UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE
CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

AUGUSTO RANGEL SELSKI

OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA: FUNDAMENTOS TEÓRICOS POR MEIO DE UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM

PONTA GROSSA
2023

AUGUSTO RANGEL SELSKI

OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA: FUNDAMENTOS TEÓRICOS POR MEIO DE UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, área de concentração: Formação de professores e Ensino de Ciências, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Luciane Grossi
Coorientadora: Marta Burda Schastai

PONTA GROSSA
2023

Selski, Augusto Rangel

S468 Os três mundos da Matemática: fundamentos teóricos por meio de uma trajetória hipotética de aprendizagem / Augusto Rangel Selski. Ponta Grossa, 2023.

113 f.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática - Área de Concentração: Formação de Professores e Ensino de Ciências), Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientadora: Profa. Dra. Luciane Grossi.

Coorientadora: Profa. Dra. Marta Burda Schastai.

1. Pensamento matemático. 2. Três mundos da Matemática.. 3. Trajetória hipotética de aprendizagem. I. Grossi, Luciane. II. Schastai, Marta Burda. III. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Formação de Professores e Ensino de Ciências. IV.T.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Maria Luzia Fernandes Bertholino dos Santos- CRB9/986

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
Av. General Carlos Cavalcanti, 4748 - Bairro Uvaranas - CEP 84030-900 - Ponta Grossa - PR - https://uepg.br

TERMO

TERMO DE APROVAÇÃO

AUGUSTO RANGEL SELSKI

"OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA: FUNDAMENTOS TEÓRICOS POR MEIO DE UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM"

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Setor de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Ponta Grossa 29 de março de 2023.

Membros da Banca:

Profa. Dra. Luciane Grossi - (UEPG) – Presidente

Profa. Dra. Angêla Marta Pereira das Dores Savioli - (UEL)

Profa. Dra. Célia Finck Brandt – (UEPG)

Documento assinado eletronicamente por **ANGELA MARTA PEREIRA DAS DORES SAVIOLI**, **Usuário Externo**, em 29/03/2023, às 15:55, conforme Resolução UEPG CA 114/2018 e art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

Documento assinado eletronicamente por **Luciane Grossi**, **Coordenador(a) do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática**, em 30/03/2023, às 08:04, conforme Resolução UEPG CA 114/2018 e art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

Documento assinado eletronicamente por **Celia Finck Brandt**, **Professor(a)**, em 30/03/2023, às 08:29, conforme Resolução UEPG CA 114/2018 e art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

Documento assinado eletronicamente por **Adriana Aparecida Telles**, **Secretário(a)**, em 30/03/2023, às 16:04, conforme Resolução UEPG CA 114/2018 e art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

A autenticidade do documento pode ser conferida no site https://sei.uepg.br/autenticidade informando o código verificador **1351259** e o código CRC **297A27C9**.

23.000008186-2 1351259v2

Dedico esta dissertação aos meus Pais Angela e Mauro, ao meu filho Angelo Miguel e à minha esposa Bruna, com carinho à vocês, o meu EU TI AMO.

“Deixa Deus sonhar em ti, não tenhas medo...Verás um caminho difícil demais, Verás tempestades que te assustarão, mas quando o sonho é de Deus ninguém destruirá, se ele prometeu também cumprirá...” (FREI GILSON).

AGRADECIMENTOS

À DEUS que é PAI, pelo dom da vida e que me fez sempre acreditar que o impossível se tornou possível e que as tempestades da vida são passageiras quando se tem FÉ.

À JESUS MISERICORDIOSO que é FILHO, e que sempre ficou em vigília por mim, cuidando, zelando, protegendo, por suas Santas Chagas Gloriosas.

Ao ESPÍRITO SANTO que com seus sete dons me proporcionou nas horas de angústia, TEMOR A DEUS, FORTALEZA, CONSELHO.

À VIRGEM MARIA que sempre intercedeu e me carregou no colo em todos os momentos.

À SÃO JOSÉ dormindo, que sempre SONHOU os meus sonhos e aflições e PROVIDENCIOU.

AOS ANJOS e SANTOS, em especial os que tenho devoção: São Miguel e São Pio de Pietrelcina.

À MINHA ESPOSA, Bruna Gonçalves e MEU FILHO Ângelo Miguel G. Selski que mesmo nas minhas ausências, mostraram que o Amor tudo pode, tudo suporta, tudo vence e que somos uma FAMÍLIA.

AOS MEUS PAIS Angela Maria Rodrigues e Mauro Rogerio Selski os quais sempre lutaram por mim, acreditando que sempre poderia eu chegar mais longe e me ensinaram aquilo que têm mais valor, o caráter, a humildade e a Família.

AOS MEUS IRMÃOS, Renata, André, Maura e Julia os quais cada um do seu jeitinho torcendo por mim, pela minha conquista e sonhos, fosse intercedendo, escutando meus desabafos ou até mesmo pelas minhas ausências. Aos demais familiares que positivamente torceram pela minha conquista.

À MINHA AMIGA E COORIENTADORA professora Dra. Marta Burda Schastai, que desde o início de nossa amizade, me apoiou, incentivou e nunca desistiu de mim, mesmo nas suas limitações me estendeu a mão dizendo: levanta-se e vai, a qual tenho verdadeira admiração como SER HUMANO, A PROFESSORA.

À MINHA AMIGA, ORIENTADORA Dra. Luciane Grossi que desde a graduação teve paciência com esse meu jeito meio “apressado” de ser, que me oportunizou fazer aquilo que para mim era um sonho, participar de um Programa de Mestrado e que ajudou a chegar até onde cheguei e além.

À MINHA PROFESSORA Dra. Ana Lucia P. Baccon a quem devo meus primeiros passos como pesquisador quando me aceitou no Programa de Iniciação Científica e quando em uma caminhada matinal me encontrou e disse: “você tem capacidade e deveria estar em um Programa de Pós-graduação” despertando novamente meus sonhos.

ÀS PROFESSORAS da banca Dra.Ângela Marta Pereira das Dores Savioli, Dra. Daniele Peres da Silva Martelozo e Dra. Célia Finck Brandt, as quais foram muito gentis e compreensivas em aceitar o nosso convite e nos proporcionar suas contribuições e conhecimentos para este trabalho.

AO PPGCEM pela grande oportunidade de participar e compor este Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática e me permitir fazer a minha história como pesquisador.

À TODOS OS MEUS colegas e amigos do PPGCEM em especial aqueles que se mostraram irmãos, que dividiram minhas angústias, desabafos, risadas e brincadeiras, que não só neste pequeno espaço de tempo, mas para vida toda: Alessandro, Keila, Alisson, Ana, Andriele,Eduarda.

AOS MEUS AMIGOS desde a infância ou que conheci durante esta caminhada da vida, os quais sempre todo ouvidos, me apoiaram com seus conselhos, palavras de incentivo ou até mesmo de suas experiências em especial: Willian, Fernando, Ana Cláudia, Felipe.

RESUMO

SELSKI, Augusto Rangel. **Os três mundos da Matemática: fundamentos teóricos por meio de uma trajetória hipotética de aprendizagem**. Orientadora: Luciane Grossi. Ponta Grossa, 2023. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2023.

A presente pesquisa de mestrado tem como referencial teórico o Quadro Teórico dos Três Mundos da Matemática de David Orme Tall, que estuda como as pessoas aprendem a pensar matematicamente, como elaboram/refinam seus conhecimentos matemáticos a partir da percepção, da ação e da reflexão, e assim, identificar por meio dos já-encontrados, quando transitam pelos Mundos: Corporificado, Simbólico e Formal. A aprendizagem é individual, cada indivíduo tem seu próprio ritmo, então é importante que o professor faça uso de metodologias diferenciadas em sua prática. Ao encontro dessa perspectiva apresenta-se a Trajetória Hipotética de Aprendizagem(THA) de Martin Simon, uma estratégia metodológica que se fundamenta na experiencia docente, com objetivos de aprendizagem bem definidos, planejamento de atividades de aprendizagem e a previsão de possíveis dúvidas que os alunos possam ter relativas ao conteúdo abordado. A partir destes referenciais, a presente pesquisa tem por objetivo apresentar as características dos Três Mundos da Matemática na aprendizagem de Funções Quadráticas por meio de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem. A pesquisa desenvolvida é caracterizada como aplicada de abordagem qualitativa. A tarefa proposta envolve uma situação problema com função quadrática mediada por uma THA, implementada com alunos de uma turma do 1º ano do ensino médio de um colégio estadual da cidade de Ponta Grossa do estado do Paraná. Os dados da pesquisa foram coletados por meio de dois instrumentos: a resolução desenvolvida pelos alunos e o áudio das aulas de implementação. A análise dos dados foi realizada utilizando o Quadro Teórico dos Três Mundos da Matemática de Tall. Evidencia-se algumas dificuldades em relação ao assunto de funções quadráticas por parte dos alunos surgindo alguns já-encontrados dificultadores relativos a representação simbólica das variáveis, e construção gráfica.

Palavras-chave: Pensamento Matemático. Três Mundos da Matemática. Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

ABSTRACT

SELSKI, Augusto Rangel. **The three worlds of Mathematics**: theoretical foundations through a hypothetical learning trajectory. Advisor: Luciane Grossi. Ponta Grossa, 2023. Dissertation (Master in Science Teaching and Mathematics Education) – State University of Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2023.

This master's research has as a theoretical framework the Theoretical Framework of the Three Worlds of Mathematics by David Orme Tall, which studies how people learn to think mathematically, how they elaborate/refine their mathematical knowledge based on perception, action and reflection, and thus, identify through those already-found, when transiting through the Worlds: Embodied, Symbolic and Formal. Learning is individual, each individual has their own pace, so it is important that teachers use different methodologies in their practice. In line with this perspective, the Hypothetical Learning Path (THA) by Martin Simon is presented, a methodological strategy that is based on the teaching experience, with well-defined learning objectives, planning of learning activities and the prediction of possible doubts that students may have. can have on the content easily. Based on these references, this research aims to present the characteristics of the Three Worlds of Mathematics in the learning of Quadratic Functions through a Hypothetical Learning Path. The developed research is investigated as an applied qualitative approach. The proposed task involves a problematic situation with a quadratic function mediated by a THA, implemented with students from a 1st year high school class at a state school in the city of Ponta Grossa in the state of Paraná. The research data were collected through two instruments: the resolution developed by the students and the audio of the implementation classes. Data analysis was performed using Tall's Theoretical Framework of the Three Worlds of Mathematics. Some difficulties are evident in relation to the subject of quadratic functions on the part of the students, appearing some already-found difficulties related to the representation of the variables, and graphical construction.

Keywords: Mathematical Thinking. Three worlds of Mathematics. Hypothetical Learning Path.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A presente introdução foi elaborada a partir de uma síntese a respeito do pesquisador e de suas experiências em sua formação pessoal e profissional, as quais o levaram a refletir sobre as mudanças que a educação para a vida de alunos e professores, em especial na disciplina de Matemática. Esta apresentação é importante porque dá sentido à ideia de pesquisa deste trabalho e as inquietações que surgiram dessas experiências. Utilizou-se de primeira pessoa para esta parte do texto por se tratar da minha história de vida.

No dia 17 de abril de 1991, em Ponta Grossa, Paraná, Angela e Mauro, por meio da graça de Deus, tiveram seu primeiro filho Augusto qual reside na mesma cidade até os dias de hoje, irmão de Renata, André, Maura e Julia, esposo da Bruna e pai do Angelo Miguel.

Iniciei meus estudos aos 4 anos de idade na Educação Infantil, antiga, pré-escola Hotel dos Pequeninos, cursei o Ensino Fundamental I e II no Colégio Sagrada Família (instituição privada). As mensalidades eram pagas com a renda que meus pais recebiam trabalhando como vendedores autônomos em sua pequena distribuidora. Me recordo do sacrifício deles para me manter nos estudos. Eles sempre diziam que o estudo era tudo na vida e que eu deveria me esforçar ao máximo para alcançar meus objetivos e ser alguém na vida, uma pessoa de bem.

Contudo, minha “viagem” pela matemática iniciou de uma maneira não muito agradável. No Ensino Fundamental II lembro-me que minha mãe pagava aulas particulares de matemática, isso porque, meu rendimento na disciplina era regular, tinha muitas dificuldades nos cálculos e não tinha interesse nas aulas regulares.

O mais desagradável estaria por vir, na antiga 8ª série, atual 9º ano. Fui retido na disciplina de Matemática, meus pais ficaram decepcionados e eu também. Em consequência da reprovação e das condições financeiras, fui matriculado na Escola Estadual José Gomes do Amaral. Como na vida tudo tem um porquê, foi nesta escola que o interesse pela matemática surgiu e o desejo de aprender também. As palavras de incentivo da professora Líbia foram importantes.

Desde então o meu desempenho em matemática melhorou muito, eu recordo que além de dar conta das tarefas conseguia auxiliar meus colegas, recebendo cada vez mais elogios da professora, encerrando aquele ciclo com aprovação no terceiro bimestre nos quesitos nota e frequência.

O Ensino Médio, estudei no Colégio Estadual Regente Feijó, período noturno. Desde os 13 anos já trabalhava no mercadinho da família, auxiliando no caixa e atendimento geral, e assim foi até a 2ª série do Ensino Médio. Quando estava na 3ª série do Ensino Médio, comecei a trabalhar em uma Loja de Calçados. A situação de trabalho não impedia os estudos, mesmo trabalhando o dia todo e estudando a noite, tirava as melhores notas e ajudava os colegas nos trabalhos escolares.

Após aprovação no vestibular, ingressei no ano de 2011 no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Ponta Grossa. Foi exatamente neste ano que as inquietações começaram a surgir, pois aquele aluno com excelentes notas em matemática, do Ensino Fundamental II ao Ensino Médio, viu seu desempenho nas disciplinas de cálculo serem as piores possíveis, e por quê? O que poderia ter desencadeado o baixo desempenho? Aprendizados anteriores que na verdade eram memorizações de procedimentos? A exigência do uso de linguagem mais formal na graduação, poderia ser um fator?

Essas inquietações não pararam por aí. Neste mesmo ano tive a primeira experiência como professor, ao ingressar por meio do Processo Seletivo Simplificado[1] na Rede Estadual de Ensino do Estado do Paraná, na Escola Estadual Professora Margarete Mazur. Tratava-se de uma escola do campo que teve parte no processo de construção da minha paixão pelo processo de ensino e aprendizagem, à qual devo uma parte das experiências que hoje levo em minha bagagem. Essa experiência despertou mais inquietações em relação as dificuldades encontradas pelos alunos na resolução de problemas e a forma como pensavam matematicamente.

Lecionei em diversas escolas/colégios da Rede Estadual de Ensino do Estado do Paraná e em escolas da Rede Particular de Ensino. Trabalhei comníveis distintos da Educação Básica, passando pelo 5º ano do Ensino Fundamental I, Ensino Fundamental II e Ensino Médio, turmas da Educação de Jovens e Adultos (EJA), turmas de apoio à aprendizagem / intensificação da aprendizagem, ainda, Cursinho Pré-Vestibular.

---

[1]O PSS é um processo seletivo simplificado, realizado pela SEED, para contratação temporária de professores, pedagogos, intérprete de libras, auxiliares de serviços gerais e técnicos administrativos.

A experiência vivenciada enquanto estudante e professor de matemática, estimulou ainda mais o desejo de descobrir metodologias que pudessem contribuir com o ensino e aprendizagem da matemática, mas acima de tudo buscavacompreender os aspectos relacionados ao pensamento matemático dos estudantes que acabam influenciando no desempenho escolar.

Destaco também, a participação em dois projetos: Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC). No PIBIC fui orientado pela Professora Dra. Ana Lúcia Pereira, iniciei minha pesquisa na intenção de encontrar respostas para as minhas inquietações em relação as dificuldades na matemática encontradas pela maioria dos alunos do curso de licenciatura em Matemática, resultando no artigo intitulado “Dificuldades de Aprendizagem geradas a partir da ausência da Matemática Básica: Implicações na Formação Inicial de Professores de Matemática”.

Dando continuidade aos estudos, nos anos de 2016 e 2017, cursei três especializações: Ensino aprendizagem da Matemática, Neuropsicopedagogia e a Educação Especial: Portadores de Necessidades Especiais. A formação obtida por meio das especializações foi importante para agregar conhecimento, mas ainda não tinha respostas às minhas inquietudes.

A partir das vivênciasrelatadas, a indagação “Que elementos podem dificultar a aprendizagem da matemática escolar?” continuava pulsante. É indiscutível que fatores políticos, sociais, econômicos entre outros, interferem no processo de ensino e aprendizagem, também contribuem para o fracasso escolar, masneste trabalho não pretendemos discutir estes aspectos.

A intenção e angústia que se mantinha, era referente a entender as dificuldades na matemática, manifestada por meus alunos, queria compreender os processos envolvidos na ação do pensar matematicamente. Então no ano de 2018 tomei conhecimento do processo de seleção do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGCEM), na elaboração do pré-projeto de pesquisa, senti que era a oportunidade de estudar e pesquisar uma temática que viesse ao encontro de minhas inquietudes. Ao tomar conhecimento da teoria de Tall, sobre os três Mundos da Matemática, seuQuadro Teórico que aborda o desenvolvimento do pensamento matemático,vislumbrei uma luz na perspectiva de dar respostas aos meus questionamentos. Neste contexto, a partir das primeiras leituras indicadas pela querida colega de trabalho professora Marta Burda Schastai, o pré-projeto foi elaborado.

Após a aprovação no programa, a orientadora apresentou outras temáticas de pesquisa, mas ainda continuava com minhas inquietações em mente.Assim em acordo na orientação do trabalho, foi realizado o convite para que a professora Marta fosse a coorientadora de mestrado, haja visto que defendeu seu doutoradocom base no Quadro Teórico de Tall.

Contextualização e justificativa

Os professores desempenham papel importante no processo de ensino e de aprendizagem, sendo a disciplina de matemática considerada uma das mais difíceis pelos alunos, a mediação docentetorna-se fundamental.Diante das dificuldades encontradas pelos alunos, é importante que o professor entenda como ocorre a aprendizagem da matemática, compreender aspectos que estão relacionados a isso,o que está por trás dos erros cometidose as relações do desenvolvimento do pensamento matemático frenteàs experiências vivenciadas e conhecimentos préviosadquiridos.

David Orme Tall, desenvolveu o Quadro Teórico denominado de “Três Mundos da Matemática” que trata de como as pessoas aprendem a pensar matematicamente, ou seja, de como as pessoas elaboram/refinam seus conhecimentos matemáticos a partir da percepção, da ação e da reflexão, dando origem aos mundos Corporificado, Simbólico e Formal.

Para Tall a palavra “Mundo” se refere as diversas maneiras de compreender e atribuir significado a matemática em um mesmo contexto. Segundo Tall (2009) a palavra não é usada para representar um único registro ou grupo de registros, mas tratar do desenvolvimento de maneiras distintas de pensar que crescem em sofisticação na medida em que as pessoas aprimoram suas construções mentaise compactam em conceitos pensáveis[2]mais sutis.

Na perspectiva do Desenvolvimento do Pensamento Matemático de Tall(2009), existerelação entre as estruturas mentaiscom as quaisnascemos e as

[2] Conceitos pensáveis dentro do quadro teórico de Tall está relacionado a estrutura mental da linguagem, podemos falar e fazer conexões mentais para construir estruturas de conhecimento mais sofisticadas. (Tall, 2013, p.27)

experiências vivenciadas. Ao longo do desenvolvimento do indivíduo essas relaçõesauxiliam nas percepções de mundo, no desenvolvimento de ideias,na construção do pensamento matemático e na evolução para um mais formal(TALL, 2013).

Compreender elementos/aspectos sobre como os indivíduos aprendem a pensar matematicamente, sob a ótica do Quadro Teórico do Pensamento Matemático de Tall é importante no processo de ensino e aprendizagem. O aluno precisa ser desafiado a pensar matematicamente, cometer erros, pois é por meio destes que o professor pode identificar se as dificuldades apresentadas estão relacionadas à apropriação dos conhecimentos prévios ou a maturidade cognitiva do aluno. Desta forma, ao identificar em qual mundo da matemática o aluno se encontra, é possível criar estratégiaspara o embasamento de conceitos epode contribuir na identificação de caminhos que possam levar ao desenvolvimento do Pensamento Matemático.

Problema e Objetivos de pesquisa

No decorrer de minha experiência comodocente me intrigava as diferentes dificuldades manifestadas pelos alunos de uma mesma turma. Algumas dessas dificuldades se mostravam bem lógicas,enquanto outras eram extremamente no oposto. Enquanto docente e iniciando minha carreira como pesquisador queria compreender o motivodas discrepâncias no nível de pensamento matemático que os alunos apresentavam.

Ao desconsiderar os fatores externos que influenciam na aprendizagem, pensava que se os estudantes não apresentavam mesma maturidade matemática, deveria existir fatores internos que implicavam no processo de pensar matematicamente. Para encontrar respostas a estas inquietações precisava conhecer melhor como ocorre o desenvolvimento do pensamento matemático.

Ao começar os estudos a respeito dos Três Mundos da Matemática, que aborda os estágios envolvidosno processo do desenvolvimento do pensamento matemático,vislumbrava conseguir respostas às minhas inquietações. Entretanto não bastava compreender, queria saber como poderia propor uma atividade que pudesse auxiliar nesse processo. É sabido que o planejamento e implementação de práticas metodológicas diferenciadas das tradicionais são valiosas contribuições na prática docente e podem trazer resultados profícuos no processo de ensino e aprendizagem. Enquanto professor já utilizei algumas práticas como resolução de problemas, sala de aula invertida, gamificação(desafios), seminários que nos auxiliam e muito.

Contudo, pensava que deveria buscar talvez práticas que não tivesse utilizado ainda, mas que pudessem me auxiliar na busca por respostas para o foco desta pesquisa, portanto durante uma orientação com as professoras Luciane e Marta vimos uma oportunidade, quando a professora Marta comentou a respeito da THA – Trajetória Hipotética de Aprendizagem, que talvez pudesse nos ajudar, por se tratar de uma forma diferente de planejar e investigar o que buscamos.

Martin Simon apresenta a THA em seu trabalho Simon (1995) como uma estratégia metodológica que se fundamenta na experiencia docente, com objetivos de aprendizagem bem definidos, planejamento de atividades de aprendizagem e a previsão de possíveis dúvidas (hipóteses de aprendizagem), que os alunos podem ter relativas ao conteúdo abordado. Opercurso traçado por uma THAse constitui de um planejamento no qual o professor pode traçar objetivos, planejar tarefas, aplicar, ter devolutiva, dar feedback aos estudantes e ao seu próprio planejamento e assim possibilitar surgir características do aprendizado individual de cada um. Neste sentido que vi uma proximidade com minha pesquisa, por querer buscar respostas para características que surgem na resolução de tarefas a partir do que os estudantes já vivenciaram durante a aprendizagem ou que ainda estão neste processo de desenvolvimento do pensamento matemático.

Ao pensar no assunto da matemáticapara realizar a pesquisa, veio em mente as Funções Quadráticas, pois muitas dificuldades acabam surgindo ao trabalhar este assunto em sala. Muitas vezes os alunos não conseguem identificar a lei de formação de uma função, têm dificuldades na representação simbólica por meio dos coeficientes e variáveis ou na construção do gráfico de acordo com a função descrita.

Alguns autores como Angelini (2010) e Koch (2010), trazem que algumas dificuldades a respeito das funções quadráticas se iniciam no próprio conceito do que seria função, ou até mesmo na equação quadrática, sua representação analítica. Os alunos pensam na função como uma expressão onde existe apenas uma variável e que é preciso apenas efetuar alguns cálculos e encontrar a resposta, e não como uma ideia de relação e dependência.

A partir do contexto apresentado, da escolha do objeto de estudo, a abordagem pretendida e o assunto a ser tratado, a questão norteadora da pesquisa em tela indaga: Que características do Quadro Teórico dos Três Mundos da Matemática podem surgir em uma trajetória hipotética de aprendizagem (THA) para o ensino de Funções Quadráticas?

A fim de responder o problema levantado,despontam os seguintes objetivos:

Objetivo geral:

- Apontar, após reflexões analíticas características dos Três Mundos da Matemática na aprendizagem de Funções Quadráticas por meio de uma trajetória hipotética de aprendizagem.

Objetivos específicos:

- Explicitar possíveis*já-encontrados* que surgem na resolução de uma tarefa de Função Quadrática da THA à luz dosTrês Mundos da Matemática
- Relacionar o tipo de pensamento envolvido na proposta de estudo a partir da THA com os Três Mundos da Matemática de Tall.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no primeiro capítulo,o Pensamento Matemático é abordado segundo Tall, assim como o Quadro Teórico dos Três Mundos da Matemática e as características que esse quadro teórico traz. A última seção do capítulo apresenta uma revisão sistemática dos trabalhos a respeito da teoria de Tall.

O segundo capítulo apresenta um contexto das dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de matemática no Brasil, em especial a aprendizagem de funções quadráticas. Conceitos e aspectos da Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) são abordadosna última seção do capítulo conforme os estudos de Simon (1995).

No terceiro capítulo são abordados os encaminhamentos metodológicos acerca do campo e sujeitos de pesquisa, processo de coleta, tratamento e análise dos dados. Por fim, apresenta-se o planejamento da THA proposta para o estudo da tarefa com função quadrática.

O quarto capítulo é direcionado à análise dos dados coletados e das discussões sobre os resultados obtidos, e por fim, nas Considerações Finais, são apresentadasas inferências sobre os resultados, a fim de responder à questão de pesquisa.

CAPÍTULO 1 – TALL E O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO

O presente capítulo aborda o referencial teórico utilizado para embasar a pesquisa, o Quadro Teórico dos Três Mundos da Matemática de David Orme Tall. A partir do contexto profissional, e a aproximação com a educação matemática, Tall buscou investigar a respeito do Pensamento Matemático, preocupado como as pessoas pensam matematicamente deu origem ao Quadro Teórico dos Três Mundos da Matemática e as características que esse quadro teórico traz. A última seção destina-se a revisão de literatura que serviu como base para o direcionamento da pesquisa.

1.1 ASPECTOS DO QUADRO TEÓRICO DOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA

1.1.1 Pensamento Matemático

O pensamento é uma atividade humana, ou seja, é um processo que ocorre no cérebro envolvendo tudo aquilo que nossa mente observa, percebe, interpreta e dá forma ao que chamamos de conhecimento.O pensamento pode ser definido como uma.

> Atividade da mente através da qual estatematiza objetos ou toma decisões sobre a realização de uma ação. Atividade intelectual, raciocínio. Consciência. [...] Diferentemente do conhecimento, que visa apropriar-se dos dados empíricos ou conceituais, o pensamento constitui uma atividade intelectual visando a produção de um saber novo pela mediação da reflexão. Em outras palavras, o pensamento é o “trabalho” efetuado pela reflexão do sujeito sobre um objeto, num movimento pelo qual a matéria-prima que é a experiência é transformada, de algo não-sabido, num saber produzido e compreendido (JAPIASSÚ; MARCONDES, 2001, p. 209).

Para Tall (2002) os aspectos psicológicos e cognitivos são e estão relacionados ao desenvolvimento do pensamento matemático, além disso, “[...] aspectos psicológicos dos indivíduos e as representações matemáticas que os alunos esboçam dos objetos matemáticos nos dão possíveis indícios do entendimento que os alunos têm dos objetos matemáticos” (PALHARINI, 2010, p. 21). Ainda, há que se considerar que “nosso desenvolvimento matemático é construído sobre as mesmas capacidades biológicas que são parte de nossa herança genética e se desenvolve no decorrer de nossas experiências" (TALL, 2005,p.3).

