

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS – FÍSICA

JONATHAN ALEXANDRE MORAZ ALMEIDA ROCHA

EFEITO CASIMIR DINÂMICO E DETECÇÃO DE FÓTONS:
ASPECTOS ALGÉBRICOS E DINÂMICOS

PONTA GROSSA

2023

JONATHAN ALEXANDRE MORAZ ALMEIDA ROCHA

EFEITO CASIMIR DINÂMICO E DETECÇÃO DE FÓTONS:
ASPECTOS ALGÉBRICOS E DINÂMICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências, área de concentração Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências-Física.

Orientador: Dr. Antonio Sérgio Magalhães de Castro

PONTA GROSSA

2023

A447 Almeida Rocha, Jonathan Alexandre Moraz
Efeito Casimir Dinâmico e detecção de fótons: aspectos algébricos e dinâmicos / Jonathan Alexandre Moraz Almeida Rocha. Ponta Grossa, 2023. 102 f.

Dissertação (Mestrado em Ciências - Área de Concentração: Física), Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Sérgio Magalhães de Castro.

1. Segunda quantização da luz. 2. Efeito Casimir Dinâmico. 3. Dissipação. 4. Estado gaussiano. I. Castro, Antonio Sérgio Magalhães de. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Física. III.T.

CDD: 530.1

TERMO DE APROVAÇÃO

JONATHAN ALEXANDRE MORAZ ALMEIDA ROCHA

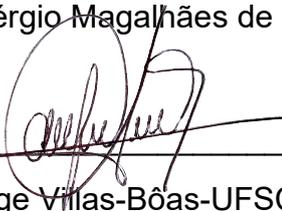
EFEITO CASIMIR DINÂMICO E DETECÇÃO DE FÓTONS:
ASPECTOS ALGÉBRICOS E DINÂMICOS

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciências, no Programa de Pós-Graduação em Ciências, Área de Concentração Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:



Orientador _____

Prof. Dr. Antônio Sérgio Magalhães de Castro-UEPG/PR



Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Bôas-UFSCar/SP-Titular



Prof. Dr. Ervin Kaminski Lenzi-UEPG/PR

Ponta Grossa, 09 de junho de 2023

Dedico este trabalho aos meus queridos pais, Pedro e Kátia.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Antonio Sérgio Magalhães de Castro pela paciência e por todo o suporte que me forneceu durante os estudos e escrita do trabalho.

Agradeço a minha avó Cleide pelo suporte e paciência fundamentais para realização desse trabalho. Agradeço a minha tia Luciana pelo apoio e incentivo que sempre me forneceu. Agradeço a Natália Ribeiro de Lara pelo suporte emocional e paciência.

Agradeço a agência governamental brasileira CAPES pelo suporte financeiro fornecido por meio da bolsa de estudos.

Agradeço a toda equipe do projeto `abnTEX2` por facilitar imensamente a produção deste trabalho em `LATEX`.

Peço desculpas por não me ser possível listar aqui todos os amigos, familiares, servidores da UEPG e tantos outros que, com certeza, de uma forma ou de outra, contribuíram durante o período em que estive no mestrado.

Por último, mas não menos importante, gostaria de deixar registrado meu agradecimento a Deus por todo o suporte que sem dúvidas me fornece.

“Disse Deus: ‘Haja luz’, e houve luz.”
(Bíblia Sagrada, Gênesis 1, 3)

RESUMO

Neste trabalho, discute-se a quantização do campo eletromagnético no contexto da segunda quantização para uma cavidade unidimensional tanto para paredes fixas como para paredes móveis. Analisa-se a estrutura de estados quânticos do campo eletromagnético, considerando propriedades como energia do ponto zero (ou energia de vácuo) e componentes de quadratura. Um dos pontos principais é a apresentação de uma formulação hamiltoniana do Efeito Casimir Dinâmico, sendo este uma consequência direta da existência da energia do vácuo. Discute-se a geração e detecção (por meio de um circuito RLC quantizado, ou antena) de fótons no Efeito Casimir Dinâmico, bem como o efeito de dissipação devido ao acoplamento da antena com um reservatório térmico. A abordagem dessa última análise é realizada por meio da Equação Mestra e da evolução temporal no contexto de estados Gaussianos. Obtiveram-se as soluções das matrizes de covariâncias para o sistema composto de um modo da cavidade de paredes móveis e de um detector dissipativo, considerando como estados Gaussianos iniciais, estados térmicos comprimidos.

Palavras-chave: Segunda quantização da luz. Efeito Casimir Dinâmico. Dissipação. Estado gaussiano.

ABSTRACT

In this work, the quantization of the electromagnetic field is discussed in the context of the second quantization for a one-dimensional cavity for both fixed and movable walls. The structure of quantum states of the electromagnetic field is analyzed, considering properties such as zero-point energy (or vacuum energy) and quadrature components. One of the main points is the presentation of a hamiltonian formulation of the Dynamical Casimir Effect, which is a direct consequence of the existence of vacuum energy. The generation and detection (by means of a quantized RLC circuit, or antenna) of photons in the Dynamical Casimir Effect are discussed, as well as the dissipation effect due to the coupling of the antenna with a thermal reservoir. The approach of this last analysis is carried out through the Master Equation and the temporal evolution in the context of Gaussian states. The solutions of the covariance matrices for the system composed of a cavity mode with movable walls and a dissipative detector were obtained, considering squeezed thermal states as initial Gaussian states.

Keywords: Second quantization of light. Dynamical Casimir Effect. Dissipation. Gaussian state.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO	13
2.1	O HAMILTONIANO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO	13
2.2	SEGUNDA QUANTIZAÇÃO	17
2.3	ESTADOS DE FOCK	19
2.4	DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA DE MODOS NO ESPAÇO LIVRE	20
2.5	O EFEITO CASIMIR	22
3	ESTADOS DA LUZ	24
3.1	ESTADO COERENTE	24
3.2	ESTADO COMPRIMIDO	28
3.3	ESTADO TÉRMICO	31
4	EFEITO CASIMIR DINÂMICO: HAMILTONIANO EFETIVO	35
4.1	QUANTIZAÇÃO DO CAMPO COM FRONTEIRAS MÓVEIS	36
4.2	EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DAS COORDENADAS $\hat{q}_k(t)$ E $\hat{p}_k(t)$	37
4.3	HAMILTONIANO EFETIVO NAS VARIÁVEIS BOSÔNICAS	41
5	DISSIPACÃO EM SISTEMAS QUÂNTICOS	48
5.1	EQUAÇÃO MESTRA PARA UM MODO ACOPLADO A UM RESERVATÓRIO TÉRMICO	48
5.2	MODOS BOSÔNICOS ACOPLADOS	54
5.2.1	Equação Mestra para Dois Modos Acoplados	55
5.2.2	Equações da Dinâmica do Primeiro e Segundo Momentos de um Estado Gaussiano	57
6	DINÂMICA DE MODOS ACOPLADOS	61
6.1	O HAMILTONIANO E A CORRESPONDENTE EQUAÇÃO MESTRA	61
6.2	DINÂMICA DE MODOS ACOPLADOS	65
6.3	MATRIZ DAS COVARIÂNCIAS PARA O ESTADO TÉRMICO COMPRIMIDO	72
7	CONCLUSÃO	82
	REFERÊNCIAS	84

APÊNDICE A	REPRESENTAÇÕES DA DINÂMICA QUÂNTICA	89
APÊNDICE B	OSCILADOR HARMÔNICO QUÂNTICO	97

1 INTRODUÇÃO

No início do século XIX, os experimentos de Young e Fresnel, acerca da difração da luz, demonstraram o caráter ondulatório da mesma, encerrando, assim, o antigo debate, iniciado por Newton e Huygens, no final do século XVII, entre a teoria corpuscular e ondulatória luz (O’CONNOR; ROBERTSON, 2002a). Já na segunda metade do século XIX, o desenvolvimento do eletromagnetismo clássico e as confirmações experimentais de Hertz demonstraram que a natureza da luz é a de uma onda eletromagnética que obedece as Equações de Maxwell (O’CONNOR; ROBERTSON, 2002a; DUTRA, 2005).

Porém, no final do século XIX, o eletromagnetismo clássico era incapaz de fornecer um modelo adequado para explicar o espectro da luz emitida por um corpo a uma determinada temperatura (o problema do corpo negro) (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016; TIPLER; LLEWELLYN, 2014). Esse problema foi solucionado por Plank, em 1900, por meio de um modelo onde a energia da radiação eletromagnética produzida por um corpo negro era emitida em valores discretos (quanta de energia) (O’CONNOR; ROBERTSON, 2002b).

