

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS – FÍSICA

PATRÍCIO DIAS CARDOSO DOS REIS

ESTUDO DE ESTADOS QUIMERA EM REDES DE NEURÔNIOS ACOPLADOS

PONTA GROSSA

2023

PATRÍCIO DIAS CARDOSO DOS REIS

ESTUDO DE ESTADOS QUIMERA EM REDES DE NEURÔNIOS ACOPLADOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências, área de concentração Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Marcos Batista.

PONTA GROSSA

2023

R374 Reis, Patrício Dias Cardoso dos  
Estudo de estados quimera em redes de neurônios acoplados / Patrício Dias  
Cardoso dos Reis. Ponta Grossa, 2023.  
73 f.

Dissertação (Mestrado em Ciências - Área de Concentração: Física),  
Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Marcos Batista.

1. Modelos matemáticos. 2. Dinâmica neuronal. 3. Mapas. 4. Equações  
diferenciais. 5. Estados quimera. I. Batista, Antonio Marcos. II. Universidade  
Estadual de Ponta Grossa. Física. III.T.

CDD: 530.1

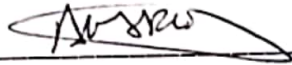
TERMO DE APROVAÇÃO

PATRÍCIO DIAS CARDOSO DOS REIS

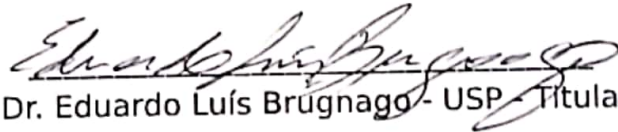
ESTUDO DE ESTADOS QUIMERA EM REDES DE NEURÔNIOS  
ACOPLADOS

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências, no Programa de Pós-Graduação em Ciências, Área de Concentração Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

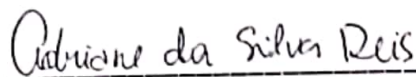
Orientador



Dr. Antonio Marcos Batista - UEPG - Presidente



Dr. Eduardo Luís Brúgnago - USP - Titular



Dra. Adriane da Silva Reis - USP - Titular

Ponta Grossa, 12 de maio de 2023.

*Dedico este trabalho à minha mãe, Rosana – in memoriam.*

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente aos meus familiares, minha mãe, Rosana, meu pai, Wilson e minha irmã, Dandara.

À família Lavino, por me acolherem e serem, também, minha família, me apoiando e me incentivando em todos os momentos.

Aos meus amigos Luiz Felipe Lavino, Jean Lucas, Guilherme Teixeira e Lucas Alfredo por todo os bons momentos, risadas e histórias compartilhadas e a todos os amigos que fiz na UEPG durante 2022.

Ao meu orientador Prof. Dr. Antonio Marcos Batista pela orientação, amizade e apoio em toda a jornada.

Aos colegas de grupo e de sala Msc. Enrique Chipcoski Gabrick, Msc. Ana Paula da Silva Koltun e Conrado Ferreira Bittencourt, pela companhia, pelas valiosas discussões, pela ajuda e pela amizade, fatores fundamentais no desenvolvimento deste trabalho.

Aos amigos e colaboradores do grupo 105 (<https://www.105groupscience.com>) por todo apoio, amizade e companhia.

Ao DJ Wagner, Engenheiros do Hawaii, Luiz Marengo e Juca Bala por terem produzido o entreterimento e trilha sonora indispensáveis ao longo do trabalho.

Aos membros da banca de qualificação, Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Marli Terezinha Van Kan e Prof. Dr. José Trobia.

Aos membros da banca de defesa, Dr<sup>a</sup>. Adriane da Silva Reis e Dr. Eduardo Luís Brugnago.

Aos professores da Pós-graduação.

À Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG) pela estrutura.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo financiamento.

*Não tá morto quem luta e quem peleia. (Leopoldo Rassier)*

## RESUMO

Neste trabalho investigamos o surgimento de estados quimera em dois modelos que descrevem a evolução temporal do potencial elétrico de uma membrana neuronal. Os estados quimera são caracterizados pela coexistência de coerência e incoerência em sistemas acoplados em rede. Utilizamos tanto o mapa de Rulkov, um modelo de tempo discreto capaz de reproduzir rajadas e picos de disparos, quanto o modelo integra-dispara exponencial com adaptação (IDEA), descrito por equações diferenciais. Para o mapa de Rulkov utilizamos a versão unidimensional em uma rede de acoplamento não-local e usamos como ferramenta de diagnóstico o grau de coerência, que mede a proporção entre os estados coerentes apresentados pela rede. Para o modelo integra-dispara exponencial com adaptação, usamos também o acoplamento não-local, porém com os pesos das conexões sendo atualizados através de uma regra de plasticidade. Para esse modelo verificamos a probabilidade da rede apresentar estado quimera testando condições iniciais aleatórias usando o parâmetro de ordem local como diagnóstico. Verificamos que ambos os modelos apresentam estados quimera. Além disso, verificamos que no modelo IDEA, a plasticidade pode induzir a existência de quimera.

**Palavras-chave:** Modelos matemáticos, Dinâmica neuronal, Mapas, Equações diferenciais, Estados quimera.



## ABSTRACT

In this work we investigated the appearing of chimera states in two models that simulates the temporal evolution of a neuronal membrane potencial. Chimera states can be defined as the coexistence of coherent and incoherent patterns in coupled systems. We used both the Rulkov map, a discrete time model that reproduces bursts and spikes, and the adaptive exponential integrate-and-fire (ADEX) model, decribed by means of differential equations. For the Rulkov map we used the unidimensional version coupled in an non-local network and used the degree of coherence as diagnostic tool. For the ADEX model we also used an non-local coupling with its synaptic connection weights being updated following an plasticity rule. For this model we calculated the probability of the network show chimera states by testing random initial conditions using the local order parameter as diagnostic tool. We verified that both systems shows chimera states and also verified that in the ADEX model the plasticity rule increases the probability of chimera states in the network.

**Keywords:** Mathematical models, Neuronal dynamic, Maps, Differential equations, Chimera states.

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

- EQ Estado Quimera.
- EQs Estados Quimera.
- IDEA Integra e dispara exponencial com adaptação.
- PDTS Plasticidade dependente do tempo entre “spikes”.

## LISTA DE SÍMBOLOS

$x$	Estado de um mapa.
$n$	Iteração.
$\mu$	Parâmetro de controle do mapa Logístico.
$f(x_n)$	Mapa genérico
$\delta$	Intervalo dado entre duas condições iniciais.
$d_n$	Distância entre os estados do mapa na iteração $n$ .
$\lambda$	Expoente de Lyapunov.
$y$	Segunda variável de estado de um mapa bidimensional.
$G$	Grafo.
$V$	Conjunto dos nós.
$E$	Conjunto das arestas.
$i$	Indivíduo da rede.
$\varepsilon$	Intensidade de acoplamento da rede.
$j$	Segundo vizinho da rede.
$P$	Número de indivíduos acoplados entre si.
$p$	Probabilidade de acoplamento entre indivíduos em uma rede aleatória.
$p_{quimera}$	Probabilidade de existência de quimera.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>MAPAS</b>	<b>15</b>
2.1	Mapa Logístico	16
2.2	Mapa de Hénon	19
2.3	Mapa de Rulkov	21
<b>3</b>	<b>EQUAÇÕES DIFERENCIAIS</b>	<b>26</b>
3.1	Definições	26
3.1.1	Equações diferenciais ordinárias e parciais	26
3.1.2	Classificação quanto à ordem das derivadas	27
3.1.3	Equações diferenciais lineares e não lineares	27
3.2	Modelo integra-dispara exponencial com adaptação (IDEA)	28
<b>4</b>	<b>REDES</b>	<b>31</b>
4.1	Tipos de acoplamento	32
4.2	Outros tipos de estruturas	36
4.2.1	Redes Aleatórias	36
4.2.2	Redes de mundo pequeno (Small-World)	36
4.2.3	Redes livres de escala (Scale Free)	38
<b>5</b>	<b>ESTADOS QUIMERA NO MAPA DE RULKOV UNIDIMENSIONAL ACO- PLADO</b>	<b>41</b>
5.1	Verificação de estados quimera em uma rede de mapas logísticos	43
5.1.1	Grau de coerência	44
5.1.2	Cálculo do grau de coerência para o mapa logístico.	46
5.2	Estados Quimera em uma rede de mapas de rulkov unidimensionais	47
5.2.1	Condições iniciais distribuídas em um perfil senoidal	48
5.2.2	Condições iniciais distribuídas em um perfil gaussiano	51

5.2.3	Condições iniciais distribuídas aleatoriamente . . . . .	54
<b>6</b>	<b>ESTADOS QUIMERA NO MODELO IDEA ACOPLADO . . . . .</b>	<b>59</b>
6.1	Estados quimera induzidos por plasticidade . . . . .	62
6.1.1	Diagnóstico dos estados quimera . . . . .	62
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>67</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>67</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento teórico da física, durante muito tempo, andou de mãos dadas com o uso de modelos matemáticos determinísticos (1), que servem como a linguagem necessária para a quantificação dos fenômenos naturais (2). No século 17, Galileo Galilei (1564–1642) utilizou de linguagem matemática para descrever o movimento dos corpos (2). Posteriormente, Isaac Newton (1643–1727) sintetizou uma lei matemática para compreender a dinâmica dos corpos sob a ação da gravidade (2), bem como trabalhou na construção do cálculo diferencial, que se tornou a linguagem fundamental das ciências naturais e da engenharia (3).

Caminhando mais para frente na história, é pertinente também citar o trabalho realizado por James Clerk Maxwell (1831–1879), que resumiu os experimentos de eletricidade e magnetismo em quatro equações fundamentais e unindo estes campos (4), o que serviu como um dos fatores fundamentais para a construção da física moderna (5). Contudo, a necessidade de compreensão de problemas cada vez mais complexos fez com que surgissem modelos com características não previsíveis, caracterizando o caos determinístico (6). Sistemas que carregam esta natureza são caracterizados pela sensibilidade a mudanças pequenas nas condições iniciais do sistema, fazendo com que haja imprevisibilidade no comportamento futuro de tais sistemas (7).

O interesse inicial neste ramo surgiu no trabalho envolvendo a atração gravitacional de três corpos, de Henri Poincaré (1854–1912) (7) e se estenderam para a descrição de fenômenos climáticos (7), biológicos (8), entre outros, além de ganhar suporte de métodos computacionais (6). Porém, o tratamento matemático dos sistemas caóticos determinísticos necessitam ser feitos por meio da solução numérica de equações diferenciais, as quais descrevem a evolução de sistemas em tempo contínuo (1, 7), dada sua intrínseca complexidade (7). As equações diferenciais são equações em que seus termos dependem de variáveis independentes, dependentes bem como uma ou mais derivadas dessas variáveis (3).

É necessário salientar que tal tratamento requer um alto custo de processamento computacional dependendo da complexidade dos modelos estudados. Sendo assim, uma alternativa mais prática se dá pelo uso de sistemas algébricos que possuem evolução temporal discreta, chamados de mapas (1, 6), visto sua aplicabilidade e praticidade ao mesmo tempo demandando

uma menor alocação de custo computacional. Por meio dos mapas é possível reproduzir fenômenos caóticos usando modelos simples (7). Um bom exemplo desse tipo de modelo matemático é o mapa logístico (7), proposto por Robert May (1936–2020) em 1976 (8), que será melhor discutido no decorrer do trabalho.

A aproximação dos sistemas complexos com a realidade muitas vezes depende do estudo do comportamento coletivo dos sistemas, o qual é feito pelo estudo das redes complexas (9). As redes são caracterizadas pela união de elementos por meio de conexões, suportada pela teoria dos grafos (6). Os tipos de redes se dão pela topologia das conexões entre os indivíduos (6). As redes podem ser formadas tanto por conexões aleatórias entre os indivíduos quanto por conexões com simetria topológica (10). A união do estudo dos sistemas dinâmicos com as redes revelou fenômenos de interesse científico, como a sincronização (11) e o estado quimera (EQ) (12), o qual é caracterizado pela coexistência de regiões sincronizadas e dessincronizadas em uma rede de osciladores (12).

Os estados quimera (EQs) foram verificados em vários modelos matemáticos acoplados em redes, utilizados para a descrição da dinâmica neuronal (13, 14), inclusive em modelos acoplados em redes que descrevem regiões reais do cérebro de mamíferos (15) ou modelos de neurônios com sensibilidade a temperatura (16). Outros casos que podem ser destacados é a verificação de estados quimera em redes de neurônios em que há mudança no peso das conexões (17) ou em modelos de redes fractais (18).

Sendo assim, o objetivo deste trabalho é investigar estados quimera em uma rede de mapas de Rulkov acoplados por meio de uma rede de acoplamento não local e no modelo integra-dispara exponencial com adaptação e com plasticidade dependente dos tempos entre os picos de disparos, bem como utilizar ferramentas de diagnóstico que quantifique a existência desse fenômeno em ambos os sistemas. Este trabalho organizado da seguinte forma: O capítulo 2 abordará o conceito de mapa, bem como a existência de caos em mapas. O capítulo 3 tratará de equações diferenciais e o modelo integra-dispara exponencial com adaptação, enquanto o capítulo 4 irá abordar redes complexas, suas características e tipos de redes. O capítulo 5 será utilizado para discutir os EQs, mostrando as evidências teóricas e experimentais da sua existência. Também estará inclusa a identificação de EQs em uma rede composta mapas de

Rulkov acoplados, além da utilização de uma ferramenta de diagnóstico para quantificar a existência de EQs. O capítulo 6 irá discutir a existência de EQs em um rede de modelo IDEA com plasticidade.



## 2 MAPAS

Um dos interesses da ciência está em prever o comportamento de um sistema ao longo do tempo (7). Para isso existem várias ferramentas como Equações Diferenciais (13), Mapas (10) e Autômatos Celulares (21). Os mapas, apesar de sua simplicidade são uma forma simples de realizar este processo por meio de uma sequência de composição de uma função  $f(x)$ , onde, dado um valor inicial, o valor futuro é dado pelo valor anterior (6). Assim, ao realizar uma iteração no sistema, faz-se  $f(f(x))$ , que pode ser lido como  $f^2(x)$ , e, de modo generalizado  $f^k(x)$ , que representa a composição da função  $f(x)$  para  $k$  composições (7).

Para exemplificar esse processo, considere uma função

$$f(x) = 3x. \quad (2.1)$$

Realizando três iterações deste sistema, têm-se

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 \cdot 1 = 3 \\ f(3) &= f(f(1)) = 9 \\ f(9) &= f(f(f(1))) = 27 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Assim, é possível denotar esse sistema fazendo uso da notação

$$x_{n+1} = f(x_n) = 3x_n, \quad (2.3)$$

onde  $n$  representa as iterações e evolui de forma discreta. Geralmente é de interesse saber o comportamento dos sistemas dinâmicos para  $n$  grande (7).

Os mapas tem sido amplamente utilizada para reproduzir o comportamento de sistemas descritos por modelos mais complexos (8), e a quantidade de exemplos de aplicação é bastante vasta. Na engenharia há o uso de mapas para verificação de caos em circuitos elétricos (19) ou no uso da dinâmica caótica gerada de um mapa não-linear para criação de criptografias para a transmissão de informação via arduíno (20). No campo da biologia os mapas são usados com frequência na descrição da dinâmica neuronal (10, 28) e também na dinâmica de crescimento

de população de espécies (8). A evolução temporal dos mapas forma o que chamamos de série temporal (1).

## 2.1 MAPA LOGÍSTICO

O uso de mapas para descrição da evolução de um sistema ganhou notoriedade principalmente com o estudo de crescimento populacional com o famoso modelo proposto por Pierre François Verhulst (1804 - 1849), o qual descreve a dinâmica de populações em geral (7, 24). Esse modelo considera a taxa de natalidade e mortalidade de uma determinada espécie, considerando que, partindo de certo ponto, essa população atingirá um limite, devido à fatores como a quantidade de recursos disponíveis (24). Esse modelo é descrito pela equação diferencial (22)

$$\frac{dN(t)}{dt} = \mu N(t) \left( \frac{K - N(t)}{K} \right), \quad (2.4)$$

com  $N(t)$  sendo a população no instante  $t$ ,  $K$  representando limite populacional e  $\mu$  sendo o parâmetro para o controle da taxa de crescimento da população.

Em 1976, Robert May propôs um modelo de evolução temporal discreta baseada no modelo de Verhulst (8). O modelo é dado pela expressão

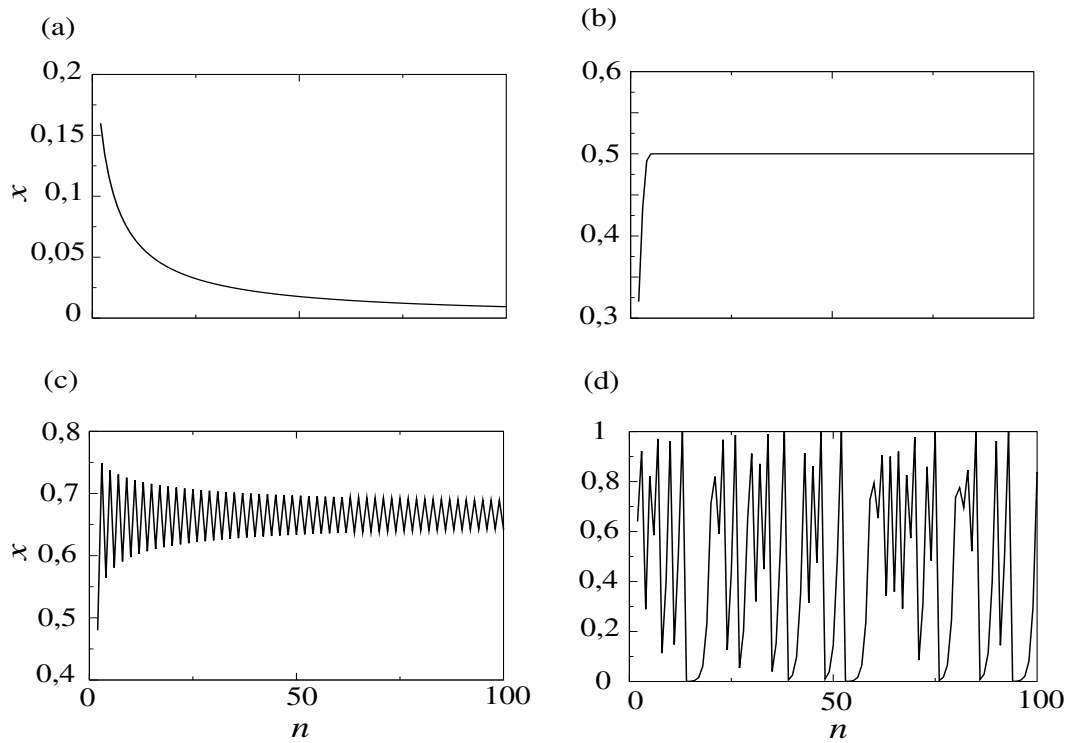
$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n), \quad (2.5)$$

em que  $x_{n+1}$  é o valor da população após a ocorrência de uma iteração,  $x_n$  é o valor da população antes da ocorrência da iteração e  $\mu$  sendo o valor que representa a taxa de crescimento da população (8).

Após um número suficientemente grande de iteradas a população converge para um valor limite. Porém, verifica-se que esse comportamento é sensível ao parâmetro  $\mu$  adotado conforme mostrado no trabalho de May (8).

Assim, ao analisar a evolução dos limites populacionais em relação aos valores  $\mu$ , percebe-se que alguns valores específicos da taxa de crescimento populacional alteram o número de possibilidade de valores para qual a população converge. Na Figura 1 é possível perceber graficamente a evolução da série temporal para diferentes  $\mu$ . Essa dependência pode ser

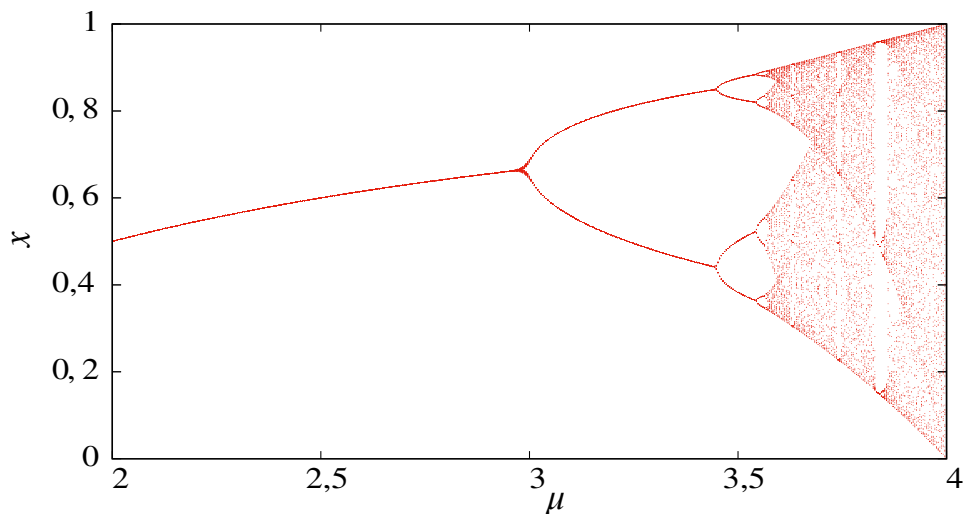
Figura 1 – Séries temporais representando os limites populacionais para  $\mu = 1$  (a),  $\mu = 2$  (b),  $\mu = 3$  (c),  $\mu = 4$  (d). Em cada item o eixo  $x$  representa as iterações e o eixo  $y$  o valor a cada iteração.



Fonte: O autor.

representada graficamente por meio do diagrama de bifurcação, que mostra as possibilidades de valores de períodos assumidos pela série temporal de acordo com o parâmetro  $\mu$  (7), de acordo com a Figura 2. Considerando um intervalo entre  $3 < \mu \leq 3,5$ , percebe-se que a série

Figura 2 – Diagrama de Bifurcações para o mapa logístico.



