matrizes de Pauli:

$$\sigma_k^2 = \sigma_4, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \sigma_4, \quad \sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \sigma_4 + \imath \epsilon_{ijk} \sigma_k. \quad (\text{B.15})$$

que aplicadas na equação (B.12) nos retorna:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= u_p \mathfrak{w}_r u_q \sigma_p (\delta_{rq} \sigma_4 + \imath \epsilon_{rqk} \sigma_k) + (u_p \mathfrak{w}_q u_4 + u_p \mathfrak{w}_4 u_q + u_4 \mathfrak{w}_p u_q) (\delta_{pq} \sigma_4 + \imath \epsilon_{pqk} \sigma_k) \\ &+ (u_p \mathfrak{w}_4 u_4 + u_4 \mathfrak{w}_p u_4 + u_4 \mathfrak{w}_4 u_p) \sigma_p + u_4 \mathfrak{w}_4 u_4 \sigma_4, \end{aligned}$$

consequentemente:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= (u_p \mathfrak{w}_q u_q \sigma_p + \imath u_p \mathfrak{w}_r u_q \epsilon_{rqk} \sigma_p \sigma_k) + (u_p \mathfrak{w}_q u_4 + u_p \mathfrak{w}_4 u_q + u_4 \mathfrak{w}_p u_q) (\delta_{pq} \sigma_4 + \imath \epsilon_{pqk} \sigma_k) \\ &+ (u_p \mathfrak{w}_4 u_4 + u_4 \mathfrak{w}_p u_4 + u_4 \mathfrak{w}_4 u_p) \sigma_p + u_4 \mathfrak{w}_4 u_4 \sigma_4. \end{aligned}$$

A expressão linear resultante em matrizes σ e identidade lê como:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= \imath u_p \mathfrak{w}_r u_q \epsilon_{rqk} \delta_{pk} \sigma_4 - u_p \mathfrak{w}_r u_q \epsilon_{rqk} \epsilon_{pks} \sigma_s \\ &+ (u_p \mathfrak{w}_q u_4 + u_p \mathfrak{w}_4 u_q + u_4 \mathfrak{w}_p u_q) (\delta_{pq} \sigma_4 + \imath \epsilon_{pqk} \sigma_k) \\ &+ (u_p \mathfrak{w}_q u_q + u_p \mathfrak{w}_4 u_4 + u_4 \mathfrak{w}_p u_4 + u_4 \mathfrak{w}_4 u_p) \sigma_p + u_4 \mathfrak{w}_4 u_4 \sigma_4, \end{aligned}$$

que é simplificada em:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= (\imath u_p \mathfrak{w}_r u_q \epsilon_{rqp} + u_p \mathfrak{w}_p u_4 + u_p \mathfrak{w}_4 u_p + u_4 \mathfrak{w}_p u_p + u_4 \mathfrak{w}_4 u_4) \sigma_4 - u_p \mathfrak{w}_r u_q \epsilon_{rqk} \epsilon_{pks} \sigma_s \\ &+ (u_p \mathfrak{w}_q u_4 + u_p \mathfrak{w}_4 u_q + u_4 \mathfrak{w}_p u_q) \imath \epsilon_{pqk} \sigma_k + (u_p \mathfrak{w}_q u_q + u_p \mathfrak{w}_4 u_4 + u_4 \mathfrak{w}_p u_4 + u_4 \mathfrak{w}_4 u_p) \sigma_p. \end{aligned}$$

e por meio das relações

$$\epsilon_{rqk} \epsilon_{pks} = \epsilon_{rqk} \epsilon_{spk} = \delta_{rs} \delta_{qp} - \delta_{rp} \delta_{qs}, \quad (\text{B.16})$$