Para fins de estudo, o pensamento matemático foi subdividido em "pensamento matemático elementar" e "pensamento matemático avançado" (DOMINGOS, 2003; TALL, 2002; COSTA, 2002; GRAY e TALL, 1999; DREYFUS, 1991, 2002). O pensamento matemático elementar na concepção de Tall (1995), começa com a "percepção de" e a "ação sobre" objetos do mundo externo, sendo que esta percepção e esta ação podem ser percebidas como sendo do visual-espacial para o verbal-dedutivo. Contudo as demonstrações, teoremas, provas, deduções matemáticas, são parte do "pensamento matemático avançado", assim como as conjecturas elaboradas com definições mais sofisticadas sejam na sua representação, simbolismo e prova matemática. Tall destaca que é importante focar

> [...] nossa atenção no ciclo completo de atividades no pensamento matemático avançado: da ação criativa, ao considerar o contexto de um problema na investigação matemática que conduz a formulação criativa de conjecturas, a um estágio final de refinamento e prova. Consideramos que muitas das atividades que ocorrem neste ciclo, também estão presentes em atividades elementares de resolução de problemas, mas a possibilidade de usar definições e deduções formais é o fator que distingue o pensamento matemático avançado (TALL, 2002, p. 3).

As ações mentais envolvidas no pensamento matemático elementar e no pensamento matemático avançado não são totalmente independentes e elas também podem acontecer em diferentes níveis de ensino, sendo influenciadas pelas experiências que cada um teve anteriormente ou ainda tem.

Esses dois tipos de pensamento, elementar e avançado, podem transitar entre os diferentes níveis de ensino, mas de maneira gradual, se entendermos que uma definição formal para um estudante de 6 anos (primeiro ano de escolarização) é diferente de uma definição formal para um estudante de 20 anos (ensino superior).

> A passagem do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado envolve o desenvolvimento, que vai da descrição à definição, do convencimento à prova de uma maneira lógica baseada em definições. (...) Este desenvolvimento se dá da coerência da matemática elementar para a consequência da matemática avançada de uma maneira baseada em entidades abstratas as quais devem ser construídas por meio de deduções de definições formais (TALL, 2002, p. 20).

Apesar das ações de definir e provar estarem presentes no pensamento matemático elementar, de acordo com Tall (2002), é no pensamento matemático avançado, que ações de dedução e definição formal acontecem. Não são dois tipos de pensamentos distintos, mas sim complementares. Nos parece que há uma zona nebulosa nesse processo de transição do pensamento matemático elementar para o avançado, contudo, a classificação de Tall, contribui no sentido de alertar professores quanto a necessidade de práticas de ensino que oportunizem ao estudante, desde os anos iniciais, as ações de definir e provar.

Ainda nesse contexto, Tall reforça essa relação entre os pensamentos, do elementar ao avançado durante as atividades, tarefas ou problemas resolvidos pelos estudantes. Desta maneira Tall (1995) procura mostrar que essa relação é uma "construção" de pensamento pelo uso de estruturas cognitivas em todo processo de desenvolvimento, a começar pela percepção, indo para o conhecimento e a ação como uma suposta saída. Por isso ao se pensar em um objeto, como por exemplo, um sólido geométrico, existe por parte do indivíduo a percepção, depois o pensar em relação, e a ação tomada sobre este mesmo.

1.1.2 Alguns Conceitos Necessários

Para que possamos chegar a uma compreensão do Quadro Teórico dos Três Mundos da Matemática se faz necessário apresentar as característicasdestes Três Mundos eos *já-estabelecidos*[3] e *já-encontrados*[4].

A matemática está presente no decorrer da vida do ser humano, mesmo não percebendo a sua presença no mundo, em seu entorno, faz parte de tudo que conhecemos. De acordo com Tall (2013) os indivíduos iniciam o desenvolvimento do pensamentomatemático a partir do nascimento, uma vez
que nascemos com uma estrutura em mente, a qual contempla aspectos humanos fundamentais, que compartilhamos em nossas experiências ao longo da vida.

A expressão *já-estabelecidos* está vinculada aos Três Mundos da Matemática e o desenvolvimento do pensamento matemático. Tall (2009) define *já-estabelecidos*como sendo uma estrutura mental que nasce em nosso cérebro, constituindo-se na base biológica do pensamento matemático humano sendo eles os *já-estabelecidos*: o reconhecimento, a repetição e a linguagem. Em outras palavras, a expressão *já-estabelecidos*, refere-se às habilidades genéticas de cada indivíduo,

[3] Já-estabelecido: tradução do termo inglês set-before, LIMA (2007)
[4] Já-encontrado: tradução do termo inglês met-before, LIMA (2007)

é a base para o desenvolvimento do pensamento matemático, sendo a base do pensamento matemático composta por três *já-estabelecidos.* De acordo com Tall (2009, p. 2)

> É a partir destas três estruturas mentais que aprendemos a pensar matematicamente. O primeiro *set-before* é o reconhecimento, o qual permite que possamos perceber semelhanças, diferenças e os padrões muito comuns na matemática, suportado este pela linguagem nos permite também categorizar as coisas na matemática.

Um exemplo que a autora Schastai (2017, p. 63) apresenta como uso do *já-estabelecido* de reconhecimento, refere-se ao ato de caracterizarmos alguns objetos que temos contato no mundo real como mesa, cadeira e formas geométricas. O segundo *já-estabelecido* é a repetição, “que nos permite praticar uma sequência de ações para ser capaz de realizá-lo automaticamente” (TALL, 2009, p. 2).

Destaca-se que essas ações de procedimento realizadas automaticamente podem ter sentido ou não, por exemplo, um estudante ao realizar uma operação de adição, utilizando o algoritmo mais comum no contexto escolar o de colocar unidade embaixo de unidade, dezena embaixo de dezena, começando a operação da direita para a esquerda, colocar as unidades soltas embaixo das unidades soltas, pode repetir esses procedimentos adequadamente e obter êxito no resultado, sem compreender o sistema de numeração decimal, o que dificulta o desenvolvimento de um pensamento flexível, ou seja, um pensamento que torna o indivíduo capaz de pensar e representar de maneiras diferentes, como os procedimentos utilizados no cálculo mental.

Em algumas situações o estudante realiza algum cálculo sem saber o porquê, utilizando apenas o processo de repetir um procedimento, como na resolução das equações do 2º grau, na qual o aluno faz aplicação da fórmula resolutiva para equações polinomiais do 2º grau, mas não compreende o procedimento e o porquê está utilizando.

O terceiro *já-estabelecidos* refere-seà linguagem, a qual nos permite dar nome aos fenômenos que reconhecemos e simbolizar ações que praticamos cada vez com mais sofisticação para dar sentido ao pensamento matemático, ou seja, é esse terceiro *já-estabelecidos* que nos diferencia dos demais seres vivos.

> “[...] é a capacidade para a linguagem que dá ao Homo Sapiens a vantagem de ser capaz de nomear os fenômenos que reconhecemos e para

> simbolizar as ações que realizamos para construir maneiras cada vez mais sofisticadas de pensar”. (TALL, 2009, p.2)

Em síntese, de acordo com Tall (2013), para aprendermos a pensar matematicamente, utilizamos os três “*já-estabelecidos*” que fazem parte da estrutura cognitiva humana:

- a entrada por meio dos sentidos que reconhecem as propriedades dos objetos.

- a saída por meio das ações que se tornam operações de rotina,

- a linguagem (também o simbolismo) que permite desenvolver formas cada vez mais sofisticadas de pensamento matemático.

Com base nessa estrutura, o pensamento matemático paraTall “inicia-se a partir da percepção de objetos do mundo externo, de ações que ocorrem sobre esses objetos e, por fim, da reflexão, de modo que o indivíduo desenvolva um pensamentocada vez mais refinado.” (MARTELOZO, 2019, pág. 52)

No entanto, os *já-estabelecidos* não são os únicos a influenciar no desenvolvimento do pensamento matemático nos seres humanos. Não se pode descartar todas as experiências escolares e não escolares vivenciadas pela pessoa. Os resquícios das “experiências mentais” podem apoiar ou atrapalhar futuras aprendizagens, em que o educando se depara com uma situação já vista anteriormente, mas que possa exigir algo a mais e não apenas os conceitos e procedimentos utilizados anteriormente.

Em várias situações, em diversas vezes, as ações tomadas pelo aluno, indivíduo matematicamente ativo, em constante processo de desenvolvimento do pensamento matemático, são de acordo com suas experiências em situações matemáticas que o levam a crer que, um procedimento compreendido anteriormente sempre valerá para todas as demais situações. Às vezes, não se trata do querer utilizar, mas, de um reproduzir sem observar as novas características envolvidas.

De acordo com Tall (2013) os *já-encontrados* são estruturas que temos em nosso cérebro agora, como resultado de experiências anteriores, ou seja, é o residual que ficou dos conhecimentos aprendidos anteriormente. Em síntese, *já-encontrados*“refere-se ao efeito da experiência anterior na nova aprendizagem” (Tall, 2013, p.5).

Ainda que os *já-encontrado*sejam estruturas definidas de acordo com o resultado de experiências anteriores, não é possível classificá-los apenas como sendo de apoio[5] ou como sendo problemático[6], uma vez que essas estruturas mentais vão reagir conforme cada nova situação em que o aluno é desafiado. Segundo Tall (2013) isto é definido quando o indivíduo procura trazer sentido para aquela situação com procedimentos utilizados anteriormente.

> Um *met-before*específico, não é, em si, de apoio ou problemático, torna-se de apoio ou problemático em uma nova situação, quando o aluno tenta fazer sentido das novas ideias (TALL, 2013, p.5)

Os *já-encontrado*tanto de apoio quanto os problemáticos aparecem sempre que o aluno busca solucionar problemas novos acreditando que os mesmos conceitos e procedimentos serão aceitos nas novas situações, isso não é apenas do indivíduo, mas também da própria matemática. Exemplificando, no conjunto dos números naturaisaplicamos a propriedade da adição e somamos as unidades,1+1=2,2+1=3, 3+1=4, este mesmo conceito e procedimento não são válidos para a adição com números fracionários, como exemplo 1/2 + 1/3, é necessário saber que os procedimentos são outros quando denominadores são diferentes e ainda o conceito de todo e parte do todo. De acordo com Tall,

> [...]um met-before problemático surge não apenas no aluno individual, é uma característica generalizada da natureza da própria matemática. Na mudança para um novo contexto, digamos, de números inteiros para frações, ou de números positivos para números negativos, ou da aritmética para a álgebra, a generalização é incentivada pelos *met-befores*de apoio (ideias que funcionaram em um contexto anterior e continuam a funcionar no novo contexto) e impedido por *met-befores*problemáticos (que faziam sentido antes, mas não funcionam no novo contexto).(TALL, 2013, p.5).

Pensando no ambiente escolar, no processo de ensino e aprendizagem, precisamos oportunizar aos estudantes a construção do senso crítico, para que eles vão em busca não apenas do saber e do compreender, mas também do questionar,

---

[5]*já-encontrado* de apoio é entendido como uma estrutura mental que foi utilizada em uma situação anterior e continua “válida” no novo contexto. (SCHASTAI, 2017, p. 69)

[6]*já-encontrado* problemático é entendido como uma estrutura mental que foi utilizada em uma situação anterior, mas não é “válida” no novo contexto. (SCHASTAI, 2017, p. 69)

e quando nos referimos a questionamentos, este questionar-se mediante as novas situações matemáticas presentes envolve o conceito de *já-encontrado*. De acordo com Tall (2013), os *já-encontrados*são essenciais para o desenvolvimento do pensamento matemático e para estruturar ideias mais coerentes, dentro dos Três Mundos da Matemática, e essas ideias são conceitos pensáveis, estruturas mais sofisticadas do pensamento, que auxiliam na produção de conhecimentos mais elaborados.

> [...]pensamento matemático exige ambos [*met-before* de apoio e *met-before* problemático]. O seu desenvolvimento em longo prazo é reforçado ao fazer sentido das ideias geradoras que atuam como uma base para a compressão de estruturas ricas em conceitos pensáveis ligados entre si de forma flexível em estruturas de conhecimento relacionadas coerentemente (TALL, 2013, p.132).

Outro exemplo, que clarifica, a existência de *já-encontrado*que não é de apoio, pode ser observado quando um aluno utiliza a multiplicação entre os números naturais e observa que o resultado sempre é um valor maior, porém quando este utiliza o mesmo para fracionários racionais, muitas vezes o produto desta multiplicação é um valor menor do que os fatores. Um olhar atento do professor para o *já-encontrado* de apoio e para o *já-encontrado* problemático, pode se constituir um recurso didático no processo de ensino e aprendizagem de Matemática como foco no desenvolvimento do pensamento mais sofisticado, mais elaborado.

Uma outra ideia importante, quando tratamos do conhecimento matemático e de toda estrutura sistematizada na teoria dos Três Mundos da Matemática, é do conceito cristalino.Pode ser entendido como “conceitos que têm fortes laços internos que fazem com que eles tenham propriedades inevitáveis em seu contexto”(SCHASTAI, 2017, p.63). Nesta ideia de conceito cristalino, Tall traz um exemplo de representação numérica:

> Os egípcios escolheram representar números inteiros com ícones para 1, 10, 100 e assim por diante; os babilônios fizeram marcas em tabuletas de argila na base 60; os gregos usavam as 24 letras do alfabeto, além de três letras fenícias para dar 27 símbolos para os números de 1 a 9, 10 a 90 (dezenas) e 100-900 (centenas); os romanos usavam um sistema diferente com símbolos em cinco e dez, (I, V, X, L, C, D, M); os maias trabalhavam na base 20, os chineses e os hindus desenvolveram sistemas de base dez, com os algarismos hindu-arábicos tornando-se o sistema escolhido em civilizações ocidentais modernas (TALL, 2011a, p.4)

Ainda que em diversas situações, em diferentes eixos da matemática como Álgebra, Geometria, Aritmética, Grandezas e Medidas, as metodologias utilizadas e procedimentos possam ser diferenciados, o conceito de números inteiros não será alterado, muito pelo contrário é estruturado a ponto de ser irrefutável.

Na Aritmética, por exemplo, sabemos que independentemente do modo ou da maneira em que se resolva a operação 3 + 3 na base 10, o resultado sempre será igual a 6, não se pode chegar à uma resposta diferente dessa. Por outro lado, o resultado 6 não advém apenas da operação 3 + 3, mas pode ser resultado de tantas outras operações, como por exemplo, 9 – 3 = 6, 6 + 0 = 6, 12: 2 = 6, 2 x 3, 6 x 1 = 6. Quando essas estruturas de conhecimentos estáveis ocorrem surge o que Tall (2011a) chama de proceito[7] e que ele define como primeiro exemplo de um conceito cristalino. Nesta perspectiva, "as propriedades flexíveis de números e aritmética estão contempladas na noção de *procept"* (GRAY; TALL, 1994a).

Os conceitos cristalinos também fazem parte dos Três Mundos da Matemática (Corporificado, Simbólico e Formal). Em cada um dos mundos, eles se apresentam de uma forma diferente, sendo este indicativo de que os conceitos dependem do contexto.

> Em relação ao mundo simbólico esses são vistos como *procepts* na aritmética. Em diferentes tipos de geometria os conceitos matemáticos têm uma estrutura específica com ligações que dependem do contexto, assim, no mundo corporificado conceitos cristalinos são vistos como objetos mentais. O mesmo ocorre na matemática formal, na qual um matemático pode optar por definir um sistema axiomático para obter axiomas que são desejados, mas, em seguida, as consequências dessas definições seguem o contexto especificado por esses axiomas (SCHASTAI, 2017, p. 64).

Para Tall, o desenvolvimento de conceitos matemáticos em cada um dos "mundos" não ocorre de forma independente, "a crescente sofisticação constrói conceitos matemáticos com as relações internas dentro e entre os conceitos em todos os três mundos" (TALL, 2013, p. 4). A Teoria dos Três Mundos será trabalhada com mais aprofundamento e detalhes na seção 1.1.4.

1.1.3 Pensamento Procedimental e Proceptual

O pensamento procedimental é caracterizado e definido pelo foco que tem nos procedimentos dissociados dos conceitos.

---

[7]Um processo e um conceito conduzem a ideia de "proceito" apresentada por Gray e Tall (1994).

> O aspecto limitante de tal pensamento é a visão mais tacanha que a criança tem do simbolismo: números são usados somente como entidades concretas para serem manipuladas por meio de um processo de contagem. A ênfase no procedimento reduz o foco sobre a relação entre entrada e saída, muitas vezes levando a extensões idiossincráticos do processo de contagem que não pode generalizar. (TALL 1994,p.115)

Este tipo de pensamento ocorre com mais frequência no Mundo Simbólico. Segundo Tall(2013) é quando os alunos permanecem apenas em estado de procedimento, mas não o compreendem e assim não conseguem formalizar novas ideias a partir da anterior, como por exemplo, quando um estudante de 5º ano com 10/11 anos de idade, para fazer uma adição de dois números com um algarismo (5 + 8), precisa montar a operação na vertical e contar nos dedos, a partir do 8 mais cinco unidades – o foco fica no procedimento, e dificilmente consegue avançar, por exemplo, na decomposição, na compreensão da propriedade comutativa onde é permitido tanto (5 + 8) como (8 + 5), na decomposição, no cálculo mental.

Em relação ao Pensamento Proceptual, para que possamos compreendê-lo, faz-se necessário entender que proceptual vêm da palavra *procept*., precisamos. Tall (1994) utiliza o termo*procept* para se referir ao amálgama de conceito e processo representado pelo mesmo símbolo, sendo este o proceito. A expressão amálgama, está posta no sentido de união, conexão, de ligamento, de indissociabilidade, a respeito da utilização do conceito e procedimento ao mesmo tempo, ou seja, quando o indivíduo consegue ir e vir entre os mundos corporificado e simbólico compreendendo tanto os conceitos e procedimentos, em direção ao Mundo Formal.

Para Tall, o pensamento proceptual“refere-se à capacidade de manipular o simbolismo de forma flexível como processo ou conceito, trocando livremente diferentes simbolismos para o mesmo objeto” (TALL, 1994, p.115-141), por exemplo, "quando um aluno relaciona várias maneiras de obter um mesmo resultado utilizando diferentes símbolos como 7+3, 3+7, 13-3, 2+2+6”, ou ainda, em funções quadráticas, quando este consegue identificar as variáveis dependente e independente como “y” e “x”, ou y = f(x), podemos perceber que ele está começando a representar diferentes formas de registrar o mesmo procept, nesse exemplo, o número 10. Amedida em que o aluno cresce e se desenvolve cognitivamente“passa a englobar muitas outras conexões”, no caso para o número 10, pode registrar “como 5x2, 20:2, (-5)x(-2), $-10i^2$”(TALL, 2013).

Esse pensamento flexível é importante no processo de desenvolvimento do pensamento matemático, um número, por exemplo, o 10 (dez), suscita tanto o processo de contagem quanto o conceito de número e esse fenômeno se repete em toda a estrutura do conhecimento matemático sistematizado, por exemplo,

> 4x3 é um símbolo que representa o processo de multiplicação "quatro vezes três", que, em termos de procedimento pode envolver a adição repetida para produzir o produto, que é o número 12.
>
> -7 é um símbolo que significa tanto o processo de "subtrair sete" ou mudar sete unidades na direção oposta ao longo da reta numérica quanto o conceito de número negativo (-7).
>
> 3/4 é um símbolo que representa o processo de divisão e o conceito de fração. (Tall e Gray 1992)

A essa "combinação de pensamento conceitual e procedimental é o que denominamos pensamento *proceptual"* (TALL, 1994, p.8).

1.1.4 Os Três Mundos da Matemática

Segundo Schastai (2017), a teoria dos Três Mundos da Matemática de TALL, é uma teoria alicerçada em teorias de outros autores (BRUNER, 1966, 1977, FISCHBEIN, 1987; PIAGET, 1926, 1958), que estudaram os processos cognitivos e as estruturas mentais as quais procuram explicar como nós pensamos matematicamente. A autora descreve que de acordo com Bruner (1966, 1977), há três formas de representação cognitiva: a enativa (baseada na ação), a representação icônica (baseada na imagem) e a representação simbólica (baseada na linguagem e nos símbolos matemáticos), enquanto para Fischbein (1987), o desenvolvimento da matemática e da ciência se dá por meio de três formas diferentes, as quais chamou de intuitiva, algorítmica e formal. Tanto Bruner quanto Fischbein, em suas teorias, têm uma visão ampla do desenvolvimento conceitual. A diferença entre estas duas teorias estão em detalhes, "A representação enativa e a representação icônica de Bruner dizem respeito à intuição de Fischbein, enquanto a representação simbólica de Bruner inclui abordagem algorítmica e a abordagem formal de Fischbein" (SCHASTAI, 2017, p.47).

De acordo com Piaget (1926, 1958), citado por Schastai (2017), o desenvolvimento cognitivo se dá por meio de quatros estágios:

1- Estágio sensório-motor: refere-se a à fase da pré-linguagem.

2- Estágio pré-operacional: refere-se ao período em que as crianças desenvolvem a linguagem e as imagens mentais de um ponto de vista pessoal.
3- Estágio operacional concreto: refere-se ao período em que as crianças desenvolvem concepções estáveis do mundo compartilhado com os outros.
4- Estágio formal-operacional: refere-se ao desenvolvimento da capacidade para o pensamento abstrato e o raciocínio lógico.

Piaget, em sua teoria, também estabeleceu uma relação entre os estágios de desenvolvimento com três formas de abstração. A primeira refere-se à abstração empírica, que acontece a partir de "brincadeiras com objetos e da tomada de consciência de suas propriedades, como por exemplo, o reconhecimento de um quadrilátero como uma figura de quatro lados"(SCHASTAI, 2017, 46). A segunda forma de abstração foi denominada de pseudo-empírica e acontece a partir das ações com os objetos, esta desempenha um papel importante na aritmética, em que operações, como contar e compartilhar, levam ao conceito de número, por exemplo. A abstração reflexiva é a terceira forma e "nessa maneira de abstração as operações em um nível tornam-se objetos mentais de pensamento em um nível superior" Schastai(2017, 46-47), que citacomo exemplo, uma operação generalizada na aritmética ao tornar-se uma expressão em álgebra.

> Nos escritos de Tall (2013), encontramos marcas da perspectiva piagetiana, ou seja, da perspectiva psicogenética cujo fundamento reside na ideia de que "os invariantes lógico-operatórios se estruturariam a partir das ações sensório-motoras, constituindo o pensamento (Piaget, 1973a)" (LESSA; FALCÃO, 2005, p. 316).

Entretanto, para a elaboração do Quadro Teórico dos Três Mundos da Matemática, Tall (2013), não considera apenas a operação fundamental do cérebro humano, mas também o desenvolvimento do conhecimento matemático em longo prazo, ou seja, os *já-encontrados*.

Observando o desenvolvimento do pensamento matemático em longo prazo, Tall (2013), considera que "é a partir da observação das propriedades dos objetos físicos que elaboramos os conhecimentos da geometria", assim como "das ações sobre os objetos, os conhecimentos da aritmética e outros conhecimentos matemáticos derivados destes” (SCHASTAI, 2017, 42).

Nesta perspectiva, ao contrário de Piaget, que concebe o desenvolvimento sensório-motor como algo único, Tall (2013), pensa que são duas coisas distintas e que são desenvolvidas independente uma da outra, Para Tall, o desenvolvimento sensório-motor,

> se refere a dois aspectos diferentes do cérebro: a parte sensorial relacionada à forma como percebemos o mundo através dos nossos sentidos e a parte motora relativa à forma como operamos no mundo através de nossa ação. (TALL, 2013, p. 11).

Para Tall (2013), há dois tipos de pensamento que acontecem praticamente ao mesmo tempo: um que começa com a "percepção de" e outro que começa com a "ação sobre", dando origem, respectivamente, aos chamados Mundo Corporificado e Mundo Simbólico. Fazem parte desses dois mundos, os conhecimentos matemáticos, trabalhados na Educação Básica. Também, há uma terceira forma de pensar, que envolve o uso de procedimentos e definições mais sofisticados matematicamente falando e que aparece com maior frequência nas provas e demonstrações matemáticas, em conhecimentos matemáticos estudados no ensino superior, denominado de Mundo formal. Envolve, no nível da Matemática Formal, o “desenvolvimento de demonstração axiomática formal com base em um conjunto de definições teóricas e demonstração matemática de teoremas" (TALL, p.19, 2013).

Tall, em sua Teoria dos Três Mundos da Matemática, denomina as três formas de pensar, de Mundo Corporificado, Mundo Simbólico e Mundo Formal. A figura 1 apresenta como se relacionam.

Figura 1 - Desenvolvimento do pensamento matemático nos Três Mundos da Matemática

Fonte: Adaptado de Tall (2007)

O tipo de pensamento envolvido no Mundo Corporificado, surge a partir das percepções ao nosso redor, relacionadas as percepções do mundoe dos pensamentos, não são apenas percepções no mundo físico, mas percepções, nas quais se dá sentido e significado às coisas. Podemos operar neste mundo a partir da percepção, observação e descrição, visando o entendimento de propriedades relativas aos conceitos matemáticos (TALL, 2014). Desta forma, o mundo corporificado "contempla identificação de padrões, de semelhanças, de diferenças, descrições de propriedades de objetos matemáticos, por exemplo, aoidentificar e descrever o que diferencia um triângulo isósceles de um triângulo equilátero"(MARTELOZO, 2019,p. 52).

No Mundo Simbólico o que se destaca é o uso dos símbolos, que são utilizados para cálculos, não apenas na álgebra, mas principalmente. Segundo Martelozo (2019, p. 52) "à medida que os indivíduos se envolvem com situações novas ao lidar com conceitos matemáticos, as percepções e descrições das propriedades dos objetos matemáticos tornam-se mais sofisticadas" o que requer uma linguagem matemática que auxilie "realizar procedimentos simbólicos". A autora apresenta a seguinte situação problema "A idade deCarla é igual ao triplo da idade de sua filha Ana. Qual é a idade de Carla e de suafilha, sabendo que juntas têm 60 anos?” para exemplificar a necessidade de linguagem simbólica para resolver um problema matemático. Além disso, propõem uma possível solução, que:

> seria representar a situação por meio de uma equação, assim como a resolução da equação polinomial do primeiro grau3A+ A = 60sabendo que A representa a idade de Ana, por meio do processo de manipulação dos símbolos, o foco não está mais sobre os objetos do mundo físico, mas nas relações entre os próprios símbolos (TALL,2013). Nesse contexto, há uma mudança de foco, sendo que, durante os procedimentos com os símbolos, não há a necessidade de retomar os significados que representam a situação inicialmente apresentada. Após operar com os símbolos, o foco muda novamente, uma vez que os resultados são interpretados a fim de validar a solução encontrada. (MARTELOZO, 2019, p. 52)

O foco, no Mundo Simbólico, se localiza em um nível mais abstrato, ou seja, respostas mais elaboradas, sofisticadas, conduzindo a refinamentos das apreensões do Mundo Corporificado,neste mundo os símbolos de modo geral exercem duas funções importantíssimas de conceito e de processo, que juntos formam o que Tall denomina de proceito.

No mundo formal encontra-se características mais complexas de definições, provas matemáticas, axiomas, todas que exigem um embasamento dos Mundos Corporificado e Simbólico; neste mundo encontramos demonstrações de propriedades por meio de prova formal. O Mundo Formal Axiomático é:

> [...]caracterizadoporaxiomas,definiçõeseprovasdeteoremas.Combasenacorporificação e simbolismo, esse mundo envolve uma Matemática mais sofisticada,por exemplo, o estudo da Álgebra Axiomática, Análise, uma vez que a transição paraesse mundo é marcada pela mudança de conceitos [...] que surgem de percepçõeseaçõessobreobjetosnomundofísicoparaverbalizaçãodepropriedadesaxiomáticaspara definir estruturas formais cujas propriedades adicionais são deduzidas atravésdeumaprova matemática”. (TALL,2015,p.5).

Este Mundo Formal muitas vezes nos traz a ideia de que está atrelado apenas ao ensino superior, mas um estudante pode chegar ou estar no Mundo Formal em um assunto de nível da Educação Básica, mas que exige um procedimento e definições bem estruturadas.

Os sujeitos, estudantes e matemáticos, podem transitar de um Mundo da Matemática para outro,

> A demonstração matemática não é o fim da história, os teoremas axiomáticos formais podem levar a *teoremas de estrutura*que dotam a teoria com novas formas de corporificação e simbolismo, retornando o pensamento matemático para o mundo mental sensório-motor fundamental das experiências de pensamento e manipulação operacional de símbolos.