Fonte: O autor.

converge para período 1. Porém, para valores  $3 \leq \mu \leq 3,5$  o período vai para 2. Continuando para  $\mu = 3,5$  vê-se que o período dobra para 4, até que próximo de  $\mu = 4$  a dinâmica do sistema deixa de ser periódica. Essa é uma rota para o caos que ocorre através da duplicação do período (7). Sistemas caóticos têm como característica a sensibilidade a alteração das condições iniciais. Uma forma de quantificar essa sensibilidade se dá através dos Expoentes de Lyapunov (1,23). Quando um sistema é caótico há um crescimento exponencial da distância das trajetórias oriundas de condições iniciais distintas, porém muito próximas (1). Essa proximidade pode ser da ordem de  $10^{-9}$  (23). A construção matemática do Expoente de Lyapunov pode ser feita partindo de um mapa genérico (1)

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (2.6)$$

Considerando duas condições iniciais próximas,  $x_0$  e  $x_0 + \delta$ , a distância entre elas é dada por  $d_0 = f(x_0 + \delta) - f(x_0)$ . Após a realização de uma iterada no sistema, a distância entre os pontos passa a ser  $d_1 = f(x_1 + \delta) - f(x_1)$ , sucessivamente, até que na  $n$ -ésima iterada, que pode ser generalizada como

$$d_n = f^n(x + \delta) - f^n(x_0) = e^{n\lambda} \delta. \quad (2.7)$$

Dividindo ambos os lados da equação por  $\delta$  e extraindo o logaritmo natural, tem-se

$$n\lambda = \ln \left( \frac{f^n(x + \delta) - f^n(x_0)}{\delta} \right). \quad (2.8)$$

Que pode ser reescrita como

$$n\lambda = \ln \left| \left( \frac{df^n(x)}{dx} \right)_{x_0} \right|. \quad (2.9)$$

Se  $f(x_0)$  for iterado  $n$  vezes, é possível extrair o valor de  $f^n(x_0)$

$$f^n(x_0) = f(f(\dots(f(x_0))\dots)). \quad (2.10)$$

Isso, com a derivação por meio da regra da cadeia, resulta em

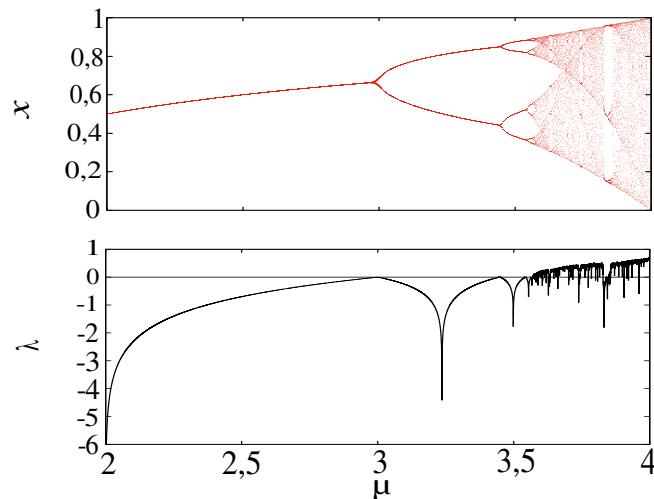
$$\left( \frac{df^n(x)}{dx} \right)_{x_0} = \left( \frac{df}{dx} \right)_{x_{n-1}} \left( \frac{df}{dx} \right)_{x_{n-2}} \dots \left( \frac{df}{dx} \right)_{x_0}. \quad (2.11)$$

Tomando o limite de  $n \rightarrow \infty$ , é possível escrever a expressão generalizada para  $\lambda$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx} \right|, \quad (2.12)$$

com  $\lambda$  sendo o Exponente de Lyapunov. Quando, ao analisar um sistema,  $\lambda < 0$ , o mapa converge após a  $n$ -ésima iteração para um valor fixo. Porém, se  $\lambda > 0$  se observa imprevisibilidade nas possibilidades de valores para quais o mapa converge (1), implicando em caos. Uma forma de observar esse comportamento é tomando como ponto de partida a Equação Logística (2.1), analisando graficamente o comportamento de  $\lambda$  como função de  $\mu$ , como visto na Figura 3.

Figura 3 – Exponente de Lyapunov para o Mapa Logístico



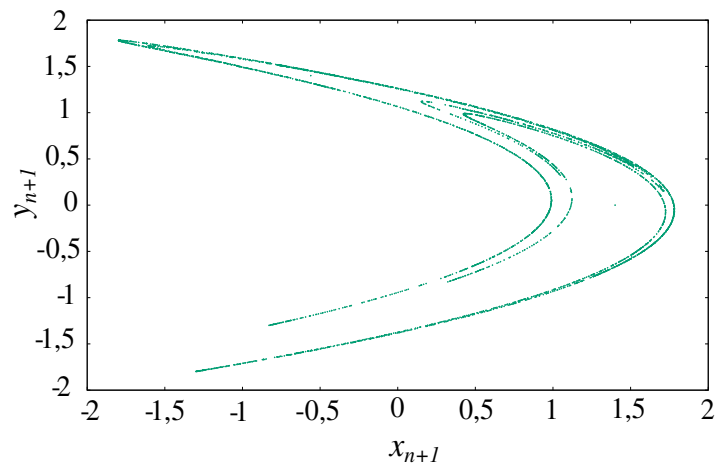
Fonte: O autor.

## 2.2 MAPA DE HÉNON

Até então discutimos modelos de mapas formados por entradas e saídas simples, ou seja, cuja regra determinística dita que o valor próximo depende exclusivamente do valor anterior, e o estado observado ao longo das iterações é unidimensional (7). No caso de sistemas de duas ou mais dimensões, sejam eles formados por mapas ou por equações diferenciais, as informações do estado dos sistemas em cada instante de tempo são formadas por um conjunto de números (7).

Em 1963 Edward Lorenz (1917–2008) propôs um modelo composto por três equações,

Figura 4 – Atrator de Hénon.



Fonte: O autor.

diferenciais de primeira ordem, as quais representam um fluxo em três dimensões (7). Esse modelo revela a existência de regiões em que a trajetória descrita pelas equações se aproxima de um ponto fixo ou mesmo descreve um ciclo infinito em torno de um ponto. Essas regiões ganharam o nome de atratores (25). Isto motivou Michel Hénon (1931–2017) a estabelecer um modelo mais simples para reproduzir a existência de atratores, deixando de usar variáveis contínuas para utilizar variáveis discretas (25). Outra motivação de Hénon era reduzir o custo computacional necessário para realizar as simulações de modelos descritos por equações diferenciais (25).

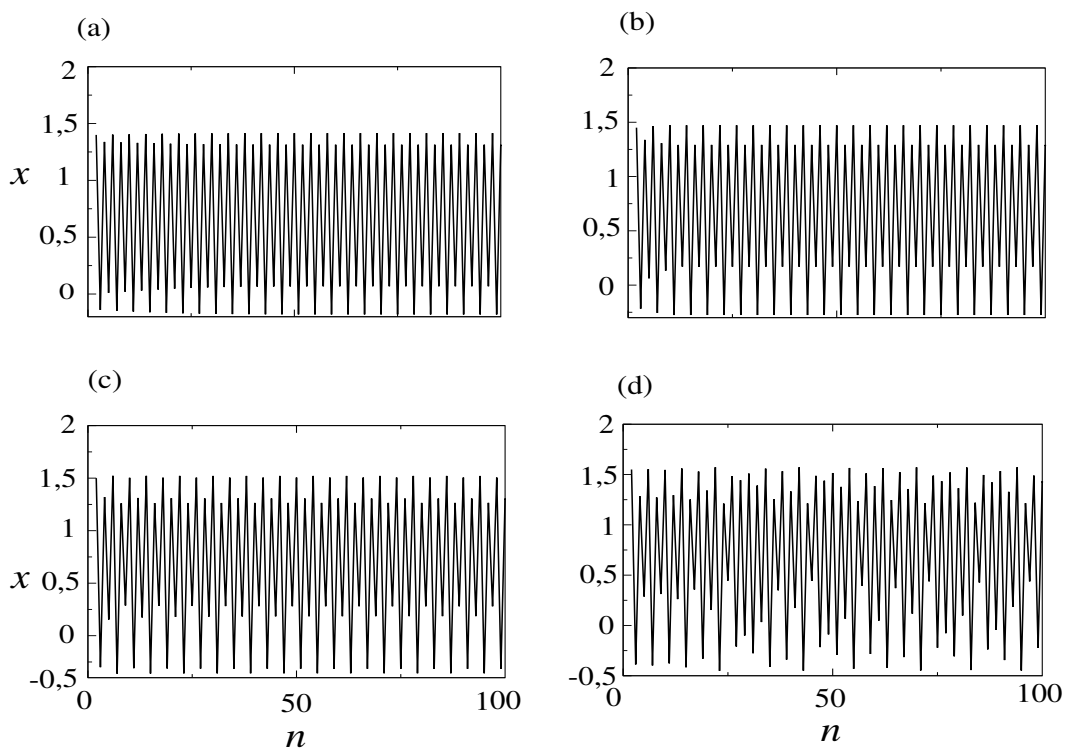
Graças a seu rico comportamento, o mapa de Hénon pode ter seus resultados generalizados para diversos sistemas mais complexos (26). O modelo de Hénon é descrito por duas expressões matemáticas, as quais compõem um mapa bidimensional

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= a + by_n - x_n^2, \\y_{n+1} &= x_n.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Tomando como parâmetros  $a = 1,4$  e  $b = 0,3$  juntamente com as condições iniciais  $x_0 = 0$  e  $y_0 = 0$ , é possível realizar uma sucessão de iteradas onde, a cada nova iterada, se extrai uma nova par ordenada  $(x, y)$ . A realização de sucessivas iteradas faz com que seja possível representar graficamente, por meio de um espaço de fase, a trajetória do mapa, como representado na Figura 4.

Para a série temporal do Atrator de Hénon, escreve-se a evolução dos valores de  $x$ , adotando alguns valores para o parâmetro  $a$ , mostrado na Figura 5. É possível verificar que quando o parâmetro  $a$  está entre  $1,4 \leq a \leq 1,45$ , o mapa ainda possui comportamento periódico. Perto de  $a = 1,55$ , devido à duplicação do período, ele perde a característica periódica e passa a se comportar caoticamente.

Figura 5 – Séries Temporais do mapa de Hénon, adotando  $a = 1,40$  (a),  $a = 1,45$  (b),  $a = 1,50$  (c) e  $a = 1,55$  (d).



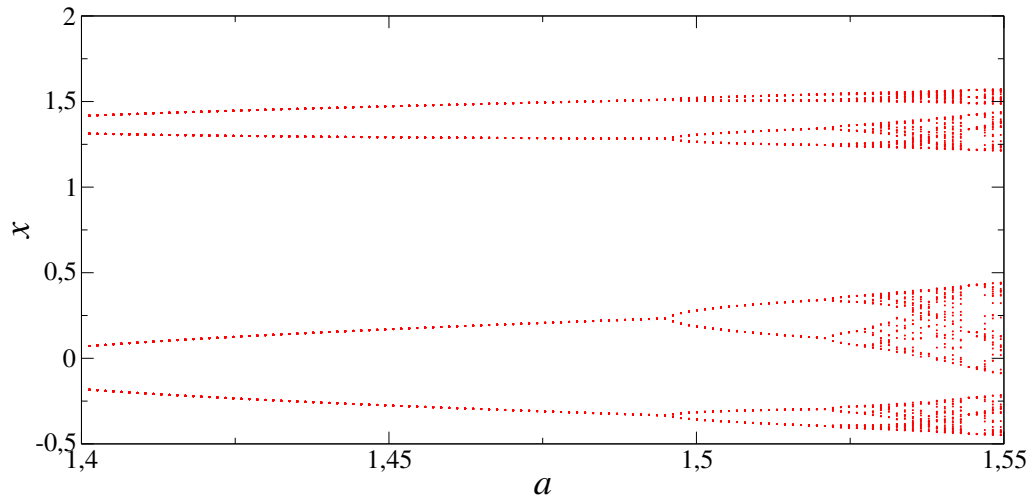
Fonte: O autor.

Como já dito, a duplicação do período é uma rota para o caos em sistemas dinâmicos (7), assim, na Figura 6, é mostrado o diagrama de bifurcações para o mapa de Hénon.

### 2.3 MAPA DE RULKOV

Um dos problemas mais relevantes da dinâmica não-linear é a descrição da dinâmica dos disparos neuronais (10). O quadro conceitual dessa área de estudo abriga trabalhos tanto em modelos construídos por equações diferenciais (15), mapas (10) e autômatos celulares (21). Uma forma de realizar o estudo de modelos que descrevem o comportamento de neurônios é por meio de modelos baseados nas equações diferenciais propostas por Hodgkin e Huxley,

Figura 6 – Diagrama de Bifurcação para o mapa de Hénon.



Fonte: O autor.

durante a década de 50 (10). Para o estudo de redes de neurônios, esses modelos requerem um grande custo computacional, principalmente quando dispostos em rede (10), de forma que, em 2001, Nikolai Rulkov propôs um modelo de mapa bidimensional, evoluindo em tempo discreto, que simula os disparos dos neurônios (27). O modelo é representado pelas equações

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{\alpha}{1+x_n^2} + y_n, \\ y_{n+1} &= y_n - \sigma x_n - \beta, \end{aligned} \quad (2.14)$$

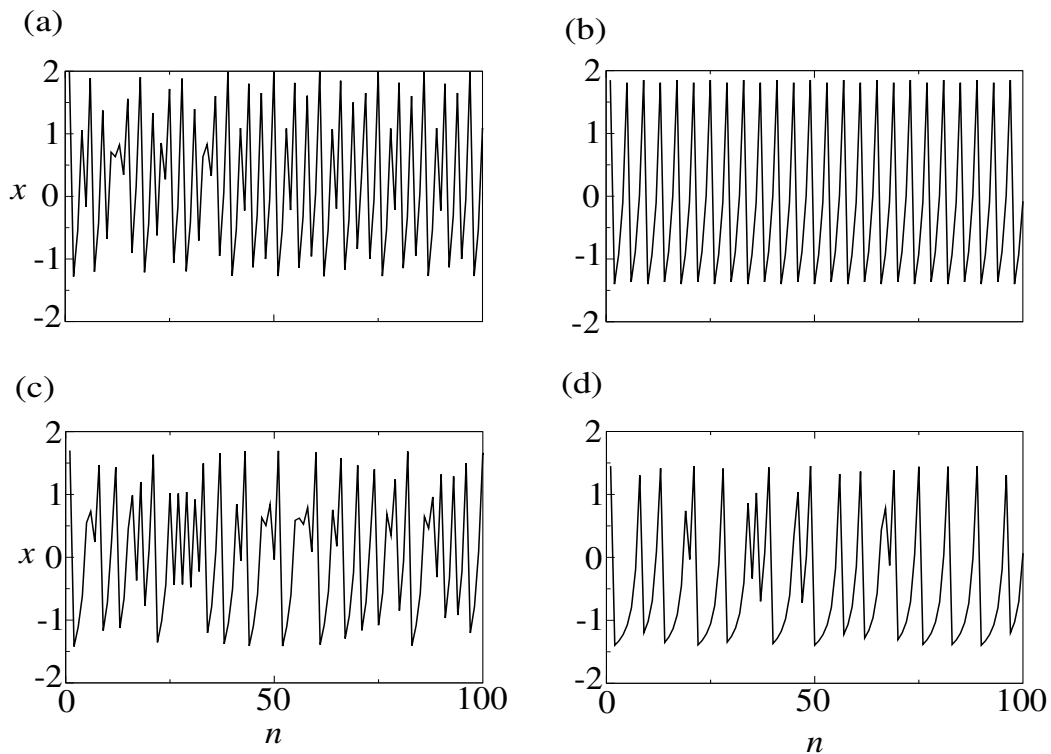
onde  $x_{n+1}$  representa uma variável de evolução rápida e  $y_{n+1}$  é uma variável de evolução lenta (27–29). O parâmetro  $\alpha$  controla o regime de disparos, que são de rajadas ou de picos de disparos (29). Uma das características do modelo é que para  $\alpha > 4$ , é possível encontrar rajadas de disparos. Contudo, para o estudo das características elementares do mapa, é necessária uma modificação no modelo, onde considera-se que  $y$  está relacionado com parâmetros tão pequenos que sua evolução lenta é suficiente a ponto de ser considerada constante (10, 27, 29).

Assim, tomando  $y = \psi$ , onde  $\psi$  é constante, é possível reescrever o modelo como um mapa unidimensional, cuja evolução temporal acontece somente para  $x$ , seguindo a expressão

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{1+x_n^2} + \psi. \quad (2.15)$$



Figura 7 – Séries temporais para  $\psi = -2,10$  (a),  $\psi = -2,35$  (b),  $\psi = -2,50$  (c),  $\psi = -2,75$  (d).

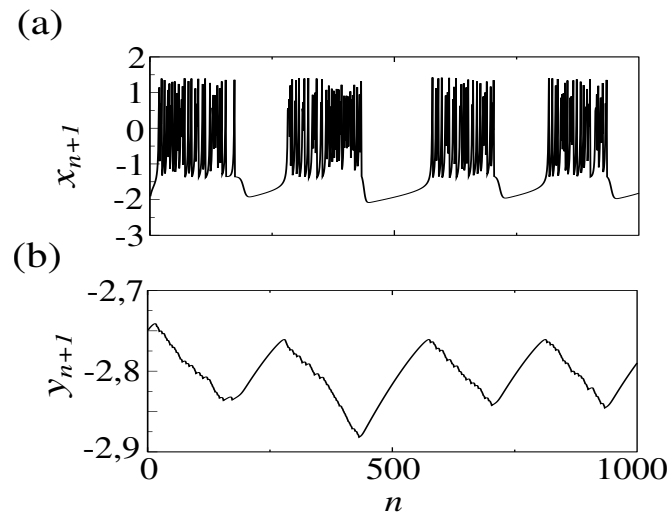


Fonte: O autor.

Assim, é possível verificar na Figura 7 a evolução de  $x$  para  $\psi = -2,10$  (a),  $\psi = -2,35$  (b),  $\psi = -2,50$  (c) e  $\psi = -2,75$  (d). Para que a série temporal do mapa de Rulkov simule a dinâmica dos disparos neuronais é necessário trabalhar com o mapa no formato bidimensional (27, 29). Considerando  $\alpha = 4,2$  e  $\sigma = \beta = 0,001$ , tornando possível mostrar a evolução das duas variáveis, como mostrado na Figura 8. De modo análogo ao que foi realizado com o Mapa Logístico e o Mapa de Hénon, também é possível mostrar o Diagrama de Bifurcações para o Mapa de Rulkov, demonstrando para quais valores  $x_n$  converge, conforme se altera o parâmetro  $\psi$ , de acordo com a Figura 9.

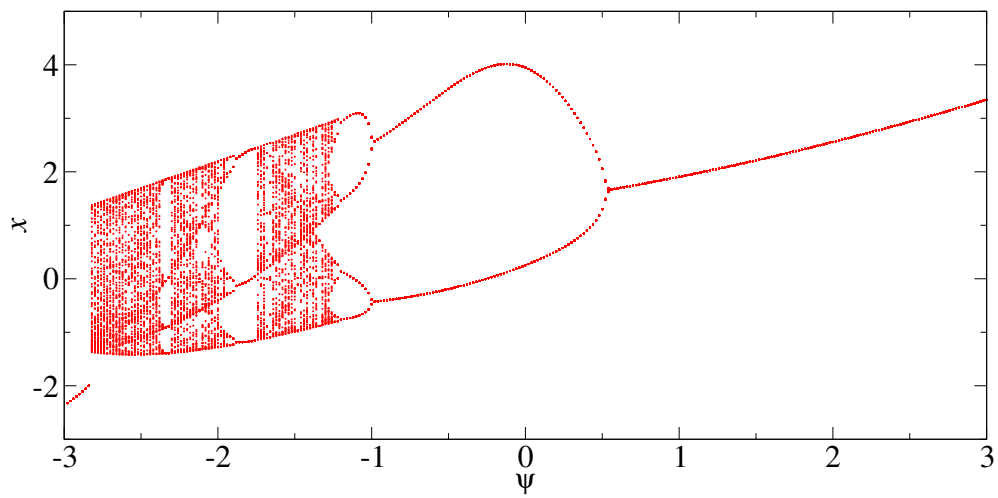
Por meio do diagrama de bifurcações é possível perceber que a dinâmica caótica aparece em valores em que o parâmetro  $\psi$  está entre valores próximos de  $-3 < \psi < -1$ . A análise das regiões de caos e estabilidade fica mais evidente quando calculamos o Expoente de Lyapunov do mapa unidimensional, em conformidade com a Figura 10.

Figura 8 – Séries Temporais demonstrando evolução rápida ( $x_{n+1}$ ) e lenta ( $y_{n+1}$ ) do mapa de Rulkov, com os parâmetros  $\alpha = 4,2$  e  $\sigma = \beta = 0,001$ .



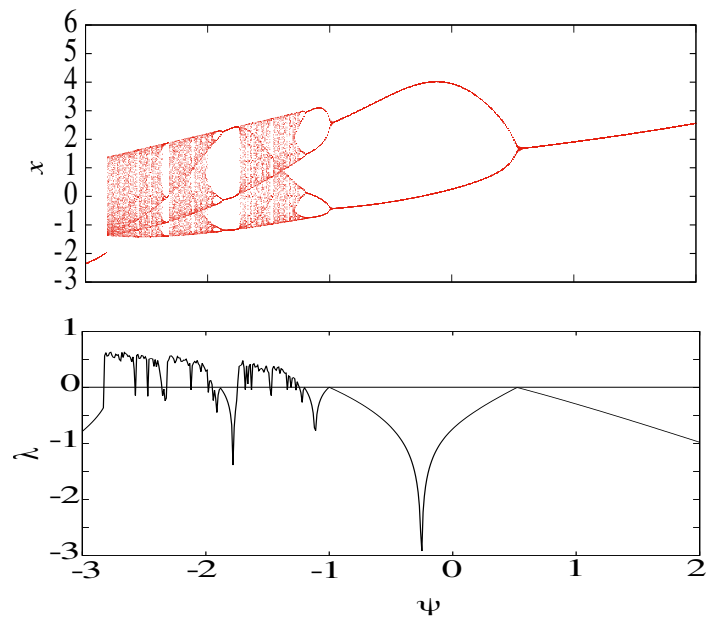
Fonte: O autor.

Figura 9 – Diagrama de Bifurcações para o mapa de Rulkov unidimensional.



Fonte: O autor.

Figura 10 – Expoente de Lyapunov para o mapa de Rulkov.



Fonte: O autor.

### 3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

No capítulo 2 estudamos sistemas cuja evolução temporal é descrita pelo estado anterior do sistema. Iterar um mapa corresponde a fazê-lo mudar no tempo através de atualizações discretas. Ao invés de expressar o estado atual como função do estado anterior, as equações diferenciais, tema que discutiremos nesse capítulo, expressam a taxa de variação do estado do sistema como função do estado atual (7).