O trabalho de Plank leva Einstein, em 1905, a fornecer uma explicação para o efeito fotoelétrico propondo que toda a radiação eletromagnética era constituída por “pacotes” de energia (quanta), que viriam a ser chamados de fótons, com energia $\hbar\omega$, sendo ω a frequência da radiação eletromagnética e \hbar a constante reduzida de Plank (LOUDON, 2000; O’CONNOR; ROBERTSON, 2002b). Esse processo de discretização da energia da radiação eletromagnética é considerado hoje como a *primeira quantização da luz* e marca o início a física quântica (SALASNICH, 2014).

Em 1927, Dirac avança na compreensão da natureza quântica da radiação eletromagnética ao realizar a quantização do campo eletromagnético, conhecida como *segunda quantização da luz*, em termos da criação e aniquilação de fótons, onde estes passam a serem vistos como excitações do campo eletromagnético quantizado (LOUDON, 2000; SALASNICH, 2014). Na segunda metade do século XX, a segunda quantização da luz ganha maior atenção, devido a invenção do laser por Maiman, em 1960, e os trabalhos de Glauber sobre coerência optica e estados do campo eletromagnético, que marcam origem da Ótica Quântica (LOUDON, 2000).

Atualmente, a Ótica Quântica possui um corpo formal bem estabelecido, podendo ser considerada como uma teoria de campo não-relativística que aborda os fenômenos envolvendo a quantização da luz e sua interação com matéria (RICE, 2020), e é dentro deste contexto que são apresentados os conteúdos deste trabalho. Em Ótica Quântica, desde que sejam assumidas condições de contorno fixas para equação de onda do potencial vetor \mathbf{A} , no calibre de Coulomb, é possível aplicar o procedimento de segunda quantização ao hamiltoniano (clássico) do campo eletromagnético de radiação para encontrar um

hamiltoniano escrito em termos dos operadores bosônicos de aniquilação e criação.

Os estados do campo eletromagnético que surgem naturalmente deste procedimento são os autoestados do hamiltoniano, escritos na representação de Fock, que contabilizam o número de fótons em cada um dos modos deste campo. A partir destes estados, utilizando a álgebra dos operadores aniquilação e criação, pode-se encontrar outros estados da luz, como os estados coerente, comprimido e térmico. Porém, um dos estados da luz de maior interesse é o *estado de vácuo*, um autoestado do hamiltoniano, que não possui fótons, mas apresenta uma energia média não nula, a energia do ponto-zero, ou energia de vácuo.

A energia do ponto-zero dá surgimento a diversos fenômenos, como o Efeito Casimir Dinâmico, onde se estuda a produção de fótons a partir do estado de vácuo no interior de uma cavidade ressonante, devido ao movimento das paredes da cavidade, o que constitui um problema dinâmico com condições de contorno que dependem do tempo. Porém, diferente do caso onde se tem uma condição de contorno fixa, este problema apresenta certas dificuldade algébricas para se obter um hamiltoniano para o campo eletromagnético dentro da cavidade. Neste trabalho, é feita uma revisão de uma das formulações do Efeito Casimir Dinâmico, apresentada por Law (1994), em que se pode obter um hamiltoniano efetivo capaz de descrever a dinâmica do campo no interior da cavidade.

Neste trabalho, também se analisa, a partir do hamiltoniano efetivo, a detecção dos fótons gerados pelo Efeito Casimir Dinâmico, quando apenas um modo da cavidade é excitado pelo movimento da parede. Considera-se o caso de um detector de fótons não ideal, modelado por um circuito LC quantizado (antena) acoplado a um reservatório térmico. Devido a este acoplamento, a dinâmica do sistema modo da cavidade e detector é modelada por meio de uma Equação Mestra bipartida, no contexto da evolução temporal de estados gaussianos (DODONOV; MAN'KO, 2003). Porém, em vez de se considerar o estado inicial da antena e do campo no interior da cavidade como sendo o estado de vácuo, assume-se como estado inicial o *estado térmico comprimido*, que é um estado gaussiano (DODONOV; MAN'KO, 2003). A razão desta escolha se deve ao fato da compressão do estado gaussiano ser um elemento quantificador da não-classicalidade de um estado quântico da luz, que é uma propriedade relevante para preservação das correlações quânticas no decorrer do tempo.

Este trabalho está dividido da seguinte maneira:

- No Capítulo 2 é apresentada a segunda quantização da luz a partir da equação de onda para o potencial vetor \mathbf{A} no calibre de Coulomb, assumindo uma condição de contorno fixa, onde se obtém o hamiltoniano para o campo eletromagnético em termos dos operadores bosônicos de criação e aniquilação. Também é apresentado o Efeito Casimir como um dos fenômenos relacionados à energia de ponto-zero.

- No Capítulo 3 são apresentados os principais estados do campo eletromagnético e algumas de suas propriedades dentro do formalismo da segunda quantização da luz, sendo eles: o estado coerente, o estado comprimido e o estado térmico.
- No Capítulo 4, discute-se uma formulação de Law para do Efeito Casimir Dinâmico, que possibilita encontrar um *hamiltoniano efetivo* para o problema, usado para descrever a dinâmica do campo eletromagnético quantizado no interior da cavidade ressonante.
- O Capítulo 5 é destinado a deduzir a Equação Mestra como uma maneira de modelar o efeito de dissipação em um sistema quântico acoplado a um reservatório térmico. Também é apresentada a generalização da Equação Mestra para um sistema bipartido, por meio do uso das coordenadas bosônicas. A partir desta Equação Mestra, apresenta-se um modelo para descrever a evolução temporal de um estado gaussiano em termos de seus primeiro e segundo momentos.
- Já no Capítulo 6, apresenta-se uma aplicação da formulação apresentada no Capítulo 5 para o estudo da dinâmica de modos acoplados adequada ao contexto das variáveis contínuas considerando como estado inicial gaussiano do sistema modo da cavidade e antena o estado térmico comprimido. Analisa-se os aspectos analíticos e algébricos para a dinâmica de um modo de cavidade com um detector de fótons para o qual a dissipação é levada em consideração no processo de detecção.

2 QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Neste capítulo será apresentada a quantização do campo eletromagnético (EM), ou segunda quantização da luz, partindo da expansão do vetor potencial magnético \mathbf{A} em termos dos modos do campo EM dentro de uma cavidade. Então, será introduzido os estados de Fock (ou de número) do campo eletromagnético quantizado. É também discutida uma característica não clássica que surge do processo de quantização: a *energia de ponto zero*, bem como uma aplicação direta dessa propriedade no chamado *Efeito Casimir*.

2.1 O HAMILTONIANO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

O método de quantização do campo eletromagnético parte de escrever o hamiltoniano (ainda clássico) do campo EM de forma a associá-lo ao hamiltoniano do Oscilador Harmônico Quântico. Para este fim, nesta seção, será descrito o método apresentado por Cohen-Tannoudji, Dupont-Roc e Grynberg (1989), Lambropoulos e Petrosyan (2007), Loudon (2000), Orszag (2016), Rice (2020), Salasnich (2014) e Walls e Milburn (2008), pois se adequa melhor aos objetivos desse trabalho. Existe ainda outra maneira muito mais simples e intuitiva, contudo menos útil, de se atingir este mesmo objetivo, que é apresentada por Meystre e Sargent (2007) e Scully e Zubairy (1997). Porém, esta maneira não será abordada nesse trabalho, mas ambos os métodos cumprem o mesmo propósito.

Partindo das Equações de Maxwell no vácuo, na ausência de cargas ou correntes (GRIFFITHS, 2011; JACKSON, 1999; MACHADO, 2006):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad (2.4)$$

junto das equações que determinam os campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} a partir do potencial elétrico ϕ e do potencial vetor magnético \mathbf{A} ,

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.6)$$

onde ε_0 e μ_0 são, respectivamente, a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do vácuo, e determinam a velocidade da luz no vácuo $\varepsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$.

Considerando o fato das Equações de Maxwell serem invariantes em relação a uma transformação de calibre, escolhe-se o calibre de Coulomb, já que o que se quer quantizar é o campo eletromagnético transversal, o que significa que a direção de propagação das ondas eletromagnéticas é perpendicular ao plano em que os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} oscilam, assim, tem-se então (COHEN-TANNOUJJI; DUPONT-ROC; GRYNBERG, 1989; ORSZAG, 2016)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (2.7)$$

$$\phi = 0. \quad (2.8)$$

Aplicando a identidade vetorial (LOUDON, 2000, p. 127) na forma

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (2.9)$$

combinando as Equações 2.5 e 2.6 com as Equações 2.7 e 2.8, e, então, substituindo tudo na Equação 2.4, obtém-se (ORSZAG, 2016, p. 26):

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right), \\ \nabla^2 \mathbf{A} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

que é a equação de onda para o potencial vetor \mathbf{A} . Escrevendo o potencial vetor na forma $\mathbf{A} = \sum_k a_k(t) \mathbf{u}_k(\mathbf{r})$ para aplicar a separação de variáveis à Equação 2.10 (ORSZAG, 2016, p. 26),

$$\nabla^2 \mathbf{u}_k + \frac{\omega_k^2}{c^2} \mathbf{u}_k = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 a_k}{\partial t^2} + \omega_k^2 a_k = 0, \quad (2.12)$$

onde a constante de separação ω_k^2 é a frequência da onda no modo k .