> Isso fecha o círculo para revelar a plena integração dos três mundos, o corporificado, o simbólico e o formal. (TALL, p.404, 2013)

A interação entre corporificações, símbolos e teoremas, por meio da abstração e da generalização, oportuniza, ao sujeito (estudante ou matemático), maior entendimento dos objetos matemáticos e de suas múltiplas representações.

Conforme apresentado no decorrer deste capítulo, o Desenvolvimento do Pensamento Matemático ocorre por meio dos Três Mundos da Matemática de modo que estes, permitem ao estudante uma “viagem” pelo Corporificado, Simbólico e Formal, possibilitando interpretar as novas situações com base em suas experiências anteriores. Ao professor cabe observar cuidadosamente os já-encontrados que são mobilizados numa situação, permitindo uma análise e intervenção quando necessária, sendo possível identificar os já-encontrado de apoio ou problemático e compreender indícios de como se dá esse desenvolvimento do Pensamento Matemático.

O processo de ensino e aprendizagem da matemática é algo complexo, assim, compreender o desenvolvimento do Pensamento Matemático é de grande valia à prática docente. Pensando nisso, utilizou-se de uma pesquisa bibliográfica do tipo revisão sistemática de literatura acerca do desenvolvimento do Pensamento Matemático e ainda a teoria dos Três Mundos da Matemática que é o Quadro Teórico de Tall, que será detalhada na sequência.

1.2 REVISÃO DE LITERATURA

Para o levantamento bibliográfico realizado, foi considerado os trabalhos escritos em língua portuguesa e publicados no período de 2010 a 2022, nas bases de dados: Banco de Teses e Dissertações da Capes, Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD), Biblioteca Eletrônica Científica Online – SCIELO e Google *Scholar*. Na busca de trabalhos foram utilizadas a combinação de duas palavras-chaves, inicialmente “Pensamento Matemático” AND “Tall”, por fim, “Pensamento Matemático” AND “Teoria dos Três Mundos”.Desta forma, foram obtidos 116 trabalhos no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes,45 trabalhos na BDTD, 301 trabalhos no Google Scholar e 29 na SCIELO resultando ao todo em 491 trabalhos.

Aos trabalhos levantados aplicou-se os critérios de exclusão como duplicidade, trabalhos não disponíveis na íntegra e trabalhos que não tinham como foco a temática. Desta forma, foram selecionados 36 trabalhos para análise, e para a organização dos dados, utilizou-se da análise de conteúdo de Bardin(2011), que corresponde aum conjunto de técnicas para a análise de dados qualitativos, em que se busca estabelecer indicadores que permitam inferir convergências ou incidências nas mensagens analisadas.

A análise de conteúdo segundo Bardin (2011), se constitui de três etapas:pré-análise, descrição analítica e interpretaçãoinferencial. Na pré-análise, fase da organização de fato, em que se realiza as leituras, organiza as informações e cria-se indicadores. Neste momento, fez-se a leitura dos resumos, objetivos dos trabalhos selecionados que foram organizados em planilhas do Excel.

Na sequência, os dados são apresentados na Tabela 1, que consta: o ano de publicação, o tipo de publicação: Artigo (A), Dissertação (D) ou Tese (T), a identificação (ID) do trabalho, o Título da produção, o Autor e a Instituição de Ensino Superior (IES) a que o autor estava vinculado.

Tabela 1 – Fichamento dos trabalhos selecionados

(continua)

Ano	Tipo	ID	Título	Autor	IES
2010	D	T1	Uma Introdução ao Estudo de Equações Quadráticas à luz dos Três Mundos da Matemática	Koch, R. M	UNIBAN-SP
2010	D	T2	Modelagem Matemática e Pensamento Matemático: Um estudo à Luz dos Três Mundos	Palharini, B. N.	UEL
2010	D	T3	Funções: um estudo baseado nos Três Mundos da Matemática	Angelini, N. M.	UNIBAN-SP
2011	D	T4	A (re)construção do conceito de Limite do Cálculo para Análise: um estudo com alunos do curso de Licenciatura em Matemática	Amorim, L. I. F	UFOP
2012	A	T5	Os "Mundos da Matemática" em Atividades de Modelagem Matemática	Almeida, L. M. W Palharini, B. N	UEL
2012	D	T6	Convergência de sequências e séries numéricas no Cálculo: um trabalho visando a corporificação dos conceitos	Fonseca, D. S. S. M	UFOP
2012	D	T7	Um diagnóstico com o conceito de proporcionalidade de alunos do ensino médio na perspectiva dos Três Mundos da Matemática	Poggio, A. M. P. P	UNIBAN - SP
2013	A	T8	Pensamento Matemático Avançado: um estudo com questões de vestibular	Gereti, L. C. V. Savioli, A. M. P. D.	UEL
2013	A	T9	Os Três Mundos da Matemática e Atividades de Modelagem Matemática nos Anos Iniciais	Almeida, L. M. W Palharini, B.N. Tortola, E.	UEL
2014	D	T10	Pensamento Matemático Avançado em Tarefas Envolvendo Transformações Lineares	Marins, A. S	UEL

Tabela 1 – Fichamento dos trabalhos selecionados

(continuação)

Ano	Tipo	ID	Título	Autor	IES
2014	D	T11	Processos do Pensamento Matemático Avançado Evidenciados em Resoluções de Questões do ENADE	Viel, L. C	UEL
2015	A	T12	Enunciados de Tarefas de Matemática Baseados na Perspectiva da Educação Matemática Realística	Ferreira, P. E. A Buriasco, L. R. C.	UEL
2015	D	T13	Ângulos e Paralelismo nos livros didáticos à luz dos três mundos da matemática	Fernandes. C. G	UNIAN - SP
2016	A	T14	O Conceito de Proporcionalidade Direta de Alunos Brasileiros de 14-16 Anos na Perspectiva dos Três Mundos da Matemática	De Souza, V. H. G. Galvão, M. E. E. L Poggio, A. M. P. P	UNIBAN - SP
2016	T	T15	Aprendizagem da Derivada: Uma Perspectiva de Análise Pelos Fluxos de Pensamento	Leme, J. C. M.	PUC-SP
2016	A	T16	Definição de conceito de número real: discussões e influências de *já-encontrados*	Chaves, G. G. Souza, V. H. G. Lima, R. N.	UFV
2017	A	T17	Set – Befores e Met – Befores: Influência no Estudo de Anéis de Polinômios	Kirnev, D. C. B. Savioli, A. M. P. D.	UNOPAR
2017	T	T18	Tall e Educação Matemática Realística: Algumas Aproximações	Schastai, M. B.	UEL
2017	D	T19	A análise Combinatória no 6º ano do Ensino Fundamental Por Meio da Resolução de Problemas	ATZ, D	UFRS
2018	D	T20	O Conceito de Limite na Formação Inicial de Professores de Matemática: Um Estudo à Luz dos Três Mundos da Matemática	Soares, G. O	UNIFRA
2018	T	T21	PMA – Como essa noção repercute em dissertações e teses brasileiras?	Carmo, P. F	PUC-SP
2018	D	T22	Formação continuada para professores de matemática: o erro como recurso pedagógico e seu papel no processo de avaliação	Rizzon, B. M	UCS
2018	T	T23	Monitoria de Cálculo e Processo de Aprendizagem: Perspectivas à Luz da Sociointeratividade e da Teoria dos Três Mundos.	Flores, J. B	PUC-RS
2019	A	T24	*Já-encontrados* na Aprendizagem da Matemática: Quais Implicações?	Martelozo, D. P. S Savioli, A. M. P. D.	UEL
2019	A	T25	Processos do Pensamento Matemático Avançado Revelados nas Resoluções de Tarefas Envolvendo Números Racionais	Flôres, M. V. Fonseca, J. A. Bisognin, E.	UNIFRA
2019	A	T26	O Cálculo e os Três Mundos da Matemática: Um Estado do Conhecimento	Bueno, R. W. S Viali, L.	URB
2020	A	T27	Noções de Pensamento Matemático Avançado em Dissertações e Teses Brasileiras	Carmo, P. F.	PUC-SP

Tabela 1 – Fichamento dos trabalhos selecionados

(conclusão)

Ano	Tipo	ID	Título	Autor	IES
2020	A	T28	Uma metanálise de dissertações e teses brasileiras que utilizaram a teoria do Pensamento Matemático Avançado	Carmo, P. F Igliori, S. B. C	PUC-SP
2020	T	T29	Construção dos Números Racionais na Licenciatura: Um estudo desenvolvido à Luz dos Três Mundos da Matemática	Flôres, M. V	UNIFRA
2020	A	T30	Convergências e Complementaridades entre as Teorias dos Três Mundos da Matemática e a da Sociointeratividade	Flores, J. B Lima, V. M. R Müller, T. J	PUC-RS
2020	A	T31	O Conceito de limite na formação inicial de professores de Matemática: um estudo à luz dos Três Mundos da Matemática.	Soares, G. O	UNIFRA
2020	A	T32	Livros Didáticos de Matemática e o Conceito de Distância: uma análise à luz da Teoria dos Três Mundos da Matemática	Soares, G. O Leivas, J	UNIFRA
2021	T	T33	A Matemática que se Sente na Pele: um estudo do pensamento matemático de alunos surdocegos	Jesus, M. S. D	UEL
2021	T	T34	Compreensão do Conceito de Limite por Alunos de Cursos de Ciências Exatas	Ferreira, R. D	PUC-SP
2022	A	T35	A Dinâmica de Movimento do Pensamento Matemático em Perspectiva nos Três Mundos da Matemática: O Caso Hipotético do Teorema de Pitágoras no Ensino Fundamental	Pollegatti, G. A Savioli, A. M. P. D Leivas, J. C. P	IFMG
2022	A	T36	Os Três Mundos da Matemática, a Modelação e o conceito de integral	Bueno, R. W. S	PUC-RS

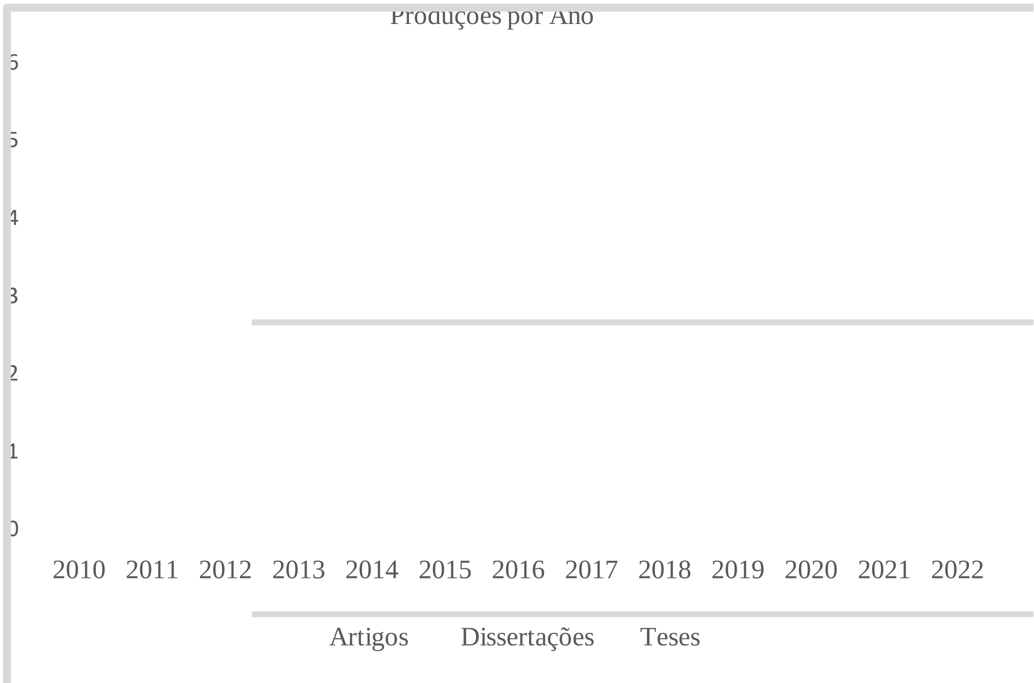
Fonte: Dados da pesquisa (2023).

A partir dos resultados apresentados na Tabela 1, pode-se observar que dos 36 trabalhos analisados 17 são artigos, 12 são dissertações e 7 são teses, correspondendo, respectivamente, a 47,2%; 33,3% e 19,5% do total de publicações.

Em relação as instituições de origem do primeiro autor, observa-se que do total de trabalhos, a UEL-PR e PUC-SP se destacam com maior quantidade de produções, com 10 e 8 trabalhos respectivamente. É importante destacar que nessas duas IES que apresentam o maior número de trabalhos, existem grupos de pesquisas consolidados que estudam o PM e a teoria de Tall.

A partir dos dados tabelados, observa-se no gráfico 1 aumento no quantitativo de pesquisas a partir de 2018, atingindo o maior número de publicações em 2020, sendo possível inferir que a temática tem atraído o interesse da comunidade científica e trata-se de uma temática recente na Educação Matemática. Embora a produção aparentemente diminuiu a partir de 2021, não se pode concluir desinteresse sobre a temática, pois pode ser reflexos causados da pandemia.

Gráfico 1: Produções de 2010 a 2022



Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Na fase de exploração do material selecionado, deu-se início a codificação, classificação e categorização dos 36 trabalhos, que são etapas básicas nesta fase (BARDIN, 2011). Após a elaboração do fichamento dos trabalhos, fez-se a leitura de resumo, objetivos, pergunta de pesquisa, tema, se houve ou não participantes, entre outras informações. Na sequência iniciou-se a etapa de tratamento dos dados, da qual foi possível identificar quatro grandes categorias acerca da temática estudada, descritas no Quadro 1, abaixo.

Quadro 1 - Categorias e descrição do que representam

Categorias	**Descrição**
Nível de Ensino (NE)	Constituída de trabalhos referentes às pesquisas implementados em sala de aula, os quais se dividem em cinco subcategorias, referentes ao nível de ensino dos participantes.
Pesquisas Teóricas (PT)	Compreende trabalhos referentes às pesquisas que não tiveram intervenção em sala, ou seja, não houve participação de sujeitos da pesquisa, sendo composta por quatro subcategorias.
Temáticas de Pesquisa (TP)	Formada por trabalhos que abordam tendências metodológicas de ensino, aproximações entre eixos teóricos e de estudos acerca de aspectos da própria teoria de Tall, composta por três subcategorias e respectivas subdivisões.
Conteúdos Matemáticos (CM)	Constituída de trabalhos que abordam conteúdo específico de matemática referentes à educação básica e ensino superior, composta por oito subcategorias.

Fonte: Elaborado pelo autor desta pesquisa através dos dados retirados a partir da revisão de literatura (2022).

Cada categoria do Quadro 1 é composta de subcategorias ou subdivisões, apresentadas na sequência. Categoria I: Trabalhos por Nível de Ensino (NE) essa categoria refere-se aos trabalhos que tiveram intervenção em sala de aula, ao todo foram 25 trabalhos, os quais constituem 5 subcategorias, apresentadas no Quadro 2, com identificação formada pela sigla NE acompanhada do número 1 até 5, sendo a última coluna os trabalhos que compõe a subcategoria.

Quadro 2: Subcategorias da categoria Nível de Ensino - NE

Subcategorias	Descrição	Trabalhos
NE1	Ensino Fundamental I (EF-I)	T5, T9, T33
NE2	Ensino Fundamental II (EF-II)	T1 e T19
NE3	Ensino Médio (EM)	T3, T7, T14 e T16
NE4	Ensino Superior (ES)	T2, T4, T6, T8, T10, T11, T17, T20, T23, T25, T29, T30, T31, T34 e T36
NE5	Formação Continuada (FC)	T22

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

A partir do Quadro 2, pode-se observar que os trabalhos realizados no ensino superior são predominantes, subcategoria NE4, sendo os sujeitos na maior parte, acadêmicos dos quatro anos do curso de Licenciatura em Matemática, com investigações ocorridas nas disciplinas de Cálculo Diferencial Integral, Álgebra Linear, Fundamentos de Análise e Modelagem Matemática. Os autores buscam, a partir das resoluções dos alunos, estabelecer relação com os Três Mundos da Matemática e do Quadro Teórico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático. Os trabalhos apontam que a construção para o mundo formal é possível, mas nem todos atingem os conceitos e procedimentos necessários, e verifica-se que isso também tem a ver com a maneira que foi trabalhado cada assunto.

Na subcategoria NE5, o trabalho T22, foca na FC, no qual um grupo de professores da rede pública atuantes no EF-II foi selecionado para realizar um curso de formação continuada com o intuito de investigar como professores concebem o erro de seus alunos no processo de avaliação, tendo como base para essa análise os Três Mundos da Matemática. Chegou-se à conclusão de que os próprios professores perceberam mudanças na sua abordagem e concepção de erro, o que os fizeram repensar seu planejamento, plano de aula, aproveitando o “erro” dos educandos, e que esse suposto erro é na verdade a representação de características dos Três Mundos da Matemática que de alguma forma não estão consolidados e assim não atingem seu “estado” corporificado, simbólico e formal. Categoria II: Pesquisas Teóricas (PT) – Essa categoria reúne trabalhos que não tiveram intervenção em sala, de modo geral apresentam levantamento bibliográfico de teses, dissertações, artigos e documentos a respeito do PME, PMA e a Teoria dos Três Mundos da Matemática, ou procura por aproximações entre teorias. No Quadro 3, são apresentadas as subcategorias PT acompanhada do número 1 até 4, e os trabalhos que as compõe.

Quadro 3: Subcategorias da categoria Pesquisas Teóricas -PT

Subcategorias	Descrição	Trabalhos
PT1	Mapeamento de pesquisas brasileira	T21, T24, T26, T27, T28
PT2	Relação entre conteúdo matemático e Teoria dos Três Mundos	T15, T26 e T35
PT3	Aproximação entre teorias	T18
PT4	Análise documental	T12, T13 e T32

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Por meio dos dados apresentados observa-se quatro trabalhos de revisão de literatura, que em geral apresentam uma discussão em relação ao processo do Desenvolvimento do Pensamento Matemático sustentada no Quadro Teórico dos Três Mundos da Matemática e nos trabalhos de outros autores. T27 e T28 são artigos de um mesmo autor, originados da tese T21, analisada em outra categoria.

A subcategoria PT2, constitui-se de três trabalhos, dos quais T15 e T26, que investigam a relação entre o estudo do Cálculo Diferencial e Integral e a Teoria de Tall, analisando os Três Mundos da Matemática por meio de um levantamento das produções envolvendo as duas temáticas. T35 usa a Teoria dos Três mundos para relacionar com um estudo hipotético do teorema de Pitágoras investigando características desses “mundos”.

Na subcategoria PT3, o trabalho T18 trata-se de uma pesquisa teórica, que busca identificar aproximações entre as teorias dos Três Mundos da Matemática de Tall e da Matemática Realística de Freudenthal. Nesta tese são elaborados quadros de forma organizada e comparativa com características e definições tanto dos Três Mundos da Matemática como da Matemática Realística, acrescentado de considerações, que levam a autora a apontar aproximações entre as teorias. Enquanto a PT4, análise documental, engloba trabalhos que buscam investigar e analisar materiais didáticos como livros e caderno do professor com intenção de identificar aspectos relacionados a Teoria dos Três Mundos da Matemática.

Categoria III: Temáticas de Pesquisa (TP)- é a categoria mais complexa, pois é composta de subcategorias as quais possuem subdivisões. No Quadro 4, observa-se as subcategorias, sua descrição e os trabalhos.

Quadro 4: Subcategorias da categoria Temáticas de Pesquisa - TP

Subcategorias	**Descrição**	**Trabalhos**
TP1	Tendências da Educação Matemática	T1, T2, T5, T6, T9, T12, T19, T20, T22, T23, T30, T34 e T36.
TP2	Aproximações entre Eixos Teóricos	T18, T23, T33 e T30
TP3	Aspectos específicos relacionados aos estudos de Tall	T1, T2, T3, T5, T6, T7, T8, T9, T10, T11, T12, T13, T14, T15, T16, T17, T18, T20, T21, T22, T23, T24, T25, T26, T29, T31 e T32.

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Conhecidas as três subcategorias da categoria Temáticas de Pesquisa (TP), na sequência cada subcategoria é apresentada com suas subdivisões:

TP1- Tendências da Educação Matemática: a partir desta subcategoria surgiram subdivisões que tratam de diferentes tendências que são descritas no Quadro 5.

Quadro 5 - Subdivisões da subcategoria Tendências da Educação Matemática

Subdivisões	**Descrição**	**Trabalhos**
TP1.1	Modelagem Matemática (MM)	T2, T5, T9 e T36
TP1.2	Resolução de Problemas (RP)	T1, T19, T20 e T31
TP1.3	Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC)	T6, T12 e T34
TP1.4	Análise de Erro	T22, T23 e T30

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Na subdivisão TP1.1, a MM é abordada como alternativa pedagógica e prática investigativa afim de identificar e estabelecer conexões com os Três Mundos da Matemática, PME e PMA e suas respectivas características como simbolização, conceito-imagem sendo este uma descrição da estrutura cognitiva que associa as imagens aos processos e propriedades da mente do indivíduo, axiomas, formalizações, entre outras.

Os trabalhos da TP1.2 de modo geral, trata-se de pesquisas focadas na RP, sendo dois trabalhos no EF-II, um no EM e outro no ES, investigaram aspectos que podem surgir dos Três Mundos da Matemática na resolução de problemas e assim verificar em quais mundos cada aluno pode chegar e quais características identificam este estado.

Os trabalhos da subdivisão TP1.3 tratam do uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), tendo como foco a identificação de possíveis características relacionadas aos Três Mundos da Matemática, aos PME e PMA, e aos conceitos e definições. O T12 aborda a inserção do uso da calculadora no processo de ensino e aprendizado de alunos do EF-II. Os trabalhos T6 e T34 utilizaram o *software*Geogebra, como ferramenta auxiliar das atividades propostas. No T6 as atividades desenvolvidas eram relacionadas aos conteúdos de Séries e Convergências Numéricas no curso de Engenharia de Produção, com o objetivo de investigar as contribuições que o uso do *software* pode trazer na transição entre os PME e PMA e na consolidação dos conceitos e definições. Enquanto o T34 procurou investigar a compreensão dos acadêmicos a respeito dos conceitos de limites na disciplina de Cálculo Diferencial Integral, de cursos como Engenharias e Licenciatura em Matemática, buscando relacionar os Três Mundos da Matemática e o PMA.

Na subdivisão TP1.4, os trabalhos T22, T23 e T30 tratam da compreensão do erro, como é concebido no processo de avaliação e a relação com os já-encontrado. De modo geral os trabalhos destacam a importância de observar e analisar o erro, identificar os já-encontrados seja ele de apoio ou problemático.

A subcategoria TP2 – Aproximações entre Eixos Teóricos, constitui-se de trabalhos com teorias diferenciadas, que buscam aproximações com o Quadro Teórico de Tall. Sendo assim, surgiram subdivisões que estão descritas no Quadro 6, observa-se a identificação, a descrição dos eixos teóricos de aproximação nas pesquisas e os trabalhos relacionados.

Quadro 6 - Subdivisões da subcategoria Aproximações entre Eixos Teóricos

Subdivisões	**Descrição**	**Trabalhos**
TP2.1	Quadro Teórico de Tall e a Sociointeratividade	T23 e T30
TP2.2	Quadro Teórico de Tall e a Matemática Realística	T18
TP2.3	Quadro Teórico de Tall e o Desenvolvimento do Pensamento e Linguagem -Vygotsky	T33

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Na subdivisão TP2.1, os trabalhos abordam as influências que a sociointeratividade de Vygotsky tem sobre o aprendizado dos alunos buscando fazer conexões com o Quadro Teórico e a Teoria dos Três Mundos. O trabalho T23, aborda a monitoria para alunos que cursam as disciplinas de Cálculo, sua influência no ensino de cálculo. A pesquisa foi desenvolvida em duas universidades, investigando como a monitoria enquanto estratégia pedagógica, pode auxiliar os alunos dos primeiros anos da graduação do curso de Licenciatura em Matemática e como se dá a socio-relação com essa parceria de aluno e monitor. Buscou encontrar se esta sociointeratividade interfere no ensino aprendizagem despertando processos e características dos Três Mundos da Matemática. Como resultado foi possível observar que a monitoria fomenta um ambiente livre de tensões fazendo com que os processos do PM possam fluir com mais facilidade.

O trabalho T18 da TP2.2, buscou aproximações entre o Quadro Teórico de Tall e a Matemática Realística, focando no ensino com significância, com relação ao mundo ao redor dos alunos, e neste sentido por meio de vários quadros ao longo da tese a autora elenca características dos três mundos e da MR de modo que pudesse ter um parâmetro do que é distinto entre as duas ou o que são próximas.

Na subdivisão TP2.3, o trabalho T33 investigou as características do PM manifestados por dois alunos surdocegos de uma escola municipal, por meio da construção de uma espécie de caracterização de significados que cada um dava as atividades matemáticas, relacionando com a linguagem segundo os referenciais teóricos utilizados pelo autor. Foram apontados materiais alternativos que podem propiciar o desenvolvimento da linguagem e do pensamento. Como resultado da investigação conclui-se que é indispensável para alunos com esta deficiência no ensino da matemática e desenvolvimento do PM, o uso de materiais manipuláveis, concretos ou objetos físicos. Constatou-se que apenas um dos alunos demonstrou ter o PM esperado dentro de sua realidade, embora os dois conseguissem representar noções matemáticas com objetos concretos e do cotidiano.

Na subcategoria TP3 - Aspectos relacionados aos estudos de Tall- são reunidos os trabalhos que de alguma maneira investigam características específicas dentro da própria Teoria de Tall. A partir desta análise surgiram outras três subdivisões, tendo a última ainda duas novas subdivisões, no Quadro 7, observa-se a identificação, os aspectos foco das pesquisas e os trabalhos que a compõe.

Quadro 7: Subdivisões da subcategoria Aspectos relacionados aos estudos de Tall

<table>
<tr><th>Subdivisões</th><th colspan="2">Descrição</th><th>Trabalhos</th></tr>
<tr><td>TP3.1</td><td colspan="2">Definição de Conceito-Imagem</td><td>T3, T7, T8 e T14</td></tr>
<tr><td>TP2.2</td><td colspan="2">Pensamento Matemático Avançado</td><td>T2, T6, T8, T10, T11, T12, T21, T25 e T29</td></tr>
<tr><td rowspan="2">TP3.3</td><td rowspan="2">Quadro Teórico de Tall</td><td>Teoria dos Três Mundos</td><td>T1, T2, T3, T5, T6, T7, T9, T13, T14, T15, T16, T17, T18, T20, T22, T23, T24 e T26, T29 e T31</td></tr>
<tr><td>Já-encontrado</td><td>T16, T17, T18, T24 e T32</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Os trabalhos da subdivisão TP3.1, de modo geral têm por foco a concepção dos alunos em conceito e imagem dos assuntos da matemática trabalhados. O trabalho T3 verifica esse conceito-imagem no assunto de funções, já os trabalhos T7 e T14 no conteúdo de proporcionalidade e o T8 em uma questão de vestibular.

Na TP3.2, os trabalhos elencados abordam com mais profundidade o PMA e as características que surgem neste processo de transição entre os PME e PMA. De modo geral os trabalhos investigam os aportes/características que surgem do PMA nos sujeitos participantes da pesquisa, observando se de fato chegam ao Mundo Formal citado na Teoria dos Três Mundos da Matemática.

Na subdivisão TP3.3, referente ao Quadro Teórico de Tall, os trabalhos que a compõe podem ser divididos como os que estudam:

a) Teoria dos Três MUNDOS: constitui-se de trabalhos que investigam, associam e observam a relação com os Três Mundos da Matemática de maneira a identificar em que "mundo" cada sujeito se encontra, seja corporificado, simbólico ou formal e se ainda existe uma transição entre esses "mundos" de maneira a identificar característica que demonstrem este processo.

b) Já-encontrado: concentra os trabalhos que reportam a respeito do Quadro Teórico, mas com ênfase nos já-encontrado que são experiências anteriores a respeito de assuntos já apresentados e que fazem ou não sentido em um novo aprendizado, uma nova situação, de modo que classifique se esses já-encontrados são de apoio ou problemático, isso quando é proposto ao sujeito uma situação nunca vista por ele antes, ao qual vai utilizar de procedimentos e conceitos já utilizados, mas que no momento requerem um aprofundamento. Categoria IV: Conteúdos da Matemática (CM) - esta categoria se divide em subcategorias que representam assuntos específicos da matemática. No Quadro 8, são apresentados as subcategorias e os trabalhos.