#### 3.1 DEFINIÇÕES

Uma equação diferencial é definida como uma equação que envolve variáveis independentes, dependentes e derivadas de uma ou mais variáveis independentes com relação a uma ou mais variáveis independentes (3). Matematicamente é possível expressar uma equação diferencial por uma expressão do tipo  $f(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$  em que  $x^{(n)}(t)$  representa a derivada de ordem  $n$  da função  $x(t)$  (22). A seguir serão elencadas formas de classificar o tipo de equações diferenciais.

##### 3.1.1 Equações diferenciais ordinárias e parciais

Uma maneira pertinente de caracterizar as equações diferenciais é quanto à quantidade de variáveis independentes da função desconhecida (22). Se a função desconhecida depende somente de uma variável independente, diz-se que é uma equação diferencial ordinária. Caso a função a ser determinada depende de mais de uma variável independente, trata-se de uma equação diferencial parcial. Um exemplo pertinente de equação diferencial ordinária é a equação que modela um circuito RLC, dada por

$$L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = E(t), \quad (3.1)$$

em que  $Q(t)$  representa a carga em um capacitor com capacitância  $C$ , resistência  $R$  e indutância  $L$  (3).

Já um exemplo bastante conhecido de equação diferencial parcial é a equação do calor

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad (3.2)$$

onde  $\alpha$  é uma constante que representa a condutividade térmica de um material que, para nosso exemplo, possui comprimento  $x$ .

### 3.1.2 Classificação quanto à ordem das derivadas

Essa classificação quantifica a equação diferencial pela ordem mais alta da derivada presente na equação (22). A equação diferencial do circuito RLC, por exemplo, é uma equação diferencial de segunda ordem, visto que há um termo em que aparece uma derivada de segunda ordem. Generalizando, a equação  $f(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$  é dita uma equação diferencial de ordem  $n$ .

### 3.1.3 Equações diferenciais lineares e não lineares

Uma equação diferencial do tipo

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (3.3)$$

é dita linear se  $F$  for uma função linear das variáveis  $y, y', \dots, y^{(n)}$  (22). Uma definição parecida se aplica às equações diferenciais parciais. Uma maneira geral de expressar uma equação diferencial ordinária é dada por

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = g(t) \quad (3.4)$$

Contudo, equações que não são dessa forma são chamadas de equações não lineares (3). A teoria que rege a solução de equações diferenciais lineares é bem consolidada (22), porém os modelos que são descritos por equações não lineares dependem de métodos de solução que podem ser aproximativos, onde são feitas considerações nos modelos para torná-los lineares ou numéricos, em que normalmente se emprega o uso de computadores (7, 22).

Um exemplo de problema físico simples que é descrito por uma equação diferencial não linear é o problema do pêndulo oscilando preso por uma haste de comprimento  $L$ . A função  $\theta = \theta(t)$  descreve o ângulo que pêndulo faz com a direção vertical. O modelo é dado por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\text{sen}\theta = 0, \quad (3.5)$$

em que a existência de um termo  $\text{sen}\theta$  faz com que a equação seja não linear. Na seção seguinte vamos discutir um modelo de equação diferencial não linear que será tomado como base para a construção dos resultados.

### 3.2 MODELO INTEGRA-DISPARA EXPONENCIAL COM ADAPTAÇÃO (IDEA)

O modelo IDEA, proposto por Romain Brette e Wulfram Gerstner em 2005, é um modelo capaz de simular a dinâmica dos disparos neuronais (30). Ele é descrito pelas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não lineares acopladas

$$\begin{aligned} C_m \frac{dV}{dt} &= -g_l(V - V_R) + g_l \Delta_t \exp\left(\frac{V - V_l}{\Delta_t}\right) - w + I, \\ \tau_w \frac{dw}{dt} &= a(V - V_R) - w, \end{aligned} \quad (3.6)$$

em que a primeira equação representa o potencial  $V$  da membrana neuronal e a segunda equação modela o comportamento da corrente de adaptação  $w$  ao longo do tempo. Os outros parâmetros do modelo são:  $C_m$ , que mede a capacitância da membrana neuronal,  $g_l$  que representa a condutância de vazamento, o fator de inclinação  $\Delta_t$ , o potencial limiar  $V_{limiar}$ , a intensidade da corrente aplicada  $I$ , a constante de tempo  $\tau_w$  da corrente de adaptação e a intensidade de adaptação subliminar  $a$ . Há também uma condição de reinício imposta na variável quando o potencial de membrana atinge um valor máximo  $V_{mx}$ . Essa condição é dada por

$$\begin{aligned} V &\rightarrow V_{reinicio}, \\ w &\rightarrow w + b, \end{aligned} \quad (3.7)$$

em que  $V_{reinicio}$  é o potencial de reinício e  $b$  se trata de uma adição na corrente de adaptação. O modelo IDEA é capaz de reproduzir diferentes padrões de disparos que são presentes no córtex

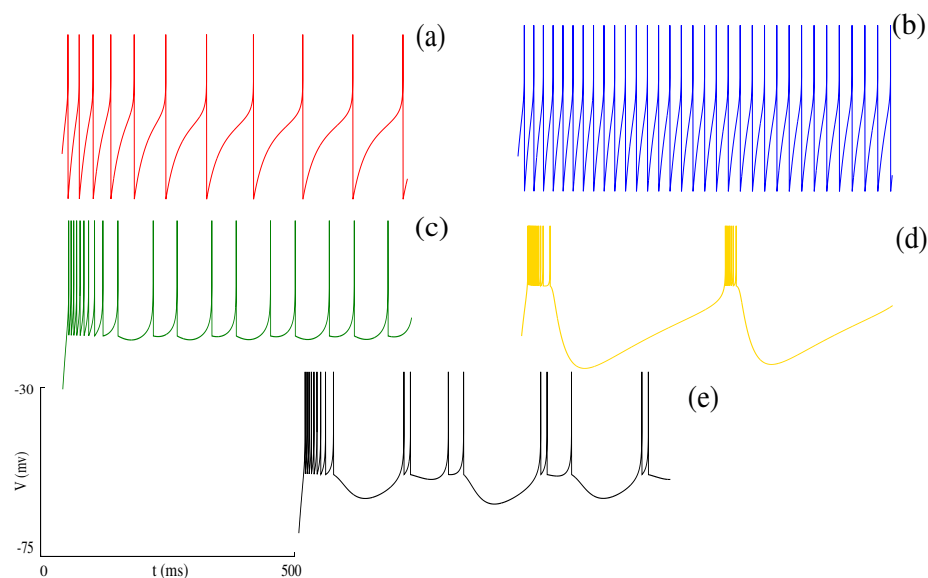
(30).

O termo  $-g_l(V - V_R)$  é associado com as bombas iônicas de sódio-potássio presentes na membrana, onde há a despolarização que ocorre até a ocorrência de um disparo e então se aplica a condição de reinício, repetindo o processo. O termo  $g_l \Delta_t \exp\left(\frac{V - V_l}{\Delta_t}\right)$  é responsável pelo início do disparo, já que quando  $V$  ultrapassa o valor de disparo limiar, este termo cresce muito rápido, reproduzindo a ativação rápida dos canais de sódio da membrana (31). Quando não há corrente externa  $I$  aplicada, o neurônio permanece em seu potencial de repouso  $V_R$ . O disparo ocorre quando uma corrente mínima aplicada faz com que o potencial da membrana ultrapasse o potencial de limiar. Essa corrente é chamada corrente de rebase (32). Os parâmetros necessários para reproduzir as principais dinâmicas de disparos estão dispostos na Tabela 3.1. Tais dinâmicas estão reproduzidas na Figura 11.

Tabela 3.1 – Tabela com os valores dos parâmetros do modelo IDEA necessários para reproduzir os 5 diferentes padrões de disparos mostrados na Figura 11

Padrão de disparos	$V_{reinicio}(mV)$	$b$ (pA)	Cor
Disparos com adaptação	-68,0	60,0	Vermelho
Disparos tônicos	-65,0	5,0	Azul
Rajada de disparos inicial	-48,8	35,0	Verde
Rajada de disparos regulares	-45,0	40,0	Amarelo
Rajada de disparos irregulares	-47,4	41,2	Preto

Figura 11 – Padrões de disparos reproduzidos de acordo com os parâmetros dispostos na Tabela 3.1.



Fonte: O autor.

Na Figura 11 vemos a reprodução de disparos onde sua frequência é maior inicialmente (a), disparos tônicos, onde sua frequência é constante ao longo do tempo (b), uma rajada com frequência alta inicialmente e posteriormente constante (c), uma rajada regular de disparos, onde a frequência entre cada rajada é constante (d) e uma sequência de rajadas com frequência irregular (e).



## 4 REDES

A ciência tem interesse em descrever o mundo real com maior precisão possível. Para isso faz-se necessário levar em consideração a interação dos diversos fatores que causam influência em um fenômeno (10). A compreensão desse ramo caracteriza o estudo dos sistemas complexos (33).

Sistemas complexos geralmente se estudam a interações entre componentes de comportamento relativamente simples individualmente, mas que coletivamente possuem comportamento complexo (10). O conceito de rede pode ser associado com diversos exemplos do mundo real: seja um círculo de amizades (34), a distribuição de energia elétrica (35) ou a própria internet (36). Esses exemplos possuem a característica em comum de unir elementos de comportamento simples quando isolados por meio de conexões em comum, fazendo emergir comportamento complexo do sistema como um todo (10, 37).

Tanto a configuração quanto a força das conexões podem ser capazes de alterar a forma com que cada elemento conectado se comporta (33). Esse fato é de interesse para a ciência, pois o estudo de redes complexas se tornou uma forma de aproximar o objeto de estudo, geralmente de comportamento simples, das situações encontradas no mundo real, de comportamento complexo (33). O primeiro estudo formal de redes complexas se deu por Leonard Euler (1707–1783), quando analisou o problema das sete pontes, em 1741 (33). Este problema surgiu quando os moradores da cidade prussiana de Königsberg (atual Kaliningrado na Rússia) se perguntaram se era possível andar por toda cidade passando pelas 7 pontes que a conectavam sem repetir o caminho nas pontes. Ao estudar este problema, Euler investigou como funcionava as conexões entre as partes da cidade que eram conectadas pelas 7 pontes.

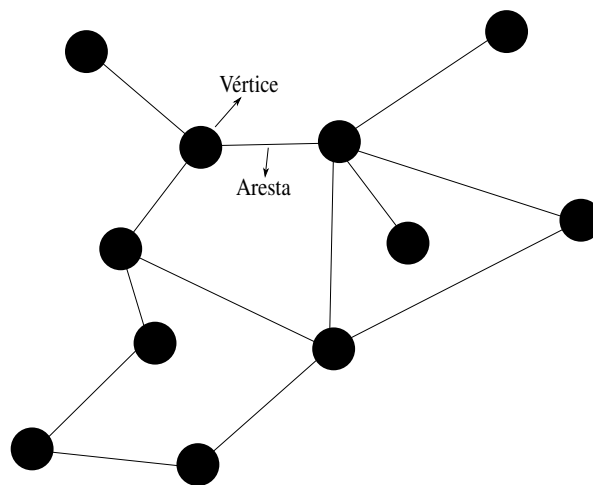
Ao realizar essa investigação Euler percebeu que era impossível fazer o trajeto imaginado pelos moradores (33). Desse modo, Euler sintetizou que a compreensão matemática das redes pode ser feito por meio da teoria dos grafos, de modo que uma rede pode ser representada como um grafo  $G[V, E]$  em que os vértices ( $V$ ) do grafo representam os elementos da rede e as arestas ( $E$ ) representam as conexões entre cada elemento (33).

Também, as redes podem apresentar configurações simétricas, definidas por modelos que

regem a forma com que são feitas as conexões. Como será discutido na próxima seção, tais modelos de acoplamento são amplamente utilizados para o estudo de mapas e de equações diferenciais (6). Há também casos em que as redes não seguem padrões específicos de formação, as quais servem para descrever fenômenos em que a conexão entre os elementos tentam descrever fenômenos reais (33).

A Figura 12 mostra um exemplo de diversos elementos conectados em uma rede.

Figura 12 – Exemplo de Rede.



Fonte: O autor.

Na Figura 12, os vértices são representados pelos pontos em preto e as arestas representam as conexões existentes entre os pontos. A seguinte seção será dedicada a discutir os tipos de redes e redes com simetria topológica.

#### 4.1 TIPOS DE ACOPLAMENTO

O interesse inicial nas redes com simetria topológica surgiu principalmente com os trabalhos de Kunihiko Kaneko, ao estudar as propriedades de mapas conectados entre si (37). Seus trabalhos investigaram a formação matemática de redes que possuem conexões entre os indivíduos formadas por expressões matemáticas bem definidas, que permitem a formação de padrões para os vínculos entre os indivíduos da rede (37). Nesse contexto, os mapas oferecem uma vantagem pelo fato de que sua dinâmica coletiva também possui custo computacional baixo, apresentando também fenômenos importantes como caos espaço-temporal (38), sincronização

(10, 11) e estados quimera (6). Isso justifica o uso dos mapas como principal foco de discussão dessa seção.

Para fins didáticos, tomaremos como ponto de partida um mapa unidimensional (38). A formação da rede denotará cada mapa acoplado por meio de um índice  $i$ , onde  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, N - 1$ , sendo  $N$  a quantidade de elementos da rede

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}). \quad (4.1)$$

Essa expressão dita o comportamento local de um indivíduo  $i$ . Para o comportamento de toda a rede, a expressão a ser seguida é

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + C^{(i)} x_n^{(j)}, \quad (4.2)$$

onde  $C^{(i)}$  determina qual será a forma com que os indivíduos da rede estarão conectados uns com os outros, e pode depender dos indivíduos  $j = 0, 1, 2, \dots, N - 1$  e do próprio indivíduo  $i$  (38). É importante salientar que para este desenvolvimento está se assumindo que a rede é homogênea, isto é, todos os indivíduos da rede são mapas idênticos (38).

O caso mais simples é o do acoplamento local, onde o elemento individual é conectado com seus vizinhos imediatos  $i + 1$  e  $i - 1$  (37, 38). Nos acoplamentos não-locais as conexões se estendem para os vizinhos mais distantes. O modelo que representa de modo genérico uma rede de mapas acoplados localmente é dado por (38)

$$C_{j=i, i \pm j}(x_n^{(j)}) = \epsilon_0 g(x_n^{(i)}) + \epsilon_R g(x_n^{(i+1)}) + \epsilon_L g(x_n^{(i-1)}), \quad (4.3)$$

em que o vetor  $\vec{\epsilon} = (\epsilon_0, \epsilon_R, \epsilon_L)$  é chamado de núcleo de acoplamento (38). Para o estudo das redes de mapas acoplados, o interesse maior reside em um caso chamado acoplamento difusivo, em que  $-\frac{\epsilon_0}{2} = \epsilon_R = \epsilon_L$  (38).

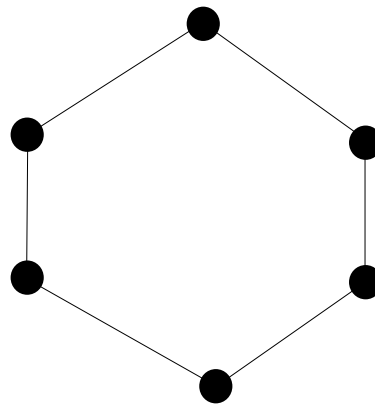
A função  $g(x)$  define qual será a dinâmica do acoplamento da rede, onde há dois casos: o acoplamento linear, dado por  $g(x) = x$  e o acoplamento futuro, dado por  $g(x) = f(x)$  (38). A diferença entre ambos é que no acoplamento linear as iterações da rede como um todo ocorrem

simultaneamente, enquanto no acoplamento futuro primeiro são iterados os indivíduos vizinhos, e após isso é realizado o acoplamento (38). Um tipo de acoplamento difusivo futuro é dado por

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2}[f(x_n^{(i+1)}) + f(x_n^{(i-1)})], \quad (4.4)$$

onde  $\varepsilon$  representa a intensidade do acoplamento entre os indivíduos, com seus valores variando entre 0 a 1. Este tipo de rede está representado na Figura 13.

Figura 13 – Representação de uma rede local



Fonte: O autor.

Entre suas principais aplicações se destacam o uso de eletrodos acoplados localmente para verificação de crises locais de epilepsia devido à ação de agentes químicos (39) e a sincronização e controle de uma rede de osciladores de Ginzburg-Landau acoplados (40).

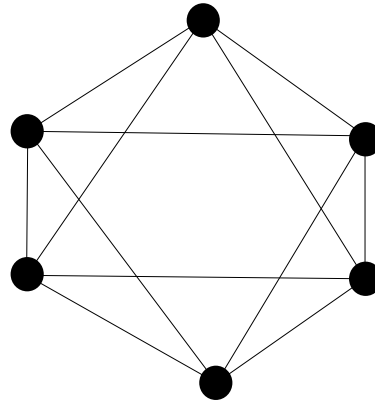
Para o caso em que o acoplamento é não-local, ao invés de um indivíduo da rede ser apenas afetado por seus primeiros vizinhos, este sofre influência de seus vizinhos mais distantes (38), segundo a equação

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f(x_n^{(j)}) - f(x_n^{(i)})], \quad (4.5)$$

onde  $P$  é o raio de acoplamento entre os indivíduos. A Figura 14 mostra um exemplo deste tipo de acoplamento. Este tipo de acoplamento tem como aplicações destacáveis a verificação do comportamento anômalo em uma rede de mapas logísticos e osciladores de Rossler acoplados (41) e também em uma rede de metrônimos acoplados (42).

O caso extremo dos acoplamentos não locais é o acoplamento global (38). Este é um modelo de conexão onde cada indivíduo da rede de  $N$  elementos está conectado com os  $N - 1$  elementos

Figura 14 – Representação de uma rede com acoplamento não local.



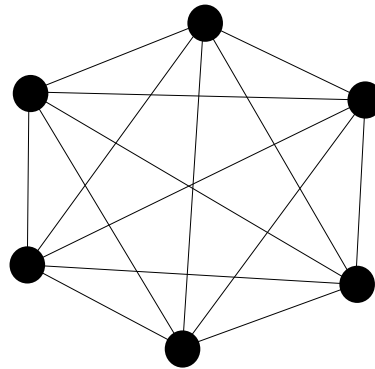
Fonte: O autor.

da rede. Isso faz com que todos os elementos sejam conectados entre si. Sua equação é dada por

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{N-1} \sum_{j \neq i}^{N-1} f(x_n^{(j)}). \quad (4.6)$$

Novamente o parâmetro  $\varepsilon$  controla a intensidade de acoplamento dos elementos da rede. O segundo termo é comumente compreendido como um valor de campo médio produzido pela rede (10, 33). A Figura 15 exemplifica uma rede de acoplamento global entre os elementos.

Figura 15 – Representação de uma Rede de Acoplamento Global.



Fonte: O autor.

Também, as aplicações que podem ser destacadas são a verificação de fase num conjunto de lasers semicondutores (43) e a verificação da coexistência de estados de coerência e incoerência no meio oscilatório do processo de eletro-oxidação do silicone (44).

## 4.2 OUTROS TIPOS DE ESTRUTURAS

Esta seção se dedicará a discutir brevemente redes que possuem estruturas que não necessariamente seguem um padrão simétrico, como as redes aleatórias (45), as redes de pequeno mundo (46) e sem escala (47).

É importante citar esses tipos de redes dado o fato de que as ligações entre elementos do mundo real não necessariamente seguem uma simetria bem definida, podendo também se adaptar realizando novas ligações entre os nós (33).

### 4.2.1 Redes Aleatórias

As redes aleatórias formaram os primeiros estudos sobre redes complexas, realizados por E. N. Gilbert, em 1959, e por P. Erdős (1913–1996) e A. Rényi (1921–1970). Tais modelos são baseados em grafos completamente aleatórios (33). Esses modelos são caracterizados pelo modo com que as conexões são distribuídas aos nós.

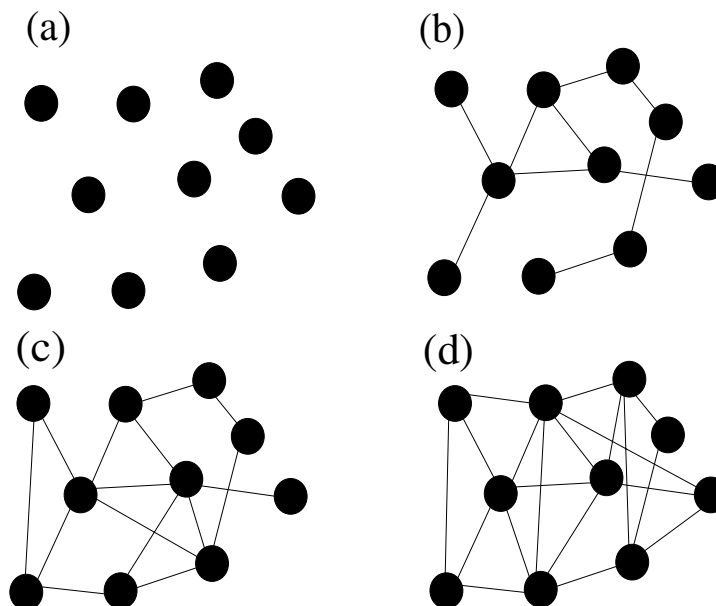
Nesse modelo proposto por Gilbert parte-se de uma rede completamente conectada e vão se eliminando as conexões. Já o modelo de Erdős se caracteriza pelo surgimento das conexões entre os nós da rede de forma aleatória com dependência, também, de uma probabilidade  $p$  (45). Nesse caso, fazendo  $p = 0$ , configura-se uma rede sem conexões, enquanto  $p = 1$  é uma rede em que todos os indivíduos estão conectados entre si, remetendo a uma rede de acoplamento global (10). Um exemplo de aplicabilidade de um modelo de rede aleatória é a descrição de epidemias como a da Influenza (48).

Nas redes aleatórias, o número de conexões que cada vértice, ou elemento da rede, possui não difere muito do número médio de conexões dos elementos da rede (9). Uma representação visual de uma rede aleatória é disponibilizada na Figura 16 .

### 4.2.2 Redes de mundo pequeno (Small-World)

Esta configuração de rede foi estudada primeiramente para estudos sociais na Universidade de Harvard, para realizar a descrição da conexão entre pessoas conhecidas (49). Suas propriedades foram melhor formalizadas na década de 90, cujas principais definições foram propostas por Newman-Watts (46) e Watts-Strogatz (50). O nome desse modelo se dá pelo fenômeno

Figura 16 – Representação de uma rede aleatória, onde é mostrado quatro probabilidades diferentes de realização de conexões: (a)  $p = 0$ ; (b)  $p = 0,1$ ; (c)  $p = 0,15$ ; (d)  $p = 0,2$ .