Considerando uma região cúbica no espaço (sem contornos reais) de lado L e volume V , e submetendo a solução da Equação 2.11 a uma condição periódica de contorno, obtém-se, para ondas planas (LOUDON, 2000; ORSZAG, 2016; SALASNICH, 2014; WALLS; MILBURN, 2008):

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \mathbf{e}_{ks} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (2.13)$$

onde $k^2 = \omega_k^2/c^2$ e \mathbf{e}_{ks} é um vetor unitário que leva em conta as duas direções de polarização $s = 1, 2$ e (LOUDON, 2000, p. 131):

$$\mathbf{e}_{ks} \cdot \mathbf{e}_{ks'} = \delta_{s,s'}. \quad (2.14)$$

As componentes escalares do vetor de onda \mathbf{k} na Equação 2.13 são dadas por (LOUDON, 2000; ORSZAG, 2016; SALASNICH, 2014)

$$k_x = \frac{2\pi m_x}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi m_y}{L}, \quad k_z = \frac{2\pi m_z}{L}, \quad (2.15)$$

onde m_x, m_y, m_z são números inteiros ($0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Juntos, os vetores \mathbf{e}_{ks} e \mathbf{k} satisfazem a condição imposta pelo calibre de Coulomb se (LOUDON, 2000, p. 131)

$$\mathbf{e}_{ks} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (2.16)$$

Já a parte temporal de \mathbf{A} satisfaz a equação de movimento de um oscilador harmônico simples (LOUDON, 2000; SALASNICH, 2014), cujo a solução é

$$a_k(t) = a_k \exp(-i\omega_k t). \quad (2.17)$$

Por fim, levando em conta que o potencial vetor é um campo vetorial real, i.e. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ (SALASNICH, 2014, p. 25), pode-se escrever a forma final de \mathbf{A} como (LOUDON, 2000; ORSZAG, 2016; SALASNICH, 2014; WALLS; MILBURN, 2008):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = & \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=1}^2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{\omega_k \varepsilon_0 V}} \mathbf{e}_{ks} (a_k \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)) \\ & + a_k^* \exp(-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t))), \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde o fator constante na equação acima é inserido a fim de que o potencial vetor possua a dimensão correta.

Com as Equações 2.5 e 2.6, pode-se determinar os campos elétrico e magnético a partir da Equação 2.18 (LOUDON, 2000; ORSZAG, 2016; SALASNICH, 2014; WALLS; MILBURN, 2008):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = & i \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=1}^2 \frac{\omega_k}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{\omega_k \varepsilon_0 V}} \mathbf{e}_{ks} (a_k \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)) \\ & - a_k^* \exp(-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t))), \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = & i \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=1}^2 \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{\omega_k \varepsilon_0 V}} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{ks} (a_k \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)) \\ & - a_k^* \exp(-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t))). \end{aligned} \quad (2.20)$$

A partir das Equações 2.19 e 2.20 é possível determinar a energia total armazenada no campo eletromagnético no volume V , que é obtida por meio do hamiltoniano deste campo (LOUDON, 2000; ORSZAG, 2016; SALASNICH, 2014; WALLS; MILBURN, 2008):

$$H = \frac{1}{2} \int_V \left(\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right), \quad (2.21)$$

onde as integrais no espaço que aparecem na Equação 2.21, devido as Equações 2.19 e 2.20, tem a forma (LOUDON, 2000, p. 132):

$$\int_V \exp[\pm i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}] dV = V \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad (2.22)$$

$$\int_V \exp[\pm i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}] dV = V \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'}. \quad (2.23)$$

Dessa forma o fator correspondente ao campo elétrico \mathbf{E} na Equação 2.21 pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \int_V \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 dV &= - \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \sum_{s, s'} \mathbf{e}_{ks} \cdot \mathbf{e}_{k's'} \left(\frac{\varepsilon_0 \omega_k^2 \hbar}{4\omega_k \varepsilon_0 V} \right) V (a_k a_{k'} \exp[-i(\omega_k + \omega_{k'})t] \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} \\ &\quad - a_k a_{k'}^* \exp[-i(\omega_k - \omega_{k'})t] \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} - a_k^* a_{k'} \exp[i(\omega_k - \omega_{k'})t] \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \\ &\quad + a_k^* a_{k'}^* \exp[i(\omega_k + \omega_{k'})t] \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'}), \end{aligned} \quad (2.24)$$

considerando a Equação 2.14 e o fato de que os modos $-\mathbf{k}$ e \mathbf{k} possuem a mesma frequência angular ω_k (LOUDON, 2000), obtém-se

$$\int_V \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 dV = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar \omega_k}{2} (a_k a_k^* + a_k^* a_k - a_k a_{-k} e^{-2i\omega_k t} - a_k^* a_{-k}^* e^{2i\omega_k t}). \quad (2.25)$$

De forma similar, para a parte referente ao campo magnético \mathbf{B} na Equação 2.21

$$\begin{aligned} \int_V \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 dV &= - \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \sum_{s, s'} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{ks} \cdot \hat{\mathbf{k}}' \times \mathbf{e}_{k's'} \left(\frac{k^2 \hbar}{4\omega_k \varepsilon_0 \mu_0 V} \right) \\ &\quad \times V (a_k a_{k'} \exp[-i(\omega_k + \omega_{k'})t] \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} - a_k a_{k'}^* \exp[-i(\omega_k - \omega_{k'})t] \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \\ &\quad - a_k^* a_{k'} \exp[i(\omega_k - \omega_{k'})t] \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} + a_k^* a_{k'}^* \exp[i(\omega_k + \omega_{k'})t] \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'}), \end{aligned} \quad (2.26)$$

que assume a forma

$$\begin{aligned} \int_V \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 dV &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s, s'} \frac{\hbar \omega_k}{4} \{ \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{ks} \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{k's'} (a_k a_k^* + a_k^* a_k) \\ &\quad - \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{ks} \cdot (-\hat{\mathbf{k}}) \times \mathbf{e}_{-ks'} (a_k a_{-k} e^{-2i\omega_k t} + a_k^* a_{-k}^* e^{2i\omega_k t}) \}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

A partir das propriedades do produto vetorial (LOUDON, 2000, p. 133),

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{ks} \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{\pm ks'} = \mathbf{e}_{ks} \cdot \mathbf{e}_{\pm ks'}, \quad (2.28)$$

obtém-se a forma final da energia magnética

$$\int_V \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 dV = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar \omega_k}{2} (a_k a_k^* + a_k^* a_k + a_k a_{-k} e^{-2i\omega_k t} + a_k^* a_{-k}^* e^{2i\omega_k t}). \quad (2.29)$$

Então, substituindo as Equações 2.25 e 2.29 na Equação 2.21, tem-se que

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar \omega_k}{2} (a_k a_k^* + a_k^* a_k), \quad (2.30)$$

onde a ordem de a_k e a_k^* foi mantida durante todo o cálculo a fim de realizar a quantização de H , mas por enquanto são apenas números complexos.

2.2 SEGUNDA QUANTIZAÇÃO

Agora, a quantização do hamiltoniano do campo eletromagnético (campo de radiação) se torna óbvia. Seguindo o mesmo raciocínio apresentado por Cohen-Tannoudji, Dupont-Roc e Grynberg (1989), Lambropoulos e Petrosyan (2007), Loudon (2000), Meystre e Sargent (2007), Orszag (2016), Rice (2020), Salasnich (2014), Scully e Zubairy (1997) e Walls e Milburn (2008), a forma da Equação 2.30 é similar a do hamiltoniano do Oscilador Harmônico Quântico (Equação B.7), o que sugere que a quantização se dá por a partir das correspondências (ver Apêndice B)

$$a_k \longrightarrow \hat{a}_k = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}(\omega_k \hat{q}_k + i\hat{p}_k), \quad (2.31)$$

$$a_k^* \longrightarrow \hat{a}_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}(\omega_k \hat{q}_k - i\hat{p}_k), \quad (2.32)$$

onde definiu-se que o oscilador possui massa unitária e também foi utilizado o acento circunflexo para operadores apenas para enfatizar a “transformação” do número complexo a_k para o *operador* \hat{a}_k , mas essa notação não será empregada em todo o texto.