Quadro 8: Subcategorias da categoria Conteúdos da Matemática -CM

Subcategorias	Descrição	Trabalhos
CM1	Cálculo	T4, T6, T15, T20, T23, T26 e T31
CM2	Análise Combinatória	T19
CM3	Funções	T3
CM4	Números	T16
CM5	Ângulo e Paralelismo	T13
CM6	Proporcionalidade	T7 e T14
CM7	Transformações Lineares	T10
CM8	Anéis de Polinômios	T17
CM9	Teorema de Pitágoras	T35

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

As subcategorias CM1 e CM6 obtiveram maior número de trabalhos, com sete e dois, respectivamente. Os trabalhos da CM1 envolvem o conteúdo da disciplina de Cálculo Diferencial Integral no ES, como por exemplo, conceito de limite, estudo de derivadas, integrais, sequência e séries numéricas. De modo geral focam no ensino e aprendizagem do Cálculo, de modo específico, procuram fazer uma “ponte” com a Teoria dos Três Mundos da Matemática para observar a existência de características claras destes “mundos” e se os sujeitos quando o caso, chegam a fazer uma “viagem” ou até mesmo permanecem no Mundo Formal, mundo dos axiomas, demonstrações e provas matemáticas.

Os demais trabalhos das outras subcategorias, focam no Conceito-Imagem da temática abordada manifestados quando exposto às atividades de resolução de problemas sobre os assuntos descritos no Quadro 8.

Após as categorizações e análise dos trabalhos, pode-se concluir que o interesse da comunidade científica pela Teoria dos Três Mundos da Matemática de David Tall teve crescimento a partir de 2018, a maioria dos trabalhos foram aplicados em sala de aula e grande parte dos trabalhos surge em IES que possuem grupos de pesquisa consolidados sobre a temática. Nota-se a existência de poucos trabalhos atribuídos a educação básica e formação continuada, enquanto um número expressivo de trabalhos é voltado ao desenvolvimento do PMA no ensino superior, pois de certa forma é mais comum identificar este tipo de pensamento no Mundo Formal.

Entre as temáticas abordada na pesquisa, a maioria dos trabalhos tratam de aspectos relacionados aos estudos de Tall, sendo a Teoria dos Três Mundos o mais estudado, seguido do Pensamento Matemático Avançado. Parte significativa dos trabalhos abordam as Tendências da Educação Matemática, sendo a Resolução de Problemas e a Modelagem Matemática as tendências mais utilizadas como alternativa pedagógica e prática investigativa afim de identificar e estabelecer conexões com os Três Mundos da Matemática, e o Cálculo se apresenta como o conteúdo de matemática mais estudado nas pesquisas.

Considerando os 36 trabalhos investigados, observa-se que apenas cinco estão atrelados ao estudo dos já-encontrados como objeto de pesquisa, destes, somente o T16 tem como sujeitos alunos do ensino médio, aborda o conceito e definição de números. Nota-se a escassez de trabalhos voltados para o estudo dos já-encontrados e ainda no nível do ensino básico. Apesar de se encontrar práticas pedagógicas para investigação deste assunto em alguns trabalhos, pouquíssimos estão voltados para atividades, tarefas matemáticas onde exista a possibilidade de surgir características dos Três Mundos da Matemática, ou seja, de buscar compreender como os alunos pensam matematicamente no momento de solucionar uma tarefa, utilizando-se de experiencias matemáticas de assuntos já estudados e se estes funcionam em novas situações. Ainda, é possível ressaltar que o estudo de funções foi abordado apenas no T3, entretanto a pesquisa foi realizada abordando a definição de Conceito-Imagem voltado aos Três Mundos da Matemática com alunos do 2º ano do Ensino Médio. Neste sentido, observa-se como lacuna nesta revisão sistemática, pesquisas com ênfase nos já-encontrados que podem surgir ao se realizar tarefas relacionadas as Funções Quadráticas com turmas do primeiro ano do Ensino Médio, a fim de apontar características do Quadro Teórico dos Três Mundos da Matemática.

CAPÍTULO 2 - MATEMÁTICA E DESAFIOS

Este Capítulo se constitui de duas seções, a primeira apresenta um contexto sobre as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de matemática no Brasil, em específico alguns obstáculos que são apontados no ensino e aprendizagem das Funções. A outra seção aborda aspectos da Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), estratégia metodológica proposta por Simon (1995), que nesta pesquisa de mestrado foi desenvolvida referente a uma tarefa com o conteúdo de Função Quadrática, com implementação em uma turma do1º ano do ensino médio.

2.1 AVALIAÇÕES X DESEMPENHO

As avaliações são utilizadas constantemente em sala de aula e são vários os tipos de avaliação que o professor utiliza para averiguar o aprendizado dos alunos. O uso de avaliações é necessário entre outras coisas para que o professor possa verificar o quanto e como seus alunos estão aprendendo, quais assuntos apresentam maior dificuldade e a partir do diagnóstico poder rever e planejar as próximas ações em sala.

As avaliações podem ocorrer por meio de resolução de problemas, ao se utilizar um jogo, aplicativo ou software na resolução de atividades que tenham sido devidamente pensadas com objetivos claros do que se deseja que o aluno aprenda. Entretanto, o sistema implantado em nossas escolas, desde o século passado foca no que chamamos de provas escritas, visando muitas vezes o valor da “nota” que o meu educando atingiu, esquecendo-se muitas vezes que o ser em foco está em processo de aprendizado do primeiro ao último dia letivo. Segundo Buriasco (2009, p. 72) ao citar Barlow (2006) a aplicação da prova escrita materializa o mito de avaliar, como se fosse um rito a ser seguido, ou seja, a crença na precisão da nota por esta ter seu valor numeral exato.

O que os estudiosos de avaliação apontam é que o problema não está em utilizar como forma de avaliação as provas escritas, mas sim o significado dado a todo o processo, no sentido de rotular e ranquear os alunos pelo valor tirado nas provas sem levar em consideração outros aspectos.

O sistema educacional brasileiro também possui formas de avaliar o aprendizado dos estudantes das diversas escolas em todo o território nacional, utilizando exames padronizados aplicados a determinado grau de escolaridade chamados de exames de larga escala ou avaliações externas.

De acordo com o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) - autarquia federal vinculada ao Ministério da Educação (MEC) - por meio do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), percebe-se que o aprendizado de matemática no Ensino básico caiu nos últimos 10 anos.

Os dados que compreendem o período de 2007 a 2017, apontam para uma queda de 0,7 pp (ponto percentual) no conhecimento e habilidades dos alunos nesses últimos anos, ou seja, os alunos desta década estão saindo do Ensino Médio sabendo menos do que os alunos de uma década anterior. Isso piora quando focado na escola pública, em que o ponto percentual cai para 0,4pp sem considerar raça e nível socioeconômico.

Ainda em relação a este cenário, o movimento “Todos pela educação” em parceria com Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) constatou que “59,2% dos jovens com 19 anos concluíram o Ensino Médio” IBGE/PNAD (2017)[8], o que significa, que a cada 100 jovens com 19 anos, 41 não concluíram o Ensino Médio. Este pode ser um indicativo das dificuldades encontradas no processo escolar, contudo sabemos que não é o único.

Em relação às avaliações internacionais, o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), realiza uma avaliação a cada triênio, aplicada de forma amostral a estudantes matriculados no Ensino Fundamental com faixa etária de 15 anos, a fim de avaliar o desempenho dos estudantes no intuito de identificar as falhas e possíveis lacunas noEnsino da Língua Portuguesa, Ciências e Matemática.

A última avaliação realizada pelo PISA foi em 2018 e, os resultados, colocam o Brasil como 71º colocado entre os 79 países participantes na área de Matemática com 384 pontos bem abaixo da média da Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE)[9] que é de 487 pontos. E se não bastasse a

[8]https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/28285-pnad-educacao-2019-mais-da-metade-das-pessoas-de-25-anos-ou-mais-nao-completaram-o-ensino-medio
[9]http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil/21206

pontuação abaixo da média, 43% do total de estudantes não alcançou o mínimo exigido em cada área do conhecimento: Matemática, Leitura e Ciências, sendo em matemática o menor rendimento comparado a média do (OCDE) que envolve 36 países participantes. Esse é um dos diversos dados registrados atualmente os quais mostram o baixo desempenho dos estudantes brasileiros e que preocupa os educadores e comunidade.

Em contrapartida, os últimos dados de 2019 publicados pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) mostram uma melhora neste quadro de desenvolvimento do aprendizado em matemática no que diz respeito ao Ensino Médio. Segundo o (Saeb)[10]"Desde 2009, as médias não apresentavam evolução considerável e mantinham-se praticamente estagnadas, nas duas disciplinas avaliadas: língua portuguesa e matemática. Nesta edição, língua portuguesa e matemática, as notas subiram 10 e 7 pontos, respectivamente."

De forma geral, nas avaliações externas os alunos brasileiros não têm demonstrado um nível de conhecimento matemático considerado como adequado para o nível de ensino que se encontram. O baixo rendimento no aprendizado de matemática é preocupante, pois é uma disciplina indispensável tanto no meio escolar como no dia a dia do aluno.

Na prática docente as avaliações somativas e formativas são presentes, assim como a busca porestratégias metodológicas que possam contribuir com o aprendizado e desenvolvimento dos educandos. No entanto as ações docentes esbarram em dificuldades que surgem de fatores diversos como infraestrutura, número de estudantes por sala, pouco tempo disponível para aula-preparo, entre outras.

Diversos são os obstáculos encontrados no dia a dia em sala de aula pelos docentes, situações que por muitas vezes dificultam o trabalho e planejamento. Na sequência alguns apontamentos na seção a seguir que talvez auxilie na compreensão destes dados.

2.1.1 Aprendizagem da Matemática

Os desafios que encontramos nas salas de aulas são diversos e em vários contextos, social, didático, pedagógico e de aprendizagem, entre outros. A respeito

---

[10]http://undime.org.br/noticia/16-09-2020-09-24-inep-divulga-resultados-do-saeb-2019

deste último, percebemos que na matemática aparentam ser maiores, devido as dificuldades manifestadas por grande parte dos alunos. A matemática ainda é vista como complexa e de difícil entendimento. Apesar do aluno, muitas vezes desenvolver tarefas de rotina em que se usa os conhecimentos prévios, ao se deparar com uma tarefa mais sistematizada, considera que não possui conhecimento suficiente.

Neste contexto, um dos questionamentos que sempre surge se refere aos fatores que implicam em tantas dificuldades no processo de ensino e aprendizagem da matemática. O assunto é tema de muitas pesquisas na literatura, como por exemplo, os estudos de Pacheco e Andreis (2018) e Masola e Allevato (2019).

As dificuldades relativas à matemática estão imbricadas em todo o processo de ensino e de aprendizagem, e abrange o professor, o aluno, a escola e a própria família. Estas dificuldades podem

> [...] estar relacionadas a impressões negativas oriundas das primeiras experiências do aluno com a disciplina, à falta de incentivo no ambiente familiar, à forma de abordagem do professor, a problemas cognitivos, a não entender os significados, à falta de estudo, entre outros fatores.(PACHECO e ANDREIS, 2018, p. 106)

Neste contexto, percebe-se que o aluno pode trazer de casa crenças negativas em relação à matemática dos próprios familiares, que muitas vezes não dão suporte por “nunca terem sido bons em matemática” ou “não gostarem de matemática”, assim como, das próprias experiências matemáticas vivenciadas anteriormente.

Masola e Allevato (2019, p. 59), ao citarem Garcia (1998), apontam que as dificuldades de aprendizagem dos alunos podem também estar relacionadas aos de ordem neurológicas, que não é o foco no momento.

As dificuldades também podem ser “oriundas dequestões metodológicas inadequadas, professoresmalqualificados, de uma infraestrutura escolar insuficiente” (PACHECO e ANDREIS, 2018, p. 107). Embora a carreira docente e o fomento para subsidiar a educação brasileira sejam um problema de longa data, é possível, mesmo com poucos recursos, procurar se atualizar em relação as novas práticas metodológicas.

No trabalho de Masola e Allevato (2019), em que trazem estudos de diversos autores para subsidiar a reflexão sobre as dificuldades de aprendizagem de matemática, destacam a importância da matemática na sociedade contemporânea, e apontam a articulação das informações do cotidiano com a formalização dos conhecimentos escolares, como o principal desafio no trabalho docente.

Outros aspectos relacionados as dificuldades de aprendizagem de matemática são abordadas nos resultados de uma pesquisa investigativa com alunos do ensino médio, sendo apontado a "falta de base no Ensino Fundamental e a necessidade de decorar fórmulas e regras como dificultadores para o aprendizado da Matemática" (MASOLA; ALLEVATO, 2019, p. 62).

Pacheco e Andreis (2018) desenvolveram uma pesquisa de campo sobre os motivos que levam os alunos a terem dificuldades em matemática, participaram dos estudos alunos concluintes do ensino médio e seus respectivos professores. Como resultado

> [...] evidenciou-se também que as causas das dificuldades de aprendizagem em Matemática podem ainda estar associadas à falta de compreensão de determinados conteúdos, ao esquecimento de conteúdos trabalhados anteriormente, à dificuldade de concentração, à falta de compreensão e interpretação, à forma com que o professor apresenta o conteúdo, entre outras. (p. 117)

Os autores apontam ainda que na maioria das respostas de professores e alunos aparece que "os alunos não se lembram de conteúdo das séries anteriores" (PACHECO e ANDREIS, 2018, p. 107). Para que isso não ocorra, o conhecimento precisa ser construído para ter significado, assim, compreender como ocorre o desenvolvimento do pensamento matemático pode auxiliar a amenizar as dificuldades de aprendizagem da matemática.

O conhecimento matemático abordado na educação básica levou séculos para ser construído e sistematizado, o processo de aprendizagem pelo estudante também passa por fases que envolvem a maturidade cognitiva, a sua percepção de mundo, a forma como o conhecimento é construído a partir daqueles já adquiridos. Para Tall (2002) esses processos ao qual nos referimos anteriormente são "processos mentais" associados ao pensamento matemático, para Dreyfus(1991) "processos cognitivos" relacionados aos conceitos que utilizamos na aprendizagem da matemática.

Neste contexto, cabe ao professor identificar os conhecimentos prévios já compreendidos e os que não estão ainda estruturados, estimulando a busca do novo utilizando o que é conhecido. O desenvolvimento do Pensamento Matemático ocorre ao possibilitar que o próprio estudante investigue o assunto tratado, busque reconhecer por meio de suas experiências ao longo dos anos escolares, os conhecimentos já adquiridos sobre o assunto para que em uma situação nova saiba ao menos buscar caminhos de como resolver tal situação. Neste sentido Palharini (2010, p.23) coloca que "as experiências de ideias prévias podem entrar em conflito com as novas ideias e conduzir a "idas" e "vindas" entre estes estágios", permitindo assim que o aluno desenvolva este pensamento matemático.

O estudante pode e consegue ir e vir entre os Três Mundos da Matemática, apresentando interação entre corporificações, símbolos e formalismos, mas claro que no Mundo Formal nem sempre é possível alcançá-lo em sua plenitude e para Schastai, 2017 "a intenção não é de que todos desenvolvam o pensamento matemático até o nível formal, mas que seja dada a oportunidade a todos e que todos que queiram possam desenvolvê-lo" (p. 67) e quando ocorre são poucos os que conseguem, contudo, essa transição é a prova de que o Pensamento Matemático está sempre em desenvolvimento. Para Tall (2013) essa conexão entre os três mundos da matemática que dá sentido a matemática e ao desenvolvimento deste pensamento matemático.

2.1.2 Aprendizagem de Funções

Ao trabalhar as funções, pensamos em variáveis que representam grandezas que se relacionam por dependência. O preço pago na bomba de combustível é proporcional a quantidade de litros colocados, o valor pago depende da quantidade de litros, ou seja, a variável preço depende da variável litros. Embora, aparentemente é razoável e simples de entender essa relação, quando usada a linguagem algébrica que representa essa relação gera dúvidas, principalmente no processo que envolve os conceitos acerca de funções na transposição para a representação gráfica da relação e vice-versa.

O estudo de funções é importantíssimo, pois

> [...] permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e

> permitindo várias conexões dentro e fora da Matemática. Assim, a ênfase no estudo das diferentes funções deve estar no conceito de funções e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções (BRASIL, 2002, p. 121).

Um dos aspectosque dificultam a aprendizagem de funções mencionado por Oliveira(1997) refere-sea apresentação que os livros didáticos trazem a respeito do tema. Segundo o autor os livros didáticos têm grande influência no ensino dos conceitos de funções na prática docente. Oliveira(1997) desenvolveu uma pesquisa sobre a abordagem do assunto de funções em livros didáticos e aponta a forma tecnicista e desconexa do cotidiano que alguns livros trazem. Outro ponto citado é a linguagem e notação utilizada nos conceitos de função, de modo que estes não fiquem claro para o aluno, dificultando o entendimento. Em alguns livros o assuntoé apresentado de forma aligeirada, em poucas páginas todos os conceitos envolvidos como domínio, conjunto imagem e contradomínio, forma algébrica, construção da tabela, e construção do gráfico no plano cartesiano, assim

> não é dado ao aluno tempo necessário para o amadurecimento e acredita-se que o aluno é capaz de reificar[11] a concepção de função em mais ou menos dois meses! (SCHWARZ 1995, p.161)

Neste sentido, quanto mais resumido e “pronto” for a abordagem para o aluno, mais difícil torna-se sua compreensão, mesmo que estetenha um conhecimento prévio dos conceitos de funções.

Outro fator apontado por Oliveira (1997, p. 33) que pode interferir na aprendizagem de funções são os obstáculos epistemológicos e didáticos, como por exemplo, entender os conceitos de razão e proporção quando se trata das variáveis dependente e independentes, se cresce ou decresce, diretamente ou inversamente proporcionais.

Na aprendizagem de função, para o aluno é difícil,

> a transposição do problema para a expressão; transferi-las para a realidade; o domínio da função; análise de gráficos; representação gráfica; associarem grandeza variável; a abstração, com rigores matemáticos dos conceitos; a simbologia; a lei de correspondência; a definição abstrata e as diversas representações de função. (BRANDÃO 2014, p.18)

---

[11]Segundo Anna SFARD (citada em SCHWARZ, 1995), reificação é uma habilidade de ver uma nova entidade (função) como um objeto permanente. Sem reificação, a noção do aluno sobre o conceito de função permanece puramente operacional, ou seja, ele a concebe como um procedimento computacional

Neste contexto, é importante que o professor observe as lacunas na construção dos conceitos envolvidos acerca do assunto funções, precisa levar em consideração o processo de desenvolvimento do pensamento matemático envolvido na temática. Assim, compreender elementos/aspectos de como os indivíduos aprendem a pensar matematicamente, sob a ótica do Quadro Teórico de Tall pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem, minimizando as dificuldades na aprendizagem da matemática.

Neste sentido, afim de possibilitar que se investigasse as características do Quadro Teórico dos Três Mundos da Matemática que podem surgir ao se realizar uma tarefa sobre Funções Quadráticas, foi pensado como estratégia metodológica o uso de uma trajetória hipotética de aprendizagem (THA) que é detalhada na próxima seção.

2.2THA COMO ESTRATÉGIA PARA INVESTIGAR O PM

Em diversas situações do dia a dia em sala de aula, os estudantes quando se deparam com tarefas[12] rotineiras, agem de certa forma mecânica, utilizam sempre o mesmo procedimento, muitas vezes orientado pelo próprio docente, deixando de lado o fazer matemática, agindo repetidamente, usando aquela fórmula, aquele “macete”, aplicando aquele mesmo “jeito” de solucionar a tarefa proposta pelo professor.

O termo rotineiro traz a ideia do modo “automático”, em que se apresenta o assunto, dá um exemplo e em seguida utiliza a mesma maneira de resolução para uma sequência de diversos problemas do mesmo tipo. Enquanto, não rotineiro remete a situações mais contextualizadas, que exigem do estudante conhecimentos novos e não apenas os adquiridos anteriormente, que ao conseguirem resolver indicam se houve compreensão.

No planejamento do docente, é importante destacar o que se espera que os alunos alcancem, como o objetivo almejado a partir da tarefa proposta, que quando selecionada “corretamente”:

[12] entendemos por “tarefa” quando o professor propõe problemas, exercícios que constituem o ponto de partida para o desenvolvimento da atividade matemática do aluno. (MENDES, 2014, p.23)

> - permite que o processo de aprendizagem seja transparente para os professores e para os estudantes;
> - Oportuniza ir de competências básicas para o pensamento de ordem superior;
> - são familiares aos estudantes;
> - oferecem oportunidade para matematização[13];são resolvíveis de formas diferentes em diferentes níveis. (MENDES, 2014, p. 25)

Podemos também associar esse fazer matemática e as resoluções de tarefas com a transição entre os Três Mundos da Matemática.

Este composto pelo Corporificado, Simbólico e Formal, mundos estes que identificamos pelas características de percepção, simbolismo, formalismo das ideias e procedimentos utilizados de acordo com o assunto trabalhado.

Principalmente quando o estudante identifica os conceitos e consegue utilizar processos mais sutis utilizados anteriormente em situações novas.

Neste momento, os estudantes podem estar apresentando característicasdo Mundo Formal em situações de níveis diferentes.

Os conhecimentos matemáticos historicamente sistematizados, usualmente denominados, no contexto escolar, objetos de estudo/ensino ou conteúdos programáticos foram, ao longo do tempo, elaborados/construídos a partir do desenvolvimento de processos cognitivos que fazem parte do Pensamento Matemático.

Para Tall (2013), o desenvolvimento do Pensamento Matemático, se dá a partir dos *"*já-estabelecido" e dos "já-encontrado*",* ou seja, dos dispositivos com os quais nascemos e da estrutura mental que temos em nosso cérebro resultante de experiências vivenciadas anteriormente. Ao investigar o desenvolvimento do PM, é possível associar algum processo ou estratégia de aprendizagem. Na literatura estudos que auxiliam como instrumento de ensino o desenvolvimento do aluno no âmbito escolar também podem auxiliar neste processo, como o caso da Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

Martin Simon, pesquisador americano, em uma perspectiva construtivista, no ano de 1995, apresentou o que ele denominou de Trajetória Hipotética de Aprendizagem – THA. Inicialmente apresentou o Ciclo de Ensino de Matemática

[13]uma atividade organizada. Ela refere-se à essência da atividade matemática, à linha que atravessa toda educação matemática voltada para a aquisição de conhecimento factual, à aprendizagem de conceitos, à obtenção de habilidades e ao uso da linguagem e de outras organizações, às habilidades na resolução de problemas que estão, ou não, em um contexto matemático (TREFFERS, 1987, p. 51-52)

(que será apresentado na sequência, figura 2),no qual a THA faz parte e com o objetivo de mostrar como é a interação dos conhecimentos do professor, suas ações e pensamentos perante seu planejamento, levando sempre em conta as possíveis modificações necessárias de acordo com intervenções dos estudantes, as dúvidas e questionamentos que surgem ao longo do processo de ação em sala de aula, dando oportunidade para replanejamentos e novas ações.

É necessário pensar o ensino, além das ações de apresentar um conteúdo, explicar, mostrar procedimentos de cálculo, propor exercícios de repetição, com isso, podemos afirmar que um planejamento como um roteiro único de aprendizagem, não é viável. Para Simon (1995)todo planejamento necessita de pequenas ou grandes alterações, a partir do posicionamento dos alunos, das resoluções, das dúvidas, das certezas.

Um processo de ensino que oportunize aos estudantes o desenvolvimento do pensamento matemático, exige do professor, uma dinâmica de sala de aula em que a interação entre aluno(s)/aluno(s) e aluno(s)/professor ocorra naturalmente. A partir dessas interações, o professor faz suas interferências e modifica o planejamento inicial pensando em novas estratégias e novas ações que busquem contemplar as dúvidas e questionamentos dos seus alunos, e deve estar sempre aberto para modificar e replanejar quando necessário, principalmente na escolha das tarefas.

A THA, do nosso ponto de vista, é uma forma de trabalho que pode desvelar e auxiliar na investigação de características do desenvolvimento do Pensamento Matemático. Nesta perspectiva, na próxima seção, apresentamos as ideias centrais da Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

2.2.1 Conhecendo uma THA – Trajetória Hipotética de Aprendizagem

Para Simon (1995), a aprendizagem é individual, ou seja, cada aluno é construtor do seu próprio conhecimento. O professor é o guia, o mentor, o mediador, que propõe atividades, faz perguntas, avalia, desafia novas descobertas, dá um *feedback*. Contudo, a

> [...] aprendizagem é um processo individual e social de construção onde o professor faz a mediação por meio da utilização de trabalhos estruturados e onde o aprendizado dos alunos é compreendido. (SIMON, 1995).

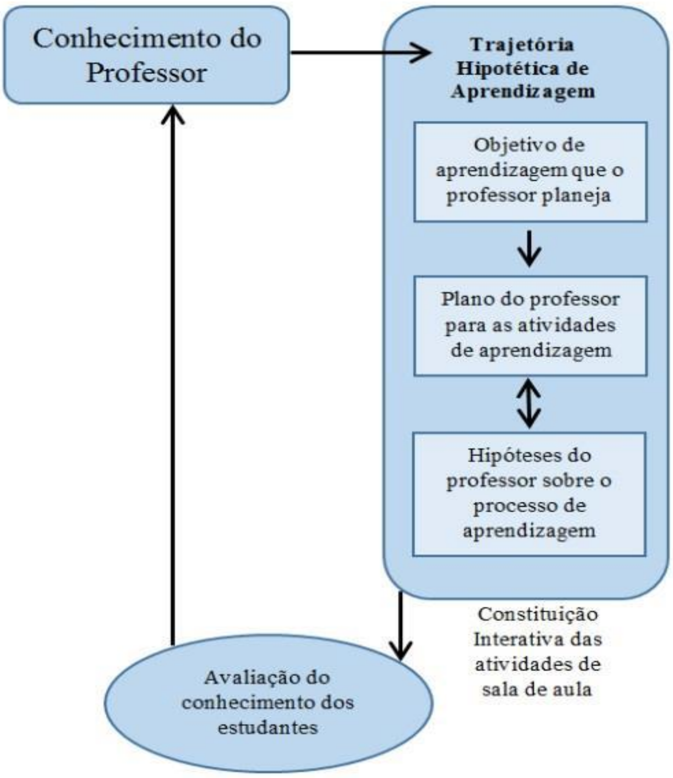
Neste sentido, a THA configura-se como um planejamento/um percurso possível por meio do qual o professor pode ter indícios do que vai ocorrer durante o processo de aprendizagem, “eu uso o termo trajetória hipotética de aprendizagem para me referir a previsão do professor como um caminho pelo qual a aprendizagem pode ocorrer” (SIMON, 1995, p. 135).

O autor utiliza a expressão hipotético no sentido de que se trata de uma “ideia” ou “sugestão” do que pode ocorrer no processo de aprendizagem.

> É hipotético porque a trajetória real de aprendizagem não é conhecida previamente. Ela caracteriza uma tendência esperada. A aprendizagem individual dos estudantes ocorre de forma idiossincrática, embora frequentemente em caminhos similares. (SIMON, 1995, p. 135)

Ainda que seja uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem, no sentido de ser “apenas” uma hipótese, ela exerce um papel importante dentro do Ciclo de Ensino da Matemática. Na Figura 2, apresentamos o Ciclo de Ensino da Matemática proposto por Simon.

Figura 2 – Ciclo de Ensino de Matemática



Fonte: Oliveira (2015). Adaptado de Simon (1995)

Nesse Ciclo de Ensino da Matemática podemos observar duas tríades, uma, em um sentido mais amplo, que inclui o conhecimento do professor o qual deve levar em consideração o domínio do assunto abordado, a avaliação do conhecimento dos alunos que acontece em todos os momentos antes e após as tarefas propostas e a trajetória hipotética de aprendizagem que realmente vem como uma hipótese do que pode ocorrer, e a outra, que está inserida na trajetória hipotética de aprendizagem e que se refere a constituições das atividades de sala de aula, incluindo objetivo de aprendizagem, o plano do professor e as hipóteses do professor sobre o processo de aprendizagem.