Fonte: O autor.

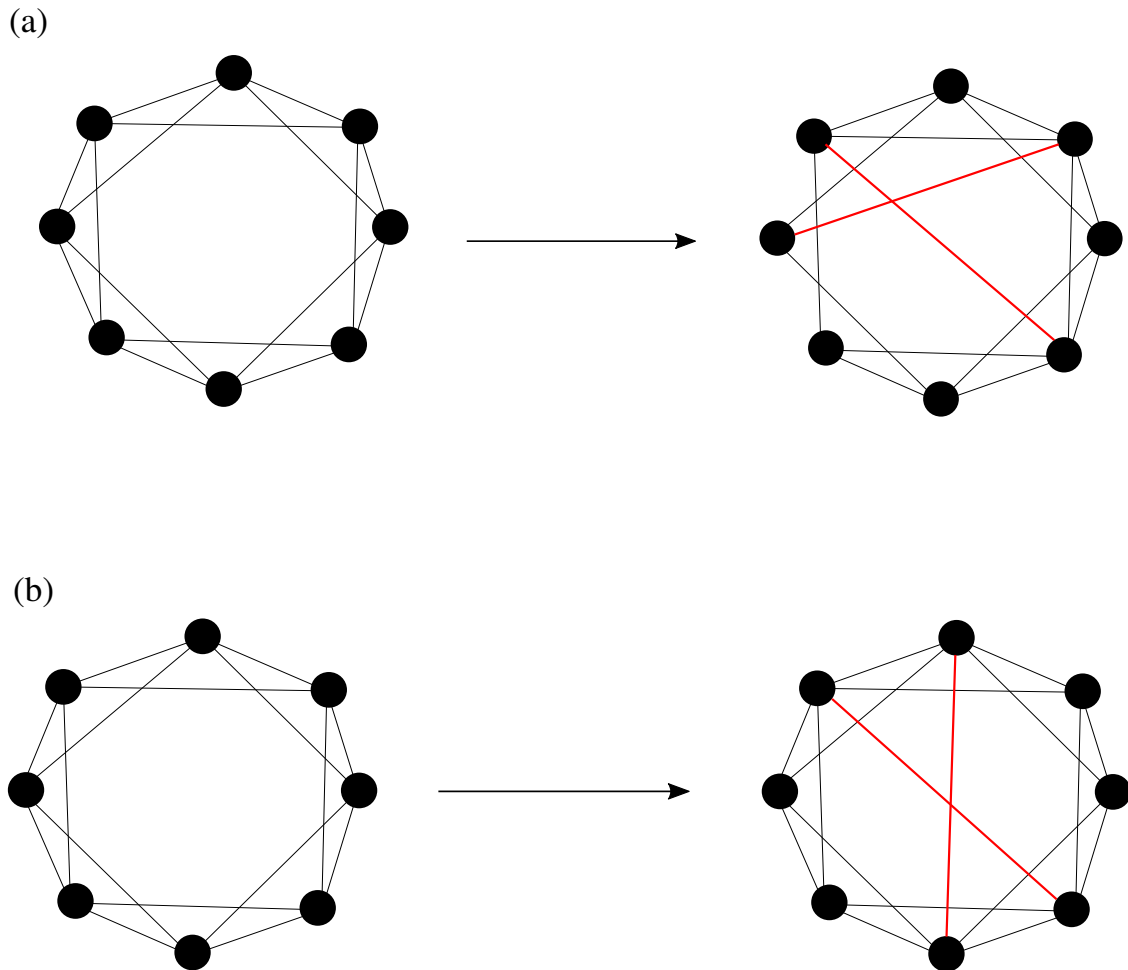
observado quando dois desconhecidos se encontram e descobrem que possuem um conhecido em comum. Quando isso acontece um dos dois diz “como esse mundo é pequeno!” (33).

O modelo de Watts-Strogatz propõe que essa configuração se dá pela proposição inicial de uma rede regular de  $N$  elementos, cujas conexões entre eles são refeitas seguindo uma probabilidade  $p$ , que varia entre 0 e 1 (46).

Os casos extremos são aqueles em que  $p = 0$ , quando não acontece novas conexões e  $p = 1$ , quando o surgimento de novas conexões faz com que a rede seja aleatória (10). Já no modelo proposto por Newman-Watts as conexões não são refeitas, porém adiciona-se novas conexões a rede, em que a localização das novas conexões são probabilísticas.

Um dos exemplos mais palpáveis para conhecer o funcionamento de uma rede pequeno mundo foi o estudo de propagação de informações no Twitter, onde, dependendo do caráter e conteúdo da informação, a informação costuma ser propagada a curto prazo somente em esferas sociais da rede que compartilham de mesma opinião ou gosto (51). Ambos os modelos de rede pequeno mundo estão esquematizados na Figura 17.

Figura 17 – Representação esquemática de uma rede Pequeno Mundo. (a) Modelo Proposto por Watts-Strogatz; (b) Modelo Proposto por Newman-Watts. As arestas em vermelho indicam novas conexões.



Fonte: O autor.

#### 4.2.3 Redes livres de escala (Scale Free)

O estudo das redes sem escala se deu na tentativa de explicar a ligação existente entre endereços da World Wide Web, já que inicialmente acreditava-se que o modelo de redes aleatórias era suficiente para tal compreensão (47). Entretanto, verificou-se que diversos sites da internet, os vértices da rede, possuíam um número maior de conexões, comparados com outros, de forma que acontecia a formação de *hubs* (10,47).

Existem diversos exemplos de como as redes sem escalas são aplicados na ciência dentre os quais se pode citar o estudo de redes de neurônios no cérebro humano (10) e a determinação do diâmetro da world wide web (36), entre outros (52).

As redes sem escala se aproximam do mundo real pelo fato de que novos nós e novos



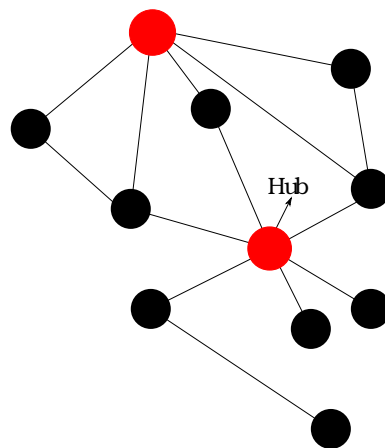
vértices podem surgir (33). Em 2001 Barabási também descreveu um modelo matemático que rege a formação de redes livres de escala, partindo da criação de conexões partindo de um nó, que duplica suas conexões conforme são adicionados 3 novos nós na rede. Essa dinâmica de crescimento das conexões dos indivíduos foi discutida por Barabási e Bonabeau, em 2003, onde os autores afirmam que a formação dos hubs segue um processo análogo a frase “os ricos ficam mais ricos” (52). Nesse trabalho os autores comparam as redes aleatórias com as redes livres de escala, mostrando que enquanto o número de conexões de um nó uma rede aleatória apresenta uma distribuição de Poisson, nas redes sem escalas, as conexões seguem uma lei de potência (52). No trabalho os autores também exemplificam como as redes sem escalas servem para reproduzir a formação de hubs abordando o tráfego aéreo dos EUA, a transmissão de epidemias e interação de nutrientes necessários para a sobrevivência das células humanas (52).

Assim, formalizando matematicamente a formação das conexões sem escala, é possível definir sua construção partindo de uma lei de potência do tipo  $P(k) = k^{-\gamma}$ , em que  $k$  representa o número de conexões e  $\gamma$  é uma expressão obtida analiticamente por Barabási, baseado na sua proposta de dinâmica de crescimento da rede, dada por (47)

$$\gamma = \frac{\ln 3}{\ln 2}. \quad (4.7)$$

A Figura 18 representa uma conexão entre 11 vértices no formato sem escalas, onde é possível identificar que alguns nós possuem mais conexões que outros, caracterizando a formação de hubs.

Figura 18 – Representação de uma rede sem escala, demonstrando a formação de Hubs, em vermelho, ou seja, vértices que possuem um número maior de conexões em comparação com outros.



Fonte: O autor.

## 5 ESTADOS QUIMERA NO MAPA DE RULKOV UNIDIMENSIONAL ACOPLADO

O estudo de osciladores acoplados em rede revela fenômenos de relevante interesse científico como a sincronização (11), cujo primeiro registro foi feito por Christiaan Huygens (1629–1695), ao verificar que o movimento do pêndulo de dois relógios que compartilhavam a mesma base sincronizavam com o decorrer do tempo (53).

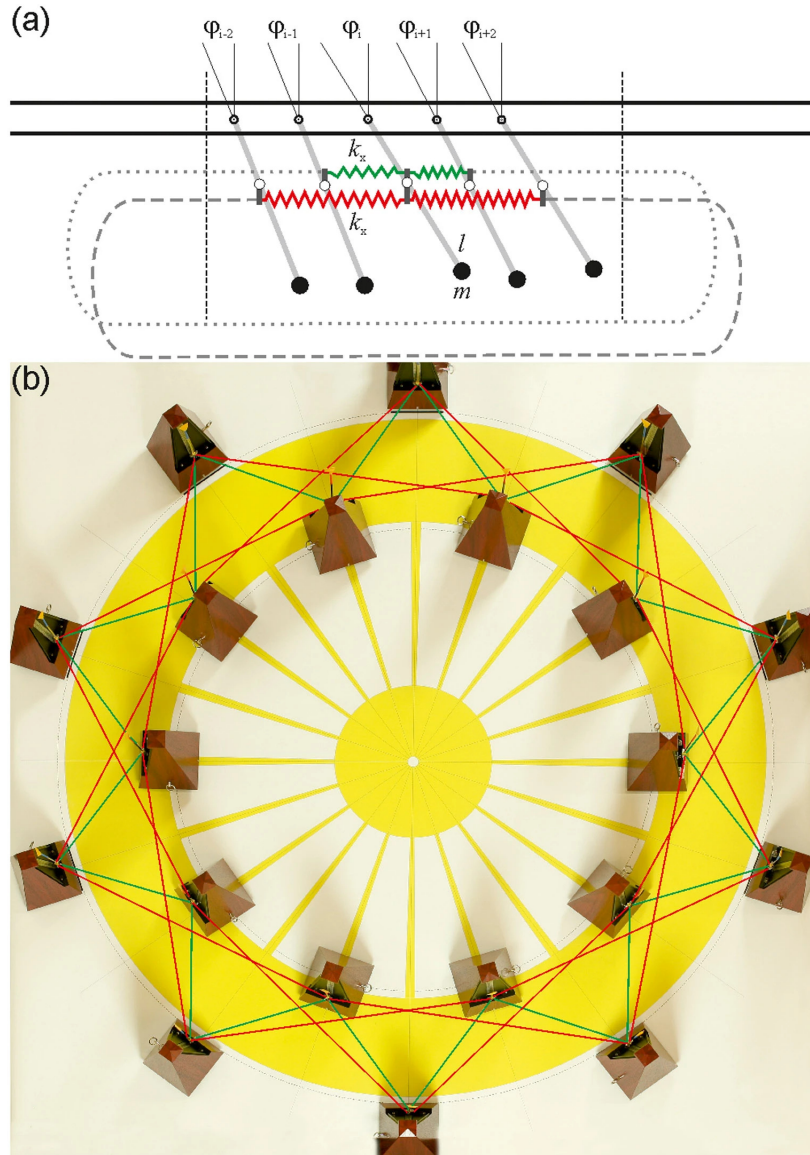
Entre os principais interesses científicos do estudo da sincronização se destaca a verificação deste fenômeno em redes de neurônios (54), explicando patologias como a epilepsia (55). Entretanto, um outro fenômeno despertou interesse dentro do estudo dos sistemas acoplados, onde verificou-se a existência espacial de coerência e incoerência em uma cadeia de osciladores (56). Este fenômeno foi nomeado posteriormente como Estado Quimera (EQ) (12), em referência a criatura da mitologia grega composta por partes de vários animais. Posteriormente, diversos trabalhos evidenciaram o surgimento desse fenômeno em diversos outros sistemas de interesse científico, como em redes de mapas logísticos acoplados (41) e sistemas mecânicos acoplados (57).

A descoberta desse comportamento serviu como ponte para o surgimento de questões importantes que abordam a natureza deste fenômeno (58). Algumas questões foram resolvidas por meio da investigação teórica, como a confirmação da dependência das condições iniciais da rede (53) e a confirmação de que há EQs que são estáveis, quando se têm um número infinito de osciladores acoplados (59). Também, verificou-se que perturbações externas podem induzir ou suprimir a existência de EQs em osciladores (41).

Como já citado, diversos tipos de sistemas podem apresentar EQs. Um dos exemplos mais famosos da coexistência de dois estados num mesmo sistema é o caso do sono dos golfinhos (60), onde a sua atividade cerebral apresenta o sono unihemisférico, caracterizado pela preservação do funcionamento de uma região do cérebro característica da dinâmica da atividade comum de um indivíduo despertado, permitindo que o mamífero emerja até a superfície para respirar, enquanto outra região apresenta atividade cerebral característica do sono. Porém, esse tipo de fenômeno foi inicialmente verificado por meio de simulações numéricas no comportamento de osciladores acoplados (56), por isso é pertinente mostrar algumas evidências experimentais,

como o caso do estudo de metrônimos acoplados (42), na Figura 19. No trabalho, há um arranjo

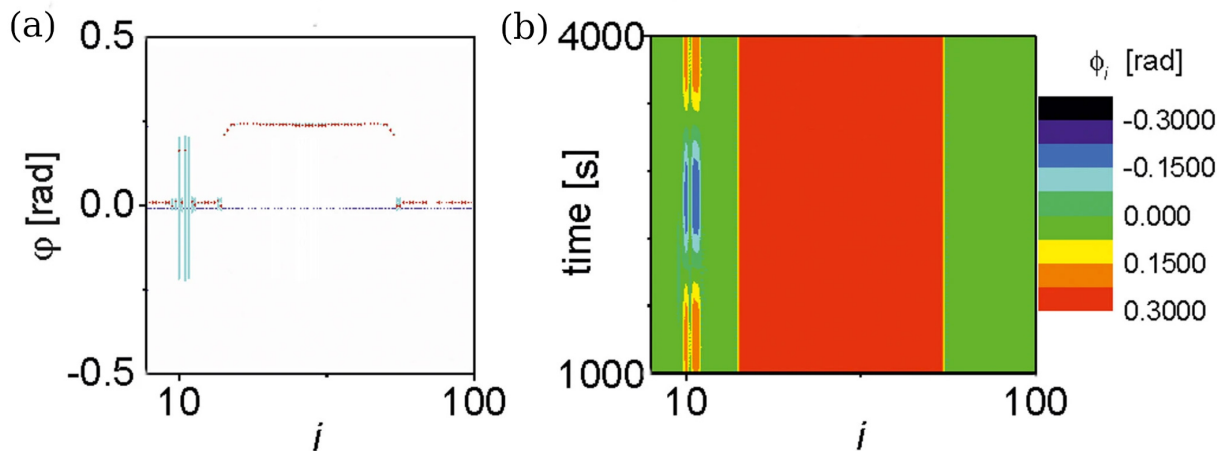
Figura 19 – Arranjo de metrônimos acoplados, usados para evidenciar experimentalmente os estados químera. Na Figura, há uma representação esquemática do arranjo experimental (a) e uma foto do experimento (b)



Fonte: Kapitaniak (42).

experimental com metrônimos ligados por molas e amortecedores, caracterizando uma rede. Verificou-se, conforme visto na Figura 20, que há a distinção de comportamento oscilatório entre as regiões da rede de osciladores. Este fenômeno foi capturado em vídeo pelos autores.

Figura 20 – Perfil espacial do estado quimera na fase de oscilação dos metrônimos (a) e o perfil espaço temporal do sistema (b).



Fonte: Kapitaniak (42).

## 5.1 VERIFICAÇÃO DE ESTADOS QUIMERA EM UMA REDE DE MAPAS LOGÍSTICOS

Para o estudo de EQs dentro do campo teórico, faz-se necessário o uso de simulações numéricas para reproduzir o comportamento de osciladores, permitindo maior liberdade no controle dos parâmetros e das condições iniciais necessárias para verificação deste fenômeno. Para fins didáticos, realizamos um estudo de EQs em uma rede de mapas logísticos acoplados de forma não-local. A dinâmica da rede é regida pela equação

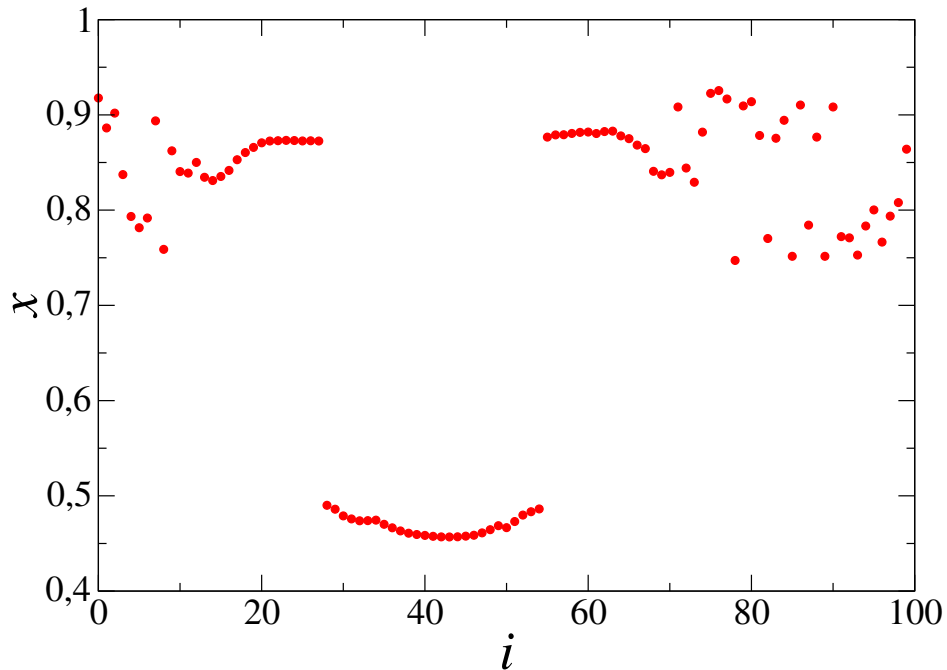
$$x_{n+1}^{(i)} = \mu x_n^{(i)} (1 - x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f(x_n^{(j)}) - f(x_n^{(i)})]. \quad (5.1)$$

A simulação numérica foi realizada partindo de uma rede composta por 100 mapas logísticos acoplados,  $\varepsilon = 0,25$ , a distância de acoplamento entre os vizinhos  $P = 21$ , utilizando condições iniciais dadas por uma função senoidal (41), definida pela expressão (38)

$$x_0^{(i)} = \text{sen}(2\pi i/N). \quad (5.2)$$

Visualiza-se na Figura 21 um retrato espacial  $x \times i$  dos indivíduos da rede no instante da última iteração, de modo que parte da rede de osciladores tem seus estados sincronizados e

Figura 21 – Estado Quimera em uma rede de mapas logísticos.



Fonte: O autor.

parte tem seus estados dessincronizados, caracterizando o EQ.

Outra forma de visualizar a existência dos EQs é utilizando de um perfil onde os estados de cada elemento da rede são observadas ao longo das iterações por meio de um perfil espaço-temporal, de acordo com a Figura 22. Nela os estados são representados por meio de uma escala de cores e registrados ao longo das passagens das iterações.

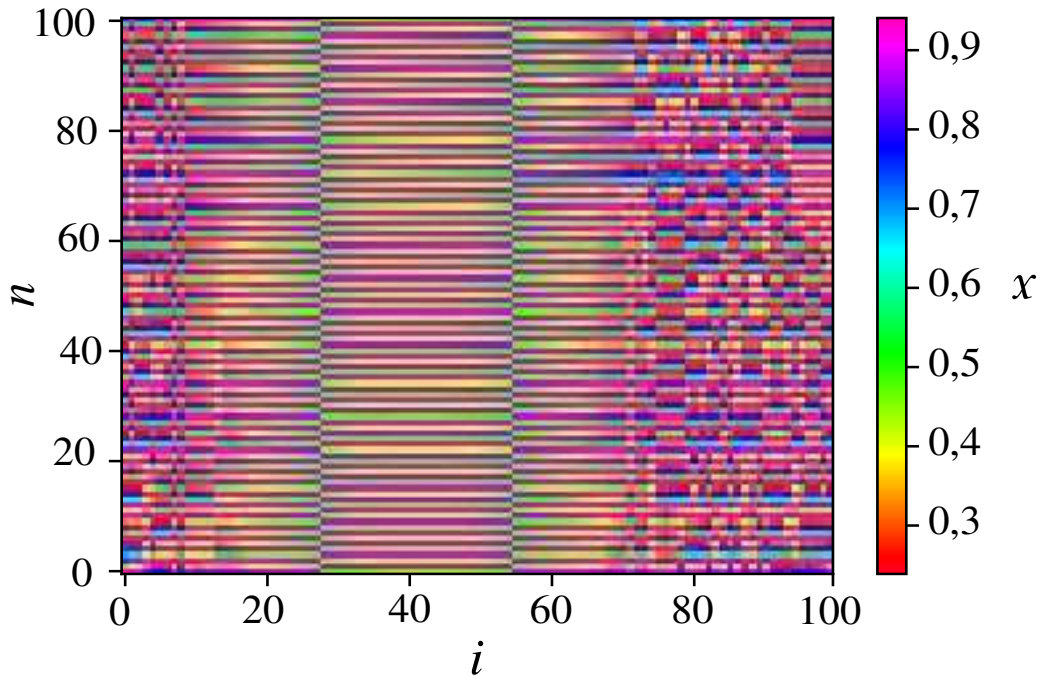
A Figura 22 permite a percepção da duração de existência dos EQs bem como as possíveis características apresentadas por eles, como a possibilidade de deslocamento das regiões de coerência e incoerência ao longo da rede, ou a periodicidade de surgimento deste fenômeno.

### 5.1.1 Grau de coerência

Conforme já dito, a existência dos EQs é sensível a diversos fatores (53), de modo que é pertinente o uso de ferramentas que permitam o diagnóstico deste fenômeno.

Um modo de realizar este diagnóstico é por meio do cálculo do grau de incoerência da rede

Figura 22 – Perfil espaço-temporal numa rede de mapas logísticos acoplados.