calculamos:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= (\mathfrak{u}_p \mathfrak{w}_r \mathfrak{u}_q \epsilon_{rqp} + \mathfrak{u}_p \mathfrak{w}_p \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_p \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_p + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_p \mathfrak{u}_p + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_4) \sigma_4 - \mathfrak{u}_p \mathfrak{w}_r \mathfrak{u}_q \delta_{rs} \delta_{qp} \sigma_s \\ &+ \mathfrak{u}_p \mathfrak{w}_r \mathfrak{u}_q \delta_{rp} \delta_{qs} \sigma_s + (\mathfrak{u}_p \mathfrak{w}_q \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_p \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_q + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_p \mathfrak{u}_q) \imath \epsilon_{pqk} \sigma_k \\ &+ (\mathfrak{u}_p \mathfrak{w}_q \mathfrak{u}_q + \mathfrak{u}_p \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_p \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_p) \sigma_p. \end{aligned}$$

e podemos eliminar função discreta δ :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= (\mathfrak{u}_p \mathfrak{w}_r \mathfrak{u}_q \epsilon_{rqp} + \mathfrak{u}_p \mathfrak{w}_p \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_p \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_p + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_p \mathfrak{u}_p + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_4) \sigma_4 \\ &+ [\imath (\mathfrak{u}_p \mathfrak{w}_q \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_p \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_q + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_p \mathfrak{u}_q) \epsilon_{pqs} \\ &+ \mathfrak{u}_q \mathfrak{w}_q \mathfrak{u}_s - \mathfrak{u}_q \mathfrak{w}_s \mathfrak{u}_q + \mathfrak{u}_s \mathfrak{w}_q \mathfrak{u}_q + \mathfrak{u}_s \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_s \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_s] \sigma_s. \end{aligned}$$

Lembrando que se as matrizes $\mathbf{V}(t)$ possuem a seguinte forma:

$$\mathbf{V} = \sum_{s=1}^3 \mathfrak{v}_s \sigma_s + \mathfrak{v}_4 \sigma_4, \quad (\text{B.17})$$

encontramos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_1 &= \imath (\mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_3 \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_3 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_2 \mathfrak{u}_3) \epsilon_{231} + \imath (\mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_2 \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_2 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_3 \mathfrak{u}_2) \epsilon_{321} \\ &+ \mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_2 \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_3 \mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_2 - \mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_3 + \mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_2 \mathfrak{u}_2 \\ &+ \mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_3 \mathfrak{u}_3 + \mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_2 &= \imath (\mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_3 \mathfrak{u}_1) \epsilon_{312} + \imath (\mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_3 \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_3 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_3) \epsilon_{132} \\ &+ \mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_2 + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_2 \mathfrak{u}_2 + \mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_3 \mathfrak{u}_2 - \mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_2 \mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_2 \mathfrak{u}_2 - \mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_2 \mathfrak{u}_3 \\ &+ \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_2 \mathfrak{u}_2 + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_3 \mathfrak{u}_3 + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_2 \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_3 &= \imath (\mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_2 \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_2 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_2) \epsilon_{123} + \imath (\mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_2 \mathfrak{u}_1) \epsilon_{213} \\ &+ \mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_3 + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_2 \mathfrak{u}_3 + \mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_3 \mathfrak{u}_3 - \mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_3 \mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_3 \mathfrak{u}_2 - \mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_3 \mathfrak{u}_3 \\ &+ \mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_2 \mathfrak{u}_2 + \mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_3 \mathfrak{u}_3 + \mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_3 \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_4 &= \imath (\mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_2 \epsilon_{123} + \mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_2 \mathfrak{u}_3 \epsilon_{231} + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_3 \mathfrak{u}_1 \epsilon_{312} + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_3 \epsilon_{132} + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_3 \mathfrak{u}_1 \epsilon_{312} + \mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_2 \mathfrak{u}_1 \epsilon_{213}) \\ &+ \mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_2 \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_3 \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_2 + \mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_3 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_2 \mathfrak{u}_2 \\ &+ \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_3 \mathfrak{u}_3 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_4. \end{aligned}$$

como $\mathfrak{w}_2 = \mathfrak{w}_3 = 0$ em vista das relações a seguir:

$$\mathfrak{u}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} F_- & 0 \\ 0 & -K_- \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{u}_2 = -\frac{g}{2} \begin{bmatrix} 0 & G_- \\ G_- & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.18})$$

$$\mathfrak{u}_3 = -\frac{ig}{2} \begin{bmatrix} 0 & G_+ \\ G_+ & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{u}_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} F_+ & 0 \\ 0 & K_+ \end{bmatrix}, \quad (\text{B.19})$$

$$\mathfrak{w}_1 = \begin{bmatrix} \mathfrak{c}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{c}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{w}_4 = \begin{bmatrix} \mathfrak{s}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{s}_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.20})$$

o bloco \mathfrak{v}_p consiste em:

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_1 &= \imath (\mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_3 - \mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_2) + \mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_2 - \mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_3 \\ &+ \mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_2 &= \imath (\mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_1) - \imath (\mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_3 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_3) + \mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_2 \\ &+ \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_3 &= \imath (\mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_2 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_2) - \imath (\mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_1) + \mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_3 \\ &+ \mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_4 &= \imath (\mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_2 - \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_3) + \mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_2 \\ &+ \mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_3 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{u}_4. \end{aligned}$$

Tais funções foram implementadas no maple e suas formas explícitas foram devidamente aplicadas para os resultados obtidos no capítulo 5 para $\mathfrak{w}_4 = 0$, ou seja, tais formas acima foram simplificadas para:

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_1 &= \mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_2 - (\mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_3 - \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_4), \\ \mathfrak{v}_2 &= \mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_2 + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_1 + \imath (\mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_4 - \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_3), \\ \mathfrak{v}_3 &= \mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_3 + \mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_1 + \imath (\mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_2 - \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_4), \\ \mathfrak{v}_4 &= \mathfrak{u}_1 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_4 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_1 + \imath (\mathfrak{u}_3 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_2 - \mathfrak{u}_2 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{u}_3). \end{aligned}$$

B.2 ENERGIA DAS FLUTUAÇÕES: PARTE DISSIPATIVA

Agora avançamos para o tratamento da parte dissipativa da evolução da matriz das covariâncias:

$$\mathbf{L}_i^j(t, \gamma) = \int_0^t [\mathbf{U}_i^1(t - \tau) \mathbf{D}_1^1 \mathbf{U}_1^j(t - \tau) + \mathbf{U}_i^2(t - \tau) \mathbf{D}_2^2 \mathbf{U}_2^j(t - \tau)] d\tau, \quad (\text{B.21})$$

onde

$$\mathbf{D}_k = 2\gamma_k \tilde{\mathcal{V}}_k \sigma_1. \quad (\text{B.22})$$

A fim de simplicidade iremos considerar a parte integral apenas por seu argumento:

$$\mathbf{I}_i^j(t - \tau) = \mathbf{U}_i^1(t - \tau) \mathbf{D}_1^1 \mathbf{U}_1^j(t - \tau) + \mathbf{U}_i^2(t - \tau) \mathbf{D}_2^2 \mathbf{U}_2^j(t - \tau), \quad (\text{B.23})$$

que implica em:

$$\mathbf{I}_i^j(t - \tau) = \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{p=1}^3 \mathbf{u}_p^{ik} \sigma_p + \mathbf{u}_4^{ik} \sigma_4 \right) 2\gamma_k \tilde{\nu}_k \sigma_1 \left(\sum_{p=1}^3 \mathbf{u}_p^{ik} \sigma_p + \mathbf{u}_4^{ik} \sigma_4 \right). \quad (\text{B.24})$$

logo, o problema consiste no desenvolvimento da seguinte equação:

$$\mathbf{I}_i^j(t - \tau) = \left(\mathbf{u}_p^{ik} \sigma_p + \mathbf{u}_4^{ik} \sigma_4 \right) 2\gamma_k \tilde{\nu}_k \sigma_1 \left(\mathbf{u}_q^{kj} \sigma_q + \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_4 \right), \quad (\text{B.25})$$

mais explicitamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_i^j(t - \tau) &= 2\mathbf{u}_p^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_q^{kj} \sigma_p \sigma_1 \sigma_q + 2\mathbf{u}_p^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_p \sigma_1 \sigma_4 \\ &+ \mathbf{u}_4^{ik} 2\gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_q^{kj} \sigma_4 \sigma_1 \sigma_q + \mathbf{u}_4^{ik} 2\gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_4 \sigma_1 \sigma_4, \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