Se compararmos um planejamento de aula, desses que usualmente elaboramos para ministrar aulas com a Trajetória Hipotética de Aprendizagem, podemos observar elementos comuns tais como objetivos de aprendizagem, planejamento de atividades de ensino, avaliação. No entanto, na THA há outro elemento, a hipótese de como o aluno aprende, que exige do professor, o “olhar” para a “forma de pensar do aluno”, ou seja, o observar/avaliar a partir dos registros dos alunos, dos seus comentários, das suas reações diante de uma tarefa proposta, a trajetória de aprendizagem desse estudante, para uma intervenção mais acertada.

Antecipar, em um planejamento, a possível trajetória de aprendizagem dos estudantes é um avanço, no sentido de que, na prática, oportuniza a interação alunos/alunos, professor/aluno, e um aprendizado a partir dos denominados por Tall (2013), “já-estabelecido”, ou seja, as experiências adquiridas e que podem auxiliar em novos aprendizados.

Para Simon, uma THA pode ser comparada como um planejamento de viagem,

> em que você recolhe informações a respeito dos lugares que pretende conhecer e formula um plano para essa viagem, de maneira que busque esgotar suas dúvidas a respeito de cada lugar que desejará passar. Porém, no decorrer podem acontecer alguns fatores que influenciem nesse planejamento. Sendo assim, o caminho pelo qual você viaja é a sua trajetória e o caminho que você havia planejado é a sua trajetória hipotética. (SIMON 1995, citado por GOIS 2017, p. 9)

Perfazendo uma ponte paralela a este exemplo da viagem, olhando para o planejamento do professor, percebe-se que o docente investe muitas vezes em tarefas repetitivas, rotineiras. Para elaboração de uma THA, é necessário elaborar algumas tarefas não corriqueiras para o aluno, garantindo uma maior chance de proporcionar um raciocínio mais investigativo por parte do aluno, com hipóteses de como ele pode resolver e as dúvidas que podem surgir. Contudo, isso não garante que situações que não estavam no planejamento surjam, como dúvidas não levantadas pelo próprio professor, mas que o aluno tem consigo em uma situação proposta, assim, percebemos que todo planejamento pode sofrer alterações a qualquer momento.

Para melhor compreensão destas ideias abordadas até o momento a respeito da THA se faz necessário compreender a construção de toda essa “viagem” que é apresentada na sequência.

2.2.2 Trajetória Hipotética de Aprendizagem: construção

Segundo Simon (1995) os objetivos, as tarefas e os alunos que estarão envolvidos no processo de aprendizagem são elementos principais na construção de uma THA, e esta, por sua vez, proporcionará ao professor a possibilidade de tomar decisões no processo educacional, baseado em suas suposições de como o conhecimento poderia ser construído. No entanto é importante destacar a experiência docente, pois é necessário ter noção de como os alunos concebem os conceitos matemáticosabordados em sala.

Só é possível a construção de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem se forem traçados objetivos, selecionadas as tarefas que possam desencadear no aluno a atividade de pensar e as hipóteses das possíveis respostas que este pode apresentar de forma que o aluno seja o protagonista do seu aprendizado.

Para Simon são três os componentes principais de uma THA: os objetivos de aprendizagem, as atividades de aprendizagem e as hipóteses sobre o processo de aprendizagem e, “talvez, o maior desafio na utilização de uma trajetória hipotética de aprendizagem elaborada para o desenvolvimento de um conteúdo seja a identificação da atividade mental que pode levar ao conceito independente” (SIMON; TZUR, 2004, p. 102).

Muitas vezes o conteúdo não é a única coisa que importa no processo de ensino e aprendizagem, contudo interfere, pois quando se utiliza ferramentas como por exemplo a THA o conteúdo pode neste caso auxiliar no momento de identificar os já-encontrados. Segundo Rossetto (2016) os três momentos que compõe a construção de uma THA, planejamento, processo e replanejamento, apresentam algumas características que são destacadas no Quadro 9.

Quadro 9 – Ações que representam os três pontos de vista da THA

ELABORAÇÃO (planejamento)	• as tomadas de decisões do professor a respeito dos conteúdos e dastarefas; • previsão do professor sobre a trajetória que possibilitaráa aprendizagem; • diálogos hipotéticos entre professor ealunos;previsão de perguntas que podem levar os alunos a refletirem, pensarem a respeito datarefa.
EXECUÇÃO (processo)	• o pensamento/ entendimento dos estudantes tem lugar central na estruturação e implementação das tarefas de ensino; • podemocorrerimprevistosqueexijamnovasdecisõespara a continuidade dotrabalho; • o professor está continuamente empenhado em ajustar a trajetória de aprendizado que ele“hipotetizou; • alteraçõesemodificaçõespodemserfeitasemumoutodos os três componentes da trajetória hipotética de aprendizagem; • osestudantestambémfazemperguntas,eoprofessorque encaminha a THA a partir das possíveis dúvidas e perguntas deles.
DEPOIS DA EXECUÇÃO (replanejamento)	• a avaliação do conhecimento do aluno por parte do professor pode trazer ajustes a respeito de qualquer conhecimento doaluno; • o plano para sala de aula, poderá ser repensado, modificado, pois as interações professor – aluno e as observaçõesdoprofessorpodemfazercomqueisso ocorra.

Fonte: Rossetto 2016.

De acordo com o processo de elaboração, o professor precisa ter cautela na escolha do assunto que será abordado na THA, na escolha da tarefa que contemple o assunto trabalhado sem focar apenas na aplicação ou apenas na teoria, mas imaginando as possíveis perguntas e questionamentos dos seus alunos.

Na execução, mesmo com todo planejamento pensado elaborado e encaminhado pelo professor, situações inesperadas podem e vão ocorrer e que de certa forma será exigido do docente um “plano B”, uma nova estratégia a qual provavelmente não estava prevista na elaboração do planejamento da THA, mas que pode ser revisto no próprio replanejamento. Neste sentido que adentramos no replanejamento, pós execução das tarefas e objetivos traçados, o momento em que o professor faz uma análise de tudo, buscando acrescentar, reorganizar as elaborações previstas e não previstas de modo a melhorar sua THA.

Em síntese, podemos observar que, o pensamento, perguntas, dúvidas, execução das tarefas, são ações do aluno, e que o planejamento, alterações no mesmo, tomadas de decisões, replanejamento, são ações do professor. No próximo capítulo apresentaremos a Trajetória Hipotética de Aprendizagem referente a uma tarefa com o conteúdo de Função Quadrática, que foi implementada com uma turma de 1º ano do Ensino Médio em um Colégio Estadual da cidade de Ponta Grossa, em que o pesquisador atua como professor. Na pesquisa realizada buscou-se por meio da THA, analisar aspectos do pensamento matemático à luz do Quadro Teórico dos Três Mundos de Tall.

CAPÍTULO 3 - METODOLOGIA DE PESQUISA

Este capítulo constitui-se de duas seções sendo que a primeira apresenta os encaminhamentos metodológicos adotados caracterizando a abordagem metodológica escolhida,o campo e sujeitos de pesquisa, processo de coleta, tratamento e análise dos dados.A segunda seção destina-se a apresentação do planejamento da THA proposta.

3.1 PROCEDIMENTO METODOLÓGICO

A partir da escolha da temática, Desenvolvimento do Pensamento Matemático e o Quadro Teórico dos Três Mundos da Matemática de Tall, inicialmente fez-se uma revisão de literatura, descrita em detalhes na seção 1.2, no intuito de procurar lacunas existentes sobre a temática, as quais contribuíram na escolha do problema de pesquisa e os objetivos desta dissertação.

Neste sentido, apesquisa em tela tem por objetivo investigar quais características dos Três Mundos da Matemática podem surgir na resolução deuma tarefa envolvendoFunções Quadráticas, proposta por meio de uma trajetória hipotética de aprendizagem.

3.1.1 Caracterização e sujeito da pesquisa

A fim de alcançar os objetivos propostos e responder à questão norteadora da pesquisa, os procedimentos metodológicos foram planejadose conforme a necessidade eram ajustados.

Neste trabalho optou-se pela abordagem qualitativa, que segundo (Bogdan&Biklen, 1994, p.47) caracteriza-se pela fonte de dados ser o ambiente natural, em que o investigador se torna o instrumento principal, a investigação pode ser descritiva, o processo de investigação é mais importante que o resultado, a análise dos dados pode ocorrer de forma indutiva eo pesquisador se preocupa mais com o “significado” que as pessoas dão às coisas.

Com estas características em mente, o ambiente de pesquisa escolhido foi a própria sala de aula onde o professor/pesquisador trabalhou no ano de 2021 em um colégio público do estado do Paraná, na cidade de Ponta Grossa. Os sujeitos/participantes da pesquisa eram alunos do 1º ano do ensino médio, os quais participaram de uma intervenção em sala, em que resolveram uma tarefa envolvendoFunções Quadráticas.

O investigador, preocupado com o processo do desenvolvimento do pensamento matemático optou pela utilização de uma THA. O percurso na construção do conhecimento de cada estudante é único, a aprendizagem é individual, então ao planejar uma THA com a proposta de uma atividade, com perguntas, instigando e dando *feedback* para possíveis dificuldades, tínhamos em mente identificar os já-encontradosque pudessem surgir no desenvolvimento da tarefa à luz do Três Mundos da Matemática.

Este trabalho se enquadra como pesquisa aplicada quanto a sua natureza, pois “objetiva gerar conhecimentos para aplicação prática, dirigidos à solução de problemas específicos. Envolve verdades e interesses locais” (GERHARDT e SILVEIRA, 2009, p. 35). No caso, almeja por meio da problematização das possíveis respostas que os estudantes forneceram na resolução da tarefa proposta por uma THA, descrever e discutir a respeito das diferentes formas que os estudantes podem pensar matematicamente e relacionar com aspectos do Quadro Teórico dos Três Mundos da Matemática de Tall, assim, espera-se auxiliar o professor a identificar dificuldades no processo.

3.1.2 Coleta de dados

A coleta de dados ocorreu por meio de dois instrumentos: as anotações feitas pelos alunos em folhas de papel acerca da tarefa de Função Quadrática que foi desenvolvida por meio de uma THA, que é apresentada na próxima seção,e o outro instrumento trata-se da gravação do áudio da aula que depois foi transcrito e analisado com os demais dados.

A Função Quadrática foi o assunto escolhido por ser um conteúdo da matemática que os alunos apresentam dificuldades como por exemplo, a escrita algébrica da situação descrita em linguagem materna, transposição para a construção gráfica, busca e interpretação das raízes da função, entre outras.

Outro motivo da escolha do assunto, deve-se ao fato dele ter sidotrabalhado anteriormente com a turmapelo professor/pesquisador, tornando o momento como oportunidade de verificar os conhecimentos previamente estudados em sala de aula sobre função quadrática, como reconhecimento de uma função do segundo grau, coeficientes da função, raízes ou zeros da função, máximos e mínimos e construção do gráfico da função quadrática.

Por meio da resolução dos alunos, espera-se identificar quais possíveis já-encontrados surgem, e ainda, busca-se associar a qual dos Três Mundos da Matemática está relacionado. A THA elaborada referenteà uma tarefa de Função Quadrática apresenta uma questãoque foi selecionada e adaptada de uma das provas do Exame Nacional do Ensino Médio -ENEM (Apêndice C). A tarefa foi desenvolvida com base nos três componentes estruturantes presentes na descrição da THA de SIMON (1995), discutida com maior profundidade na próxima seção.

A implementação da THA ocorreu em um Colégio Estadual de Ponta Grossa, cuja autorização foi dada mediante pedido realizado para a direção e equipe pedagógica (Apêndice A). A princípio foi previsto a participação de 20 alunos da turma do docente do 1º ano do ensino médio, no entanto foram considerados os dados de 12 alunos para a coleta. O Termo de Consentimento Livre Esclarecido (TCLE) dos participantes encontra-se noApêndice B. A escolha do colégio deve-se ao fato do pesquisador ser professor desta instituição de ensino e lecionar no nível de ensino estipulado e ainda por perceber algumas das dificuldades encontradas por estes alunos neste assunto específico de Função Quadrática.

A atividade ocorreu no decorrer de três encontros com tempo de 50 minutos cada aula, no início do mês de dezembro. Devido a pandemia, as aulas ocorreram presencial com distanciamento mínimo exigido, e todos os cuidados foram tomados de acordo com os protocolos de biossegurança da escola.

É importante destacar que para construção de uma THA, o professor precisa ter domínio sobre o assunto em foco, para que possa assim traçar os objetivos de ensino, escolher com propriedade as tarefas ou a tarefa neste caso, para assim criar um plano hipotético do que possa vir ocorrer na resolução dos alunos, objetivando o desenvolvimento cognitivo.

A análise dos dados obtidos pela implementação da THA foi realizada utilizando o Quadro Teórico dos Três Mundos da Matemática de Tall. Espera-se identificar quais já-encontrados surgem na resolução da tarefa de Função Quadrática, identificando quais são possivelmente já-encontrados naquele momento. Identificando quais conhecimentos prévios foram necessários para situações em experiências passadas e que agora nesta tarefa específica não são suficientes para sua conclusão.

3.2 PLANEJAMENTO DA THA

O planejamento de toda e qualquer Trajetória Hipotética de Aprendizagem é composta segundo Simon(1995) por três componentes principais, ou melhor, indispensáveis na sua estrutura.

- ✓ Os objetivos de aprendizagem, os quais o professor espera que os alunos atinjam com a tarefa selecionada e devem sempre estar alinhados com o assunto trabalhado que neste casotrata-se da Função Quadrática.
- ✓ Seleção da tarefa, que deve estar estruturada com o assunto trabalhado, Função Quadrática de modo que o professor consiga explorar todos os objetivos relacionados a este conteúdo.
- ✓ Por fim, as hipóteses, que devem aparecer no processo de aprendizagem fornecendo uma prévia ao docente do que pode ocorrer na resolução da tarefa de cada indivíduo, formasde soluçãoda questão, dúvidas ou "respostas possíveis" que podem surgir.

Considerando essas componentes, dá-se então o processo de elaboração, contudo vale lembrar que uma das etapas para construção/elaboração de uma THA refere-se à previsão da atividade cognitiva do aluno, pois é necessário pensar as possibilidades de resolução de um mesmo processo, erros que podem ocorrer, fornecendo *feedbacks* que levem ao desenvolvimento e apropriação dos conceitos já trabalhados.

3.2.1 Processo de elaboração

A fim de tornar o processo de elaboração da THA mais dinâmico e produtivo algumas etapas foram pensadas.

<u>Etapa 1</u> – Escolha do conteúdo matemático: embora qualquer conteúdo matemático possa ser abordado numa THA, inicialmente o docente precisa direcionar este conteúdo com o que está trabalhando ou já tenha trabalhado em sala de aula e ter clareza do assunto. Neste sentido escolhemos a Função Quadrática por se tratar de um conteúdo que o pesquisador já trabalhou em sala e ao revisitá-lo propicia oportunidades para explorar dúvidas e dificuldades que possam ainda existir no processo de ensino e aprendizagem do assunto ou até mesmo de assuntos estudados anteriormente que seriam necessários neste novo assunto.

Etapa 2 – Definição de participantes: com o assunto selecionado pensamos em implementar a THA para uma turma do 1º anodo ensino médio de uma Colégio Estadual de Ponta Grossa no mês de dezembro de 2021, grupo de aproximadamente 20 alunos, número máximo de estudantes permitidodevido aos protocolos de biossegurança no decorrer da pandemia.

Etapa 3 – Escolha do material e atividade: após a escolha do assunto, etapa 1, buscamos um problema / tarefa sobre Função Quadrática para explorar conceitos sobre o assunto. Ao pesquisar por materiais utilizados em sala, consultamos alguns livros didáticos e questões do ENEM e ENADE. Optamos por uma questão do ENEM como tarefa para esta proposta por ser uma questão mais elaborada a ponto de subsidiar o que buscamos, entretanto, algumas adaptações foram necessárias.

Etapa 4 – Desenvolvimento da THA, criando hipóteses: após selecionada a tarefa, algumas adaptações são necessárias para transformá-la em uma tarefa, com objetivo de identificar por meio da resolução e questionamentos que podem surgir ao longo das etapas os já-encontrados atrelados ao assunto abordado. A releitura do planejamento da tarefa adaptada como THA é necessária, para que últimos ajustes sejam realizados.

Etapa 5 – Implementação da tarefa adaptada como THA em sala de aula com os participantes selecionados na Etapa 2. A aplicação ocorreu no mês de dezembro em três encontros de uma aula de 50 minutos, realizados com a própria turma em que o docente /autor desta pesquisa trabalhou.

Etapa 6 – Após a implementação, as resoluções dos participantes foram organizadas para serem analisadas com foco em identificar os já-encontrados. Após a análise o pesquisador deverá retornar ao planejamento da THA e realizar as adaptações necessárias no intuito de levantar mais hipóteses das dúvidas dos alunos na resolução da tarefa na busca dos já-encontrado.

Portanto a THA e sua construção depende de um planejamento cuidadoso que se alinha de acordo com a experiência em sala de aula, o domínio do assunto, o trabalho do professor com os estudantes, e a escolha adequada da tarefa em questão. As próximas subseções apresentam a tarefa selecionada, os objetivos e a proposta de resolução por meio da Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

3.2.2 Tarefa de Função Quadrática

A tarefa selecionada para esta pesquisa aborda o assunto Função Quadrática e foi retirada de uma prova do ENEM.

Tarefa Original: ENEM 2016 Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que t é expresso em dia e t = 0 é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.

A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1 600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer.

Tarefa Selecionada: ENEM (2016 – adaptada) - Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(t) = -\,2t^2 + 120t$ (em que t é expresso em dia e $t = 0$ é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.

A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1.600 pessoas.

I. De acordo com a lei de formação da Função e seus respectivos coeficientes, determine a concavidade da parábola.
II. Após quantos dias foi realizada a segunda dedetização?
III. Qual o dia em que se obteve o maior número de infectados?Qual a quantidade máxima de infectados?
IV. Em que momento desta função o gráfico intercepta o eixo x? O que isso significa no problema?
V. Considerando que a lei de formação da função é válida para os 60 primeiros dias, construa um gráfico que represente esta função.

Na sequência são apresentados os objetivos que se espera que os estudantes possam alcançar durante a realização da tarefa.

3.2.3 Objetivos

Inicialmente, é importante salientar que no 1º Trimestre de 2021foi trabalhado com os estudantes, participantes da pesquisa, as equações de 2º grau, os tipos e possíveis soluções, as funções quadráticas, os conceitos como domínio e imagem, raízes das funções, gráficos, determinação de máximos e mínimos das funções. A implementação da THA ocorreu na primeira quinzena de dezembro, ou seja, os estudantes já tinham conhecimentos prévios do assunto.

Neste sentido, os objetivos necessários para aprendizagem ocorrer ao realizar a tarefa proposta são: recordar e compreender conceitos prévios sobre função quadrática, como por exemplo, reconhecer os coeficientes polinomiais; quando a concavidade da parábola é voltada para cima ou para baixo por meiodo sinal do coeficiente que multiplica o termo quadráticot^2; associar os dados fornecidos na questão sobre infectados e quantidade de dias com os eixos coordenados do plano cartesiano eixo-x e eixo-y; relacionar os pontos de máximos e mínimos com os vértices da função; analisar e interpretar os dados fornecidos na questão sabendo representá-los numericamente por meio das fórmulas de vértices da parábola; explorar outras formas de resolução; questionar e apresentar possíveis dúvidas que tragam experiências de aprendizagem.

3.2.4 Resolução da Tarefa

Nesta subseção apresentamos uma possível resolução da tarefa como parte do planejamento da THA, levantando as hipóteses e dúvidas que podem surgir durante a implementação da atividade.

Na sequência, o processo de construção da THA é apresentado como uma conversa entre o docente e os estudantes e os possíveis desdobramentos, hipóteses de dúvidas e questionamentos que podem surgir, assim como possíveis erros que os estudantes podem cometer. A fim de organizar o processo indicaremos letras iniciais representando a fala de alguns sujeitos, sendo “E” para fala dos estudantes. E_1, E_2, E_3, ..., "P" para fala do professor e "O" para as orientações que o professor deve seguir.

Desenvolvimento da tarefa selecionada

O: De acordo com o cenário atual devido a pandemia do COVID-19, algumas restrições devem ser seguidas nesta aula, todos os estudantes deverão sentar-se individualmente, não podendo fazer duplas, grupos para discussões ou até mesmo para resolução da atividade, obedecendo aos protocolos de biossegurança. Desta forma, receberão material impresso com a questão e dicionário para que quando necessário, verificar o significado de palavras desconhecidas.

Primeiro momento: Os estudantes precisam fazer a leitura individual da tarefa, prestando atenção à situação problema que é apresentada, aos dados que são fornecidos, o que é pedido nos itens subsequentes, procurando interpretar as informações do enunciado.
Tempo estimado: 10minutos

O: Após a leitura, o professor procura relacionar a situação problema ao cotidiano dos estudantes, já que os surtos de dengue são frequentes no Brasil, principalmente no verão. Inicia-se então a conversa entre professor e estudantes, buscando interpretar o enunciado e promover a discussão em sala.

P: Pessoal, de acordo com a leitura que vocês fizeram e segundo a interpretação de vocês, qual a função definida nesta questão?
E_1: Não tem professor, porque não aparece "x" e nem "y".
P: Será que realmente não tem? A função neste caso está representada por quais variáveis?
E_2: letra "t" professor?
P: Será que realmente é apenas a letra t? Lembremos que toda função tem sua(s) variáveis, por isso é necessário observar aqui qual ou quais são.
E_3: Mas então temos f(t) também como letra da função?
P: Sim, mas qual valor representa da função? Olhem com atenção.
E_3: Ah, acho que entendi, t é x e f(t) é y? Certo professor?

Neste trecho da conversa, é destacado a influência que os já-encontrados tem sobre uma resolução da tarefa. Como vimos no capítulo 1, os conhecimentos prévios, podem afetar beneficamente ou não o aprendizado, ou seja, quando o aluno se depara com uma situação a qual se assemelha a outra já vivenciada, o já-encontrado pode por vezes auxiliar ou prejudicar, neste caso, são chamados de já-encontrados de apoio e já-encontrados problemático. Neste caso, observa-se que o fato de trabalhar as equações algébricas na maioria das vezes com as incógnitas “x” e “y”, pode gerar um já-encontradoproblemático, pois o estudante pode ter dificuldade na compreensão das incógnitas envolvidas.

Retomando o diálogo entre o professor e os estudantes:

P: Qual a função que representa o nosso problema?
E_3: Professor não estou encontrando o valor de “c” da função$f(t) = -2t^2 + 120t$.
P: Você verificou se a lei de formação da função é completa ou incompleta?
E_3: Ela é incompleta, pois falta o termo “c”!
P: Então quando um dos coeficientes b ou c são ausentes seu valor é?
E_1: Zero, pois não tem um dos termos.
P: Vimos que todos os coeficientes da função quadrática $f(t) = at^2 + bt + c$,são números reais, mas o coeficiente “a” não admite pode admitir um valor numérico, que valor seria esse?
E_3: o zero
P: Isso mesmo, mas então se apenas o coeficiente “a” não deve assumir valor nulo, então o termo “c” ou “b” quando não têm, o que consideramos?
E_3: valor zero?

O: Aqui o professor pode explanar a dúvida para todos, pois pode ser dúvida da maioria, explicar que o zero neste caso representa os termos que não existem na função.

P: O gráfico da parábola que representa a função de acordo com o sinal do coeficiente “a” da função do nosso problema, apresentará a concavidade voltada para cima ou para baixo?

E_1: Para baixo

Na sequência apresentamos as possíveis respostas dos estudantes em relação ao item I da tarefa,

Solução:

Item I) – Determine a concavidade da parábola.

O estudante pode recordar neste momento os conceitos já adquiridos acerca dos coeficientes que indicam a concavidade da parábola.

Lei de formação da função Quadrática: $f(t) = at^2 + bt + c$

a > 0parábola com concavidade para cima.

a < 0 parábola com concavidade para baixo.

se a função é $f(t) = -2t^2 + 120t$, o coeficiente “a” é -2, valor negativo, então a parábola tem concavidade voltada para baixo.

Retomando o diálogo entre o professor e os estudantes:

P: Neste problema, $f(t) = -2t^2 + 120t$, o que representa o *t* e o *f*(*t*)?

E_3: dias e número de contaminados.

P: E nesta situação qual variável depende da outra?

E_1: Número de Infectados depende da quantidade de dias?

P: Sim, e de que maneira isso pode influenciar no problema?

E_2: Seria quanto mais dias se passam mais pessoas são infectadas.

P: Mas o crescimento de pessoas infectadas sempre vai aumentar?

E_2: Sim professor porque quanto mais dias maior o número de infectados.

P: Será isso mesmo, o que representa sua função?

Neste trecho da conversa, é importante trabalhar bem a relação de dependência das variáveis, ou seja, o número de infectados aumenta de acordo com a quantidade de dias. Entretanto, os estudantes podem recorrer ao erro de acreditar numa relação linear, devido aos já-encontrados estabelecidos no estudo de funções de 1º grau. Desta forma, é fundamental a mediação do professor nestes momentos de dúvidas.

Item II)

Tempo estimado: 30minutos

O: Para a resolução do item II) pedir aos alunos que leiam o item com atenção para identificar o que é solicitado, é importante deixar que os alunos tentem interpretar e resolver, o professor não deixa de intermediar, instigar os alunos a investigar e raciocinar,buscando qual a melhor resolução para asituação, sendo assim o professor deve ficar atento a quaisquer dúvidas e questionamentos.

P: No item II) do problema, pede para descobrir quando teremos 1600 infectados.

E_1: Professor vamos ter que testar todos os dias para descobrir quando teremos a quantidade de 1600 infectados?

P: Será que realmente é necessário, seria o caminho mais curto?

E_2: Acho que sim professor, sei lá!?

P: O valor de 1600, está representando o quê?

E_1: O Número de infectados, professor?

P: Ok, mas em qual eixo ele se encontra?

E_2: No eixo y, professor?

P: Você tem certeza? faz sentido?

E_2: Sim, pois a letra “t” representa o número de dias, que é “x”, enquanto f(t) é como se fosse meu “y”, então o resultado de infectados passadouma quantidade de dias é f(t) = 1600.

P: Então substituindo o valor de f(t) na função o que teremos?

E_3: A equação $1600 = -2t^2 + 120t$

Esta pode ser a parte que os estudantes venham a ter maior dificuldade, pode ocorrer que alguns alunos pensem em substituir o valor 1600 na função. É importante reforçar a relação de dependência das variáveis.

Retomando o diálogo entre o professor e os estudantes:

P: Fazendo compensaçãodos termos com variáveis para o membro esquerdo da igualdade o que teremos?

E_1: A equação 2t^2 - 120t+ 1600 =0, professor?

P: E o que isso representa?

E_3: Uma equação do segundo grau.

P: Isso mesmo. E como se resolve uma equação do 2º grau?

Na sequência apresentamos as possíveis respostas dos estudantes em relação ao item II) do problema, uma ideia de como podem resolver o problema.

Solução:

Item II) – Após quantos dias foi realizada a segunda dedetização? Foi informado que chega a 1.600 infectados na segunda dedetização.

Sabemos que a função do número de infectados em relação a quantidade de dias é dada por f(t) = -2t² + 120t, eque uma segunda dedetização deve ser feita no dia em que o número de infectados chegar à marca de 1.600 pessoas, isto é, quando $f(t) = 1600$.