Fonte: O autor.

(41). Este pode ser obtido calculando o parâmetro de ordem local  $R$  da rede (24), dado por

$$R_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\delta} \left| \sum_{j \in C} e^{i\phi_j} \right|, \quad (5.3)$$

onde  $\phi_j$  denota a fase do oscilador e  $2\delta$  é o tamanho da região em que o mapa  $j$  está centralizado.

O grau de coerência calcula o comprimento dos domínios coerentes e incoerentes da rede obtidos por meio do parâmetro de ordem local, visto que valores de  $R_i \approx 1$  caracterizam os domínios coerentes, enquanto os valores  $R_i \approx 0$  representam os domínios incoerentes da rede. Dessa forma, os valores intermediários entre 0 a 1 caracterizam os EQs (41).

Sabendo o comprimento e quantidade dos domínios de coerência da rede, o grau de incoerência é obtido utilizando a expressão

$$p = \frac{\tilde{N}}{N}, \quad (5.4)$$

com  $\tilde{N}$  dado por

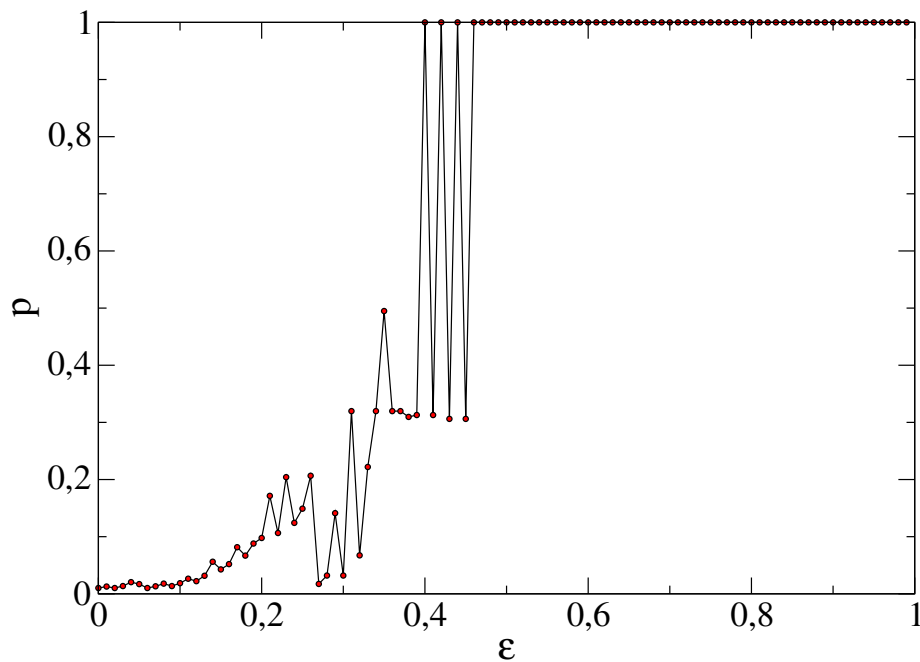
$$\tilde{N} = \frac{1}{N_p} \sum_{l=1}^{N_p} N_l, \quad (5.5)$$

em que  $N_l$  é o comprimento do  $l$ -ésimo domínio coerente da rede e  $N_p$  é o número total de domínios (41).

### 5.1.2 Cálculo do grau de coerência para o mapa logístico.

Aplicando esta ferramenta para a rede de mapas logísticos discutida anteriormente pode-se perceber como o grau de coerência permite o diagnóstico dos EQs variando parâmetros de interesse na rede. A Figura 23 mostra uma aplicação deste diagnóstico variando a intensidade de acoplamento  $\varepsilon$ .

Figura 23 – Grau de incoerência  $p \times \varepsilon$  da rede de 100 mapas logísticos acoplados não-localmente, considerando  $P = 30$ .



Fonte: O autor.

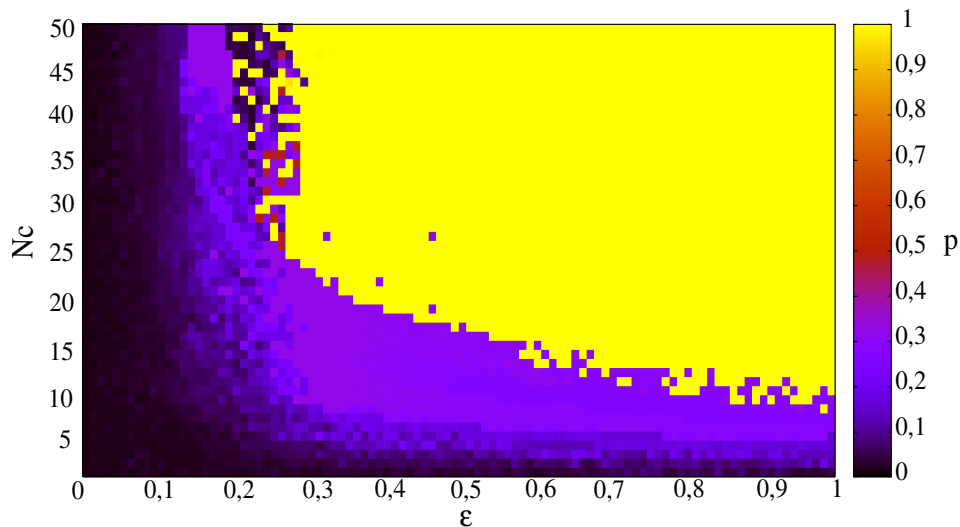
Na figura 23 pode-se verificar que os EQs aparecem quando a intensidade de acoplamento  $\varepsilon$  está no intervalo  $0,20 < \varepsilon < 0,45$ . Para valores abaixo deste intervalo, a rede está totalmente incoerente, enquanto acima deste intervalo, a rede está completamente sincronizada.

Para investigar mais profundamente as condições necessárias para o surgimento de EQs na rede estudada, pode-se também variar o número de conexões de cada indivíduo ( $N_c$ ),



permitindo que investiguemos um espaço de parâmetros da rede, em conformidade com a Figura 24. Percebe-se que os EQs surgem em uma faixa bem ampla de  $\varepsilon$  quando  $N_c$  está entre  $5 < N_c < 25$ . Acima dessa faixa, a transição entre o estado coerente e incoerente ocorre de modo mais abrupto conforme o parâmetro  $\varepsilon$  cresce, visto que as conexões entre os mapas se tornam mais intensas.

Figura 24 – Espaço de parâmetros  $N_c \times \varepsilon$  para a rede com 100 mapas logísticos acoplados não-localmente, usando  $\mu = 3,69$ .



Fonte: O autor.

## 5.2 ESTADOS QUIMERA EM UMA REDE DE MAPAS DE RULKOV UNIDIMENSIONAIS

Nesta seção apresentaremos os resultados obtidos em uma rede de mapas de Rulkov unidimensionais acoplados. Para tal, tomaremos como base sua versão unidimensional governada pela equação

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{(1+x_n^2)} + \psi. \quad (5.6)$$

Consideramos uma rede formada por 1000 mapas ligados por meio de um acoplamento não local. A rede é denotada por uma expressão matemática dada por

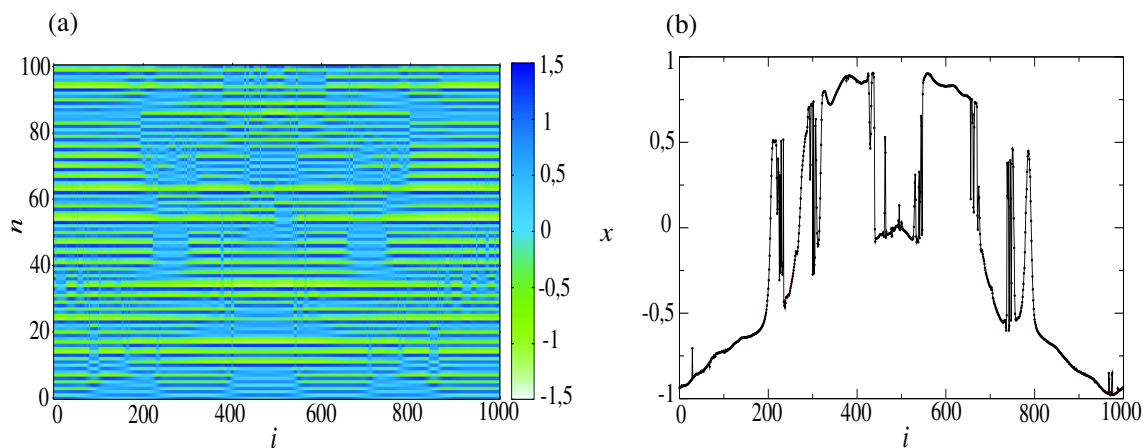
$$x_{n+1}^{(i)} = \frac{\alpha}{(1+x_n^{(i)2})} + \psi + \frac{\varepsilon}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f(x_n^{(j)}) - f(x_n^{(i)})]. \quad (5.7)$$

Para distribuição das condições iniciais dos mapas acoplados ao longo da rede, utilizamos três perfis: um perfil senoidal regido pela expressão  $x_0^{(i)} = \text{sen}(2\pi i/N)$ , um perfil gaussiano regido pela expressão  $\exp(-(i-j)/N)$  e um perfil aleatório no domínio  $[0, 1]$ . As próximas seções serão dedicadas a discutir os resultados obtidos para cada perfil de condição inicial.

### 5.2.1 Condições iniciais distribuídas em um perfil senoidal

A Figura 25 mostra o perfil espaço-temporal das oscilações tomando as 100 primeiras iterações da rede (a), bem como o perfil espacial da rede na iteração 70 (b).

Figura 25 – Perfil espaço-temporal em uma rede de mapas de Rulkov acoplados para as primeiras 100 iterações (a) e o perfil espacial da rede (b) na iteração 70, utilizando os parâmetros  $\alpha = 4, 2$ ,  $\psi = -2, 80$ ,  $\varepsilon = 0, 48$  e  $P = 300$ .



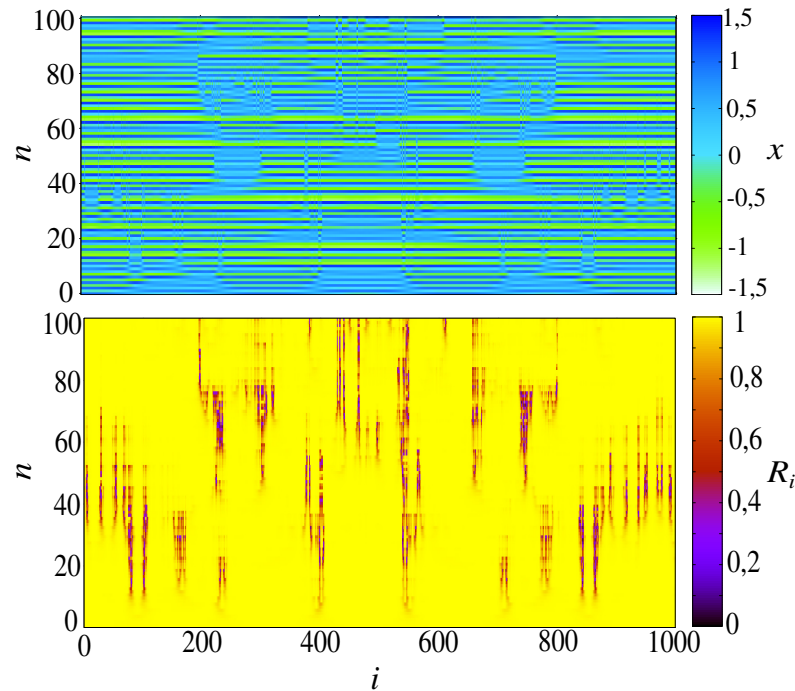
Fonte: O autor.

Visualiza-se que os estados em que há a coexistência de coerência e incoerência na rede se alternam com iterações em que todos os mapas possuem seus estados sincronizados. Contudo, a existência dos EQs para essas condições iniciais é bastante curta, se deslocando espacialmente pela rede com a evolução do sistema. Além disso, no perfil espacial da rede, vemos que há cinco regiões em que uma parcela considerável da rede está sincronizada e essas regiões se alternam com regiões de caos espacial.

Calculamos também o parâmetro de ordem local  $R_i$  da rede ao longo das 100 primeiras iterações, na Figura 26, comparando o resultado com o perfil espaço-temporal da rede. Tais

resultados nos permitem verificar também que os EQs perduram ao longo das iterações, sendo extintos e surgindo novamente em outras regiões da rede.

Figura 26 – Comparação entre o parâmetro de ordem local ao longo das 100 primeiras iterações e o perfil espaço-temporal da rede, utilizando os parâmetros  $\alpha = 4, 2$ ,  $\psi = -2, 80$ ,  $\varepsilon = 0, 48$  e  $P = 300$ .



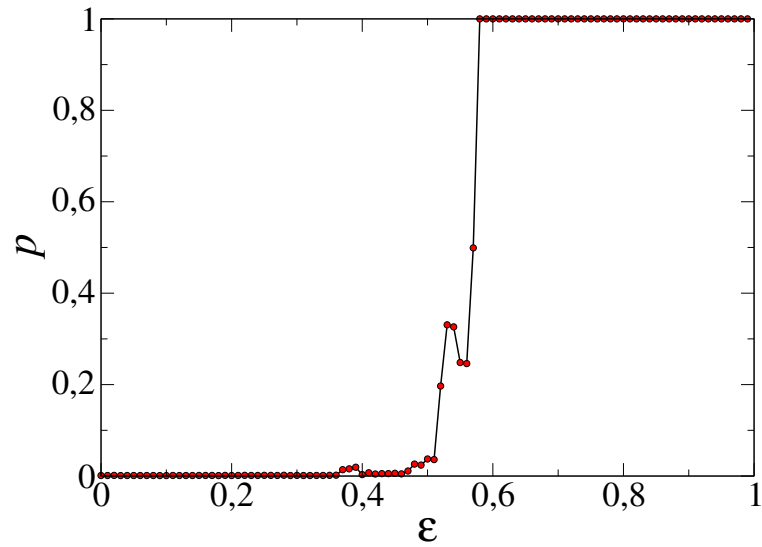
Fonte: O autor.

Tendo em vista estes resultados, calculamos o grau de incoerência  $p$  para investigar a influência dos parâmetros da rede no surgimento de EQs. Obteve-se os valores de  $p$  em relação às variáveis  $\varepsilon$ , que representa a intensidade de acoplamento e o número de conexões de cada indivíduo ( $Nc$ ). A Figura 27 mostra a influência da intensidade de acoplamento no grau de coerência da rede, mostrando que para valores de  $\varepsilon$  entre 0,50 e 0,60 é possível verificar EQs. Se vê que a faixa desse parâmetro que permite a existência de EQ é restrita a uma faixa curta do parâmetro  $\varepsilon$ .

Variando o número de conexões em cada indivíduo ( $Nc$ ), utilizando  $\varepsilon = 0,48$  foi possível também identificar valores para o grau de coerência que caracterizam EQs, conforme a Figura 28. Verificou-se um comportamento mais irregular para o surgimento de EQs, porém o aumento do número de conexões faz com que a rede tenda a sincronizar.

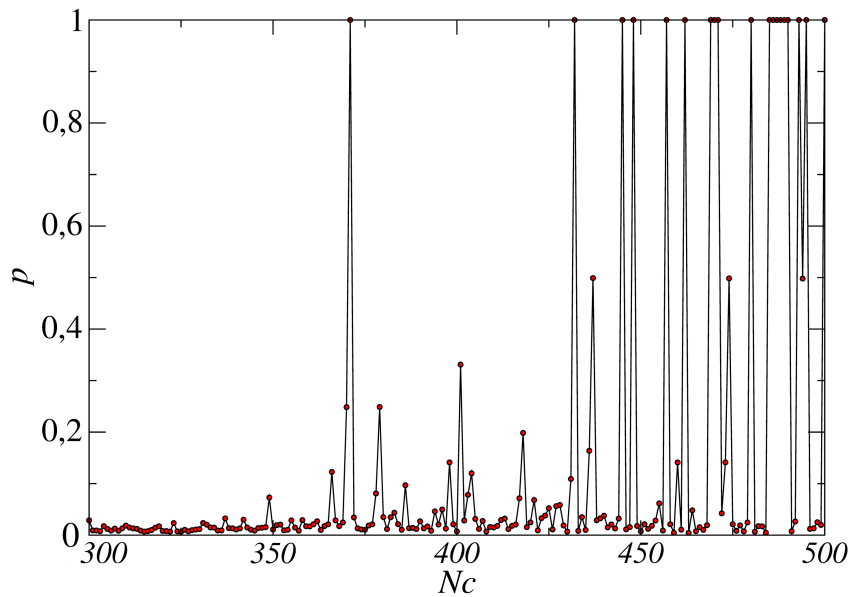
Explorando de maneira mais detalhada o comportamento da rede por meio de um espaço de parâmetros  $\varepsilon \times Nc$ , na Figura 29, foi possível verificar que os EQs aparecem para valores de

Figura 27 – Grau de coerência  $p \times \varepsilon$  para 1000 mapas de Rulkov acoplados usando  $P = 300$ .



Fonte: O autor.

Figura 28 – Grau de coerência  $p \times N_c$  para 1000 de mapas de Rulkov acoplados usando  $\varepsilon = 0,48$ .

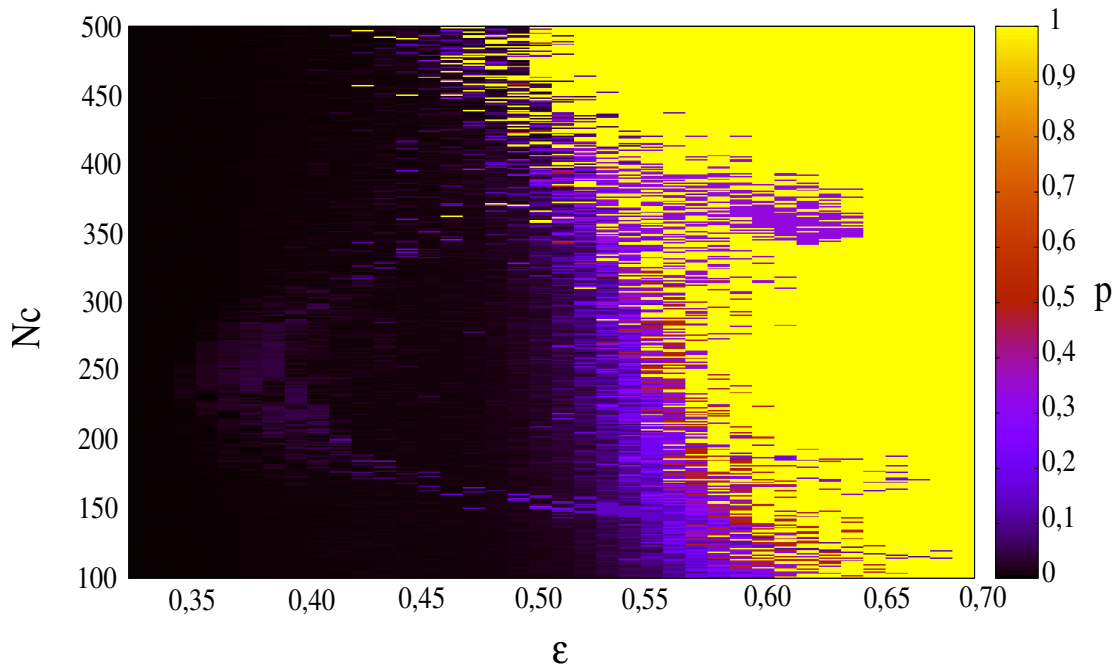


Fonte: O autor.

$\varepsilon$  intermediários entre 0,35 e 0,65, com  $N_c$  variando entre 100 e 400, esta faixa é a região que tornou mais propícia o surgimento de EQs, principalmente quando  $N_c$  varia entre 100 e 350, visto que nessa região os EQs aparecem mesmo com valores de  $\varepsilon$  próximos de 0,70.

Contudo, quando  $N_c$  está acima de 400, percebe-se que a faixa de regiões onde há EQ diminui, fazendo com que a rede atravessasse repentinamente entre os estados de incoerência e

Figura 29 – Espaço de parâmetros  $\varepsilon \times N_c$  para uma rede de 1000 mapas de Rulkov usando um perfil senoidal de condições iniciais.



Fonte: O autor.

sincronização, quando a intensidade das conexões aumenta. Verificamos também a existência de uma região de EQ entre  $100 \leq N_c \leq 350$  quando temos  $\varepsilon$  relativamente baixo ( $0,35 \leq \varepsilon \leq 0,50$ ). Verificamos que essa região circula uma região onde há incoerência na rede.

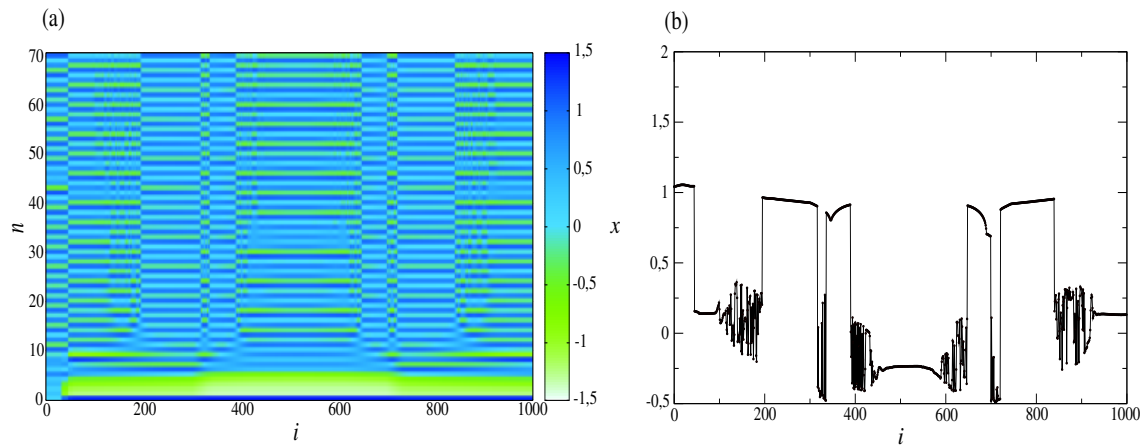
### 5.2.2 Condições iniciais distribuídas em um perfil gaussiano

Para o perfil gaussiano de condições iniciais registramos as 70 primeiras iterações da rede em um perfil espaço-temporal (a), bem como o retrato espacial da rede na última iteração (b), conforme mostrado na Figura 30.