que é equivalente a:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_i^j(t - \tau) &= 2\mathbf{u}_p^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_q^{kj} \sigma_p \sigma_1 \sigma_q + 2\mathbf{u}_p^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_p \sigma_1 \\ &+ \mathbf{u}_4^{ik} 2\gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_p^{kj} \sigma_1 \sigma_p + \mathbf{u}_4^{ik} 2\gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_1. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Utilizando das identidades:

$$\sigma_k^2 = \sigma_4, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \sigma_4, \quad \sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \sigma_4 + \nu_{ijk} \sigma_k, \quad (\text{B.28})$$

temos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_i^j(t - \tau) &= 2\mathbf{u}_p^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_q^{kj} \sigma_p (\delta_{1q} \sigma_4 + \nu_{1qs} \sigma_s) + 2\mathbf{u}_p^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_4^{kj} (\delta_{p1} \sigma_4 + \nu_{p1s} \sigma_s) \\ &+ \mathbf{u}_4^{ik} 2\gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_p^{kj} (\delta_{1p} \sigma_4 + \nu_{1ps} \sigma_s) + \mathbf{u}_4^{ik} 2\gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_1, \end{aligned}$$

resultando em:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_i^j(t - \tau) &= 2\mathbf{u}_s^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_1^{kj} \sigma_s + 2\mathbf{u}_p^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_q^{kj} \epsilon_{1qs} (\delta_{ps} \sigma_4 + \nu_{psr} \sigma_r) + 2\mathbf{u}_p^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_4^{kj} \epsilon_{p1s} \sigma_s \\ &+ 2\mathbf{u}_4^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_p^{kj} \epsilon_{1ps} \sigma_s + 2\mathbf{u}_4^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_1^{kj} \sigma_4 + 2\mathbf{u}_1^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_4 + 2\mathbf{u}_4^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_1. \end{aligned}$$

Temos também:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_i^j(t - \tau) &= 2\mathbf{u}_s^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_1^{kj} \sigma_s + 2\mathbf{u}_p^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_q^{kj} \epsilon_{1qp} \sigma_4 - 2\mathbf{u}_p^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_q^{kj} \epsilon_{1qs} \epsilon_{rps} \sigma_r + 2\mathbf{u}_p^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_4^{kj} \epsilon_{p1s} \sigma_s \\ &+ 2\mathbf{u}_4^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_p^{kj} \epsilon_{1ps} \sigma_s + 2\mathbf{u}_4^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_1^{kj} \sigma_4 + 2\mathbf{u}_1^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_4 + 2\mathbf{u}_4^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_1, \end{aligned}$$

que implica em:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_i^j(t - \tau) &= 2\mathbf{u}_s^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_1^{kj} \sigma_s + 2\mathbf{u}_p^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_q^{kj} \epsilon_{1qp} \sigma_4 + 2\mathbf{u}_1^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_r^{kj} \sigma_r - 2\mathbf{u}_p^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_p^{kj} \sigma_1 \\ &+ 2\mathbf{u}_p^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_4^{kj} \epsilon_{p1s} \sigma_s + 2\mathbf{u}_4^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_p^{kj} \epsilon_{1ps} \sigma_s + 2\mathbf{u}_4^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_1^{kj} \sigma_4 + 2\mathbf{u}_1^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_4 \\ &+ 2\mathbf{u}_4^{ik} \gamma_k \tilde{\nu}_k \mathbf{u}_4^{kj} \sigma_1. \end{aligned}$$

Assumimos por simplicidade a seguinte notação:

$$\mathfrak{d}^{kk} = \gamma_k \tilde{\nu}_k, \quad (\text{B.29})$$

onde índices repetidos representam soma, assim:

$$\mathfrak{d} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \tilde{\nu}_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \tilde{\nu}_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.30})$$

logo:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(t - \tau) &= 2u_s \mathfrak{d}u_1 \sigma_s + 2u_p \mathfrak{d}u_q \epsilon_{1qp} \sigma_4 + 2u_1 \mathfrak{d}u_r \sigma_r - 2u_p \mathfrak{d}u_p \sigma_1 + 2u_p \mathfrak{d}u_4 \epsilon_{p1s} \sigma_s \\ &+ 2u_4 \mathfrak{d}u_p \epsilon_{1ps} \sigma_s + 2u_4 \mathfrak{d}u_1 \sigma_4 + 2u_1 \mathfrak{d}u_4 \sigma_4 + 2u_4 \mathfrak{d}u_4 \sigma_1. \end{aligned}$$