$f(t) = -2t^2 + 120t$

$1600 = -2t^2 + 120t$

$2t^2 -120t + 1600 = 0$ (divisão da equação por 2)

$t^2 - 60t + 800 = 0$

(os alunos devem observar que essa equação do 2º grau possui todos os coeficientes)

Assim: a = 1 b = -60 e c = 800

aqui alguns estudantes podem utilizar a fórmula de resolução da equação do segundo grau, ou aindapelas fórmulas da soma e do produto das raízes.

pela fórmula de resolução de equação do segundo grau:

$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$, onde $\Delta = b^2 - 4.a.c \Rightarrow t = \frac{60 \pm \sqrt{400}}{2}$

Aqui temos duas soluções: $t_1 = \frac{60+20}{2} = \frac{80}{2} = 40$ e $t_2 = \frac{60-20}{2} = \frac{40}{2} = 20$

Usando Soma e Produto temos:

Soma das raízes, $S = t_1 + t_2$e sabe-se que $S = -b/a \Rightarrow t_1 + t_2 = 60$ e

Produto das raízes, $P = t_1.t_2$e sabe-se que $P = c/a \Rightarrow t_1.t_2 = 800$

Resolvendo as equações por substituição, as raízes são $t_1 = 40$ e $t_2 = 20$, significa que nos 20º e 40º dias tem-se 1600 infectados. Como o enunciado diz que o número de 1600 infectados deve ser atingido pela segunda dedetização,significa que a primeira ocorreu no 20º dia,assim, a resposta correta é que a segunda dedetização ocorrerá no 40º dia.

O estudante ao fazer tal resolução consegue interpretar, organizar e aplicar os conhecimentos básicos sobre Função Quadrática, reconhece as variáveis dependente e independente da função, relembrando conceitos utilizados em situações anteriores como a fórmula de resolução de equação do segundo grau o que mostra já-encontrado de apoio.

Na proposta de resolução pelas equações de soma e produto, supomos que os estudantes fariam da forma descrita, mas eles podem ter algumas dificuldades por trazerem experiências de resolução de equações lineares. Ao olhar $t_1.t_2 = 800$, podem pensar se tratar de uma equação linear. Segundo Lima (2007) “experiências de aprendizado com equações lineares podem influenciar o aprendizado de equações quadráticas” (LIMA, 2007, p. 87) de modo que neste caso o estudante pode utilizar o já-encontrado que era compatível na resolução de equações lineares para resolver a equação do produto.

Essas e outras características estão associadas aos Três Mundos da matemática quando por exemplo o sujeito não consegue fazer a manipulação dos símbolos corretamente identificando uma característica do mundo simbólico.
Koch afirmade modo mais específico que os alunos:

> não fazem a manipulação simbólica corretamente, mas buscam em seus conhecimentos anteriores (“já-encontrados”), formas de encontrar valores que satisfaçam a equação, levando-os a resolverem como se as equações quadráticas fossem lineares, indicando que eles estão corporificando o simbolismo, que é quando o indivíduo parte do mundo simbólico e chega ao mundo corporificado(Koch 2010, p.129)

Retornando ao problema, sobre a solução do item II). Pode ocorrer que outro estudante cometa um erro ao indicar o valor de 1600 na variável (t), não resolvendo da forma correta.

Solução b) do Item II)

Se o estudante se equivocar e considerar que t =1600, neste caso ao substituir na função quadrática:

$f(t) = -2t^2 + 120t$

$f(1600) = -2(1600)^2 + 120.1600$

$f(1600) =$ 5120000 + 192000

$f(1600) =$ 5312000(cinco milhões trezentos e doze mil)

Nesta situação, o estudante pode não estar atento as variáveis da função e não perceber que o resultado não representa dias.

Na Solução b) o aluno mostra não ter domínio sobre o conceito de função e sua lei de formação, quando este aplica o valor de 1600 infectados na variável "t" sendo esta variável da quantidade de dias da epidemia.

Item III)

Tempo estimado: 30minutos

O: Pedir aos alunos que leiam o item com atenção para identificar o que é solicitado, é importante deixar que os alunos tentem interpretar e resolver.

P: Neste item é pedido o dia em que se obteve o maior número de infectados e qual é a quantidade máxima de infectados?

P: Vamos relembrar a função do número de infectados em relação a quantidade de dias, que é dada por $f(t) = -2t^2 + 120t$

E_3: Professor, mas eu pensei que deveríamos utilizar a função $f(t) = t^2 - 60t + 800$?

P: Mas porque você pensa desta forma? O que te levou a interpretar deste modo?

E_3: Bem, por que é a função que acabamos de utilizar anteriormente e que seria a necessária para descobrirmos o máximo valor da função?

P: A função fornecida no início do problema é $f(t) = -2t^2 + 120t$, no item anteriorencontramos a equação do 2º grau: $t^2 - 60t + 800 =0$, quando tínhamos 1600 infectados.

P: Sobre a função $f(t) = -2t^2 + 120t$, se a concavidade da parábola é para baixo, então nós conseguimos concluir que ela possui ponto de máximo ou de mínimo?

E_1: Ah, entendi, como é para baixo, então tem ponto de máximo.

P: Pensem que se a parábola está voltada para baixo, como citou a colega anteriormente, e temos um ponto de máximo, para descobrir qual é este ponto, precisamos de que valores?

E_2: Os valores de x e y como fazemos sempre nos exemplos em sala, mas neste caso seria os valores de t e f(t) né professor?

P: Isso mesmo e juntos eles representam o quê?

E_3: A coordenada do ponto

P: Para calcular a coordenada é necessário o quê? Lembrem-se que um ponto de máximo e mínimo em uma parábola é também chamado de outro nome, qual é?

E_1: Vértice

O: Neste momentoé importante que se abra discussão a respeito do que os alunos encontraram de resposta, permitindo ao professor fazer algumas interferências e explanar as dúvidas.

Na sequência apresentamos as possíveis respostas dos estudantes em relação ao item III do problema:

Solução:

ItemIII) Nesta atividade é necessário calcular as coordenadas do máximo da função. Sendo a função f(t) = -2t² + 120t,lembrar do discriminante delta, $\Delta = b^2 - 4.a.c$, e perceber que quando se pede dia e o número de infectados, utilizamos o eixo x (abscissas)para a variável dias e eixo y (ordenadas) para número de infectados. Sendo a = -2 b = 120 c = 0, as coordenadas do vértice:

$Xv = -\frac{120}{2(-2)} = \frac{-120}{-4} = 30$ e $Yv = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-14400}{4.(-2)} = \frac{-14400}{-8} = 1800$

Logo no 30º dia tem-se que o máximo de infectados que é 1800 pessoas, ainda este ponto (Xv,Yv) é um ponto de máximo pois o valor do coeficiente “a” é negativorepresentando a parábola com sua concavidade para baixo.

Na solução do item III) vemos a utilização das coordenadas do vértice da parábola para encontrar o valor máximo de infectados, contudo, é necessário ter a percepção e o reconhecimento gráfico da Função Quadrática ao lembrar da concavidade influenciando se é ponto de máximo ou mínimo. Dos Três Mundos da matemática, se encaixaria no Mundo Corporificado em que as abstrações, imagens, formas que damos as coisas estão mais presentes.

Item IV)

Tempo estimado: 20 minutos

O: Pedir aos alunos que leiam o item com atenção para identificar o que é solicitado, é importante deixar que os alunos tentem interpretar e resolver.

P: Pessoal, agora vamos resolver o item IV) do nosso problema.

P: É solicitado em que momento que o gráfico da função intercepta o eixo t? O que isso significa no problema?

A seguir vejamos uma possível resposta dos alunos ao item IV:

Solução:

Item IV)Se $f(t) = -2t^2 + 120t$ logo, o coeficiente “c” da função é zero.

Como o coeficiente “c” determina o ponto de intersecção do gráfico no eixo das ordenadas, o gráfico desta função intercepta o eixo das ordenadas na origem (0, 0), mas a = -2, então sua concavidade é voltada para baixo e intercepta o eixo das abcissas em dois pontos. Na origem, x= 0 é uma raiz.

Ao observar que a função $f(t) = -2t^2 + 120t$ é incompleta, basta igualara zero para descobrir as raízes:

$$-2t^2 + 120t = 0$$

$$t(-2t + 120) = 0 \quad \textit{então} \quad t_1 = 0 \quad e \quad -2t_2 + 120 = 0 \quad t_2 = \frac{-120}{-2} = 60$$

O: Neste item, espera-se que os alunos observem que os valores das raízes são exatamente os pontos onde o gráfico intercepta o eixo x e que ambos têm o mesmo número de infectados. No início da pandemia “dia 0” e no 60º dia se tem zero infectados.

Na solução do item IV) o aluno pode confundir os eixos, mesmo encontrando as raízes que interceptam o eixo “x” pois a variável utilizada na tarefa é “t”, a qual não está acostumado utilizar. Aqui o Mundo Simbólico pode aparecer, quando o aluno consegue por meio de simbologia representar os pontos do gráfico algebricamente.

Item V)

Tempo estimado: 10 minutos

O: Pedir aos alunos que leiam o item com atenção para identificar o que é solicitado, é importante deixar que os alunos tentem interpretar e resolver.

P: Pessoal, para terminarmos o estudo deste problema, vamos resolver o item V, que pede a representação gráfica da função.

P: O que é necessário para construir o gráfico de uma função?

O: Na questão V) pede-se a representação gráfica da função. Uma possível representação do gráfico desta função por parte dos alunos pode ser por meio de um esboço na folha quadriculada fornecida pelo professor, com valores do domínio e contradomínio utilizando uma pequena tabela ou apenas valores como vértice da parábola, raízes da função e ponto de intersecção do eixo das ordenadas.

A dificuldade certamente encontrada na representação gráfica, será a diferença das grandezas de dias e número de contaminados. No eixo x o maior valor será de 60, número de dias, enquanto em y, o maior valor numérico será 1800, número de contaminados máximo.

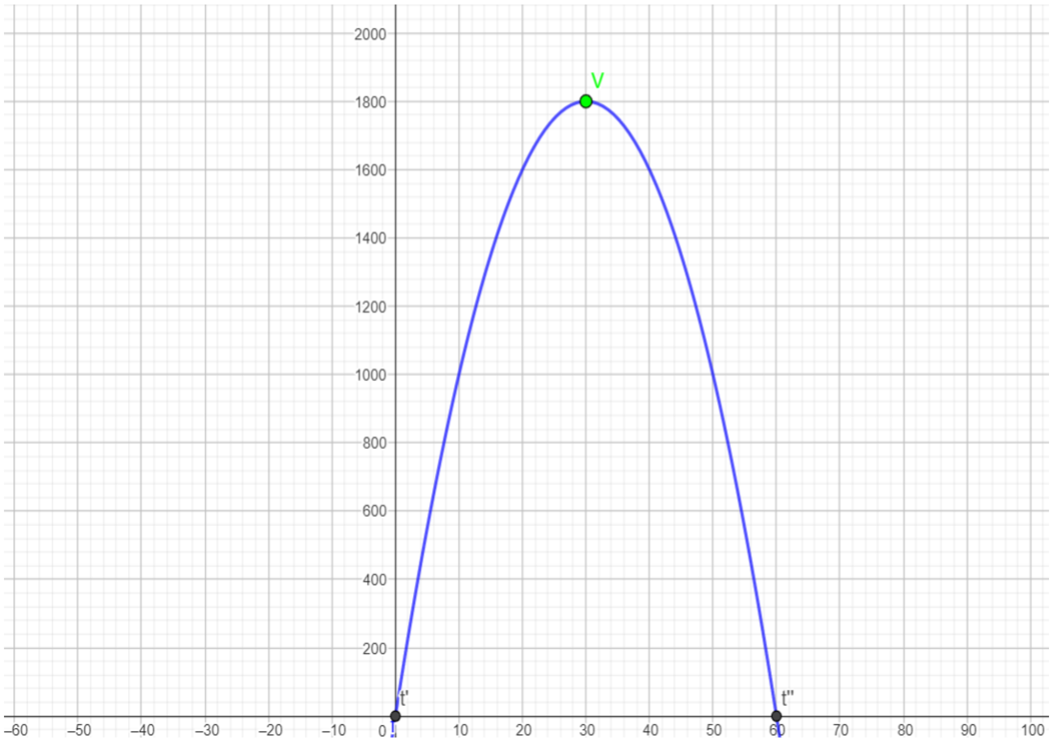
Solução:

ItemV) Para facilitar a construção gráfica utilizamos o *software*Geogebra para auxiliar na representação da função $f(t) = -2t^2 + 120t$.

Inicialmente são marcados os pontos de intersecção com o eixo x, calculados no item (IV), que são as raízes da equação e aqui representados pelos pares ordenados t’ (0,0) e t” (60,0). A partir dos dados do item (III), é marcado o ponto que representa o vértice da parábola, neste caso V(30, 1800).

A figura 3 apresenta o gráfico construído no *software* Geogebra:

Figura 3: Gráfico da função $f(t) = -2t^2 + 120t$ no intervalo [0, 60]



A solução dos itens I) e V) estão muito relacionadas com o Mundo Corporificado, mundo das imagens, reconhecimento das formas, que neste caso é o gráfico identificando a concavidade de acordo com o valor do coeficiente “a”. Ainda, na construção do gráfico, necessita da parte algébrica, do entendimento da equação, dos vértices da parábola, das raízes.

No próximo capítulo, será retomada a tarefa proposta nesta seção, em que serão feitas as análisesdas resoluções dos alunos participantes da pesquisa, observandosuas respostas à luz do Quadro Teórico dos Três Mundos da Matemática e os já-encontrado.

CAPÍTULO 4 - DISCUSSÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Este capítulo se constitui da análise dos dados coletados da implementação realizada com alunos de uma turma do 1º ano do ensino médiode um colégio estadualde Ponta Grossa, acerca da tarefa envolvendoFunções Quadráticas, proposta por meio de uma trajetória hipotética de aprendizagem.

Conforme apresentado na seção 3.1.2, a respeito da coleta de dados, participaram das atividades 12 estudantes, e a fim de manter o anonimato, as folhas de resolução de cada estudante receberam a notação E_i, com i = 1, ..., 12. Os dados referem-se à resolução deuma tarefa envolvendofunções quadráticas proposta por meio de uma THA, apresentada na seção 3.2, que foi implementada em sala no decorrer de três encontros no final do ano de 2021. Além da análise das anotações,foram realizadas consultas à transcrição dos áudios gravados no decorrer dos encontros.

4.1ANÁLISE DA TAREFA DE FUNÇÃO QUADRÁTICA

Antes de apresentarmos as análises é importante retomarmos o objetivo da pesquisa, que tem por intuito investigar quais características dos Três Mundos da Matemática podem surgir na resolução deuma tarefa envolvendoFunções Quadráticas proposta por meio de uma trajetória hipotética de aprendizagem.
A tarefa proposta encontra-se na seção 3.2.2 do capítulo 3, a fim de facilitar a leitura e acompanhamento das resoluções, optamos por apresentá-la na sequência com a análise dos dados por itens da questão.

ENEM (2016 – adaptada) - “Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número *f* de infectados é dado pela função $f(t) = - 2t^2 + 120t$ (em que *t* é expresso em dia e $t = 0$ é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1.600 pessoas”.

A partir do problema descrito, foi apresentado aos alunos cinco itens que complementavam a questão, que foram detalhados na THA com as prováveis hipóteses e soluções. Na sequência apresentamos os itens do problema apresentado com a análise de algumas resoluções realizadas pelos alunos.

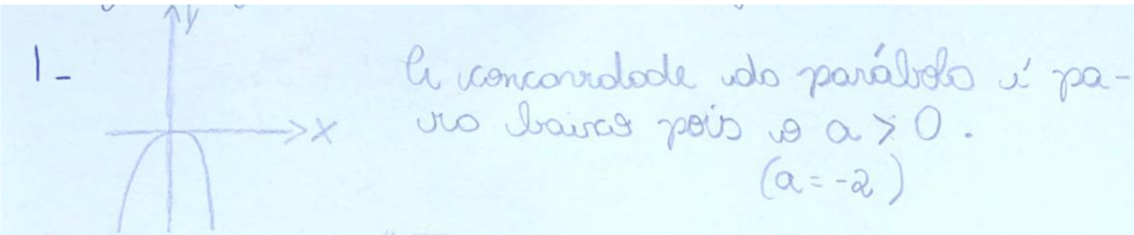
4.1.1Análise dos itens da Tarefa de Função Quadrática

Item I: De acordo com a lei de formação da Função e seus respectivos coeficientes, determine a concavidade da parábola.

A resolução deste item envolve o Mundo Simbólico quando envolve o reconhecimento de variáveis e coeficientes e o Mundo Corporificado, mundo das imagens, que está relacionado ao reconhecimento das formas. O estudante consegue ter uma ideia inicial do gráfico da função identificando a concavidade de acordo com o valor do coeficiente “a”.

A Figura 4.1, apresenta resolução do estudante E9, que ao responder o que foi solicitado, busca uma conexão com a imagem do gráfico mesmo este não sendo solicitado.

Figura 4.1: Resolução do estudante E9

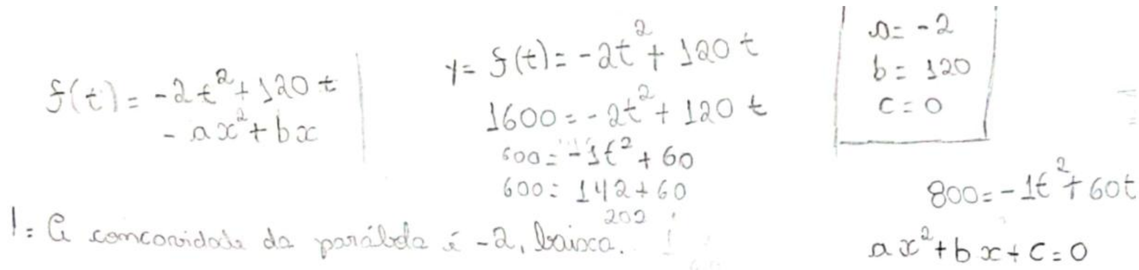


Fonte: Dados da pesquisa

A partir da resolução do estudante E9 observamos que reconhece o coeficiente “a” como quem determina a concavidade da parábola, contudo se confunde com a definição quando escreve que a = -2 e que a > 0, sendo o correto a < 0. Ainda, conforme figura 4.1, o estudante apresenta um esboço inicial do que seria o gráfico da parábola, mas o vértice da parábola encontra-se na origem, a parábola está abaixo do eixo da variável “x”. É possível observar que o estudante faz uso de uma imagem mental que relaciona o fato da concavidade ser para baixo, o que representa um já-encontrado problemático, pois no problema em questão que envolve o número de infectados em função dos diasnão faz sentido tal representação.

Na Figura 4.2, observamos a resolução do estudante E2, que no mesmo espaço resolve outros itens do problema.

Figura 4.2: Resolução do estudante E2



Fonte: Dados da pesquisa

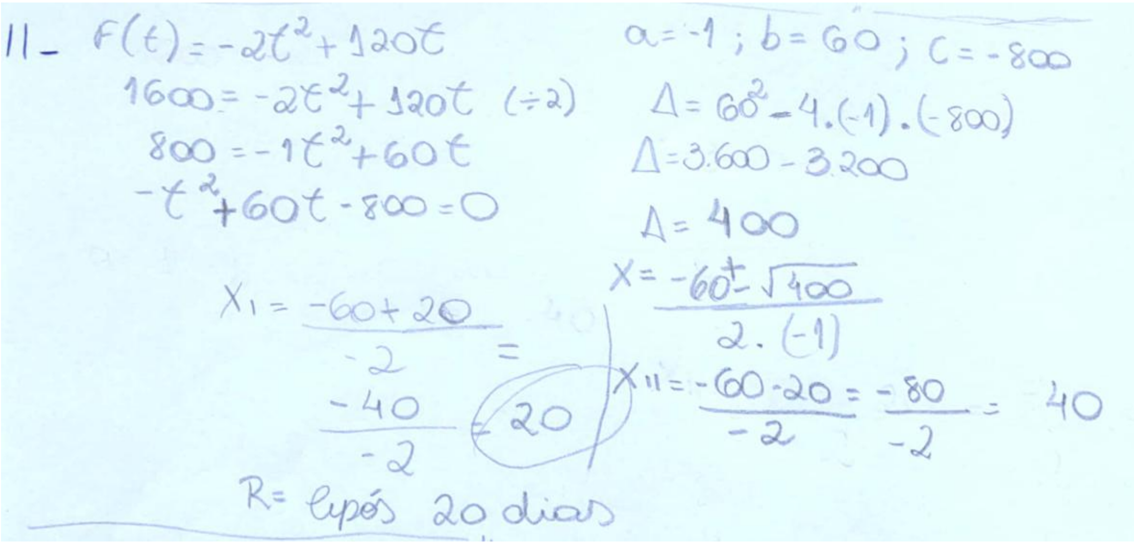
Inicialmente o estudante E2 escreve abaixo da função f(t), a forma literal da função com os coeficientes a e b acompanhados da variável x, porém escreve “-a”, como se o sinal não fosse do coeficiente a. Na lateral, na parte superior à direita da imagem, identifica os coeficientes da função, ou seja, percebe que o valor de a = -2. Na resposta escreve que a concavidade é -2, baixa. Neste caso é possível perceber o já-encontrado relativo ao reconhecimento das variáveis, poiso estudante precisou escrever a função nas variáveis “x” e “y” para encontrar os coeficientes. Aqui diferente de E9, não utilizou um esboço do gráfico para se localizar a respeito da concavidade da parábola, apenas o valor do coeficiente “a”, ou seja, parte algébrica, a qual faz parte do mundo simbólico. Os demais cálculos que aparecem ao lado na imagem da figura 4.2,são partes da resolução de outro item do problema.

Item II: Após quantos dias foi realizada a segunda dedetização?

A resolução deste item envolve o Mundo Simbólico, envolve o reconhecimento de variáveis e coeficientes, principalmente quando precisa utilizar os valores dos coeficientesna fórmula para encontrar as raízes da equação quadrática, saber identificar os componentes da equação do delta, assim, entra mais na parte simbólica do que visual, porém não se pode excluir a ideia de Mundo Corporificado, pois a partir do valor do coeficiente “a” a imagem da concavidade da parábola e suas raízes é formada na mente do alunos mesmo que não faça o esboço.

Dentre as respostas coletadas a que nos chamou mais atenção foi do estudante E9, por chegar mais próxima de uma resposta completa dentro do que foi proposto na THA.

Figura 4.3: Resolução do estudante E9



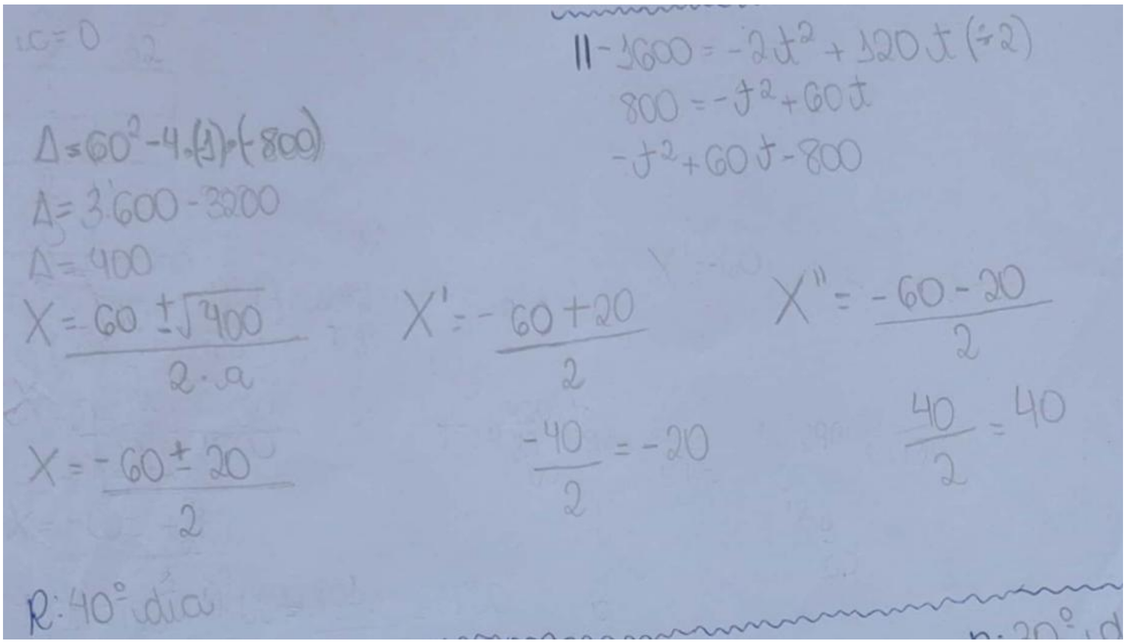
Fonte : Dados da pesquisa

Após substituir f(t) = 1600 na função e realizar algumas operações, obtém a equação do 2º grau: $-t^2 + 60t - 800 = 0$. É interessante observar que no diálogo realizado em sala, conforme a THA apresentada no capítulo anterior, o professor sugere outro processo, para que a equação quadrática fique com o termo quadrático positivo. Pela figura 4.3, observamos que o estudante soube identificar exatamente os coeficientes da equação quadrática para encontrar as duas raízes. No entanto escolhe que ocorrerá dedetização após vinte dias, errando no final. No problema é solicitado quando ocorrerá a segunda dedetização, ou seja, a primeira ocorre no 20º dia e a segunda no 40º dia.

Em contra partida aqui existe uma compreensão por parte do sujeito, talvez um proceito (procedimento e conceito) quando aparece os *já-encontrados* relacionados com a identificação dos coeficientes, a divisão dos termos da equação do 2º grau em ambos os membros da igualdade, o uso da potenciação, multiplicação de números inteiros, regra de sinal no momento da multiplicação dos valores do discriminante delta, logo aqui existe características então do mundo corporificado, simbólico, mas nenhuma característica do Formal.

Outra resolução deste item do problema pode ser observada na figura 4.4 do estudante E5.

Figura 4.4: Resolução do estudante E5



Fonte: Dados da pesquisa

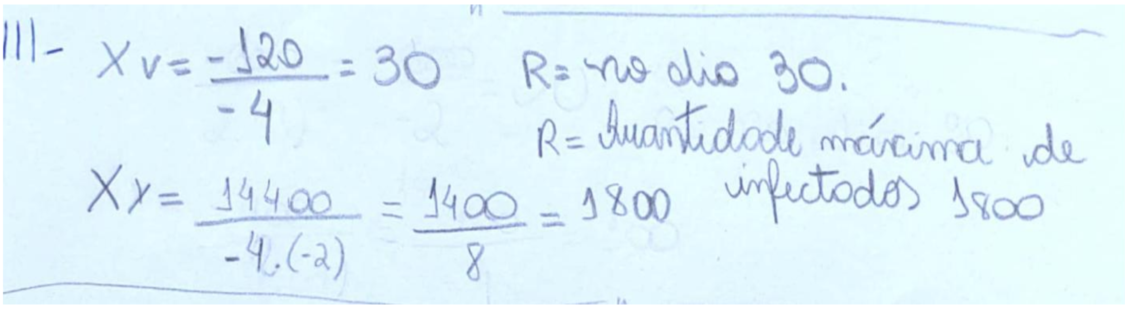
Nesta resolução do estudante E5, observamos alguns erros, como não igualar o polinômio $-t^2 + 60t - 800$ a zero, assim não se configura uma equação do 2º grau; esqueceu de multiplicar o coeficiente a = -1, para que o denominador ficasse negativo e assim os valores das raízes fizesse sentido, pois a resposta representa dias. No cálculo de x" não é colocado o valor -80no numerador da fração, fica uma incógnita se foi falta de atenção ou não recordou a regra de sinais por exemplo.No final escreve a resposta correta, porém apresenta erros nos cálculos que não se pode alegar distração.

Item III: Qual o dia em que se obteve o maior número de infectados?Qual a quantidade máxima de infectados?

Na resolução deste item, características do mundo corporificado podem estar presente, pois ao realizar oscálculos do vértice da parábola para encontrar o ponto máximo de infectados, trabalha-se as formas, imagens e abstrações que adicionamos as coisas e ainda o reconhecimento da parte gráfica da função quadrática.

Para análise, temos a resolução apresentada na figura 4.5 do estudante E9, que calcula corretamente as coordenadas do vértice da parábola, e consegue articular a resposta, identificando o papel de cada variável e sua relação do dia e do número de infectados.