Verificamos que o EQ perdura por uma quantidade maior de iterações quando comparada com a condição inicial senoidal. Comparando o perfil espaço-temporal da rede com a evolução temporal do parâmetro de ordem, identificamos nitidamente as regiões de coerência e incoerência da rede, como mostrado na Figura 31.

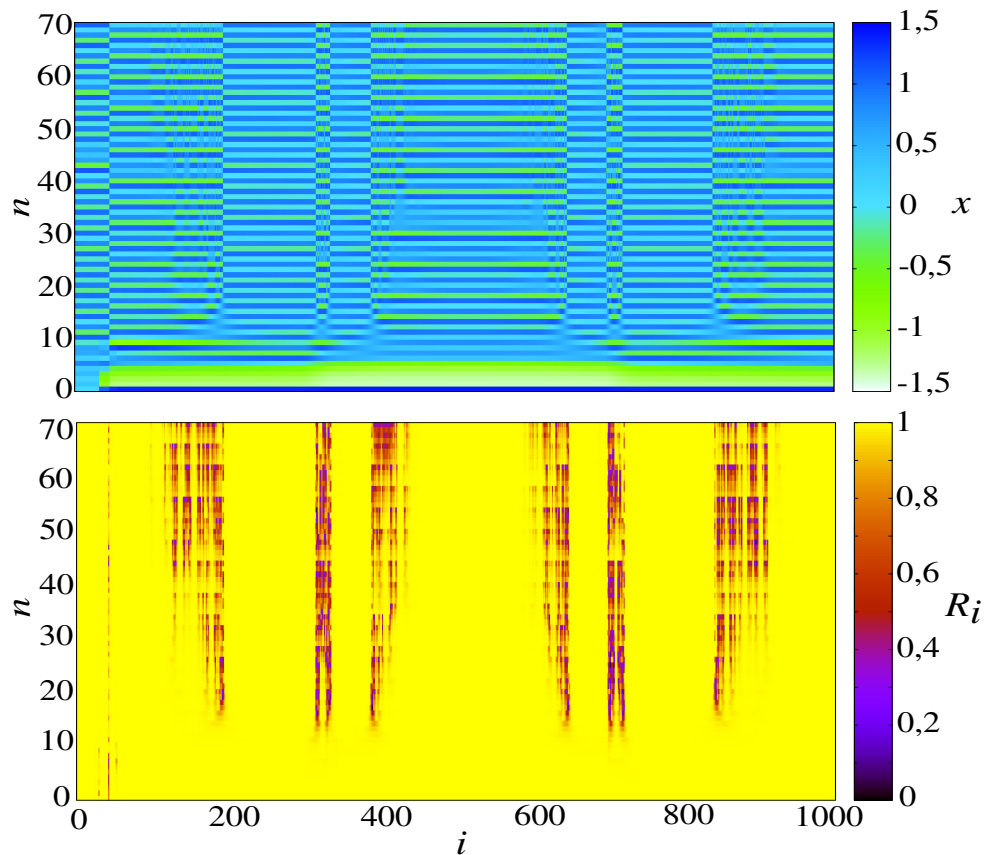
Observamos que para os parâmetros escolhidos, as regiões de coerência e incoerência são mais distintas entre si, se comparadas com aquelas encontradas para a distribuição senoidal de condições iniciais. As regiões sincronizadas possuem sincronização mais aparente, também se

Figura 30 – Perfil espaço-temporal em uma rede de mapas de Rulkov acoplados para as primeiras 70 iterações utilizando os parâmetros  $\alpha = 4,2$ ,  $\psi = -2,80$ ,  $\varepsilon = 0,41$  e  $P = 300$ .



Fonte: O autor.

Figura 31 – Comparação entre o parâmetro de ordem local ao longo das 70 primeiras iterações e o perfil espaço-temporal da rede, utilizando os parâmetros  $\alpha = 4,2$ ,  $\psi = -2,80$ ,  $\varepsilon = 0,41$  e  $P = 300$ .



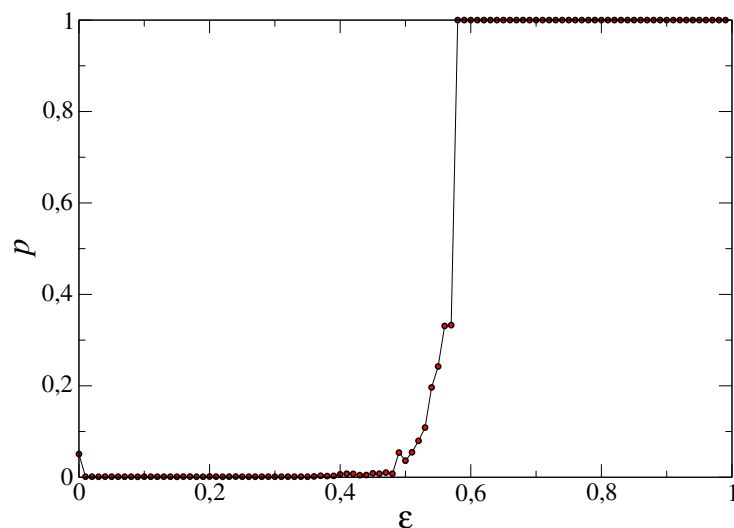
Fonte: O autor.

alternando com regiões de incoerência. Porém percebemos que esse comportamento é mais estável, e também que não há deslocamento dos EQs ao longo das iterações verificadas.

A verificação desse resultado difere também da dinâmica encontrada para a distribuição senoidal de condições iniciais, onde verificamos o deslocamento espacial das regiões de incoerência e sincronização ao decorrer das iterações. Tendo esses resultados, partimos para o cálculo do grau de coerência da rede para a distribuição gaussiana de condições iniciais.

Calculamos o grau de coerência em relação aos mesmos parâmetros que utilizamos para a distribuição senoidal de condições iniciais. A Figura 32 mostra o comportamento do grau de coerência em relação a intensidade de acoplamento da rede  $\varepsilon$ .

Figura 32 – Grau de coerência  $p \times \varepsilon$  para 1000 mapas de Rulkov acoplados usando  $P = 300$  e uma distribuição gaussiana de condições iniciais.



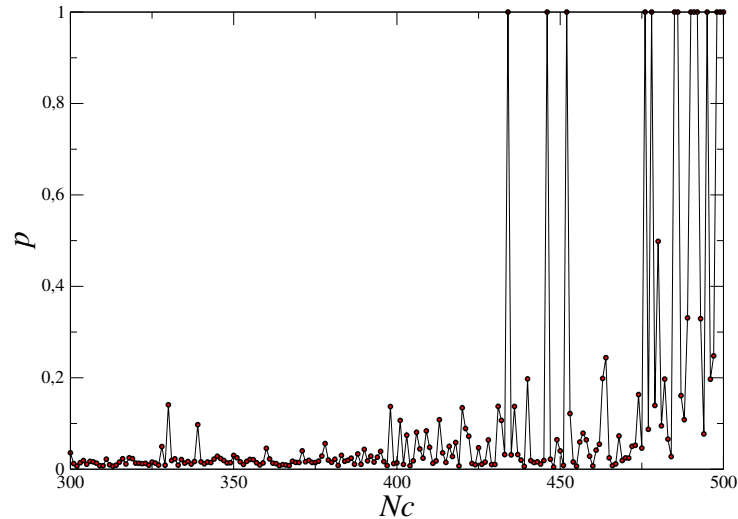
Fonte: O autor.

Vemos um comportamento bastante similar quando comparado com aquele encontrado para a distribuição senoidal das condições iniciais, com  $p$  identificando como principais regiões onde há existência de EQs as regiões entre  $0,45 \leq \varepsilon \leq 0,60$ .

Também investigamos a influência do número de conexões  $N_c$  na existência dos EQs para este perfil de condições iniciais. A Figura 33 mostra um comportamento similar àquele encontrado para o perfil de condições iniciais anterior. Contudo, para o parâmetro  $\varepsilon$  escolhido, verificamos que a rede se torna ligeiramente mais robusta à sincronização, visto que esse fenômeno passa a acontecer com um número de conexões por indivíduo maior, quando comparado

com os resultados anteriores.

Figura 33 – Grau de coerência  $p \times Nc$  para 1000 mapas de Rulkov acoplados usando  $\varepsilon = 0,48$  e uma distribuição gaussiana de condições iniciais.



Fonte: O autor.

Para realizarmos uma investigação mais detalhada dos EQs para a distribuição gaussiana, fizemos também um espaço de parâmetros  $Nc \times \varepsilon$  mostrando como tais valores influenciam o grau de coerência  $p$ , conforme visto na Figura 34. Nela vemos que os EQs aparecem como se realizassem uma interface entre o caos espacial e a sincronização completa, conforme  $\varepsilon$  e  $Nc$  aumentam. Contudo, a alteração na distribuição das condições iniciais do sistema extinguiu a região de EQ que rodeava uma região de caos espacial, quando tínhamos  $100 \leq Nc \leq 350$  e  $\varepsilon$  entre  $0,35 \leq \varepsilon \leq 0,50$ .

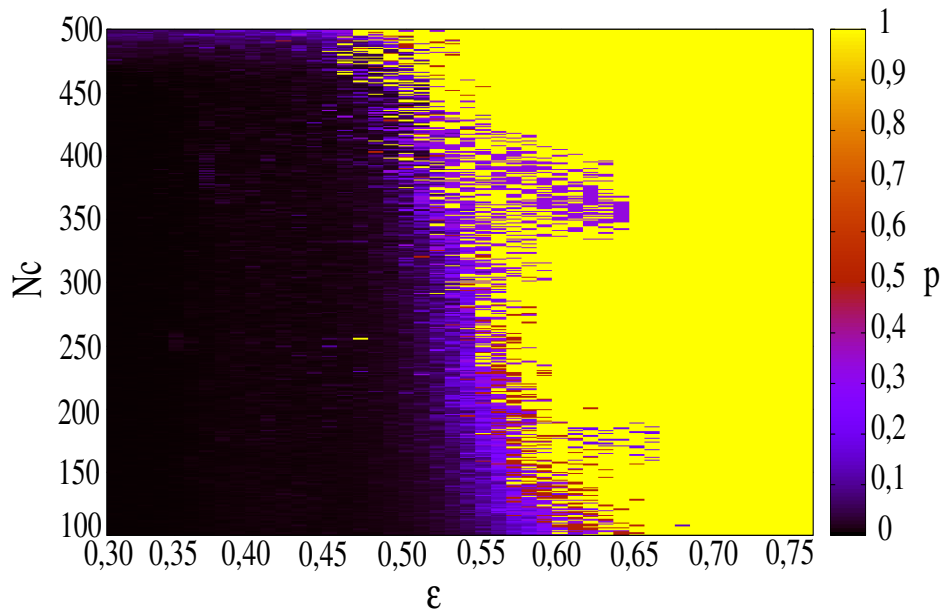
### 5.2.3 Condições iniciais distribuídas aleatoriamente

Para o perfil aleatório de condições iniciais, sorteamos números no domínio  $[0,1]$ , os atribuindo a cada elemento da rede e iterando o sistema 100 vezes. Registramos o retrato espacial da rede ao longo das 100 primeiras iterações, bem como seu retrato espacial no instante da última iteração, conforme é possível observar na Figura 35.

Verificamos que a rede permanece em regime de caos espacial por cerca de 20 iterações, devido a distribuição das condições iniciais. Após isso é possível identificar regiões onde há coexistência de caos espacial e sincronização surgindo e sendo rapidamente suprimidas ao

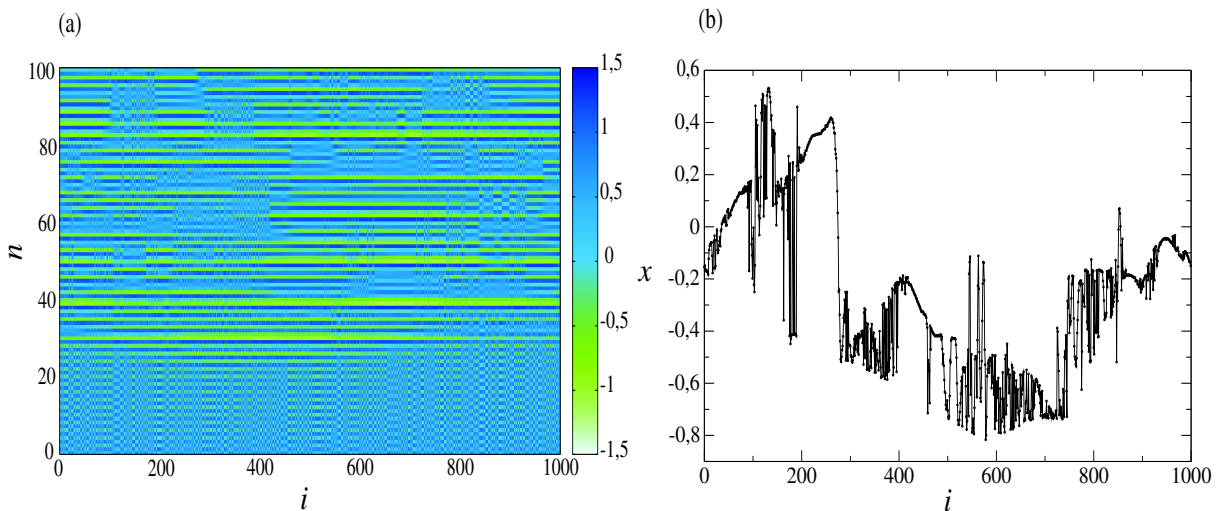


Figura 34 – Espaço de parâmetros  $\varepsilon \times N_c$  para uma rede de 1000 mapas de Rulkov usando um perfil Gaussiano de condições iniciais.



Fonte: O autor.

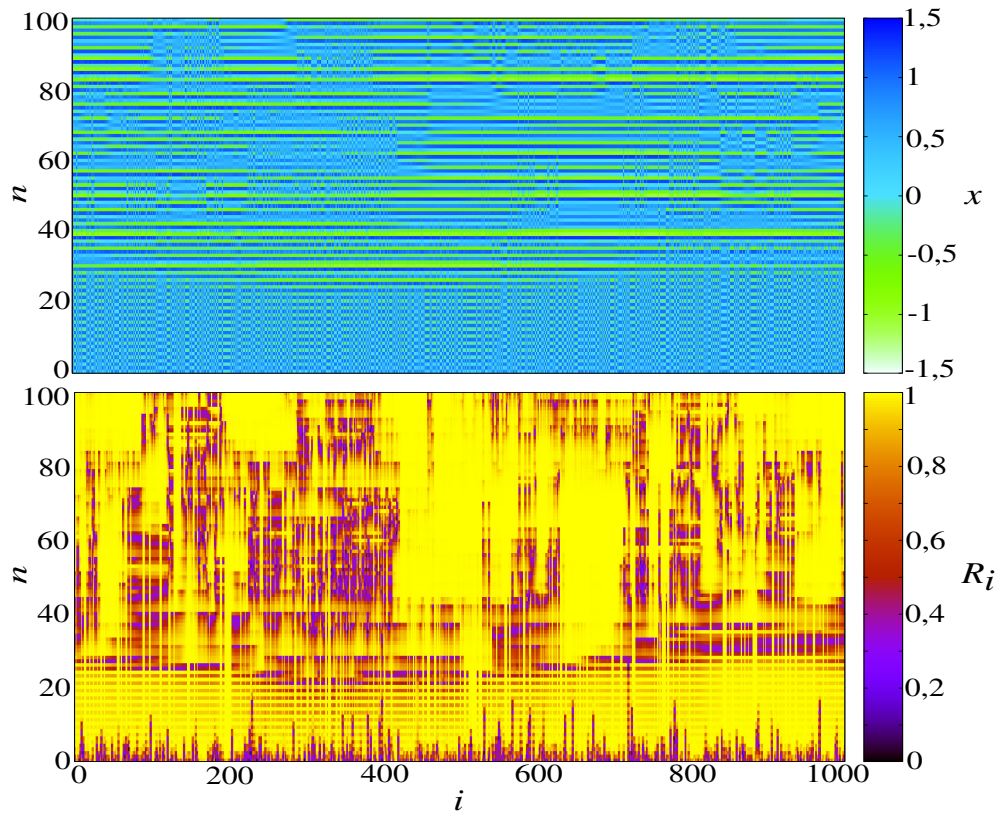
Figura 35 – Perfil espaço-temporal em uma rede de mapas de Rulkov acoplados para as primeiras 100 iterações (a) e o perfil espacial da rede (b) na última iteração, utilizando os parâmetros  $\alpha = 4,2$ ,  $\psi = -2,80$ ,  $\varepsilon = 0,48$  e  $P = 300$ .



Fonte: O autor.

longo das iterações. Vemos que os EQs se deslocam de modo muito mais aparente na rede. A comparação do perfil espaço-temporal da rede com a evolução do parâmetro de ordem local, na Figura 36 nos permite visualizar essa dinâmica.

Figura 36 – Comparação entre o parâmetro de ordem local ao longo das 100 primeiras iterações e o perfil espaço-temporal da rede, utilizando os parâmetros  $\alpha = 4,2$ ,  $\psi = -2,80$ ,  $\varepsilon = 0,48$  e  $P = 300$ .



Fonte: O autor.

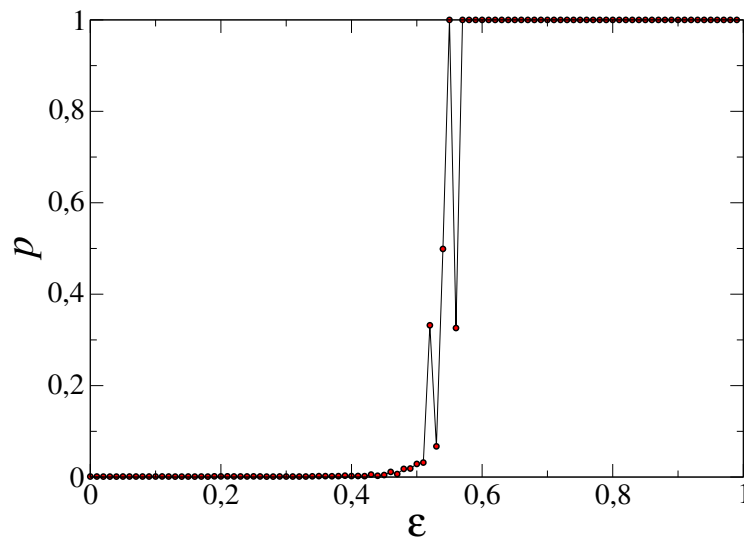
Percebe-se que diferente dos perfis anteriores utilizados, distribuir de forma aleatória as condições iniciais fez com que surgisse um número maior de regiões de incoerência no sistema.

Quando calculamos o grau de coerência para esse caso percebemos que a rede é mais sensível ao crescimento da intensidade de acoplamento  $\varepsilon$ , como vemos na Figura 37. Vemos que entre os valores  $0,50 \leq \varepsilon \leq 0,58$  a rede possui EQ, contudo a sincronização da rede ocorre com  $\varepsilon$  menor quando comparado aos outros casos.

O efeito do número de conexões  $N_c$  também difere bastante dos outros casos estudados quando calculamos o grau de coerência desse parâmetro, visto na Figura 38. Percebemos que a sincronização total da rede pode ocorrer com um número menor de conexões, quando fixados os outros parâmetros.

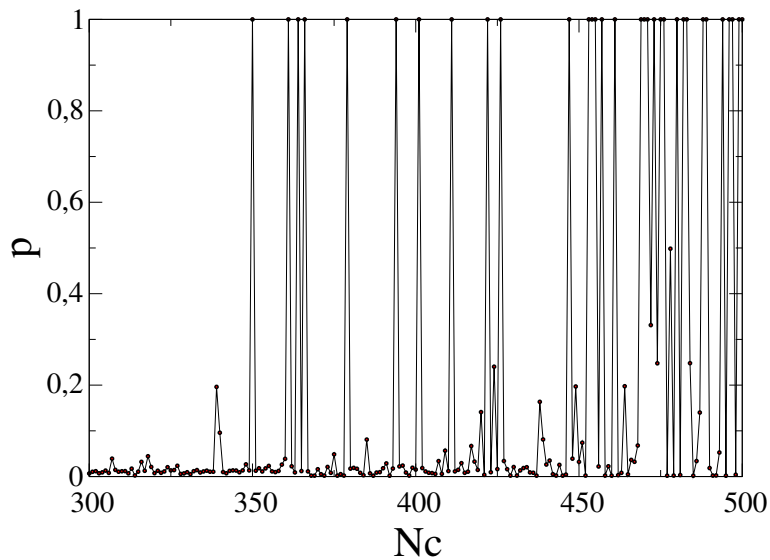
Sabendo das diferenças encontradas no comportamento da rede quando usamos as condições iniciais aleatórias, investigamos também o espaço de parâmetros da rede sob tais condições, conforme mostrado na Figura 39. Nela vemos que os EQs surgem principalmente em

Figura 37 – Grau de coerência  $p \times \varepsilon$  para 1000 mapas de Rulkov acoplados usando  $P = 300$  e uma distribuição aleatória de condições iniciais.



Fonte: O autor.

Figura 38 – Grau de coerência  $p \times$  para 1000 mapas de Rulkov acoplados usando  $\varepsilon = 0,48$  e uma distribuição aleatória de condições iniciais.