Substituindo as Equações 2.31 e 2.32 na Equação 2.30, obtém-se:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar\omega_k}{2} (a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k) \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar\omega_k}{2} \frac{1}{2\hbar\omega_k} [(\omega_k q_k + ip_k)(\omega_k q_k - ip_k) + (\omega_k q_k - ip_k)(\omega_k q_k + ip_k)] \\ H &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} (\omega_k^2 q_k^2 + p_k^2), \end{aligned} \quad (2.33)$$

que é o conhecido hamiltoniano (neste caso, já quantizado) de um conjunto infinito de osciladores harmônicos não acoplados com massa unitária e diferentes frequências ω_k (SALASNICH, 2014).

A partir do esquema de quantização, os campos (clássicos) elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} , determinados pelas Equações 2.19 e 2.20, respectivamente, tornam-se operadores que podem ser escritos em função de a_k e a_k^\dagger (LAMBROPOULOS; PETROSYAN, 2007; ORSZAG, 2016; SALASNICH, 2014):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= i \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=1}^2 \frac{\omega_k}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{\omega_k \varepsilon_0 V}} \mathbf{e}_{ks} (a_k \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)) \\ &\quad - a_k^\dagger \exp(-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t))), \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= i \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=1}^2 \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{\omega_k \varepsilon_0 V}} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{ks} (a_k \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)) \\ &\quad - a_k^\dagger \exp(-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t))). \end{aligned} \quad (2.35)$$

O hamiltoniano do campo eletromagnético, Equação 2.33, também pode ser escrito em termos de a_k e a_k^\dagger (WALLS; MILBURN, 2008, p. 10):

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right), \quad (2.36)$$

ou considerando o operador número, definido por $N_k = a_k^\dagger a_k$,

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_k \left(N_k + \frac{1}{2} \right). \quad (2.37)$$

A fim de poder abranger os muitos modos do campo eletromagnético quantizado, as relações de comutação apresentadas no Apêndice B devem ser generalizadas. Assim (LAMBROPOULOS; PETROSYAN, 2007, p. 49),

$$[q_k, p_{k'}] = i\hbar\delta_{k,k'}, \quad [q_k, q_{k'}] = [p_k, p_{k'}] = 0; \quad (2.38)$$

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}, \quad [a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0; \quad (2.39)$$

$$[N_k, a_{k'}] = -\delta_{k,k'} a_{k'}, \quad [N_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'} a_{k'}^\dagger. \quad (2.40)$$

De acordo com os princípios da Mecânica Quântica, como os operadores a e a^\dagger não são hermitianos, eles não podem representar quantidades observáveis, então é conveniente definir os operadores hermitianos adimensionais (LOUDON, 2000, p. 138):

$$X \equiv \frac{a + a^\dagger}{2} = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} q, \quad (2.41)$$

$$Y \equiv \frac{a - a^\dagger}{2i} = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}} p, \quad (2.42)$$

onde X e Y são denominados de *operadores de quadratura*. Levando em conta os diversos modos do campo eletromagnético, a relação de comutação entre os operadores de quadratura segue diretamente da Equação 2.39 (LOUDON, 2000, p. 142):

$$[X_k, Y_{k'}] = \frac{i}{2} \delta_{k,k'}. \quad (2.43)$$

Por fim, o operador de campo elétrico escrito em termos dos operadores de quadratura torna-se (LOUDON, 2000; ORSZAG, 2016; RICE, 2020):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=1}^2 E_k \mathbf{e}_{ks} (X \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t) - Y \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)), \quad (2.44)$$

onde definiu-se

$$E_k \equiv \frac{\omega_k}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{\omega_k \epsilon_0 V}}. \quad (2.45)$$

2.3 ESTADOS DE FOCK

Assim como no caso do Oscilador Harmônico Quântico, o hamiltoniano do campo eletromagnético quantizado é diagonal na *representação de número*; porém, como se trata de conjunto de infinitos modos independentes, um vetor de estado da base de autoestados deste hamiltoniano é escrito como um produto dos autoestados de cada modo, representados por (LOUDON, 2000; ORSZAG, 2016; SALASNICH, 2014)

$$|n_{k'}\rangle|n_{k''}\rangle|n_{k'''}\rangle\cdots = |n_{k'}, n_{k''}, n_{k'''}\cdots\rangle, \quad (2.46)$$

esses vetores de estado são chamados de *estados de Fock* ou estados de número de fóton.

A ação dos operadores a_k e a_k^\dagger sobre estes estados é dada segundo as equações (LOUDON, 2000; ORSZAG, 2016; SALASNICH, 2014)

$$a_k|\cdots, n_k, \cdots\rangle = \sqrt{n_k}|\cdots, n_k - 1, \cdots\rangle, \quad (2.47)$$

$$a_k^\dagger|\cdots, n_k, \cdots\rangle = \sqrt{n_k + 1}|\cdots, n_k + 1, \cdots\rangle. \quad (2.48)$$

De acordo com Cohen-Tannoudji, Dupont-Roc e Grynberg (1989, p. 187) e Loudon (2000, p. 139,140), a interpretação física da ação destes operadores (sobre os estados de Fock) é a de que o operador de aniquilação a_k destrói um fóton (uma excitação do campo quantizado), de energia $\hbar\omega_k$ do modo \mathbf{k} , enquanto o operador de criação a_k^\dagger cria um fóton deste mesmo modo e mesma energia.

Como os estados de Fock são ortonormais, a partir das Equações 2.47 e 2.48, verifica-se que o valor médio dos campos elétrico e magnético, Equações 2.34 e 2.35 para qualquer estado de Fock (mesmo para n grande), são (MILONNI, 1994; SALASNICH, 2014):

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \langle \mathbf{B} \rangle = 0, \quad (2.49)$$

uma vez que

$$\langle \cdots, n_k, \cdots | a_k | \cdots, n_k, \cdots \rangle = \langle \cdots, n_k, \cdots | a_k^\dagger | \cdots, n_k, \cdots \rangle = 0. \quad (2.50)$$

O número de fótons n_k no modo \mathbf{k} é dado pelo operador número N_k (LOUDON, 2000; ORSZAG, 2016; SALASNICH, 2014):

$$N_k|\cdots, n_k, \cdots\rangle = n_k|\cdots, n_k, \cdots\rangle. \quad (2.51)$$

Utilizando esta equação e a Equação 2.37, pode-se calcular o valor de energia do estado fundamental (ou estado de vácuo) $|0\rangle = |0, 0, 0, \cdots\rangle$ do campo eletromagnético quantizado (LOUDON, 2000; ORSZAG, 2016; SALASNICH, 2014; WALLS; MILBURN, 2008):

$$\langle 0|H|0\rangle = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_k \left(\langle 0|N_k|0\rangle + \frac{1}{2} \right) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \hbar\omega_k, \quad (2.52)$$

que é a chamada *energia do ponto zero* ou *energia do vácuo*.

Porém, como o estado fundamental é um estado que não possui fótons em nenhum dos modos, a Equação 2.52 revela um problema com o processo de quantização do campo eletromagnético (COHEN-TANNOUJDI; DUPONT-ROC; GRYNBERG, 1989; LOUDON, 2000; ORSZAG, 2016; SALASNICH, 2014; WALLS; MILBURN, 2008). Como aponta Walls e Milburn (2008, p. 11, tradução nossa):

“Como não há limite superior para as frequências na soma sobre os modos do campo eletromagnético, a energia do estado fundamental é infinita, uma dificuldade conceitual da teoria do campo de radiação quantizado. No entanto, uma vez que experimentos práticos medem a mudança na energia total do campo eletromagnético a energia infinita do ponto zero não leva a qualquer divergência na prática.¹”

Por mais que, em primeira análise, a energia de ponto zero se mostre como uma falha na quantização do campo eletromagnético, em verdade, ela parece revelar um aspecto profundo sobre a essência da Natureza: existe um campo eletromagnético estático que permeia todo o Universo, mesmo na ausência de qualquer fontes ou fótons (MILONNI, 1994).

Essa característica da Natureza não é apenas uma ideia filosófica decorrente da quantização do campo EM, mas aparece em diversos fenômenos e medidas experimentais (MILONNI, 1994; MILONNI, 2019). O próprio Efeito Casimir Dinâmico é fundamentado na existência do estado de vácuo do campo EM (DODONOV, 2020). Na seção 2.5, será apresentado um dos efeitos mais conhecidos que derivam da existência da energia de ponto zero: o *Efeito Casimir*.