em termos dos fatores, calcula-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(t - \tau) &= 2(u_s \mathfrak{d}u_1 + u_1 \mathfrak{d}u_s + u_4 \mathfrak{d}u_p \epsilon_{1ps} + u_p \mathfrak{d}u_4 \epsilon_{p1s}) \sigma_s \\ &+ 2(u_4 \mathfrak{d}u_4 - u_p \mathfrak{d}u_p) \sigma_1 + 2(u_4 \mathfrak{d}u_1 + u_1 \mathfrak{d}u_4 + u_p \mathfrak{d}u_q \epsilon_{1qp}) \sigma_4, \end{aligned}$$

que implica em:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(t - \tau) &= 2(u_s \mathfrak{d}u_1 + u_1 \mathfrak{d}u_s + u_4 \mathfrak{d}u_p \epsilon_{1ps} + u_p \mathfrak{d}u_4 \epsilon_{p1s}) \sigma_s \\ &+ 2(u_4 \mathfrak{d}u_4 - u_p \mathfrak{d}u_p) \sigma_1 + 2(u_4 \mathfrak{d}u_1 + u_1 \mathfrak{d}u_4 + u_3 \mathfrak{d}u_2 - u_2 \mathfrak{d}u_3) \sigma_4. \end{aligned}$$

expandindo tal expressão obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(t - \tau) &= 2(u_s \mathfrak{d}u_1 + u_1 \mathfrak{d}u_s + u_4 \mathfrak{d}u_p \epsilon_{1ps} + u_p \mathfrak{d}u_4 \epsilon_{p1s}) \sigma_s \\ &+ 2(u_4 \mathfrak{d}u_4 - u_p \mathfrak{d}u_p) \sigma_1 + 2(u_4 \mathfrak{d}u_1 + u_1 \mathfrak{d}u_4 + u_3 \mathfrak{d}u_2 - u_2 \mathfrak{d}u_3) \sigma_4. \end{aligned}$$

de forma que o fator $\mathbf{I}(t - \tau)$ a ser integrado é condensado em:

$$\mathbf{I} = \sum_{p=1}^3 \eta_p(t - \tau) \sigma_p + \eta_4(t - \tau) \sigma_4, \quad (\text{B.31})$$

com:

$$\begin{aligned} \eta_1(t - \tau) &= 2[(u_4 \mathfrak{d}u_4 + u_1 \mathfrak{d}u_1) - (u_2 \mathfrak{d}u_2 + u_3 \mathfrak{d}u_3)], \\ \eta_2(t - \tau) &= 2[(u_2 \mathfrak{d}u_1 + u_1 \mathfrak{d}u_2) + i(u_3 \mathfrak{d}u_4 - u_4 \mathfrak{d}u_3)], \\ \eta_3(t - \tau) &= 2[(u_3 \mathfrak{d}u_1 + u_1 \mathfrak{d}u_3) + i(u_4 \mathfrak{d}u_2 - u_2 \mathfrak{d}u_4)], \\ \eta_4(t - \tau) &= 2[(u_4 \mathfrak{d}u_1 + u_1 \mathfrak{d}u_4) + i(u_3 \mathfrak{d}u_2 - u_2 \mathfrak{d}u_3)]. \end{aligned}$$

Para a resolução destas integrais, resgatamos as formas explícitas associadas aos elementos acima, de forma que:

$$\begin{aligned} 2\eta_1(t - \tau) &= \begin{bmatrix} F_+ & 0 \\ 0 & K_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{d}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{d}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_+ & 0 \\ 0 & K_+ \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} F_- & 0 \\ 0 & -K_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{d}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{d}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_- & 0 \\ 0 & -K_- \end{bmatrix} \\ &- g^2 \begin{bmatrix} 0 & G_- \\ G_- & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{d}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{d}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & G_- \\ G_- & 0 \end{bmatrix} \\ &+ g^2 \begin{bmatrix} 0 & G_+ \\ G_+ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{d}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{d}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & G_+ \\ G_+ & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\eta_2(t - \tau) &= -g \begin{bmatrix} 0 & G_- \\ G_- & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{d}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{d}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_- & 0 \\ 0 & -K_- \end{bmatrix} \\
&- g \begin{bmatrix} F_- & 0 \\ 0 & -K_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{d}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{d}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & G_- \\ G_- & 0 \end{bmatrix} \\
&+ g \begin{bmatrix} 0 & G_+ \\ G_+ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{d}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{d}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_+ & 0 \\ 0 & K_+ \end{bmatrix} \\
&- g \begin{bmatrix} F_+ & 0 \\ 0 & K_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{d}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{d}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & G_+ \\ G_+ & 0 \end{bmatrix}, \\
2\eta_3(t - \tau) &= -ig \begin{bmatrix} 0 & G_+ \\ G_+ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{d}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{d}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_- & 0 \\ 0 & -K_- \end{bmatrix} \\
&- ig \begin{bmatrix} F_- & 0 \\ 0 & -K_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{d}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{d}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & G_+ \\ G_+ & 0 \end{bmatrix} \\
&- ig \begin{bmatrix} F_+ & 0 \\ 0 & K_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{d}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{d}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & G_- \\ G_- & 0 \end{bmatrix} \\
&+ ig \begin{bmatrix} 0 & G_- \\ G_- & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{d}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{d}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_+ & 0 \\ 0 & K_+ \end{bmatrix}, \\
2\eta_4(t - \tau) &= \begin{bmatrix} F_+ & 0 \\ 0 & K_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{d}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{d}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_- & 0 \\ 0 & -K_- \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} F_- & 0 \\ 0 & -K_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{d}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{d}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_+ & 0 \\ 0 & K_+ \end{bmatrix} \\
&+ g^2 \begin{bmatrix} 0 & G_+ \\ G_+ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{d}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{d}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & G_- \\ G_- & 0 \end{bmatrix} \\
&+ g^2 \begin{bmatrix} 0 & G_- \\ G_- & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{d}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{d}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & G_+ \\ G_+ & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Por fim, lembramos que as matrizes das covariâncias podem ser escritas como:

$$\mathbf{M}_1^1 = \mathbf{m}_1^{11}\sigma_1 + \mathbf{m}_2^{11}\sigma_2 + \mathbf{m}_3^{11}\sigma_3 + \mathbf{m}_4^{11}\sigma_4, \quad (\text{B.32})$$

$$\mathbf{M}_2^2 = \mathbf{m}_1^{22}\sigma_1 + \mathbf{m}_2^{22}\sigma_2 + \mathbf{m}_3^{22}\sigma_3 + \mathbf{m}_4^{22}\sigma_4, \quad (\text{B.33})$$

$$\mathbf{M}_1^2 = \mathbf{m}_1^{12}\sigma_1 + \mathbf{m}_2^{12}\sigma_2 + \mathbf{m}_3^{12}\sigma_3 + \mathbf{m}_4^{12}\sigma_4, \quad (\text{B.34})$$

$$\mathbf{M}_2^1 = \mathbf{m}_1^{21}\sigma_1 + \mathbf{m}_2^{21}\sigma_2 + \mathbf{m}_3^{21}\sigma_3 + \mathbf{m}_4^{21}\sigma_4. \quad (\text{B.35})$$

$$\mathbf{m}^{11} = [\mathcal{E}_1(t), 0, 0, \mathcal{B}_1(t)], \quad \mathbf{m}^{12} = [0, \mathcal{R}(t), \mathcal{K}(t), 0], \quad (\text{B.36})$$

$$\mathbf{m}^{21} = [0, \mathcal{R}(t), \mathcal{K}(t), 0], \quad \mathbf{m}^{22} = [\mathcal{E}_2(t), 0, 0, \mathcal{B}_2(t)], \quad (\text{B.37})$$

De forma que extraídos os elementos corretos calculados por meio dos processos apresentados nestes apêndices, estimamos a forma analítica para a aproximação numérica das energias das flutuações $\mathcal{E}_k(t)$.