Figura 4.5: Resolução do estudante E9

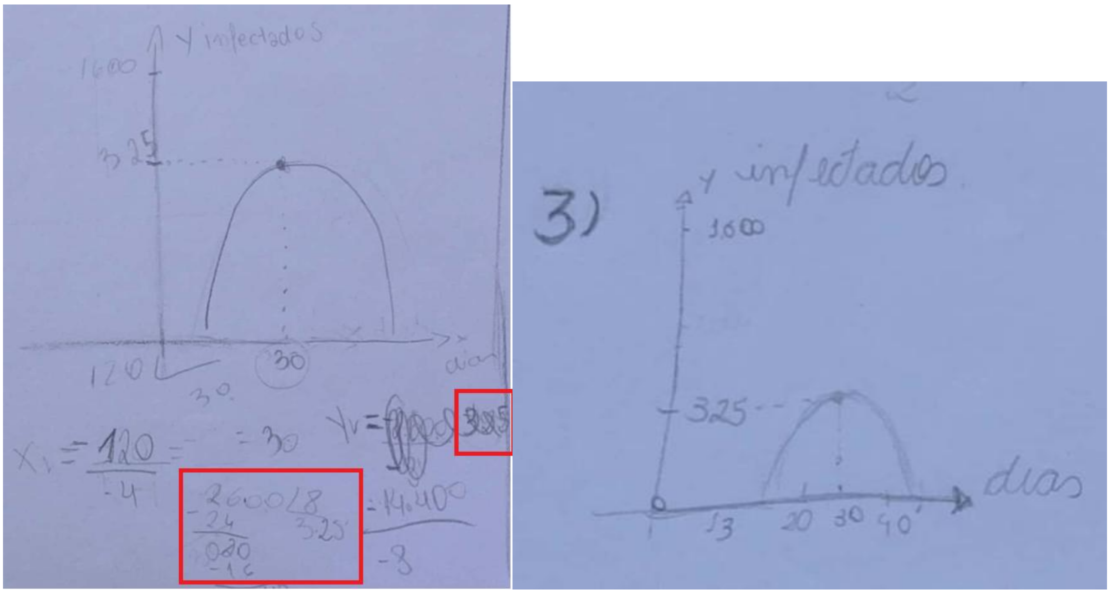


Fonte: Dados da pesquisa

Embora o cálculo final esteja correto no momento que multiplica o denominador para escrever 8, esquece um algarismo no numerador, mas o resultado está correto, o que dá a entender que foi distração apenas.

Na figura 4.6, observamos a imagem de duas respostas, do estudante E3 e E7, embora estejam erradas, observamos que estes dois estudantes foram os únicos que se preocuparam em representar graficamente, mesmo não sendo pedido.

Figura 4.6: Resolução dos estudantes E3 e E7



Fonte: Dados da pesquisa

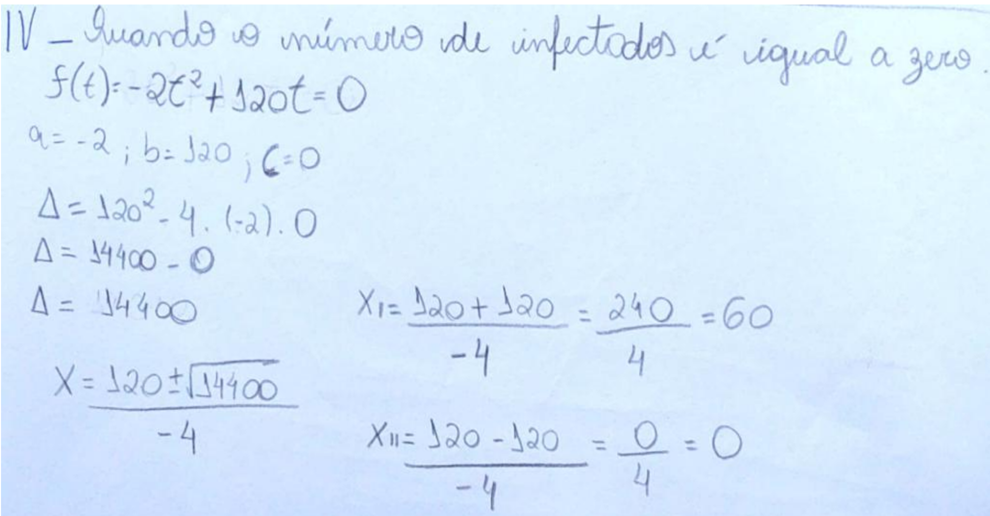
Nos cálculos do estudante E3, primeira imagem da figura 4.6, ele calcula Xv=30 e Yv= 2600/8 = 325, observamos que o valor do delta foi calculado errado. No esboço dos estudantes E3 e E7, é interessante observarque fizeram a representação das variáveis nos eixos de forma correta, relacionando dias com número de infectados. Entretanto colocam o valor 1600 do exercício anterior, que era o valor de infectados atingidos nos dias 20º e 40º dias no mesmo gráfico. Os dois calculam o valor de 325 como sendo o máximo de infectados no 30º dia, ponto de máximo da parábola, mas não se atentam que este valor não faz sentido, já que no exercício anterior encontraram 1600 infectados, e por lógica o máximo deve ser maior que 1600. Embora estes estudantes se apoiem na visualização gráfica e não utilizem os já-encontrados referentes as variáveis na representação dos eixos como “x” e “y”, mostram fragilidades ao transitar pelos mundos corporificado esimbólico.

Item IV: Em que momento desta função o gráfico intercepta o eixo x? O que isso significa no problema?

Na resolução deste item o Mundo Simbólico pode aparecer com mais nitidez, devido a simbologia utilizada nesta questão quando se trata dos pontos do gráfico ou seja das coordenadas das variáveis, contudo está na representação algébrica. O aluno pode também acabar confundindo as variáveis dos eixos, pois aqui o “t” está associado ao eixo do “x” e geralmente quando eles aprendem de um modo e é trabalhado com outra variável, se confundem na simbologia.

Na figura 4.7 temos a resolução do estudante E9, que faz a identificação dos coeficientes, o cálculo do discriminante, utiliza potenciação, multiplicação dos números inteiros e regras de sinal, substituios coeficiente corretamente no cálculo das raízes, o que pode ser sinaisde já-encontrados com possíveis características dos Três Mundos.

Figura 4.7: Resolução do estudante E9

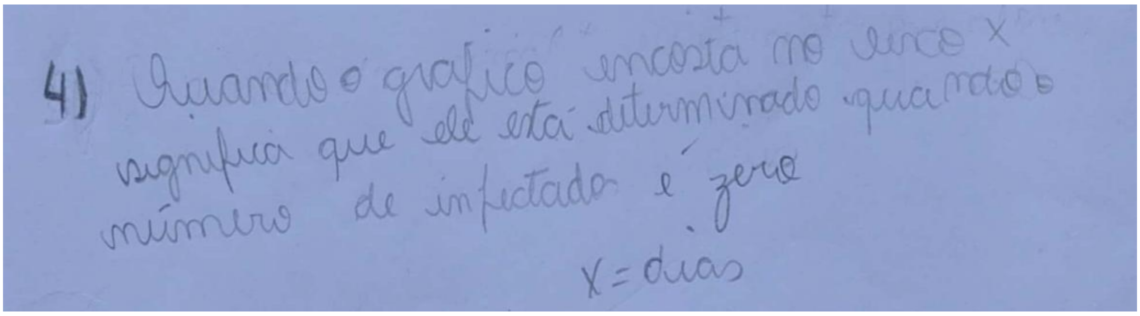


Fonte: Dados da pesquisa

Na resolução do estudante E9, está escrito “Quando o número de infectados é igual a zero” e na sequência apresenta a função e na mesma linha iguala a zero. Embora esteja errado a escrita, pois não se tem uma equação, percebemos que o estudante compreende o que está fazendo.

Na figura 4.8 observamos a resposta do estudante E7, que apenas apresenta uma resposta na linguagem escrita.

Figura 4.8: Resolução do estudante E7


4) Quando o gráfico encosta no eixo x significa que ele está determinado quando o número de infectado é zero

x = dias

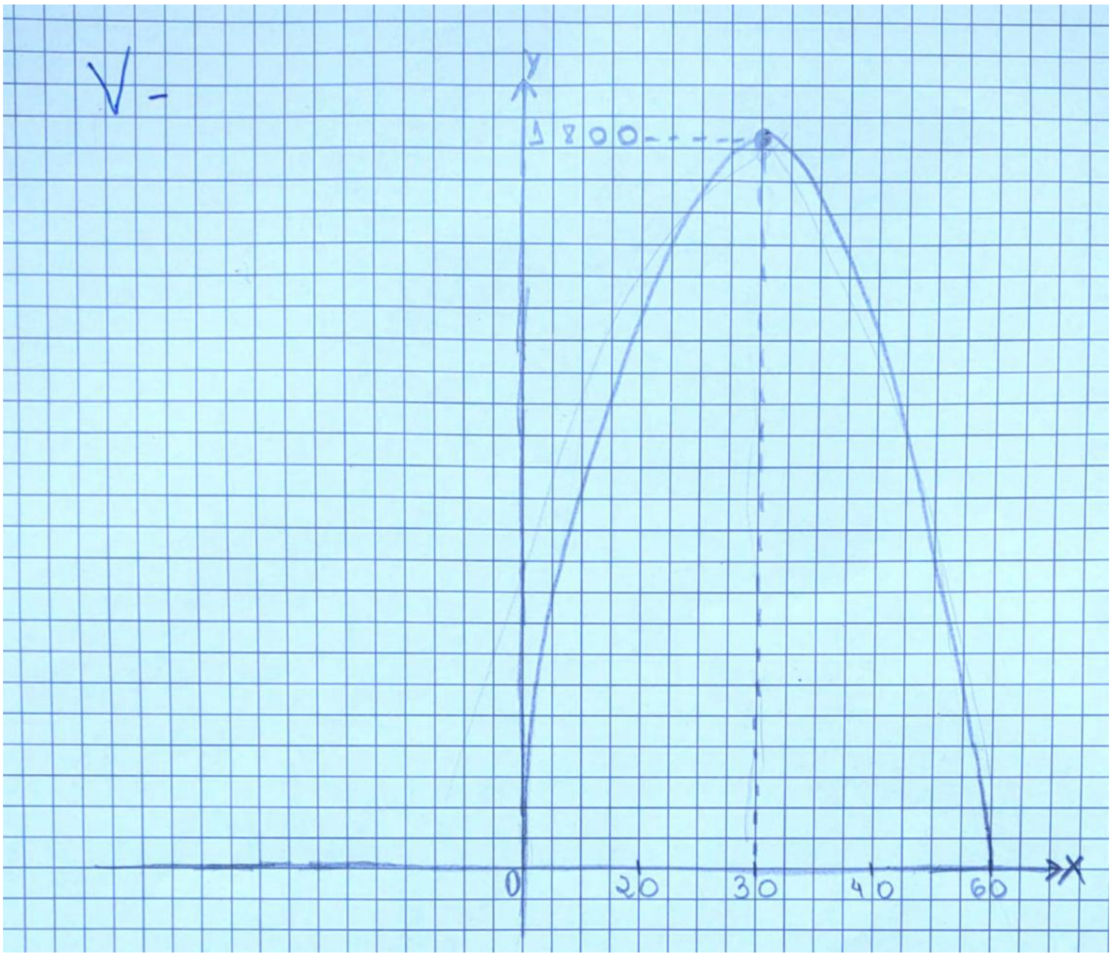
Fonte: Dados da pesquisa

O estudante não faz os cálculos, então não aponta o dia específico que o número de infectados é zero, identifica que a intersecção do eixo da variável é omomento que se tem zero infectados, interpretando o significado da função cortar o eixo x. Este estudante ao fazer o próximo item, esboço do gráfico, utiliza as informações dos cálculos dos itens anteriores, marcano eixo das abscissas as raízes do item II) e acaba errando o esboço.

Item V: Considerando que a lei de formação da função é válida para os 60 primeiros dias, construa um gráfico que represente esta função.

Ao resolver este item, os estudantes podem trazer características do mundo corporificado quando trabalham com as variáveis em forma de par ordenado sabendo identificar as variáveis corretamente que representam os dias e números de infectados que são necessários para construção do gráfico e ainda identificam pelas respostas anteriores elementos pertencentes ao gráfico, em que o mundo simbólico surge para auxiliar.Foi solicitado aos estudantes que construíssem o gráfico manualmente em folha quadriculada com uso de régua. Na figura 4.9 temos a representação gráfica do estudante E9.

Figura 4.9: Resolução do estudante E9

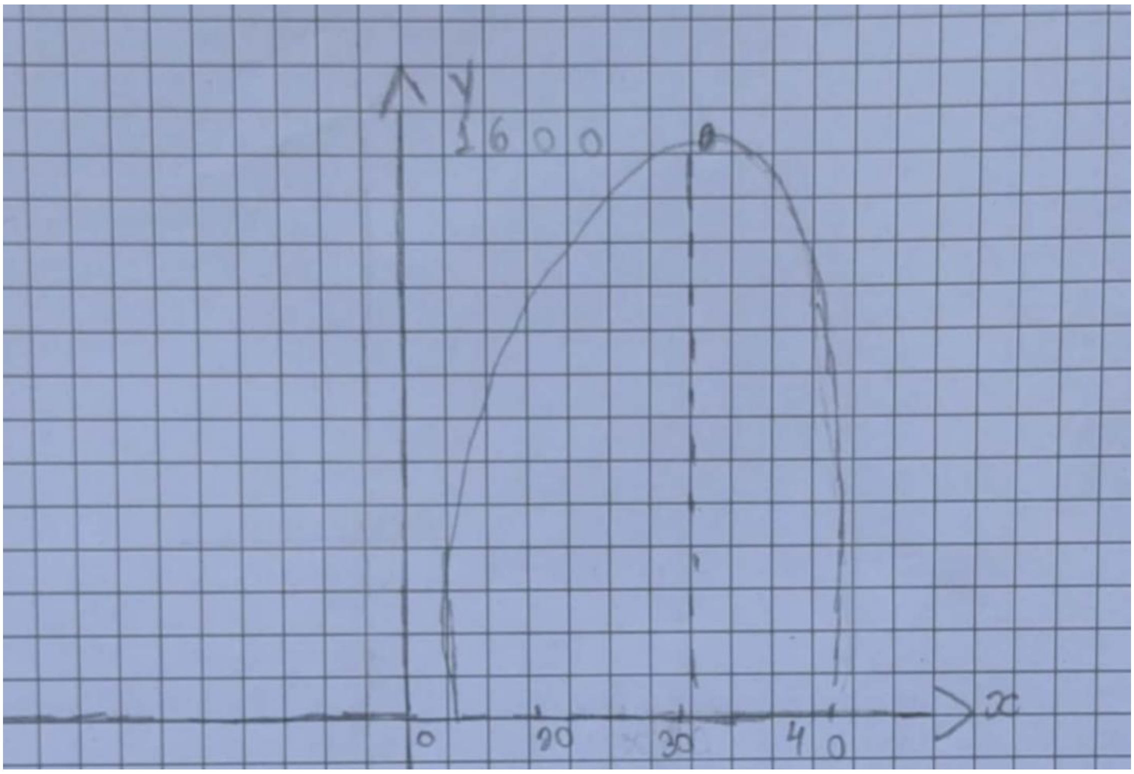


Fonte: Dados da pesquisa

Embora apresente problemas de proporção das grandezas, o estudante demonstra entendimento, traz características do Mundo Corporificado quando localiza os elementos como vértice da parábola e as raízes. Segundo Angelini (2010, p. 59) os já-encontrados do mundo corporificado são encontrados quando apresentam “a disposição dos eixos, o ângulo entre estes eixos, a localização de valores nas escalas, principalmente utilizando os números inteiros e a identificação dos pontos sobre o plano cartesiano”.Embora apresente corretamente os dados obtidos nos itens anteriores, representa os eixos das variáveis dias e número de contaminados como “eixo x” e “eixo y”, os já-encontrados problemáticos que envolvem a representação algébrica de ser sempre a variável “y” em função de “x” é manifestado novamente.

Na figura 4.10 temos a resolução do estudante E2, que mostra uma representação gráficaequivocada.

Figura 4.10: Resolução do estudante E2



Fonte: Dados da pesquisa

No esboço do estudante E2, observamos queutilizou valores numéricos calculados nos itens anteriores e os coloca aleatoriamente como parte do gráfico. Não apresenta as raízes corretamente, marca os valores obtidos no item II) referentes aos 20º e 40º dias e o valor de 1600 infectados como o máximo atingido no 30º dia.Não apresenta as raízes do item anterior, ou seja, quando se inicia e termina o contágio com nenhum contaminado. Além dos problemas apontados, apresenta a mesma dificuldade de proporção nas grandezas e a representação das variáveis nos eixos como “x” e “y”.

Na sequência apresentamos uma breve síntese geral do que observamos nos dados coletados.

4.1.2 Síntese das Análises

A respeito das resoluções apresentadas,percebemosas dificuldades que os alunos tiveram,não só na forma de expressar a função, como também nos cálculos, em operações consideradas básicas com números inteiros, no momento de substituir uma variável por um valor inteiro, operações com sinais e principalmente na construção do esboço do gráfico da função.

Como visto anteriormente no capítulo do referencial teórico os já-encontrados influenciam no aprendizado dos estudantes eno decorrer do processo de aprendizagempode aparecer características dos mundos corporificado e simbólico, em alguns casos do mundo formal.

Nas resoluções apresentadas pelos estudantes constantementeocorreu a manifestação dos já-encontradosreferentesa persistência em se utilizar como variáveis as letras x e y,as quais estavam presente ao expressar uma equação, na lei de formação da função e nos eixos coordenados, pois é comum utilizar as letras x e y em situações diversas e em livros didáticos. Este comportamento foi previsto na THA eé evidenciado no áudio da gravação da aula (Apêndice C) com a fala do estudante E_3.

> E_3: Professor, aqui no caso o (t) tá fazendo o papel do x né?

A fala do estudante mostra que ele compreende que o “t” é a variável independente, mas ele precisa se certificar que trabalhava com uma função da forma que aprendeu $f(x) = ax^2+bx+c$. Na mesma sequência do áudio,o professor questiona:

> P: E por que vocês acham que é o t? O que ele influencia no enunciado, ele se refere à que?
> E_5: Os dias.

Este primeiro momento ocorreu depois que os estudantes leram e interpretaram os dados da tarefa, o professor fez questionamentos para instigar os alunos em relação ao enunciado dos itens para verificar a compreensão.

> P: Qual a função aqui gente?
> E_3: é $f(t)= -2t^2 + 120t$
> P: o primeiro dia de infectados conta ou não?
> E_6: sim.
> P: essa função que está sendo fornecida no enunciado é válida para quando?
> E_3: para os 60 primeiros dias
> P: Isso, mas então se caso fosse para o 72º dia essa função seria válida?
> E_3,E_4 e E_7: Não
> (transcrição do áudio)

Nos trechos apresentados os estudantes mostram compreender as variáveis envolvidas no problema e o domínio da função, mesmo que isso não tenha sido solicitado.

Após a análise das resoluções e dos áudios, percebemos que faltou ser abordado na THAa exploração do domínio e imagem da função, pois no trecho citado acima nos parece o momento ideal para retomar o conceito de domínio.

Observamos que se tivéssemos dado ênfase e o devido estudo ao entendimento inicial do que é domínio e imagem da função, talvez o estudante E_9, não traria em mente a imagem da concavidade da parábola apresentada na figura 4.1(a qual na resolução a parábola se encontra abaixo do eixo da abscissa), que representa um já-encontrado problemático.

Outro aspecto que nos chamou a atenção, foi que ao longo da THA e mesmo na transcrição do áudio, parece ter ficado claro aos estudantes a relação de dependência das variáveis dias e número de infectados. Isso é possível observar na resolução do estudante E_9, figura 4.5, e no esboço apresentado na figura 4.6, que embora errado, os estudantes representam os eixos como dias e número de infectados. No decorrer da discussão do item IIIda implementação em sala temos o trecho abaixo:

> P: Prestem atenção na palavra máximo número de infectados, certo?
> Todos: Simmm
> E_3: professor aqui nós temos que olhar para o eixo do “y”?
> P: seria eixo “y” ou outra variável, e essa variável representa o número de infectados ou a quantidade de dias?
> E_3: humm, eu acho que é o número de infectados porque vai aumentando conforme sobe o gráfico.
> (transcrição do áudio)

A relação de dependência das variáveis dias e número de infectados é bem evidenciada. No entanto, todos os estudantes ao fazerem o esboço do gráfico da função, solicitado no item V do problema, representam os eixos apenas com as letras x e y, inclusive os estudantes E_3 e E_7 que fizeram o esboço da figura 4.6.

Embora saibamos que os esboços de gráficos acabam sempre sendo construídos com a indicação dos eixos com as letras x e y, sendo isto um já-encontrado, resolvemosrevisitar a escrita do item do problema, a descrição daTHA e a transcrição do áudio para ver se houve outros indícios.

O item V da tarefadescreve “Considerando que a lei de formação da função é válida para os 60 primeiros dias, construa um gráfico que represente esta função”, é enfatizado os dias eo domínio da função. No entanto, ao voltarmos a THA, seção 3.2.4, o diálogo previsto foi apenas o professor questionando “O que é necessário para construir o gráfico de uma função?” apenas essa fala se mostra insuficiente. No áudio do diálogo em sala temos o trecho abaixo:

> P: O que precisa para construção de um gráfico?
> E_6: do a, b e c
> P: Dos coeficientes? Será que é isso mesmo? ou dos eixos?
> E_5: de x e de y
> P: isso porque meu gráfico está trabalhando com número de dias e de infectados.Agora que foi realizada uma leitura e interpretação dos dados nos enunciados vou pedir que vocêsnovamente leiam e comecem a tirar suas dúvidas, mesmo que o colega saiba é interessante que exista essa troca de ideias entre vocês e nós.
> (transcrição do áudio)

No áudio é dado ênfase aos eixos x e y, embora logo após o professor enfatize os números de dias e de infectados. Acreditamos que seja necessáriona reformulação da THA a necessidade de representar as variáveis envolvidas na função no esboço do gráfico.

Ainda em relação ao esboço do gráfico da função, apenas dois estudantes acertaram o gráfico, um deles é o estudante E_9. NaFigura 4.9,os demais apresentaram elementos no esboço do gráfico referentes a outros itens do problema, muitos colocaram no eixo o valor de infectados 1600, dado no problema como máximo de infectados.No tocante a construção gráfica, percebemos que a diferença das grandezas dias e número de infectados prejudicou a construção do esboço, em uma próxima reedição da THA, é importante utilizar um*software*para a construção gráfica, como o GEOGEBRA, a fim de auxiliar no entendimento dos estudantes sobre a construção gráfica e exploração.

SegundoAngelini (2010, p. 58), os estudantes apresentam características do mundo corporificado ao trabalharem com funções quando se utilizam de “[...] tabelas numéricas; as operações aritméticas, principalmente aquelas onde se utilizam números inteiros; a construção de gráficos e diagramas [...]”. E apresenta características do mundo simbólico quando reconhecem em uma função a relação de dependência entre as variáveis, consegue distinguir qual depende da outra, identifica o domínio e a imagem da função, além de “saber que y é o mesmo que f(x), mas que y não é a mesma coisa que f", consegue fazer a"interpretação de um gráfico ou tabela em relação aos aspectos de percepção da relação entre as grandezas representadas" (ANGELINI 2010, p.60).

Na construção gráfica surgem os já-encontrados que estão presentes nos Mundos corporificado e simbólico, a partir das análises apresentadas, observamos que os participantes da pesquisa apresentam fragilidades ao transitar por estes mundos.

Como exemplo tomamos o esboço do gráfico que o E2 realizou, figura 4.10, percebemos que o estudante marca as raízes do eixo das abscissas até o 40º dia, mesmo que no enunciado indique que a "função é válida para os 60 primeiros dias" e as discussões em sala ressaltam isso. Ele utiliza resultados calculados no item II para a construção gráfica, marca a abscissa do ponto de máximo, mas utiliza o valor dado no problema como o máximo de infectados.

Diante ao exposto, observamos a manifestação de já-encontrados dificultadores em situações que podem ser evitadas por meio da previsão de novas hipóteses na THA. Como o caso de acrescentar um novo item a tarefa proposta, solicitando que o estudante determine o domínio e imagem da função. Apresentar um diálogo no item referente a construção gráfica, indicando tanto no item da questão como na THA e necessidade de indicar as variáveis envolvidas nos eixos coordenados e prever a utilização de um software para auxiliar na construção gráfica. Percebemos que os estudantes apresentaram características dos mundos corporificados e simbólico, mas não observamos manifestação do Mundo Formal.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa teve como objetivo investigar quais características dos Três Mundos da Matemática podem surgir na resolução deuma tarefa envolvendoFunções Quadráticas proposta por meio de uma trajetória hipotética de aprendizagem. Para que isso fosse possível, realizamos uma pesquisa de natureza aplicada de abordagem qualitativa, em que uma proposta de THA acerca de Funções Quadráticas foi desenvolvida e implementada em sala,a fim de investigar como os estudantes podem pensar matematicamente. Por meio dos já-encontrados surgidos no desenvolvimento da tarefa, foi possível relacioná-los com aspectos do -Quadro Teórico dos Três Mundos da Matemática de Tall.

O ambiente de pesquisa foi um colégio do estado do Paraná, onde o professor/pesquisador trabalhava, e os sujeitos/participantes da pesquisa eram seus alunos de uma turma do 1º ano do ensino médio. A coleta de dados ocorreu no decorrer de três encontros com tempo de 50 minutos cada, no início do mês de dezembro de 2021.

Ao iniciar os primeiros estudos desta pesquisa, um dos questionamentos surgidos se referia aos motivos que levam tantos alunos a apresentarem dificuldades em matemática, especificamente o porquê de alunos que apresentam um ótimo desempenho na educação básica, ao chegarem ao ensino superior sofrem um decaimento significativo no seu desempenho.

Hoje percebemos que a resposta não é simples, envolve um contexto complexo que demanda de muitas variáveis, como experiências anteriores de aprendizagem, muitas vezes baseadas em memorizações procedimentais, abordagem metodológica dos conteúdos matemáticos que não possibilitam que o estudante explore suas estruturas cognitivas, desenvolva e manifeste características dos “mundos” da matemática para o desenvolvimento do pensamento matemático, entre outros tantos fatores que fogem do escopo deste trabalho.

A partir deste contexto, que nos propusemos a desenvolver esta pesquisa de mestrado, pois entendemos que enquanto docentes, compreender aspectos sobre como os indivíduos aprendem a pensar matematicamente, sob a ótica do Quadro Teórico do Pensamento Matemático de Tall é fundamental para o processo de ensino e aprendizagem na prática docente.

Com base nas resoluções dos participantes, de forma geral, observamosmuitos alunos dependentes das fórmulas utilizadas em alguns itens, sem saber o porquê de estar utilizando aquela fórmula, cometendo vários erros de multiplicação e divisão com sinais na substituição dos coeficientes da função. Alguns itens eram desenvolvidos de forma incompleta, com erros de conta ou deixados em branco, mesmo havendo as discussões em sala para sanar dúvidas.

A dificuldade de notação das variáveis foi algo recorrente, a tarefa abordada apresenta variáveis “t” e “f(t)”, no entanto muitos estudantes precisaram escrevem abaixo da função fornecida as variáveis como “x” e “y”, mesmo com toda a discussão em sala acerca das variáveis, sentiam a necessidade de reforçar a notação usual que aprenderam. Esse comportamento, segundo Koch (2010, p. 179), está relacionado aos já-encontrados e refere-se a dificuldade de manipulação dos símbolos, apontando deficiência ao transitar no mundo simbólico.

Nos chamou a atenção o fato de apenas dois estudantes acertarem o esboço do gráfico, a maioria cometeu algum erro, como ao apresentar elementos no esboço do gráfico referentes a outros itens da questão. Na construção gráfica surgem os já-encontrados que estão presentes nos Mundos corporificado e simbólico, a partir das análises apresentadas, observamos que os participantes da pesquisa apresentam fragilidades ao transitar por estes mundos. A diferença das grandezas dias e número de infectados era algo que na THA havia sido previsto, mas não sabemos se isso acabou influenciando no momento de apresentar o esboço. Neste caso, em uma próxima reedição da THA, é importante prever a apresentação/exploração do *software* GEOGEBRA, a fim de auxiliar na construção gráfica dos estudantes.