2.4 DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA DE MODOS NO ESPAÇO LIVRE

Na seção 2.1, com o objetivo de resolver a equação de onda para o potencial vetor \mathbf{A} (Equação 2.10), considera-se uma região (cavidade) cúbica do espaço de lado L para impor condições de contorno periódicas para a solução de ondas planas (Equação 2.13). Nesta seção, será tomado o limite $L \rightarrow \infty$ a fim de encontrar a distribuição contínua de modos do campo eletromagnético no espaço livre.

Lembrando que dentro da região cúbica do espaço, o número de onda k_x na direção \mathbf{x} assume valores do tipo (Equação 2.15):

$$k_x = \frac{2\pi m_x}{L}, \quad m_x = (0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (2.53)$$

¹ “Since there is no upper bound to the frequencies in the sum over electromagnetic field modes, the energy of the ground state is infinite, a conceptual difficulty of quantized radiation field theory. However, since practical experiments measure a change in the total energy of the electromagnetic field the infinite zero-point energy does not lead to any divergence in practice.” (WALLS; MILBURN, 2008, p. 11)

Diferenciando essa equação, obtém-se o número de modos entre k_x e $k_x + dk_x$ (MEYSTRE; SARGENT, 2007)

$$dm_x = \frac{L}{2\pi} dk_x. \quad (2.54)$$

Realizando o mesmo procedimento para os números de onda nas direções \mathbf{y} e \mathbf{z} , encontra-se que o número de modos dN no elemento de volume $dk_x dk_y dk_z$ no espaço \mathbf{k} é (MEYSTRE; SARGENT, 2007; ORSZAG, 2016)

$$dN = 2dm_x dm_y dm_z = 2 \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 d^3k \quad (2.55)$$

onde o fator 2 aparece devido as duas direções de polarização. No limite $L \rightarrow \infty$, um somatório sobre os modos \mathbf{k} pode ser escrito como uma integral (LAMBROPOULOS; PETROSYAN, 2007; MEYSTRE; SARGENT, 2007; MILONNI, 2019; ORSZAG, 2016; SCULLY; ZUBAIRY, 1997),

$$\sum_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k}) \rightarrow \sum_{m_x, m_y, m_z} f(\mathbf{k}) \rightarrow \int dN f(\mathbf{k}) = 2 \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \int f(\mathbf{k}) d^3k. \quad (2.56)$$

Em muitos problemas é mais adequado escrever a densidade de modos em relação a frequência ω (SCULLY; ZUBAIRY, 1997, p. 27). Assim, é conveniente transformar o elemento de volume de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas (LAMBROPOULOS; PETROSYAN, 2007; MEYSTRE; SARGENT, 2007; ORSZAG, 2016; SCULLY; ZUBAIRY, 1997),

$$d^3k = k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi, \quad (2.57)$$

e usando $k = \omega/c$,

$$d^3k = \frac{\omega^2}{c^3} \sin \theta d\omega d\theta d\phi. \quad (2.58)$$

Assim, a Equação 2.56 assume a forma (LAMBROPOULOS; PETROSYAN, 2007; MEYSTRE; SARGENT, 2007; ORSZAG, 2016; SCULLY; ZUBAIRY, 1997):

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k}) &\rightarrow 2 \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \int \frac{\omega^2}{c^3} f(\omega) d\omega \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ \sum_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k}) &\rightarrow \int \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \frac{\omega^2}{c^3} (4\pi) f(\omega) d\omega = \int D(\omega) f(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (2.59)$$

onde foi definido a *densidade de modos* $D(\omega)$ como sendo

$$D(\omega) \equiv \frac{L^3 \omega^2}{\pi^2 c^3}, \quad (2.60)$$

e cuja presença garante a normalização das funções no contínuo de modos.

2.5 O EFEITO CASIMIR

Nesta seção será apresentada uma consequência interessante da existência da energia de ponto zero que foi formulada por Hendrik Casimir em 1948: o chamado *efeito Casimir* (MILONNI, 1994; MILONNI, 2019; SALASNICH, 2014).

A abordagem do problema envolve um processo similar ao que foi realizado na seção anterior sobre a passagem do discreto para o contínuo de modos do campo eletromagnético. Porém, dessa vez, a cavidade tem a forma de um paralelepípedo com lados $L_x = L_y = L$ e $L_z = d$ (MILONNI, 1994; MILONNI, 2019; SALASNICH, 2014). A energia de ponto zero \mathcal{E}_0 dentro da cavidade é dada por (MILONNI, 1994; MILONNI, 2019; SALASNICH, 2014):

$$\mathcal{E}_0 = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\mathbf{k}} = 2 \times \sum_{m_x, m_y, m_z} \frac{1}{2} \hbar c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}, \quad (2.61)$$

na qual se considera $\omega = ck = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$. Como na seção anterior, a energia do ponto zero para o contínuo de modos no limite $V \rightarrow \infty$ é (MILONNI, 1994; MILONNI, 2019; SALASNICH, 2014):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \frac{V}{(2\pi)^3} \hbar c \int d^3k (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} \\ &= \hbar c \int \frac{L}{2\pi} dk_x \int \frac{L}{2\pi} dk_y \int \frac{d}{2\pi} dk_z (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

utilizando as coordenadas polares $u^2 = k_x^2 + k_y^2$ e $dk_x dk_y = 2\pi u du$ e devido a condição de contorno $n = k_z d / \pi$,

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\hbar c}{2\pi} L^2 \int_0^\infty u du \int_0^\infty dn \left(u^2 + \frac{\pi^2 n^2}{d^2} \right)^{1/2}. \quad (2.63)$$

Considerando essa cavidade como o espaço entre duas placas metálicas perfeitamente condutoras, de lado L , paralelas ao plano xy e separadas por uma distância d ao longo do eixo z , o número de onda k_z torna-se discreto, pois \mathbf{E} deve anular-se nas placas, dessa forma, a energia \mathcal{E}_0 dentro da cavidade torna-se (MILONNI, 1994; MILONNI, 2019; SALASNICH, 2014)

$$\mathcal{E}'_0 = \frac{\hbar c}{2\pi} L^2 \sum_n \int_0^\infty u du \left(u^2 + \frac{\pi^2 n^2}{d^2} \right)^{1/2}. \quad (2.64)$$

Porém, levando em consideração que o estado $|(k_x, k_y, 0)\rangle$ ($m = 0$) possui duas polarizações, uma paralela ao eixo z , que contribui para a soma discreta, e outra ortogonal ao eixo z , que não contribui, logo \mathcal{E}'_0 assume a forma (SALASNICH, 2014, p. 35):

$$\mathcal{E}'_0 = \frac{\hbar c}{2\pi} L^2 \left\{ \int_0^\infty \left(\frac{u}{2} \right) u du + \sum_{n=1} \int_0^\infty u du \left(u^2 + \frac{\pi^2 n^2}{d^2} \right)^{1/2} \right\}. \quad (2.65)$$

A energia potencial $U(d) = \mathcal{E}'_0 - \mathcal{E}_0$ entre as placas é definida como a energia necessária para trazer as placas de uma distância $d = \infty$ até uma distância finita d (MILONNI, 1994; MILONNI, 2019). Assim, a energia potencial $U(d)$ é (MILONNI, 1994; MILONNI, 2019; SALASNICH, 2014):

$$U(d) = \frac{\hbar c}{2\pi} L^2 \frac{\pi^3}{d^3} \left(\frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} dn F(n) \right), \quad (2.66)$$

na qual está definido

$$F(n) = \int_0^{\infty} \beta d\beta \sqrt{\beta^2 + n^2} = \frac{1}{3} \left[(\infty + n^2)^{3/2} - n^3 \right], \quad (2.67)$$

com $\beta = ud/\pi$.

Como esclarece Salasnich (2014, p. 35), por mais que a Equação 2.67 seja divergente, a Equação 2.66 não é, já que as divergências de sinais oposto se cancelam. Para computar Equação 2.66 utiliza-se a fórmula de Euler-MacLaurin para diferença entre uma série e integral infinitas (ver Arfken, Weber e Harris (2013, p. 560–570)), assim (MILONNI, 1994; MILONNI, 2019; SALASNICH, 2014):

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} dn F(n) = -\frac{1}{2} F(0) - \frac{1}{12} F'(0) + \frac{1}{720} F'''(0) + \dots \quad (2.68)$$

Como $F'(0) = 0$ e as derivadas de maior ordem se anulam e a única derivada que não nula é $F'''(0) = -2$, a Equação 2.66 torna-se (MILONNI, 1994; MILONNI, 2019; SALASNICH, 2014):

$$U(d) = \frac{\hbar c \pi^2}{720 d^3} L^2. \quad (2.69)$$

Assim, a força por unidade de área entre as placas $\mathcal{F}(d)$ é (MILONNI, 1994; MILONNI, 2019; SALASNICH, 2014):

$$\mathcal{F}(d) = -\frac{dU}{dd} = -\frac{\hbar c \pi^2}{240 d^4}, \quad (2.70)$$

e como o sinal é negativo, esta é uma força atrativa.