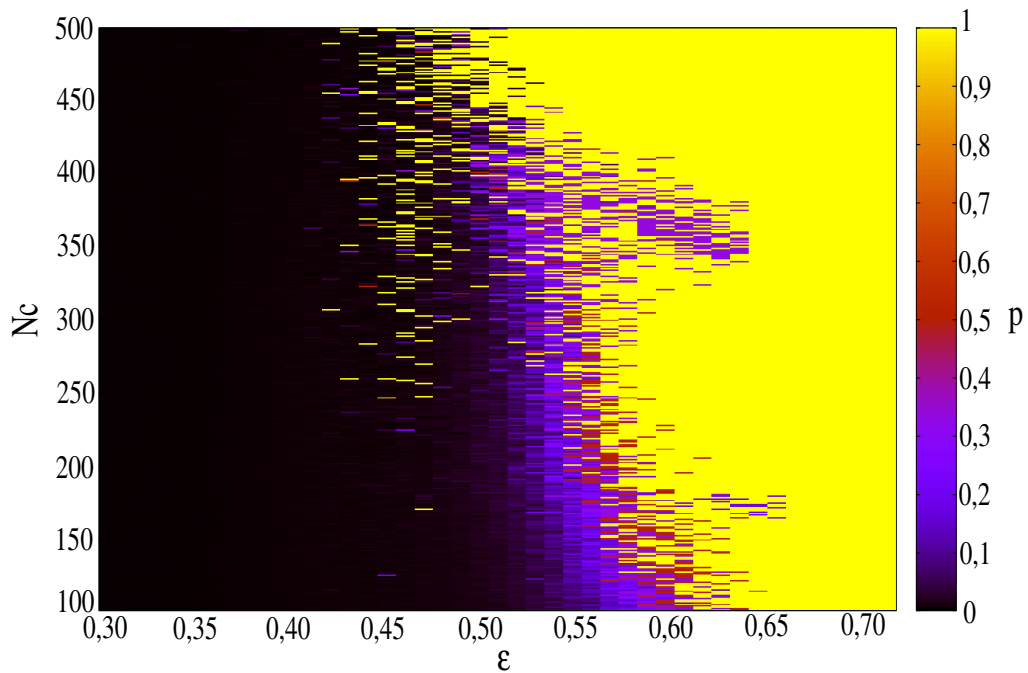


Fonte: O autor.

uma faixa ligeiramente mais restrita de conexões por indivíduo, quando comparada com os dois casos anteriores. Essa faixa compreende  $0,50 \leq \varepsilon \leq 0,62$  e  $100 \leq N_c \leq 450$ , com a transição abrupta de caos espacial para sincronização total da rede ocorrendo a partir de valores de  $N_c$

ligeiramente mais baixos ( $N_c \approx 450$ ). Além disso, nessa mesma faixa de  $N_c$ , surgiu a região compreendida entre  $0,40 \leq \varepsilon < 0,50$  a qual apresenta combinações de  $N_c$  e  $\varepsilon$  que podem induzir a sincronização da rede.

Figura 39 – Espaço de parâmetros  $\varepsilon \times N_c$  para uma rede de 1000 mapas de Rulkov usando um perfil aleatório de condições iniciais.



Fonte: O autor.

Vemos que em geral as três distribuições de condições iniciais apresentam o mesmo comportamento geral, com as faixas de existências de EQs residindo nas regiões intermediárias de  $\varepsilon$  ( $0,40 \leq \varepsilon \leq 0,65$ ) e as principais diferenças de comportamento da existência de EQs sendo oriundas da influência do número de conexões por indivíduo ( $N_c$ ).

## 6 ESTADOS QUIMERA NO MODELO IDEA ACOPLADO

Os EQs também podem surgir quando alteramos a estrutura e a intensidade das conexões da rede ao longo da evolução do sistema. Tal efeito já foi demonstrado com o mapa logístico por Chandran e colaboradores (62), quando os autores induziram EQ em uma rede de mapas logísticos acoplados localmente por meio da adição de ligações não-locais de baixa intensidade. Os EQs foram induzidos tanto na adição da nova topologia quanto na remoção de uma parte das conexões não-locais.

Estados em que há a coexistência de padrões de sincronização e caos espacial atraíram a atenção de pesquisadores que estudam sistemas neuronais. Olmi et al. (63) encontraram EQs em uma população de neurônios descritos pelo modelo integra-dispara com vazamento. A coexistência de grupos de neurônios Morris-Lecar tanto em estado de coerência quanto de incoerência foi identificada por Calim et al. (13). Padrões de sincronização espaço-temporal foram observados em neurônios Hindmarsh-Rose acoplados (14, 15) e em redes de neurônios Hodgkin-Huxley (16). Santos et al. (17) mostrou a existência de domínios de sincronia e caos espacial em uma rede de neurônios integra e dispara exponenciais com adaptação conectados por meio de sinapses químicas (18). Wang et al. (64) mostraram geração de diferentes padrões de EQ por meio da plasticidade dependente do tempo de burst quando comparado com uma rede neuronal estática. Majhi et al. (65) mostraram que o estudo de EQs são direcionados em diversos aspectos das redes neuronais bem como a relevância desses estudos para sistemas físicos e biológicos. Wolfram et al. (66) discutiram as propriedades espectrais dos EQs e destacaram a possibilidade de esse fenômeno ter natureza hipercaótica. EQ são presentes em redes não-lineares, redes cerebrais sem plasticidade (67), e redes do tipo Kuramoto com (68) e sem plasticidade (69).

Uma descrição simples do conceito de plasticidade é a capacidade das sinapses de mudar sua intensidade (70). Modelos fenomenológicos de plasticidade têm se baseado na taxa ou no tempo em que os disparos ocorrem (71). Nos modelos baseados na taxa em que ocorrem os picos de disparos, as frequências de disparos dos neurônios pré e pós sinápticos determinam a intensidade da modificação sináptica. Por outro lado, nos modelos dependentes do tempo dos

spikes, as modificações dependem do tempo de pico de disparo dos neurônios que compartilham a sinapse (72). Para estudar a sincronização neuronal, os modelos com plasticidade que levam em consideração a dependência no tempo dos picos de disparos são utilizados frequentemente. Uma regra peculiar para regular as mudanças sinápticas é a plasticidade dependente do tempo dos “spikes” (PDTS) (73), na qual as mudanças nas conexões sinápticas dependem no tempo dos disparos dos neurônios pré e pós sinápticos. Borges et al. (74) mostraram que a regra PDTS podem gerar ligações preferenciais dos neurônios excitatórios de maior frequência de picos de disparos para os de frequência menor. Uma rica gama de fenômenos foi encontrada nas redes neuronais devido a presença da plasticidade (75). Outra regra de plasticidade é a dependente do tempo de grupos de disparos (76), que é baseada no tempo de início dos bursts entre os neurônios pré e pós sinápticos. Essa plasticidade é capaz de induzir regiões de coerência e incoerência em que cada uma opera em frequências diferentes (77).

Para estudar os EQs na plasticidade neuronal neste capítulo, construímos uma rede regular com plasticidade, composta de neurônios integra-dispara exponenciais com corrente de adaptação (IDEA). Esse modelo (30) possui um mecanismo de disparos exponencial e uma corrente de adaptação que modula a excitabilidade do neurônio dependente dos picos de disparos. Esse modelo de neurônio é capaz de reproduzir diversos padrões de disparos de acordo com os parâmetros de entrada. Nesse capítulo iremos explorar o surgimento de EQs devido a plasticidade dependente do tempo dos picos de disparos.

Nós construímos uma rede neuronal unidimensional composta de  $N = 400$  neurônios IDEA (30) acoplados localmente por meio de sinapses químicas excitatórias, as quais excluem as auto-conexões (78). A condição de contorno da rede é periódica, isto é, o neurônio  $j = 1$  é vizinho do neurônio  $j = 400$  e vice versa. Os neurônios estão conectados com os  $R$  vizinhos mais próximos, indo de acordo com uma topologia regular. Nas nossas simulações, consideramos  $r$  como o número normalizado de vizinhos do neurônio  $j$  na esquerda e na direita, de modo que  $r = R/N$ .

Cada neurônio tem sua dinâmica descrita pelas equações

$$\begin{aligned}
C_m \frac{dV_j}{dt} &= -g_l(V_j - E_l) + g_l \Delta_t \exp\left(\frac{V_j - V_l}{\Delta_t}\right) \\
&\quad -w_j + I_0 + (V_R - V_j) \sum_{k=j-R}^{j+R} g_k M_{jk}, \\
\tau_w \frac{dw_j}{dt} &= a(V_j - E_l) - w_j, \\
\tau_s \frac{dg_j}{dt} &= -g_j,
\end{aligned} \tag{6.1}$$

onde  $V_j$ ,  $w_j$ , e  $g_j$  representam as variáveis da membrana potencial do neurônio, a corrente de adaptação e a condutância sináptica normalizada do neurônio  $j$ , respectivamente. Os parâmetros constantes são:  $C_m$  (capacitância da membrana),  $g_l$  (condutância do vazamento),  $E_l$  (potencial de repouso),  $\Delta_t$  (fator de inclinação),  $I_0$  (corrente constante aplicada),  $V_R$  (potencial sináptico reverso),  $V_{limiar}$  (potencial de reinício),  $\tau_w$  (constante de tempo da adaptação),  $a$  (nível de adaptação do sub-limiar) e  $\tau_s$  (constante de tempo sináptico). Inicialmente, a matriz de adjacência  $M_{jk}$  tem elementos com valores iguais a  $M_{ex}$  quando os neurônios pré ( $j$ ) e pós ( $k$ ) sinápticos estão conectados e 0 quando não estão conectados. As conexões não-nulas ( $M_{ij} = M_{ex}$ ) podem ou não ser alteradas devido a regra de plasticidade, enquanto as conexões nulas ( $M_{ij} = 0$ ) não são alteradas. Nas simulações realizadas, consideramos  $C_m = 200pF$ ,  $E_l = -70mV$ ,  $g_l = 12nS$ ,  $\Delta_t = 2mV$ ,  $V_l = -50mV$ ,  $\tau_w = 300ms$ ,  $a = 2nS$ ,  $\tau_s = 1,5ms$ ,  $I_0 = 500pA$ , e  $V_R = 0mV$ . Quando a membrana potencial do neurônio  $j$  está acima do potencial de limiar ( $V_j > V_{limiar}$ ) (79), consideramos que ocorreu um pico de disparo e as variáveis do neurônio  $j$  são atualizadas. As variáveis  $V_j$ ,  $w_j$ , e  $g_j$  são atualizadas seguindo a seguinte regra de reinício:

$$\begin{aligned}
V_j &\rightarrow V_r, \\
w_j &\rightarrow w_j + b, \\
g_j &\rightarrow 1,
\end{aligned} \tag{6.2}$$

onde  $b$  é o nível de adaptação do sobre-limiar e  $V_r$  é o potencial de reinício. Seus valores são  $V_r = -58mV$  e  $b = 70pA$ . As condições iniciais das variáveis do neurônio são escolhidas aleatoriamente na faixa  $V_j = [-70, -50]mV$  e  $w_j = [200, 400]pA$ . A condutância sináptica de cada neurônio  $j$  ( $g_j$ ) é igual a 0.

## 6.1 ESTADOS QUIMERA INDUZIDOS POR PLASTICIDADE

A plasticidade dependente do tempo entre os “spikes” (PDTs) é um processo que muda as intensidades sinápticas dependendo do tempo de disparo do neurônio. Para cada conexão sináptica, o tempo de pico de disparos do neurônio pré e pós sináptico é identificado como  $t_k$  e  $t_j$ , respectivamente. Quando  $V_k > V_{limiar}$ , ocorre um disparo, de modo que a regra definida para o reinício do sistema é aplicada.

Dependendo da diferença de tempo  $\Delta t_{jk} = t_j - t_k$ , a mudança dos pesos sinápticos é dada por (80, 81)

$$\Delta M_{jk} = \begin{cases} A_1 e^{-\Delta t_{jk}/\tau_1} & \text{se } \Delta t_{jk} \geq 0, \\ -A_2 e^{\Delta t_{jk}/\tau_2} & \text{se } \Delta t_{jk} < 0, \end{cases} \quad (6.3)$$

onde  $A_1, A_2 = 0, 5$ ,  $\tau_1 = 1, 8$  ms, e  $\tau_2 = 6$  ms. Os pesos sinápticos são atualizados de acordo com a regra, onde  $M_{jk} \rightarrow M_{jk} + 10^{-3} \Delta M_{jk}$ . Nas simulações realizadas, o peso sináptico representado por cada elemento de matriz está restrito ao intervalo  $M_{ij} = [0, 1]$ .

### 6.1.1 Diagnóstico dos estados quimera

Para o processo de diagnóstico de EQ utilizamos diretamente o parâmetro de ordem local

$$R_j(t) = \frac{1}{2\delta + 1} \left| \sum_{k=j-\delta}^{j+\delta} e^{i\phi_k(t)} \right|, \quad (6.4)$$

onde  $2\delta + 1$  é o tamanho da região em que o neurônio  $j$  está centralizado ( $\delta = 0, 025N$ ) (82). Visto que os neurônios são diferentes, é impossível observar sincronização total na rede. Graças a isso, o parâmetro de ordem local não acusa valores iguais a 1. Dessa forma, para diagnosticar as regiões em que há sincronização, consideramos  $R_j > 0, 95$ . A fase de cada neurônio  $k$  é definida como

$$\phi_k(t) = 2\pi l + 2\pi \frac{t - t_k^l}{t_k^{l+1} - t_k^l}, \quad (6.5)$$

onde  $t_k^l$  é o tempo em que ocorre o  $l$ -ésimo spike e  $\phi_k(t)$  é definido no intervalo  $[t_k^l, t_k^{l+1}]$ .

Considerando que os EQs são definidos como a coexistência de um grupo de osciladores coerentes com um grupo de osciladores dessincronizados, nossas análises levaram em conside-



ração um limiar para medir a sincronização. Para a dinâmica neuronal a literatura considera um estado coerente quando pelo menos um indivíduo  $j$  com  $R_j > 0,9$  e pelo menos um indivíduo  $k$  com  $R_k < 0,9$  dessincronizado, onde  $j, k \in [1, N]$ .

Para esse capítulo consideramos os EQs que existem ao longo de mais da metade do tempo da simulação, de modo que tal comportamento seja o padrão predominante. A probabilidade de quimera também foi levada em consideração, considerando o número de condições iniciais em que o EQ é o estado predominante. A probabilidade de quimera é definida por

$$P_{quimera} = \frac{N_{quimera}}{N_{ci}}, \quad (6.6)$$

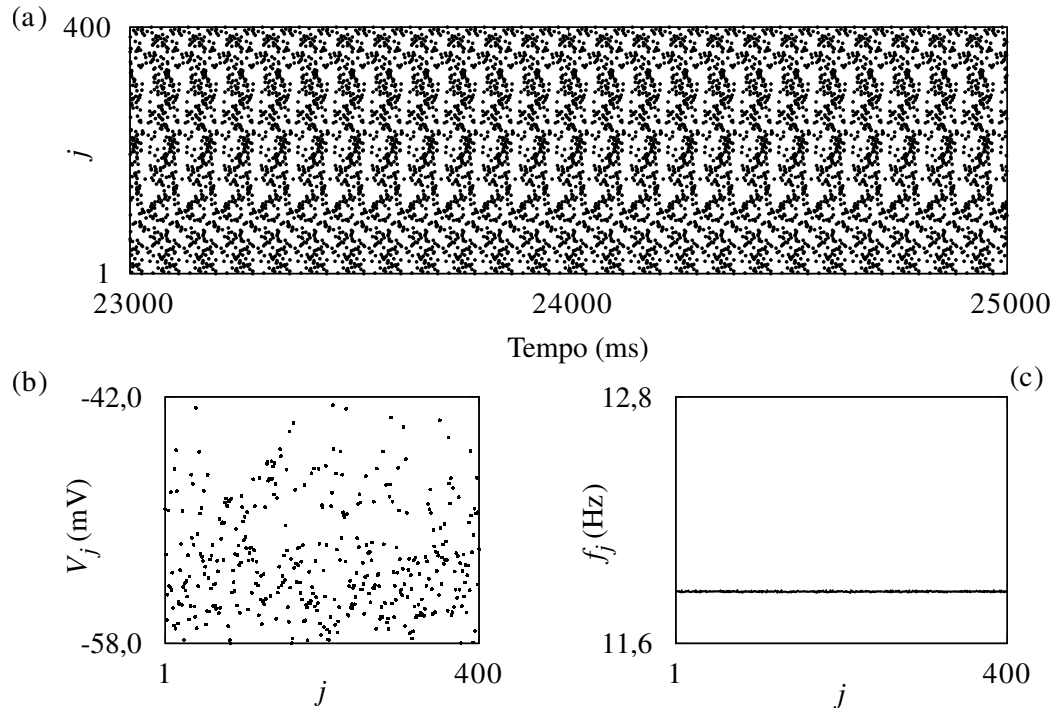
onde  $N_{quimera}$  representa o número de vezes que o EQ foi predominante e  $N_{ci}$  representa o número de simulações realizadas com condições iniciais aleatórias.

Também calculamos a frequência média de disparos de cada neurônio  $j$  por meio do inverso da média dos intervalos entre os disparos. O intervalo entre os picos de disparo é dado pela diferença entre os tempos de disparo de um mesmo neurônio. Dado o  $l$ -ésimo e o  $(l+1)$ -ésimo tempo de pico de disparo do neurônio  $j$ , o  $l$ -ésimo intervalo entre pico de disparo é dado por  $IES_j^l = t_j^{l+1} - t_j^l$ . Quando olhamos em termos da média desse parâmetro, a frequência média de cada neurônio  $j$  é dada por  $f_j = \overline{IES_j}$ . Geralmente nos EQs, as regiões de incoerência possuem uma frequência maior que as regiões em que há sincronização (83,84). Além disso, calculamos também a frequência média para toda a rede usando

$$f_M = N^{-1} \sum_{j=1}^N f_j. \quad (6.7)$$

A Figura 40 mostra a dinâmica neuronal para  $r = 0,001$  e  $M_{ex} = 0,01$  nS. Ela mostra um “raster plot” de  $V_j$  na Figura 40(a) mostra que os picos de disparos estão dessincronizados ao longo do tempo. Já em 40(b) e 40(c) vemos um retrato do potencial de ação e a frequência média dos disparos dos neurônios  $j$  respectivamente. Os picos de disparos incoerentes praticamente não mudam a frequência média dos disparos durante o tempo das simulações que realizamos. Observamos apenas pequenas mudanças na frequência média de disparos de cada neurônio, como consequência da pequena intensidade inicial e quantidade de conexões entre os neurônios.

Figura 40 – Padrão incoerente dos neurônios acoplados. (a) “Raster plot” de  $V_j$  (Tempos de picos), (b) retrato de  $V_j(t)$ , e (c) frequência média de disparos de cada neurônio  $j$  para  $r = 0,01$  e  $M_{ex} = 0,01$ .

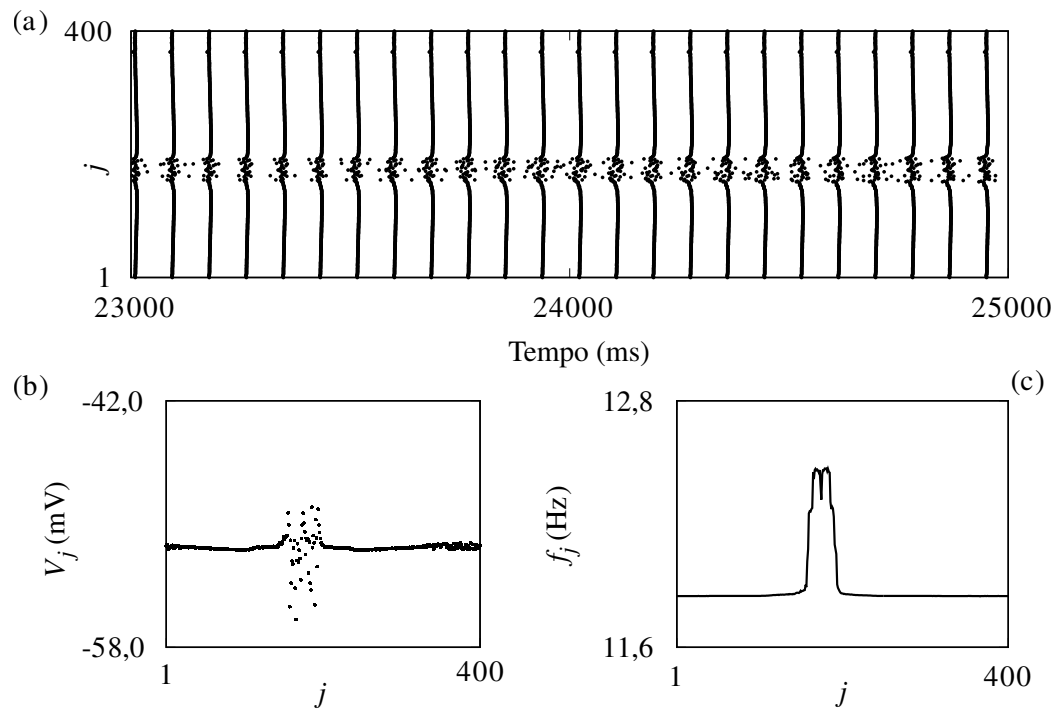


Fonte: O autor.

A Figura 41 mostra a existência de EQ para  $r = 0,1$  e  $M_{ex} = 0,07$  nS. No “raster-plot” (Figura 41(a)) e no retrato do potencial (Figura 41(b)), é possível identificar a coexistência de padrões de coerência e incoerência na rede neuronal. Para a frequência média dos disparos do  $j$ -ésimo neurônio (Figura 41(c)) mostra que a região incoerente possui uma frequência de disparos maior que a região coerente.

Investigamos se a plasticidade sináptica pode influenciar na emergência de EQs. Identificamos regiões no espaço de parâmetros ( $r \times M_{ex}$ ) onde os EQs aparecem e calculamos a probabilidade da sua existência, visando comparar os resultados obtidos com e sem a ação da plasticidade, como mostrado na Figura 42. As Figuras 42(a) e 42(b) mostra os valores de  $r$  e  $M_{ex}$  nos quais os EQs surgem para os casos com e sem PDTS, respectivamente. Nas Figuras 42(c) e 42(d), calculamos a probabilidade de obtermos EQs na rede sem e com a regra de plasticidade sináptica, respectivamente. Consideramos  $t_f = 30$  s com um tempo transiente de  $t_r = 20$ s. Como demonstrado na Figura 42, há um aumento nas regiões de EQ devido ao efeito

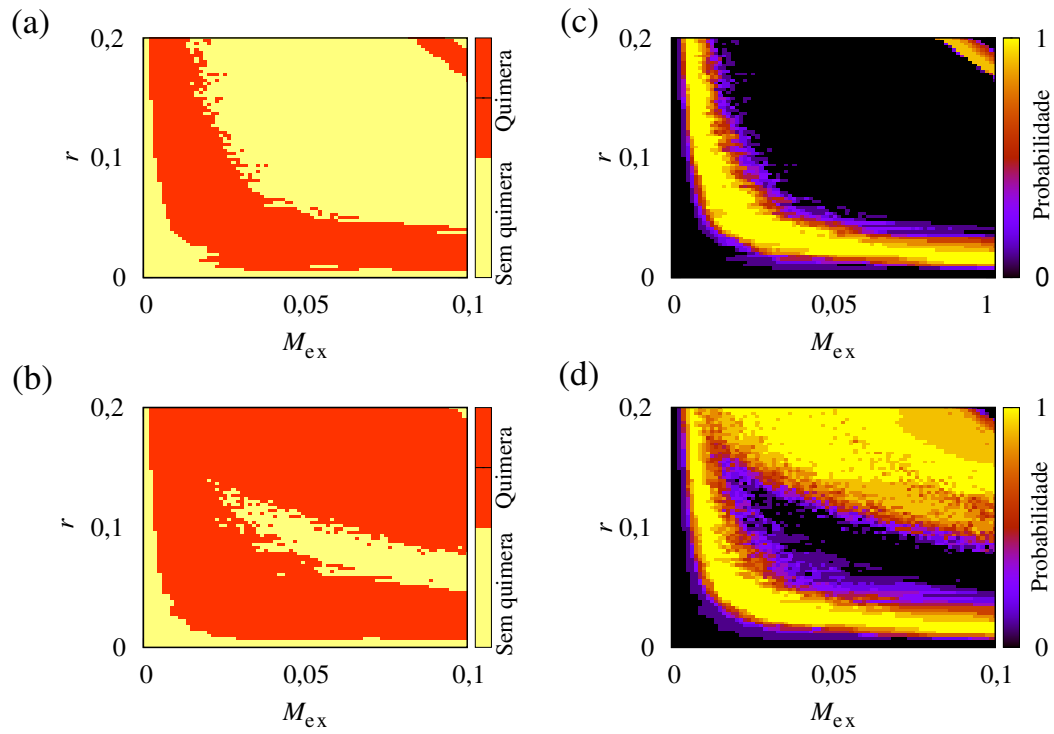
Figura 41 – Estados quimera na rede de neurônios acoplados. (a) “Raster plot” de  $V_j$  (Tempos de picos), (b) retrato de  $V_j(t)$ , e (c) frequência média de disparos de cada neurônio  $j$  para  $r = 0,1$  e  $M_{ex} = 0,07$ .