Em alguns momentos os alunos permeiam o mundo corporificado, buscando compreender os conceitos e consolidá-los para então entrar no mundo da simbologia, das fórmulas, expressões, equações e variáveis. No desenvolvimentodo item II,o estudante tinha que igualar os membros da equação ao valor dado de contaminados, sendo preciso algumas manipulações algébricas para ter a equação igual a zero em um dos lados.Neste momento,surge características do mundo corporificado, mas que muitas vezes não está bem compreendido. A este respeito, Lima (2017) fala sobre a necessidade da corporificação procedimental, pois muitas vezes“o aluno apenas movimenta termos de um membro da equação para o outro, adicionando “toques mágicos” a essa movimentação (LIMA, 2007, p. 291).

A THA se mostrou um instrumento pedagógico eficaz no processo de ensino e aprendizagem da matemática.Os três momentos que compõe a construção de uma THA, planejamento, processo e replanejamento, são igualmente importantes. A organização, na seleção da tarefa, com os objetivos traçados e os diálogos hipotéticos dão ao professor uma dimensão das possíveis dificuldades que podem surgir, no decorrer do processo novas dúvidas surgem, que não haviam sido pensadas. A THA auxilia o próprio aluno a se organizar e ver a questão com outros olhos, no passo a passo, de modo a conseguir identificar detalhes para a compreensão do que realmente é o objetivo da tarefa, o diálogo entre professores e alunos durante o processo, auxilia e muito, pois não deixa o aluno sozinho, sem um respaldo, uma orientação a qual caminho, seguir, sem dar a resposta de fato, mas conduzi-lo a pensar como pode proceder, ou até mesmo, quais conceitos e procedimentos utilizar.

A utilização da THA para investigar quais características dos Três Mundos da Matemática podem surgir na resolução deuma tarefa envolvendoFunções Quadráticas podemos dizer que foi acertada, pois ao planejar uma possível trajetória de aprendizagem dos estudantes o professor reflete sobre os possíveis já-encontrados que podem emergir e propõe possíveis soluções para consolidar o conhecimento por meio das características dos mundos corporificado e simbólico.

A partir das observações realizadas após a execução da THA, em que o professor avalia os conhecimentos do aluno, e neste trabalho as características dos mundos da matemática, chega o momento do replanejamento, em que é preciso fazer alterações na THA utilizada. No caso desta pesquisa, observamos a necessidade de trabalhar o conceito de domínio e imagem da função, com a inclusão de um novo item na tarefa para abordar os conceitos.Outro ajuste necessário é referente a construção gráfica, em que se observou a necessidade de mais diálogos com previsões hipotéticas, a alteração do texto do item da construção gráfica, reforçando a identificação das variáveis do problema nos eixos coordenados, além da previsão da utilização de um *software* para a construção gráfica, como o GEOGEBRA.

E vamos além, no que se refere a estrutura da THA elaborada por nós, é necessária uma preparação maior em relação ao assunto, percebemos que como o assunto de funções havia sido trabalhado no segundo trimestre e a THAaplicada no terceiro, os alunos já não lembravam mais de alguns conceitos.

Porém o tempotambém foi um obstáculo, sinal de que não foi bem compreendido.

Percebemos também a questão da quantidade das aulas para aplicar uma atividade como esta, exige tempo, calma, e ainda mais tarefas que trabalhem com função quadrática aplicável e não diretamente como expressões apenas.

A partir dos resultados da presente pesquisa esperamos que possa auxiliar outros docentes, que assim como nós consideram importantereconhecerem quais mundo da matemática o aluno se encontra, e assim criar estratégias para o embasamento de conceitos, de forma a contribuir na identificação de caminhos que possam levar ao desenvolvimento do Pensamento Matemático.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; PALHARINI, B. N. Os mundos da Matemática em atividades de Modelagem Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 43, p. 907-934, 2012.

AMORIM, L. I. **A (re)construção do conceito de limite do cálculo para a análise**: um estudo com alunos do curso de licenciatura em matemática. 2011. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

ANGELINI, N. M. **Funções**: um estudo baseado nos Três Mundos da Matemática. 2010. Dissertação (Programa de pós-graduação em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, Curso de Educação Matemática, São Paulo, 2010.

ATZ, D. **A análise combinatória no 6º Ano do Ensino Fundamental por meio da resolução de problemas.** 2017. Dissertação (Mestrado profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2017.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011.

BARLOW, M. **Avaliação escolar**: mitos e realidades. Porto Alegre: Artmed, 2006.

BESSA, K. P. **Dificuldades de aprendizagem em matemática na percepção de professores e alunos do Ensino Fundamental**. 2007. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2007.

BICUDO, M. A. V. A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Curitiba,v. 5, n. 2, 2012.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em Educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec. 2002.

BRANDÃO, J. D. P. **Ensino aprendizagem de função através da resolução de problemas e representações múltiplas**. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Paraíba, 2014.

BRUNER, J. S. **A cultura da Educação**. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001.

BUENO, R. W. S.; VIALI, L . O cálculo e os três mundos da Matemática: um estado do conhecimento. **Revista Dynamis**, Blumenau, v. 25, n. 2, p. 39-55, 2019.

BUENO, R. W. S.. Os três mundos da Matemática, a modelação e o conceito de integral. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, Sergipe, v. 7, p. 170-191, 2022.

BURIASCO, R. L. C.; FERREIRA, P. E. A.; CIANI, A. B. Avaliação como prática de investigação (alguns apontamentos). **Bolema**, Rio Claro, v. 22, n. 33, p. 69-95, 2009.

CARMO, P. F. **Pensamento matemático avançado - como essa noção repercute em dissertações e teses brasileiras?** 2018. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2018.

CARMO, P. F. Noções de Pensamento Matemático Avançado em dissertações e teses brasileiras. **Brazilian of Journal Development**, Curitiba, v.6, n.12, p. 94014-94028, 2020.

CARMO, P.F.; IGLIORI, S. C. B. Uma metanálise de dissertações e teses brasileiras que utilizaram a teoria do Pensamento Matemático Avançado**. Educação Matemática em Debate**, Montes Claros, v. 4, p. 1-26, 2020.

CHAVES, G. G e SOUZA, V. H. G.; LIMA, R. N. Definição de conceito de número real: discussões e influências de já-encontrados**.** *In*: COLÓQUIO LUSO-BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO, 2, Joinville. **Anais** [...] Joinville: 2016.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. *In*: TALL, D. **Advanced mathematical thinking.** Dordrecht: Kluwer, 2002. p. 25-41.

FERNANDES. C. G. **Ângulos e paralelismo nos livros didáticos à luz dos três mundos da matemática**. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Ahanguera, São Paulo, 2015.

FERREIRA, P. E. A.; BURIASCO, R. L. C. Enunciados de tarefas de Matemática baseados na perspectiva da Educação Matemática realística. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, p. 452-472, 2015.

FERREIRA, P. E. A.; BURIASCO, R. L. C. Educação Matemática realística: uma abordagem para os processos de ensino e aprendizagem. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 237-252, 2016.

FERREIRA, R. D. **Compreensão do conceito de limite por alunos de cursos de Ciências Exatas**. 2021. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2021.

FLORES, J. B. **Monitoria de cálculo e processo de aprendizagem:** perspectiva à luz da sóciointertividade e dos três mundos da Matemática. 2018. Tese. (Doutorado em Educação e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, Rio Grande do Sul, 2018.

FLÔRES, M. V. **Construção dos números racionais na Licenciatura:** um estudo desenvolvido à luz dos três mundos da Matemática. 2020. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Franciscana, Santa Maria, 2020.

FLÔRES, M. V.; FONSECA, J. A.; BISOGNIN, E. Processos do pensamento matemático avançado revelados nas resoluções de tarefas envolvendo números racionais. **Ensino da Matemática em debate**, São Paulo, v. 7, n.1, p. 217–238, 2020.

FLORES, J**.** B.; LIMA, V. M. R.; MÜLLER, T. J. Convergências e complementaridades entre as teorias dos três mundos da Matemática e a da sociointeratividade. **Bolema**, Rio Claro, v. 34, p. 1341-1358, 2020.

FONSECA, D. S. S. de M. **Convergência de sequências e séries numéricas no cálculo**: um trabalho visando a corporificação dos conceitos. 2012. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2012.

GALVÃO, M. C. B.; RICARTE, I. L. M. Revisão sistemática da literatura: conceituação, produção e publicação. **Logeion: Filosofia da informação**, Rio de Janeiro, v. 6, n. 1, p. 57-73, 2019.

GARCIA, J. N. **Manual de dificuldades de aprendizagem**: linguagem, leitura escrita e Matemática. Porto Alegre: Artmed, 1998.

GERETI, L. C. V**.**; SAVIOLI, A. M. P. D. Pensamento Matemático avançado: um estudo com questões de vestibular. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Anais** [...] Curitiba: PUC-PR 2013.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4.ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GOIS, V. H. S.; SILVA, K. A. P. O uso de trajetórias hipotéticas de aprendizagem em atividades de modelagem matemática: uma abordagem teórica. *In*: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2017, Cascavel. **Anais** [...] Cascavel: UNIOESTE, 2013.

IBG. . Instituto brasileiro de geografia e estatística. **PNAD Educação 2019**. IBGE. 2022. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/28285-pnad-educacao-2019-mais-da-metade-das-pessoas-de-25-anos-ou-mais-nao-completaram-o-ensino-medio. Acesso em: 03 fev. 2022.

INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Baixo desempenho escolar em leitura Matemática e Ciências**. INEP. 2022. Disponível em: https://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil/21206. Acesso em: 03 fev. 2022.

JAPIASSÚ, H.; MARCONDES, D. **Dicionário básico de Filosofia**. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.

JESUS, M. S. **A matemática que se sente na pele**: um estudo do pensamento matemático de alunos surdocegos. 2021. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

KIRNEV, D. C. B.; SAVIOLI, A. M. P. D. Set-Befores e Met-Befores: influência no estudo de anéis de polinômios. **Vidya**, Santa Maria, v. 37, p. 533-547, 2017.

KOCH, R. M. **Uma introdução ao estudo de equações quadráticas à luz dos três mundos da Matemática**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

LEME, J. C. M. **Aprendizagem da derivada**: uma perspectiva de análise pelos fluxos de pensamento. 2016. Tese (Doutorado em Educação Matématica) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

LIMA, R. N.; TALL, D. Procedural embodiment and magic in linear equations. **Educational Studies in Mathematics**, v. 67, n. 1, p. 3-18, 2008.

LIMA, R. N. **Equações algébricas no Ensino Médio**: uma jornada por diferentes mundos da Matemática. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

MARINS, A. S. **Pensamento matemático avançado em tarefas envolvendo transformações lineares**. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

MARTELOZO, D. P. S.; SAVIOLI, A. M. P. D. Já-encontrados na aprendizagem da Matemática: quais implicações? **Vidya**, Santa Maria, v. 39, p. 55-71, 2019.

MASOLA, W.; ALLEVATO, N. Dificuldades de aprendizagem matemática: algumas reflexões. **Educação Matemática Debate**, v. 3, n. 7, p. 52-67, 2019.

OLIVEIRA, N. **Conceito de função**: uma abordagem do processo Ensino-aprendizagem. 1997. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

PACHECO, M. B.; ANDREIS, G. S. L. Causas das dificuldades de aprendizagem em Matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do Ensino Médio. **Revista Principia**, João Pessoa, v. 38, p. 105-119, 2018.

PALHARINI, B. N. **Modelagem Matemática e Pensamento Matemático**: um estudo à luz dos três mundos da Matemática. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

POLEGATTI, G. A.; SAVIOLI, A. M. P. D.; LEIVAS, J. C. P. A dinâmica de movimento do pensamento matemático em perspectivas nos três mundos da Matemática: o caso hipotético do teorema de Pitágoras no Ensino Fundamental. **Dynamis**, Blumenau, v. 28, p. 3-23, 2022.

POGGIO, A. M. P. P. **Um diagnóstico com o conceito de proporcionalidade de alunos do Ensino Médio na perspectiva dos três mundos da Matemática.** 2012. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirantes de São Paulo, São Paulo, 2012.

RIZZON, B. M. **Formação continuada para professores de Matemática**: o erro como recurso pedagógico e seu papel no processo de avaliação. 2018. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Universidade Estadual de Caixas do Sul, Caixas do Sul, 2018.

ROSSETTO, H. H. P. **Trajetória hipotética de aprendizagem sob um olhar realístico**. 2016. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

SCHASTAI, M. B. **TALL e Educação Matemática Realística**: algumas aproximações. 2017. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

SCHWARZ, O. **Sobre as concepções de função dos alunos ao término do 2° Grau.** 1995. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1995.

SIMON, M. A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 26, n. 2, p. 114-145, 1995.

SIMON, M. A., TZUR R. Explicating the role of Mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. **Mathematical Thinking and Learning.** v. 6, n. 2, p. 91-104, 2004.

SMITH, C.; STRICK, L. **Dificuldades de aprendizagem de A-Z**: guia completo para educadores e pais. Porto Alegre: Penso, 2012.

SOARES, G. O. **O conceito de limite na formação inicial de professores de Matemática**: um estudo à luz dos três mundos da Mat**emática**. 2018. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Franciscana, Rio Grande do Sul, 2018.

SOARES, G. O**.**; LEIVAS, J. C. P. Livros Didáticos de Matemática e o Conceito de Distância: uma análise à luz da Teoria dos Três Mundos da Matemática**. Revista Educação Matemática em Foco**, Paraíba, v. 9, p. 153-172, 2020.

SOARES, G. O. O conceito de limite na formação de professores de Matemática: um estudo à luz dos Três Mundos da Matemática. **Revista Docência do Ensino Superior**, v. 10, p. 1-2, 2020.

SOUZA, V; GALVÃO, M; POGGIO, A. M. O Conceito de proporcionalidade direta de alunos brasileiros de 14 16 anos na perspectiva dos Três Mundos da Matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, Londrina, v. 9, p. 30-64, 2016.

TALL, D. O. **Advanced Mathematical Thinking**, Kluwer: Dordrech, 1991.

TALL, D. O. **A sensible approach to the calculus**. To appear. handbook on calculus and its teaching. University of Warwick: François Pluvinage & Armando Cuevas, 2012.

TALL, D. O. A theory of Mathematical growth through embodiment, symbolism and proof. *In*: COLLOQUIUM ON MATHEMATICAL LEARNING FROM EARLY CHILDHOOD TO ADULTHOOD, 2005, Belgium. **Resumos** [...] Belgium: 2005. p. 5-7. Disponível em: https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html. Acesso em: 05 jul. 2022.

TALL, D. O. Cognitive and social development of proof through embodiment, symbolism & formalism. *In*: CONFERENCE ON PROOF, 2009, Taipei. **Resumos** [...] Taipei: 2009. p. 1-6. Disponível em: https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2009a-icme-proof.pdf. Acesso em: 10 jul. 2022.

TALL, D. O. **How humans learn to think mathematically**. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

TALL, D. O. Introducing three worlds of Mathematics. **For the learning of Mathematics**, v. 23, n.3, p. 29-33, 2004.

TALL, D. O. Making Sense of Mathematical Reasoning and Proof. In: FRIED, M. N.; DREYFUS, T. (eds.). **Mathematics & Mathematics Education**: Searching for Common Ground. New York: Springer, Advances in Mathematics Education series, 2013.

TALL, D. O. Mathematicians thinking about students thinking about Mathematics, **Newsletter of the London Mathematical Society**, p. 12-13, 1993.

TALL, D. O. The development of mathematical thinking: problem-solving and proof. **Mathematical Action & Structures of Noticing**, p. 15-29, 2009.

TALL, D. O. The psychology of advanced mathematical thinking. In: TALL, D. O (org.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer. 2002. p. 3-21.

VIARO F**.** M.; FONSECA, J. A.; BISOGNIN, E . Processos do Pensamento Matemático avançad**o** revelados nas resoluções de tarefas envolvendo números racionais. **Ensino da Matemática em Debate**, Montes Claros v. 7, p. 172-190, 2020.

VIEL, L. C. **Processos do pensamento matemático avançado evidenciados em resoluções de questões do ENADE**. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

APÊNDICES

APÊNDICE A – INSTRUMENTO COLETA DE DADOS

Universidade Estadual de Ponta Grossa

Pró Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação

COMISSÃODEÉTICAEMPESQUISAEM
SERESHUMANOS
Av.: Gen. Carlos Cavalcanti, 4748 CEP: 84030-900Bloco M, Sala
12CampusUvaranasPontaGrossaFone:(42)3220.3108e-mail:seccoep@*uegp.br*

Nome:

ENEM (2016 – adaptada) - “Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(t) = - 2t^2 + 120t$(em que t é expresso em dia e $t = 0$ é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.

A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1.600 pessoas”.

I. De acordo com a lei de formação da Função e seus respectivos coeficientes, determine a concavidade da parábola.
II. Após quantos dias foi realizada a segunda dedetização?
III. Qual o dia em que se obteve o maior número de infectados?Qual a quantidade máxima de infectados?
IV. Em que momento desta função o gráfico intercepta o eixo x? O que isso significa no problema?
V. Considerando que a lei de formação da função é válida para os 60 primeiros dias, construa um gráfico que represente esta função.

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

UEPG

Universidade Estadual de Ponta Grossa

Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação

COMISSÃO DE ÉTICA EM PESQUISA EM SERES HUMANOS

Av.: Gen. Carlos Cavalcanti, 4748 CEP: 84030-900 Bloco M, Sala 12

Campus Uvaranas Ponta Grossa Fone: (42) 3220.3108 e-mail: seccoep@uepg.br

Termo de Concentimento Livre e Esclarecido

O(A) seu(sua) filho(a) ____, está sendo convidado a participar da pesquisa ***"DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO: UM ESTUDO A PARTIR DE TAREFAS MATEMÁTICAS DESENVOLVIDAS POR ALUNOS DO ENSINO MÉDIO"*** tendo como pesquisador responsável o mestrando **Augusto Rangel Selski** e sob orientação das pesquisadoras professoras Orientadora Drª **Luciane Grossi** e Co- Orientadora Drª **Marta B. Schastai** da Universidade Estadual de Ponta Grossa. O objetivo da presente pesquisa é ***Caracterizar o Processo do Desenvolvimento do Pensamento Matemático a partir das tarefas não rotineiras aplicadas aos alunos do 1º ano do Ensino Médio.*** A participação dele(a) no estudo será realizada mediante a resolução de atividades(tarefas não rotineiras) com o intuito de levantar características do processo do Desenvolvimento do Pensamento Matemático. Está pesquisa possui caráter restrito à pesquisa acadêmica, sendo, portanto, utilizada apenas para divulgação científica por meio da elaboração de uma dissertação e possíveis artigos.

Após as análises você será informado dos resultados desta pesquisa da qual seu(sua) filho(a) participou. A participação dele(a) é voluntária,portanto não receberá recompensa ou gratificação nem pagará para participar. Será garantido o livre acesso a todas as informações e retirada de dúvidas sobre o estudo, enfim, tudo o que você queira saber antes, durante e depois da participação na pesquisa. O unico risco que esta pesquisa demonstra um possível constrangimento em não resolver as tarefas solicitadas portanto ele(a) poderá deixar de participar do estudo a qualquer momento, sem apresentar justificativas e, também, sem prejuízo ou perda de qualquer benefício que possa ter adquirido, tendo também todas as dúvidas esclarecidas sobre a participação neste trabalho. Você ficará com uma via deste documento. Em caso de dúvidas, você poderá entrar em contato com qualquer um dos membros da pesquisaou com a Comissão de Ética em Pesquisa da UEPG:

AUGUSTO RANGEL SELSKI
Av.: Gen. Carlos Cavalcanti, nº 4748 – Ponta Grossa /PR Telefone: (42) 9 9909 – 8432 email:matematicoguto@gmail.com
LUCIANE GROSSI
Av.: Gen. Carlos Cavalcanti, nº 4748 – Ponta Grossa /PR Telefone: (42) 9 9934-4343 email: Lgrossi.uepg@gmail.com
MARTA BURDA SCHASTAI
Av.: Gen. Carlos Cavalcanti, nº 4748 – Ponta Grossa /PR Telefone: (42) 9 9996-8052 email: martaschastai@gmail.com

Comitê de Ética em Pesquisa
UEPG - Campus Uvaranas, Bloco M Telefone: (42) 3220-3108. e-mail: seccoep@uepg.br

____
Assinatura do convidado para a pesquisa

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Ensino de Ciências e Educação Matemática
Profª Drª. Luciane Grossi
Coordenadora

Augusto Rangel Selski

Marta Burda Schastai

Assinatura pesquisador responsável MESTRANDO	Assinatura pesquisador participante 1 ORIENTADORA	Assinatura pesquisador participante 2 CO-ORIENTADORA

APÊNDICE C – TRANSCRIÇÃO DOS ÁUDIOS

P: Nesses primeiros 10 minutos vocês devem fazer a leitura do enunciado, percebam quais elementos estão sendo fornecido.
E1: Professor essas questões é de marcar x?
P: Gente, presta atenção, observa que essas questões que estão aí, questões 1,2,3,4 e 5, cada uma delas ela procura identificar o que?
E7: Identificar o desenho (aquiacredito que ele se referiu ao gráfico)
P: Perceba que essa questão busca identificar os elementos, algumas características da tua função, tá certo? Por isso nesses primeiros 10 minutos procurem fazer a leitura, identificar o que o enunciado quer saber, o que está pedindo, certo?
E3: Professor, aqui no caso o (t) tá fazendo o papel do x né?
P: Isso, pessoal, olha só a pergunta da colega, prestem atenção. Lembrem que a função é feita do que? É composta de $f(x)= ax^2 + bx + c$, ta certo? A variável aqui é o x, neste caso da tarefa, quem é a letra que tá substituindo o x?
E2: é o t.
P: E por que vocês acham que é o t? O que ele influencia no enunciado, ele se refere ao que?
E5: Os dias.
P: Isso mesmo, o t que eles usam para representar neste caso aqui o tempo, por tanto deste jeito vocês devem ir fazendo a leitura, para ir identificando quais esses elementos da função, certo?
P: Enquanto isso eu vou entregar para vocês uma folha em branco que vocês utilizarão para resolução e depois nós anexamos a tarefa.
Depois de entregar as folhas...
P: pessoal vou fazer uma leitura do enunciado junto com vocês (aquifoi feito uma leitura com algumas pausas de questionamentos feitas por mim e os alunos, as quais mostro a seguir:
P: - qual a função aqui gente?
E3: é $f(t)= -2t^2 + 120t$
P: o primeiro dia de infectados conta ou não?
E6: sim.
P: essa função que está sendo fornecida no enunciado é válida para quando?
E3: para os 60 primeiros dias
P: Isso, mas então se caso fosse para o 72º dia essa função seria válida?
E3, E4, E7: Não
Aqui começa os questionamentos por perguntas
1) Fiz a leitura do enunciado e:
P: De acordo com seus coeficientes, quem aqui seriam os coeficientes então?
E3: a, b e c
P: joia, o enunciado também quer que você diga a respeito da concavidade da função, o que é necessário para que eu consiga dizer se a concavidade é voltada para cima ou para baixo? Lembrem dos valores de a, b e c e do que cada um identifica.
2) Fiz a leitura do enunciado e:
P: O nunciado está se referindo a algum dia? Por exemplo 11º dia, 15º dia, ele está falando?
E2: não
P: mas ele dá outra informação para nós?
E3: sim, os 60º primeiros dias
P: Isso, para realizar a segunda dedetização, mas qual outra informação?

E6: de 1600 pessoas infectadas?
P: Isso muito bem, e a partir desses dados já podemos ter uma ideia do que? Vamos supor assim, hoje é o dia zero, então quantos infectados?
E6: nenhum
P: Nenhum, certo. Passou um dia, então vai ter uma numero de infectados, segundo dia já aumentou o número de infectados, e assim vai, então 1600 infectados ele vai representar dias?
E3: sim também
P: Então precisamos identificar esse dia que é do questionamento número dois.
3) Fiz a leitura do enunciado e:
P: Prestem atenção na palavra máximo número de infectados, certo?
Todos: Simmm
4) Fiz a leitura do enunciado e:
P: O que é intercepta o eixo gente? o que significa a palavra interceptar? Vejam no dicionário, vamos juntos ver. (aqui todos estavam com dicionário a disposição). Vejamos: significa cortar, passar, então vai passar pelo eixo x, encostar no eixo x, e ele quer saber em que momento isso acontece, o que isso significa nesta situação?
P: veja bem, neste nosso gráfico, quantos eixos temos?
E3, E2: eixo x e eixo y
P: o eixo x neste caso vai representar o número de infectados ou de dias?
E3, E5, E2: dias, e y o de infectados
5) Fiz a leitura do enunciado e:
P: o que precisa para construção de um gráfico?
E6: do a, b e c
P: Dos coeficientes? Será que é isso mesmo? ou dos eixos?
E5: de x e de y
P: isso porque meu gráfico está trabalhando com número de dias e de infectados.Agora que foi realizado uma leitura e interpretação dos dados nos enunciados vou pedir que vocês novamente leiam e comecem a tirar suas dúvidas, mesmo que o colega saiba é interessante que exista essa troca de ideias entre vocês e nós.
A partir deste momento os alunos voltaram as perguntas da tarefa e começaram as tentativas para solucioná-lo, e durante todo o restante do processo foram surgindo as dúvidas e questionamentos, com o meu feedback sempre que possível.(a partir daqui questionamentos da resolução)
E4: professor aqui nos 60 primeiros dias faz parte da função também?
P: Então vejamos, o t como o colega havia dito representa os dias, porém estes dias não podem ultrapassar qual valor?
E4: os 60 dias
P: isso mesmo, pois no 61º já não faz parte da função.
E3: professor ali na questão um eu só tenho que resolver a função e construir o gráfico?
P: Vamos olhar novamente, quando o enunciado diz “determine a concavidade da parábola” tem a necessidade de construção da parábola?
E4: Não
P: E por que não é necessário fazer os cálculos?
E9: Porque é só ver o valor do “a”!
E3: Ah então o “a” é -2, então a concavidade é para baixo?
P: O que você me diz? O que determina se a concavidade está para cima?
E3: se o valor do “a” é positivo

P: então, você acabou de me dizer que o valor do “a” é -2, e o menos dois é negativo ou positivo?
E7: Negativo
P: então significa que a concavidade está?
E8: Para baixo
P: aqui vocês devem justificar o porquê
Durante este momento fui passando pelas carteiras observando a resolução, e aproveitei para entregar as folhas quadriculadas que cada um utilizaria para construir o gráfico.
E6: professor então aqui precisa calcular para saber a concavidade?
P: este seria o modo mais prático para descobrir?
E2: Não, tem o valor do “a”
Aqui a maioria estava já realizando a 2ª questão, então vi uma oportunidade para reforçar a interpretação com eles e instigar a pensarem.
Aqui confesso que parecia que eu estava tirando água de pedra, pois eles são muito tímidos e tem receio de falar suas dúvidas ou arriscar palpites, vieram do (9º com muita defasagem, pois foi totalmente online/pandemia)
Portanto neste momento fui para lousa e comecei a questioná-los mostrando os conceitos que tínhamos visto sobre a função
P: quem aqui representa a variável “t” e a f(t)?
E3, E2: t é os dias e f(t) número de pessoas infectadas
P: e quem é o número de infectados?
E3: 1600 é o f(t)
P: Isso, mas então olhando novamente para o enunciado, quem ele quer descobrir?
E2, E3: o número de dias
P: então quem seria?
E3, E6: o valor do x
P: Isso mesmo, mas olhando e observando qual tipo de função vemos aqui?
E5, E9,E2: segundo grau
P: Isso, a função quadrática
Alguns instantes eles tentando resolver sozinhos...
P: não esqueçam que para utilizar a equação de segundo grau é necessário conhecer os coeficientes.
A partir deste momento fui recapitulando algumas coisas como os coeficientes, a relação entre as variáveis entre dias e a quantidade de infectados, assim eles foram relembrando que o número máximo de infectados seria o máximo da função, aí foram lembrando alguns de que era possível realizar a operação de ponto de máx e mín da função.
Nos momentos seguintes foi havendo várias discussões entre eles a respeito das perguntas e como resolvê-las, neste caso eu fazia as intervenções necessárias.