Este resultado é um previsão marcante da quantização do campo eletromagnético, já que esta força surge exclusivamente da existência do vácuo quântico. Muitos experimentos já foram conduzidos em torno desse fenômeno, alguns em boa concordância com a teoria, como é revisado por Bordag et al. (2009), Dalvit et al. (2011), Klimchitskaya e Mostepanenko (2006), Lambrecht e Reynaud (2012), Lamoreaux (2004) e Simpson e Leonhardt (2015).

3 ESTADOS DA LUZ

No capítulo anterior foram introduzidos os estados de Fock do campo eletromagnético como sendo autoestados do hamiltoniano deste campo. Contudo, por mais que estes estados surjam naturalmente a partir da quantização do campo eletromagnético, experimentalmente estes estados não são facilmente obtidos (WALLS; MILBURN, 2008).

Como aponta Walls e Milburn (2008, p. 11), “A maioria dos campos óticos são uma superposição de estados de número (estado puro) ou uma mistura de estados de número (estado misto)¹”. Neste capítulo serão apresentados estados do campo eletromagnético com essas características, mas a discussão ficará restrita a apenas um modo do campo, o que é suficiente para demonstrar as principais propriedades destes estados.

3.1 ESTADO COERENTE

Na capítulo anterior foram introduzidos os estados de Fock como sendo estados que possuem um número definido de fótons. Porém, como já apresentado na seção anterior, o valor médio do campo elétrico de uma onda eletromagnética sobre qualquer estado de Fock é sempre zero, o que torna, entre outros aspectos, estes estados incapazes de reproduzirem os resultados clássicos (GARRISON; CHIAO, 2008; LOUDON, 2000; RICE, 2020; SALASNICH, 2014).

Como aponta Dutra (2005), normalmente medidas dectam fótons destruindo-os. Dessa maneira, a fim de reproduzir as características de uma onda eletromagnética clássica, é pertinente buscar por estados que não são afetados pelo destruição de fótons, i.e., (DUTRA, 2005; RICE, 2020):

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \tag{3.1}$$

onde α é um número complexo.

Os autoestados $|\alpha\rangle$ do operador de aniquilação a são chamados de *estados coerentes*, ou também semi-clássicos, por melhor reproduzem as características de uma onda eletromagnética clássica (DUTRA, 2005; GARRISON; CHIAO, 2008; LOUDON, 2000; RICE, 2020; SALASNICH, 2014; SCULLY; ZUBAIRY, 1997; WALLS; MILBURN, 2008). Para encontrar a forma do estado coerente $|\alpha\rangle$, pode-se expandi-lo em termos da base de Fock (ORSZAG, 2016, p. 35)

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle. \tag{3.2}$$

¹ “Most optical fields are either a superposition of number states (pure state) or a mixture of number states (mixed state)” (WALLS; MILBURN, 2008, p. 11)

Agora, aplicando a Equação 3.2 na Equação 3.1 (ORSZAG, 2016, p. 35):

$$a|\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad (3.3)$$

o que implica na relação de recursão,

$$\sqrt{n}c_n = \alpha c_{n-1}. \quad (3.4)$$

A relação de recursão pode ser resolvida para fornecer c_n em termos de c_0 (ORSZAG, 2016, p. 35),

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0. \quad (3.5)$$

A partir da normalização do estado $|\alpha\rangle$ é possível obter o coeficiente c_0 ,

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = |c_0|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |c_0|^2 \exp(|\alpha|^2) = 1. \quad (3.6)$$

Logo, escolhendo c_0 como sendo real, o estado coerente (para um modo do campo eletromagnético) pode ser escrito como (ORSZAG, 2016; RICE, 2020):

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.7)$$

Como os estados coerentes são autoestados de um operador não hermitiano, não há garantia de que eles sejam ortogonais, e de fato não são, como pode ser observado (ORSZAG, 2016; RICE, 2020),

$$\begin{aligned} \langle\beta|\alpha\rangle &= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2}\right) \sum_{n,m} \frac{(\beta^*)^m \alpha^n}{\sqrt{m!n!}} \langle m|n\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2}\right) \sum_n \frac{(\beta^* \alpha)^n}{\sqrt{n!}} \\ \langle\beta|\alpha\rangle &= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2}\right) \exp(\beta^* \alpha), \end{aligned} \quad (3.8)$$

O valor médio do número de fótons no estado coerente é facilmente obtido a partir da Equação 3.1 (ORSZAG, 2016; LOUDON, 2000),

$$\bar{n} = \langle N \rangle = \langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle = \alpha^* \alpha \langle\alpha|\alpha\rangle = |\alpha|^2, \quad (3.9)$$

assim como o segundo momento,

$$\begin{aligned} \langle N^2 \rangle &= \langle\alpha|a^\dagger a a^\dagger a|\alpha\rangle = \langle\alpha|a^\dagger (a^\dagger a + 1)a|\alpha\rangle = \langle\alpha|a^\dagger a^\dagger a a|\alpha\rangle + \langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle \\ \langle N^2 \rangle &= |\alpha|^4 + |\alpha|^2 = \bar{n}^2 + \bar{n}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Logo, a variância no número de fótons no estado coerente é (LOUDON, 2000, p. 193),

$$(\Delta n)^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \bar{n} = |\alpha|^2. \quad (3.11)$$

Já a probabilidade de que tenham n fótons no estado coerente é dada por (ORSZAG, 2016; LOUDON, 2000),

$$\begin{aligned} P_n &= |\langle n|\alpha \rangle|^2 = \left| \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n'} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle n|n' \rangle \right|^2 = \exp(-|\alpha|^2) \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \\ P_n &= \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

e essa é uma distribuição de probabilidade de Poisson, que tem justamente como característica a variância igual a média.

Para encontrar a variância do operador de posição q no estado coerente parte-se de (ORSZAG, 2016, p. 36),

$$\langle q \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \langle \alpha | (a^\dagger + a) | \alpha \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (\alpha^* + \alpha), \quad (3.13)$$

$$\langle q^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\omega} \langle \alpha | (a^\dagger + a)^2 | \alpha \rangle = \frac{\hbar}{2\omega} (1 + (\alpha^* + \alpha)^2), \quad (3.14)$$

logo,

$$(\Delta q)^2 = \langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2 = \frac{\hbar}{2\omega}. \quad (3.15)$$

De forma similar, a variância do operador de momento p no estado coerente é (ORSZAG, 2016, p. 36, 37),

$$(\Delta p)^2 = \frac{\hbar\omega}{2}. \quad (3.16)$$

Assim (ORSZAG, 2016; WALLS; MILBURN, 2008),

$$\Delta q \Delta p = \frac{\hbar}{2}, \quad (3.17)$$

portanto os estados coerentes são estados de mínima incerteza.

Realizando um cálculo semelhante para os operadores de quadratura obtém-se (LOUDON, 2000; ORSZAG, 2016),

$$\langle X \rangle = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*) = \text{Re}(\alpha), \quad (3.18)$$

$$\langle Y \rangle = \frac{1}{2}(\alpha - \alpha^*) = \text{Im}(\alpha), \quad (3.19)$$

e também

$$(\Delta X)^2 = (\Delta Y)^2 = \frac{1}{4}; \quad (3.20)$$

o que implica em:

$$\Delta X \Delta Y = \frac{1}{4}, \quad (3.21)$$

logo o estado coerente possui flutuações iguais em ambas as quadraturas.