Fonte: O autor.

da plasticidade. Quando a probabilidade é igual a 1, os EQs aparecem para todas as condições iniciais consideradas.

Figura 42 – Espaço de parâmetros  $r \times M_{ex}$  sem plasticidade [(a) e (c)] e com plasticidade [(b) e (d)]. Consideramos  $N = 400$ ,  $t_f = 30s$ ,  $t_r = 20s$ , e 11 condições iniciais diferentes. Os quadros na esquerda mostram as regiões em vermelho onde há existência de EQs e os quadros na direita mostram a probabilidade de existência de EQs.



Fonte: O autor.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo do trabalho discutimos conceitos de mapas, citando o mapa logístico, de Hénon e de Rulkov, estudando seus comportamentos por meio de séries temporais, diagrama de bifurcações e o cálculo do expoente de Lyapunov, para demonstrar a existência de comportamentos periódicos e caóticos nestes modelos. Também discutimos o conceito de redes complexas, explorando as definições e tipos de rede, conceitos estes necessários para compreender a dinâmica de mapas acoplados. Também mostramos as definições de equações diferenciais e discutimos o modelo integra dispa com adaptação.

Mostramos também o conceito de estado quimera, abordando sua história, as evidências teóricas e experimentais que sustentam este fenômeno, bem como demonstramos também, para fins didáticos, sua existência para uma rede de mapas logísticos acoplados não-localmente. Tendo estes conceitos em mãos chegamos ao objetivo deste trabalho. Verificamos a existência de EQs na rede de mapas de Rulkov unidimensionais. O diagnóstico da existência de EQs nessa rede foi feito por meio do cálculo do grau de coerência, obtido através do parâmetro de ordem local da rede. Esta ferramenta de diagnóstico mostrou que os parâmetros  $\varepsilon$  e  $N_c$  são determinantes no surgimento de EQs, visto que estes surgiram principalmente para faixas onde  $\varepsilon$  possui valores intermediários (entre 0,35 e 0,65), com o número de conexões por indivíduo  $N_c$  variando entre 100 e 400.

Para o modelo IDEA, montamos uma rede de acoplamento não local. Nessa rede os pesos das conexões sinápticas são atualizados de acordo com uma regra de plasticidade dependente do tempo entre os picos dos disparos. Verificamos que a plasticidade dependente do tempo dos picos dos disparos aumentou a probabilidade de existência de EQs.

## REFERÊNCIAS

- 1 CATTANI, M.; CALDAS, I. L.; SOUZA, S. L.; IAROSZ, K. C. Deterministic Chaos Theory: Basic Concepts. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 39, n. 1, 2017.
- 2 NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: Mecânica**. 5. ed. São Paulo: Blucher. 2013.
- 3 MACHADO, K. D. **Equações Diferenciais Aplicadas: Volume 1**. 1. ed. Ponta Grossa: Toda Palavra. 2012.
- 4 JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics**. 2. ed. Nova Iorque: John Wiley and Sons. 1999.
- 5 TIPLER, P. A.; Llewellyn, R. A. **Física Moderna**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC. 2014.
- 6 SANTOS, M. S. **Formação de Estados Quimera em Diferentes Acoplamentos**. 2014. Dissertação. (Programa de Pós Graduação em Ciência/Física) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2014.
- 7 ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **Chaos, An Introduction to Dynamical Systems**. 1. ed. Nova Iorque: Springer-Verlag, 1996.
- 8 MAY, R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. **Nature** v. 261, n. 459-67, 1976.
- 9 MATA, A. S. Complex Network: a Mini-review. **Brazilian Journal of Physics**. v. 50, p. 658–672, 2020.
- 10 LAMEU, E. L. **Supressão da Sincronização de Disparos Neurais em Aglomerados de Redes de Livre Escala**. 2013. Dissertação. (Programa de Pós-Graduação em Ciências/Física) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2013.
- 11 PIKOVSKY, A.; ROSEMBLUM, M.; KURTHS, J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. **New York: Cambridge University Press**, v. 12, 2001.
- 12 ABRAMS, D. M.; STROGATZ, S. H. Chimera States for Coupled Oscillators. **Physical Review Letters**. v. 93, n. 17, 2004.
- 13 CALIM, A.; HÖVEL, P.; OZER, M.; UZUNTARLA, M. Chimera states in networks of type-I Morris-Lecar neurons. **Physical Review E**. v. 98, n. 062217, 2018.
- 14 HIZANIDIS, J.; KOUVARIS, N. E.; LÓPEZ, G. Z.; GUILERA, A. D.; ANTONOPOULOS, CHRIS. G. Chimera-like States in Modular Neural Networks. **Scientific Reports**. v. 6, n. 19845, 2016.
- 15 SANTOS, M. S.; SZEZECH, J. D.; BORGES, F. S.; IAROSZ, K. C.; CALDAS, I. L.; BATISTA, A. M.; VIANA, R. L.; KURTHS, J. Chimera-like states in a neuronal network model of the cat brain. **Chaos, Solitons and Fractals**. v. 101, n. 86, 2017.
- 16 GLAZE, T. A.; LEWIS, S.; BAHAR, S. Chimera states in a Hodgkin-Huxley model of thermally sensitive neurons. **Chaos**. v. 26, n. 083119, 2016.

- 17 SANTOS, M. S.; PROTACHEVICZ, P. R.; IAROSZ, K. C.; CALDAS, I. L.; VIANA, R. L.; BORGES, F. S. REN, H. P-; BATISTA, A. M.; GREBOGI, C. Spike-burst chimera states in an adaptive exponential integrate-and-fire neuronal network. **Chaos**. v. 29, n. 043106, 2019.
- 18 SANTOS, M. S.; PROTACHEVICZ, P. R.; CALDAS, I. L.; IAROSZ, K. C.; VIANA, R. L.; SZEZECH Jr. J. D.; SOUZA, S. L. T.; BATISTA, A. M. Spiral wave chimera states in regular and fractal neuronal networks. **Journal of Physics: Complexity**. v. 2, n. 1, 2021.
- 19 ARSHAD, M. H; KASSAS, M.; HUSSEIN, A. E.; ABIDO, M. A. A Simple Technique for Studying Chaos Using Jerk Equation with Discrete Times Sine Map. **Applied Sciences**. v. 437, n. 11(1), 2021.
- 20 ACHO, L. A discrete-time chaotic oscillator based on the logistic map: A secure communication scheme and a simple experiment using Arduino. **ScienceDirect: Journal of the Franklin Institute**. v. 352, n. 3113-3121, 2015.
- 21 GABRICK, E. C. **Análise da faixa dinâmica em redes neuronais através de autômatos celulares**. 2021. Dissertação. (Programa de Pós-Graduação em Ciências/Física) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2021.
- 22 BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 11ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020.
- 23 TÉL, T.; GRUIZ, M. **Chaotic Dynamics: An introduction based on classical mechanics**. 1ª ed. New York: Cambridge University Press, 2006.
- 24 SOUZA, H. F .A. **Sistemas Dinâmicos e Teoria do Caos: Uma Abordagem a partir do Mapa Logístico e o Sistema de Lorenz**. 2021. Dissertação. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Amapá, 2021.
- 25 HÉNON, M. A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor. **Communications in Mathematical Physics**, v. 60, n. 69-77, (1976).
- 26 CASAS, G. A. **Efeitos causados pela modulação de parâmetros no mapa de Hénon**. 2011. Dissertação. (Programa de pós-graduação em Física - PPGF) - Universidade do Estado de Santa Catarina. 2011.
- 27 RULKOV, N. F. Model of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map, **Physical Review E**, v. 65, n. 041922, 2001.
- 28 SAYARI, E.; GABRICK, E. C.; BORGES, F. B.; CRUZINIANI, F. E.; PROTACHEVICZ, P. R.; IAROSZ, K. C.; SZEZECH Jr, J. D.; BATISTA, A. M. Analyzing bursting synchronization in structural connectivity matrix of a human brain under external pulsed currents. **Chaos**. v. 33, n. 033131, 2023.
- 29 VIANA, R. L.; BATISTA, A. M.; BATISTA, C. A. S.; PONTES, J. C. A.; SILVA, F. A. S.; LOPES, S. R. Bursting synchronization in networks with long-range coupling mediated by a diffusing chemical substance. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 17, n. 2924-2942, 2012.

- 30 BRETTE, R.; GERSTNER, W. Adaptive exponential integrate-and-fire model as an effective description of neuronal activity. **Journal of Neurophysiology**. v. 94, n. 3637-3642, 2005.
- 31 BRETTE, R. What Is the Most Realistic Single-Compartment Model of Spike Initiation? **PLoS Computational Biology**. v. 11(4), n. 1004114, 2015.
- 32 GERSTNER, W.; KISTLERM, W. M.; NAUD, R.; PANINSKI, L. **Neuronal Dynamics: From single neurons to networks and models of cognition**. 1. ed. New York: Cambridge, 2014.
- 33 MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos complexos**. 2ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014.
- 34 HORST, M. V. D.; COFFÉ, H. How Friendship Network Characteristics Influence Subjective Well-Being. **Social Indicators Research**, v. 107, n. 509-529, 2012.
- 35 MATEO, C.; PRETTICO, G.; GÓMEZ, T.; COSENT, R.; GANGALE, F.; FRÍAS, P.; FULLI, G. European representative electricity distribution networks. **Electrical Power and Energy Systems**. v. 99, n. 273-280, 2018.
- 36 ALBERT, R.; JEONG, H.; BARABÁSI, A. L. Diameter of the World-Wide Web. **Nature**, v. 401, n. 130-131, 1999.
- 37 CRUTCHFIELD, J. P.; KANEKO, K. Phenomenology of Spatiotemporal Chaos, **Direction in Chaos**, v. 1, p. 272-353, 1987.
- 38 VIANA, R. L. Introdução às Redes de Mapas Acoplados - Modelos para o Estudo de Caos Espaço-Temporal. São Paulo: Minicurso Pós Graduação IFUSP, [2001].
- 39 XAVIER, L. S. S. **Acoplamento local de atividade oscilatória por estimulação elétrica profunda em um modelo de ictogênese**. 2020. Dissertação. (Programa de Pós-Graduação em Ciências Biológicas - Fisiologia e Farmacologia do Instituto de Ciências Biológicas) - Universidade Federal de Minas Gerais. 2020.
- 40 JUNGE, L.; PARLITZ, U. Synchronization and control of coupled Ginzburg-Landau equations using local coupling. **Physical Review E**. v. 61, n. 4, 2000.
- 41 BATISTA, C. A. S.; VIANA, R. L.; BATISTA, A. M. Chimera states in networks under external periodic perturbations. **Indian Academy of Sciences Conference Series**. v.3, n. 1, p. 380-385, 2020.
- 42 KAPITANIAK, T. KUZMA, P.; WOJEWODA, J.; CZOLCZYNSKI, K.; MAISTRENKO, Y. Imperfect chimera states for coupled pendula. **Scientific Reports**. v. 4, n. 6379. 2014.
- 43 KOZYREFF, G.; VLADIMIROV, A. G.; MANDEL, P. Global Coupling with Time Delay in an Array of Semiconductor Lasers. **Physical Review Letters**. v. 85, n. 18, 2000.
- 44 SCHMIDT, L.; SCHONLEBER, K.; KRISCHER, K.; MORALES, V. G. Coexistence of synchroni and incoherence in oscillatory media under nonlinear global coupling. **CHAOS**. v. 24, n. 013102, 2014.
- 45 ERDÖS, P.; RÉENYI, A. On the evolution of random graphs. **Publication of Institute of Mathematics of Hungarian Academy of Sciences**, v. 5, p. 57-60, 1959.



- 46 NEWMAN, M. E. J.; WATTS, D. J. S. Scaling and percolation in the small-world network model. **Physical Review E**, v. 60, n. 6, 1999.
- 47 BARABÁSI, A. L.; ALBERT, R. Emergence of Scaling in Random Networks. **Science**. v. 286, n. 5439, p. 509-512, 1999.
- 48 LÓPEZ, A. J. E. **Estudo da dinâmica de epidemias em redes aleatórias**. Dissertação (Mestrado em Ciências/Física) - Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, 2009.
- 49 MILGRAM, S. The small world problem. **Psychology Today**. v. 2, p. 60-67. 1967.
- 50 STROGATZ, S. H.; WATTS, D. J. Collective dynamics of 'small-world' networks. **Nature**. v. 393, p. 440-442, 1998.
- 51 CH'NG, E. Local Interactions and the Emergence of a Twitter Small World Network. **Social Networking**, v. 4, n. 2, 2015.
- 52 BARABÁSI, A. L.; BONABEAU, E. Scale-free Networks. **Scientific American**. v. 288, n. 5, p. 60-69, 2003.
- 53 SANTOS, V. **Fractalidade e Bacia de Atração de Estados Quimera**. 2019. Tese. (Programa de Pós-Graduação em Ciências/Física) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2019.
- 54 PROTACHEVICZ, P. R. **Padrões de disparos em redes neuronais**. 2020. Tese (Doutorado em Ciências/Física) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2020.
- 55 BORGES, R. R.; IAROSZ, K. C.; BATISTA, A. M.; CALDAS, I. L.; BORGES, F. S.; LAMEU, E. L. Sincronização de disparos em redes neuronais com plasticidade sináptica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**. v. 37, n. 2, 2015.
- 56 KURAMOTO, Y.; BATTOGTOKH, D. Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators. **Nonlinear Phenomena in Complex Systems**. v. 4, n. 5, 2002.
- 57 CARVALHO, P. R.; SAVI, P. A.; Synchronization and chimera state in a mechanical system. **Nonlinear Dynamics**. v. 102:907. n. 925. 2020.
- 58 ABRAMS, D. M.; PANAGGIO, M. J. Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators. **Nonlinearity**. v. 28, n. 3. 2015.
- 59 OMEL'CHENKO, O. E. Coherence-incoherence patterns in a ring of non-locally coupled phase oscillators. **Nonlinearity**. v. 26, n. 9. 2013.
- 60 RATTENBORG, N. C.; AMLANER, C. J.; LIMA, S. L. Behavioral, neurophysiological and evolutionary perspectives on unihemispheric sleep. **Neuroscience and Biobehavioral Reviews**. v. 24, n. 817-842. 2000.
- 61 OCAMPO-ESPINDOLA, J. L. Weak Chimeras in Modular Electrochemical Oscillator Networks. **Frontiers in Applied Mathematics and Statistics**. v. 5, n. 38. 2019.
- 62 CHANDRAN, P.; GOPAL, R.; CHANDRASEKAR, V. K.; ATHAVAN, N. Chimera states in coupled logistic maps with additional weak nonlocal topology. **Chaos**. v. 29, n. 053125, 2019.

- 63 OLMI, S.; POLITI, A.; TORCINI, A. Collective chaos in pulse-coupled neural networks. **Europhysics Letters**. v. 92, n. 6, 2010.
- 64 WANG, Z.; BARUNI, S.; PARASTESH, F.; JAFARI, S.; GOSH, D.; PERC, M.; HUSSAIN I. Chimeras in an adaptive neuronal network with burst-timing-dependent plasticity. **Neurocomputing**. v. 406, n. 117-126, 2020.
- 65 MAJHI, S.; BERA, B. K.; GOSH, D.; PERC, M. Chimera states in neuronal networks: A review. **Physics Life Reviews**. v. 28, n. 100-121, 2019.
- 66 WOLFRAM, M.; OMEL'CHENCO, O. E.; YANCHUK, S.; MAISTRENKO, Y. L. Spectral properties of chimera states. **Chaos**. v. 21, n. 013112, 2011.
- 67 WANG, Z.; LIU, Z. A brief review of chimera state in empirical brain networks. **Frontiers in Physiology**. v. 11, n. 1-16, 2020.
- 68 BOTHA, A. E.; ANSARIARA, M.; EMADI, S.; KOLAHCHI, M. R. Chimera patterns of synchrony in a frustrated array of Hebb synapses. **Frontiers in Computational Neuroscience**. v. 16, n. 1-15, 2022.
- 69 LUCCHETTI, A.; JENSEN, M. H.; HELTBERG, M. L. Emergence of chimera states in a neuronal model of delayed oscillators. **Physical Review Research**. v. 3, n. 0133041, 2021.
- 70 CITRI, A.; MALENKA, R. C. Synaptic plasticity: Multiple forms functions and mechanisms. **Neuropsychopharmacology**. v. 33, n. 28-31, 2008.
- 71 GERSTNER, W. KISTLER, W. **Spiking Neuron Models: Single Neurons, Populations, Plasticity**. 1. ed. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- 72 MORRISON, A.; DIEMANN, M.; GERSTNER, W. Phenomenological models of synaptic plasticity based on spike time. **Biological Cybernetics**. v. 98, n. 459-478, 2008.
- 73 BI, G. -Q.; POO, M. -M. Synaptic modification by correlated activity: Hebb's postulate revisited. **Annual Review of Neuroscience**. v. 24, n. 139-166, 2001.
- 74 BORGES, R. R.; BORGES, F. S.; LAMEU, E. L.; BATISTA, A. M.; IAROSZ, K. C.; ANTONOPUOLOS, C. G.; BAPTISTA, M. S. Spike timing-dependent plasticity induces non-trivial topology in the brain. **Neuronal Networks**. v. 88, n. 58-64, 2017.
- 75 BORGES, R. R.; BORGES, F. S.; LAMEU, E. L.; PROTACHEVICZ, P. R.; IAROSZ, K. C.; CALDAS, I. L.; VIANA, R. L.; MACAU, E. E. N.; BAPTISTA, M. S.; GREBOGI, C.; BATISTA, A. M. Synaptic plasticity and spike synchronization in neuronal networks. **Brazilian Journal of Physics**. v. 47, n. 678-688, 2017.
- 76 BUTTS, D. A.; KANOLD, P. O.; SHATZ, J. C. A burst-based 'Hebbian' learning rule at retinogeniculate synapses links retinal waves to activity-dependent refinement. **PLoS Biology**. v. 5, n. 61, 2007.
- 77 PALUDO, J. A.; PROTACHEVICZ, P. R.; VIANA, R. L.; BATISTA, A. M. Effects of burst-timing-dependent plasticity on synchronous behaviour in neuronal network. **Neurocomputing**. v. 436, n. 126-135, 2021.

- 78 PROTACHEVICZ, P. R.; IAROSZ, K. C.; CALDAS, I. L.; ANTONOPOULOS, C. G.; BATISTA, A. M.; KURTHS, J. Influence of autapses on synchronization in neural networks with chemical synapses. **Frontiers in Systems Neuroscience**. v. 14, n. 91, 2020.
- 79 NAUD, R.; MARCILLE, N.; CLOPATH, C.; GERSTNER, W. Firing patterns in the adaptive exponential integrate-and-fire model. **Biological Cybernetics**. v. 99, n. 335-347, 2008.
- 80 BI, G. Q.; POO, M. M. Synaptic modifications in cultured hippocampal neurons: Dependence on spike timing, synaptic strength, and postsynaptic cell type. **The Journal of Neuroscience**. v. 18, n. 10464-10472, 1998.
- 81 POPOVYCH, O. V.; YANCHUK, S.; TASS, P. A. Self-organized resistance of oscillatory neural networks with spike timing-dependent plasticity. **Scientific Reports**. v. 3, n. 2926, 2013.
- 82 OMEL'CHENKO, I.; MAISTRENKO, Y.; HÖVEL, P.; SCHÖLL, E. Loss of coherence in dynamical networks: Spatial chaos and chimera states. **Physical Reviews Letters**. v. 106, n. 234102, 2011.
- 83 BORGES, F. S.; PROTACHEVICZ, P. R.; LAMEU, E. L.; BONETTI, R. C. IAROSZ, K. C.; CALDAS, I. L.; BAPTISTA, M. S.; BATISTA, A. M. Synchronized firing patterns in a random network of adaptive exponential integrate-and-fire neuron model. **Neural Networks**. v. 90, n. 1-7, 2017.
- 84 WOLFRUM, M.; OMEL'CHENKO, O. E. Chimera states are chaotic transients. **Physical Review E**. v. 84, n. 015201, 2011.
- 85 LAMEU, E. L.; MACAU, E. E. N.; BORGES, F. S.; IAROSZ, K. C.; CALDAS, I. L.; BORGES, R. R.; PROTACHEVICZ, P. R.; VIANA, R. L.; BATISTA, A. M. Alternations in brain connectivity due to plasticity and synaptic delay. **The European Physical Journal Special Topics**. v. 227, n. 673-682, 2018.
- 86 LAING, C. R. Chimera states in heterogeneous networks. **Chaos**. v. 19, n. 013113, 2009.
- 87 LI, B.; SAAD, D. Chimera-like states in structure heterogeneous networks. **Chaos**. v. 27, n. 043109, 2017.
- 88 HUO, S.; TIAN, C.; KANG, L.; LIU, Z. Chimera states of neuron networks with adaptive coupling. **Nonlinear Dynamics**. v. 96, n. 75-86, 2019.