Agora, utilizando a Equação B.25, tem-se que (LOUDON, 2000, p. 191):

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_n \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle, \quad (3.22)$$

onde o somatório em n pode ser identificado como a expansão em série de Taylor da função $\exp(x)$, com $x = \alpha a^\dagger$. Logo, pode-se escrever

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \exp(\alpha a^\dagger) |0\rangle. \quad (3.23)$$

Como $a|0\rangle = 0$, é possível escrever

$$\exp(-\alpha^* a) |0\rangle = \sum_n \frac{(-\alpha a)^n}{n!} |0\rangle = \left(1 + \frac{(-\alpha^* a)}{1!} + \dots\right) |0\rangle = |0\rangle, \quad (3.24)$$

substituindo esta equação na Equação 3.23,

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \exp(\alpha a^\dagger) \exp(-\alpha^* a) |0\rangle. \quad (3.25)$$

Partindo da Equação B.8, observa-se que:

$$[\alpha a^\dagger, (-\alpha^* a)] = -|\alpha|^2 [a^\dagger, a] = |\alpha|^2 I, \quad (3.26)$$

e

$$[\alpha a^\dagger, |\alpha|^2 I] = [\alpha a, |\alpha|^2 I] = 0. \quad (3.27)$$

Assim, é possível utilizar o teorema de Baker-Hausdorff para dois operadores não comutantes, mas que comutam com seu comutador (LOUISELL, 1973, p. 137):

$$e^{(A+B)} = e^A e^B e^{\frac{1}{2}[A,B]} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}. \quad (3.28)$$

Então, utilizando esse teorema, a Equação 3.25 torna-se (LOUDON, 2000, p. 192):

$$|\alpha\rangle = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a) |0\rangle = D(\alpha) |0\rangle, \quad (3.29)$$

onde foi definido o *operador de deslocamento* $D(\alpha)$ como

$$D(\alpha) \equiv \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a). \quad (3.30)$$

A Equação 3.29 permite interpretar o estado coerente $|\alpha\rangle$ como sendo o estado de vácuo, deslocado por $D(\alpha)$ (ORSZAG, 2016, p. 39). Analisando a Equação 3.30, vê-se que $D(\alpha)$ é um operador unitário (LOUDON, 2000, p. 192):

$$D^\dagger(\alpha)D(\alpha) = D(\alpha)D^\dagger(\alpha) = 1. \quad (3.31)$$

A ação do operador $D(\alpha)$ sobre o operador de aniquilação a é determinado por (LOUDON, 2000, p. 192),

$$D^\dagger(\alpha)aD(\alpha) = e^{(\alpha^*a - \alpha a^\dagger)} a e^{-(\alpha^*a - \alpha a^\dagger)} = a + \alpha, \quad (3.32)$$

e similarmente

$$D^\dagger(\alpha)a^\dagger D(\alpha) = e^{(\alpha^*a - \alpha a^\dagger)} a^\dagger e^{-(\alpha^*a - \alpha a^\dagger)} = a^\dagger + \alpha^*. \quad (3.33)$$

Para obter as Equações 3.32 e 3.33, foi utilizado o teorema sobre operadores que não comutam (LOUISELL, 1973, p. 136):

$$e^{\xi A} B e^{-\xi A} = B + \xi[A, B] + \frac{\xi^2}{2!}[A, [A, B]] + \dots, \quad (3.34)$$

notando que para os dois casos acima esta série só possui os dois primeiros termos não nulos.

3.2 ESTADO COMPRIMIDO

Na seção anterior foi introduzido o estado coerente como o estado de mínima incerteza e variância igual em ambas as quadraturas do campo eletromagnético. Porém, é possível encontrar um estado cuja variância nas quadraturas seja assimétrica, mas que mantenha mínima a relação de incerteza. Esse tipo de estado é conhecido como *estado coerente comprimido*.

O estado coerente comprimido é definido como o estado de vácuo que passa pela ação do operador de compressão $S(\xi)$ e depois é deslocado por α (LOUDON, 2000; ORSZAG, 2016; RICE, 2020; WALLS; MILBURN, 2008),

$$|\alpha, \xi\rangle = D(\alpha)S(\xi)|0\rangle. \quad (3.35)$$

Na Equação 3.35 o *operador de compressão* é definido como (LOUDON, 2000; ORSZAG, 2016; RICE, 2020; SCULLY; ZUBAIRY, 1997; WALLS; MILBURN, 2008)

$$S(\xi) = \exp\left[\frac{1}{2}(\xi^* a^2 - \xi a^{\dagger 2})\right], \quad (3.36)$$

onde o número complexo $\xi = r e^{i\phi}$ é o *parâmetro de compressão*. Analisando a Equação 3.36 vê-se que o operador de compressão é um operador unitário (LOUDON, 2000, p. 201)

$$S(\xi)S^\dagger(\xi) = S^\dagger(\xi)S(\xi) = I. \quad (3.37)$$

A transformação gerada pelo operador de compressão nos operadores de aniquilação a e criação a^\dagger pode ser obtida utilizando a Equação 3.34 (LOUDON, 2000; ORSZAG, 2016; RICE, 2020; SCULLY; ZUBAIRY, 1997; WALLS; MILBURN, 2008),

$$\begin{aligned}
S^\dagger(\xi)aS(\xi) &= \exp\left[\frac{1}{2}(\xi a^{\dagger 2} - \xi^* a^2)\right] a \exp\left[-\frac{1}{2}(\xi a^{\dagger 2} - \xi^* a^2)\right] \\
&= a - \xi a^\dagger + \frac{1}{2!}|\xi|^2 a - \frac{1}{3!}\xi|\xi|^2 a^\dagger + \frac{1}{4!}|\xi|^4 a - \frac{1}{5!}\xi|\xi|^4 a^\dagger + \dots \\
&= a - r e^{i\phi} a^\dagger + \frac{1}{2!}r^2 a - \frac{1}{3!}r^3 e^{i\phi} a^\dagger + \frac{1}{4!}r^4 a - \frac{1}{5!}r^5 e^{i\phi} a^\dagger + \dots \\
&= \left(1 + \frac{1}{2!}r^2 + \frac{1}{4!}r^4 + \dots\right) a - \left(r + \frac{1}{3!}r^3 + \frac{1}{5!}r^5 + \dots\right) e^{i\phi} a^\dagger \\
S^\dagger(\xi)aS(\xi) &= a \cosh r - a^\dagger e^{i\phi} \sinh r, \tag{3.38}
\end{aligned}$$

e também seu conjugado Hermitiano

$$S^\dagger(\xi)a^\dagger S(\xi) = a^\dagger \cosh r - a e^{-i\phi} \sinh r. \tag{3.39}$$

Utilizando as Equações 3.32, 3.33, 3.35, 3.38 e 3.39, pode-se calcular o valor médio dos operadores a , a^\dagger (ORSZAG, 2016; SCULLY; ZUBAIRY, 1997; WALLS; MILBURN, 2008),

$$\begin{aligned}
\langle a \rangle &= \langle \alpha, \xi | a | \alpha, \xi \rangle = \langle 0 | S^\dagger(\xi) D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) S(\xi) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | S^\dagger(\xi) (a + \alpha) S(\xi) | 0 \rangle = \langle 0 | S^\dagger(\xi) a S(\xi) | 0 \rangle + \alpha \\
&= \langle 0 | (a \cosh r - a^\dagger e^{i\phi} \sinh r) | 0 \rangle + \alpha \\
\langle a \rangle &= \alpha, \tag{3.40}
\end{aligned}$$

e

$$\langle a^\dagger \rangle = \alpha^*. \tag{3.41}$$

Partindo desses dois resultados acima e também das Equações 3.31 e 3.37, pode-se encontrar o valor médio do número de fótons ($N = a^\dagger a$) no estado coerente comprimido (ORSZAG, 2016; SCULLY; ZUBAIRY, 1997; WALLS; MILBURN, 2008),

$$\begin{aligned}
\langle a^\dagger a \rangle &= \langle \alpha, \xi | a^\dagger a | \alpha, \xi \rangle = \langle 0 | S^\dagger(\xi) D^\dagger(\alpha) a^\dagger a D(\alpha) S(\xi) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | S^\dagger(\xi) D^\dagger(\alpha) a^\dagger D^\dagger(\alpha) D(\alpha) a D(\alpha) S(\xi) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | S^\dagger(\xi) (a^\dagger + \alpha^*) S(\xi) S^\dagger(\xi) (a + \alpha) S(\xi) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | (a^\dagger \cosh r - a e^{-i\phi} \sinh r + \alpha^*) (a \cosh r - a^\dagger e^{i\phi} \sinh r + \alpha) | 0 \rangle, \tag{3.42}
\end{aligned}$$

os únicos termos do produto nótavel que contribuem para o valor médio são $|\alpha|^2$ e $aa^\dagger \sinh^2 r$, com $aa^\dagger = a^\dagger a + 1$, já que os demais termos se anulam, assim

$$\langle a^\dagger a \rangle = \sinh^2 r + |\alpha|^2. \tag{3.43}$$

De forma semelhante é possível encontrar $\langle a^2 \rangle$ e $\langle a^{\dagger 2} \rangle$ (ORSZAG, 2016; SCULLY; ZUBAIRY, 1997),

$$\langle a^2 \rangle = \alpha^2 - e^{i\phi} \cosh r \sinh r, \quad (3.44)$$

$$\langle a^{\dagger 2} \rangle = \alpha^{*2} - e^{-i\phi} \cosh r \sinh r. \quad (3.45)$$

Agora, a fim de encontrar a variância das quadraturas no estado coerente comprimido, é conveniente generalizar os eixos X e Y (do espaço de fase) por meio de uma rotação, assim é possível obter a compressão em relação a qualquer par de quadraturas, dessa forma, define-se (LOUDON, 2000; ORSZAG, 2016; RICE, 2020; SCULLY; ZUBAIRY, 1997; WALLS; MILBURN, 2008),

$$X_1 = \frac{ae^{-i\phi/2} + a^\dagger e^{i\phi/2}}{2}, \quad (3.46)$$

$$Y_1 = \frac{ae^{-i\phi/2} - a^\dagger e^{i\phi/2}}{2i}, \quad (3.47)$$

é claro que se o parâmetro de compressão ξ for real, i.e. $\phi = 0$, então $X_1 = X$ e $Y_1 = Y$, logo a compressão ocorre nas quadraturas X e Y .

Com o auxílio das Equações 3.40 e 3.41 é possível encontrar o valor médio das quadraturas no estado coerente comprimido X_1 e Y_1 ,

$$\langle X_1 \rangle = \frac{\langle a \rangle e^{-i\phi/2} + \langle a^\dagger \rangle e^{i\phi/2}}{2} = \frac{\alpha e^{-i\phi/2} + \alpha^* e^{i\phi/2}}{2}, \quad (3.48)$$

e

$$\langle Y_1 \rangle = \frac{\alpha e^{-i\phi/2} - \alpha^* e^{i\phi/2}}{2i}. \quad (3.49)$$

Para calcular a variância é preciso antes encontrar $\langle X_1^2 \rangle$ $\langle Y_1^2 \rangle$, assim, utilizando as Equações 3.43, 3.44 e 3.45, obtém-se (LOUDON, 2000; ORSZAG, 2016; RICE, 2020; SCULLY; ZUBAIRY, 1997; WALLS; MILBURN, 2008),

$$\begin{aligned} \langle X_1^2 \rangle &= \frac{1}{4} (\langle a^2 \rangle e^{-i\phi} + \langle aa^\dagger \rangle + \langle a^\dagger a \rangle + \langle a^{\dagger 2} \rangle e^{i\phi}) \\ &= \frac{1}{4} (\langle a^2 \rangle e^{-i\phi} + \langle a^{\dagger 2} \rangle e^{i\phi} + 2\langle a^\dagger a \rangle + 1) \\ \langle X_1^2 \rangle &= \frac{1}{4} [\alpha^2 e^{-i\phi} - 2 \cosh r \sinh r + \alpha^{*2} e^{i\phi} + 2 \sinh^2 r + 2|\alpha|^2 + 1], \end{aligned} \quad (3.50)$$

e de forma similar,

$$\langle Y_1^2 \rangle = \frac{1}{4} [-\alpha^2 e^{-i\phi} + 2 \cosh r \sinh r - \alpha^{*2} e^{i\phi} + 2 \sinh^2 r + 2|\alpha|^2 + 1]. \quad (3.51)$$

Portanto, as variâncias das quadraturas X_1 e Y_1 no estado coerente comprimido são (LOUDON, 2000; ORSZAG, 2016; RICE, 2020; SCULLY; ZUBAIRY, 1997; WALLS; MILBURN, 2008),

$$\begin{aligned} (\Delta X_1)^2 &= \langle X_1^2 \rangle - \langle X_1 \rangle^2 = \frac{1}{4} [1 - 2 \cosh r \sinh r + 2 \sinh^2 r] = \frac{1}{4} e^{-2r} \\ \Delta X_1 &= \frac{1}{2} e^{-r}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

e

$$\begin{aligned} (\Delta Y_1)^2 &= \langle Y_1^2 \rangle - \langle Y_1 \rangle^2 = \frac{1}{4} [1 + 2 \cosh r \sinh r + 2 \sinh^2 r] = \frac{1}{4} e^{2r} \\ \Delta Y_1 &= \frac{1}{2} e^r. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Estes dois resultados acima mostram a grande vantagem do estado coerente comprimido em relação ao estado coerente, neste as flutuações são iguais em ambas as quadraturas, já o estado coerente comprimido mantém a relação de incerteza mínima $\Delta X_1 \Delta Y_1 = 1/4$ enquanto possibilita diminuir a flutuação em uma das quadraturas às custas do aumento da flutuação na outra quadratura. Como aponta Walls e Milburn (2008), esta é uma propriedade muito útil em medidas, que pode ser aplicada, por exemplo, em interferômetros de alta sensibilidade utilizados na detecção de ondas gravitacionais.

3.3 ESTADO TÉRMICO

Até agora, foram apresentados estados do campo eletromagnético como *estados puros*, ou seja, estados que podem ser descritos por vetores de estado $|\psi\rangle$. Não obstante, nesta seção será apresentado o *estado térmico* do campo eletromagnético, que é uma mistura de estados e só pode ser descrito por meio do operador densidade ρ (ver Apêndice A).

Dentro do contexto do ensemble canônico (ver Salinas (1999)), em física estatística, o estado de um campo proveniente de uma fonte em equilíbrio térmico a temperatura T pode ser descrito por (GARRISON; CHIAO, 2008; MEYSTRE; SARGENT, 2007; ORSZAG, 2016; SCULLY; ZUBAIRY, 1997),

$$\rho = \frac{\exp(-H/k_B T)}{\text{Tr}[\exp(-H/k_B T)]} = \frac{\exp(-H/k_B T)}{Z}, \quad (3.54)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann e Z é a função de partição, obtida a partir da condição de normalização $\text{Tr}[\rho] = 1$. O valor médio de um operador no estado térmico pode ser obtido por (ver Equação A.20) (LOUDON, 2000; ORSZAG, 2016),

$$\langle O \rangle = \text{Tr}[O\rho]. \quad (3.55)$$

Para um único modo do campo eletromagnético, removendo a energia do ponto zero, a Equação 3.54 torna-se (GARRISON; CHIAO, 2008; LOUDON, 2000; MEYSTRE; SARGENT, 2007; ORSZAG, 2016; SCULLY; ZUBAIRY, 1997),

$$\rho = \frac{\exp(-\hbar\omega a^\dagger a/k_B T)}{Z} = e^{-\hbar\omega a^\dagger a/k_B T} (1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}), \quad (3.56)$$

onde

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr}[\exp(-\hbar\omega a^\dagger a/k_B T)] = \sum_n \langle n | \exp(-\hbar\omega a^\dagger a/k_B T) | n \rangle \\ &= \sum_n \exp(-\hbar\omega n/k_B T) = \sum_n 1(\exp(-\hbar\omega/k_B T))^n \\ Z &= \frac{1}{1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

no último passo foi utilizado a soma dos elementos de uma progressão geométrica infinita de razão $e^{-\hbar\omega/k_B T}$ e primeiro termo igual a 1.

É possível reescrever ρ expandindo-o em termos dos estados de número (MEYSTRE; SARGENT, 2007, p. 306),

$$\rho = \sum_{n,m} |n\rangle \langle n | \rho | m \rangle \langle m| = \sum_{n,m} \rho_{nm} |n\rangle \langle m|. \quad (3.58)$$

Utilizando o fato de que $\langle n | a^\dagger a | m \rangle = n \delta_{nm}$, tem-se que (MEYSTRE; SARGENT, 2007, p. 306),

$$\rho_{nm} = (1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}) \langle n | e^{-\hbar\omega a^\dagger a/k_B T} | m \rangle = (1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}) e^{-n\hbar\omega/k_B T} \delta_{nm}, \quad (3.59)$$

logo,

$$\rho = (1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}) \sum_n e^{-n\hbar\omega/k_B T} |n\rangle \langle n|, \quad (3.60)$$

o que mostra que o estado térmico é diagonal na representação de número, isso faz com que o campo elétrico (e também magnético) seja nulo neste estado.

Definindo $Z_1 = e^{-\hbar\omega/k_B T}$, o número médio de fótons no estado térmico é dado por (LOUDON, 2000; MEYSTRE; SARGENT, 2007; ORSZAG, 2016; SCULLY; ZUBAIRY, 1997),

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \langle N \rangle = \text{Tr}[N\rho] = \rho = \text{Tr}[(1 - Z_1) \sum_n Z_1^n N |n\rangle \langle n|] = (1 - Z_1) \sum_n n Z_1^n \\ &= (1 - Z_1) Z_1 \frac{\partial}{\partial Z_1} \sum_n Z_1^n = (1 - Z_1) Z_1 \frac{\partial}{\partial Z_1} \left(\frac{1}{1 - Z_1} \right) \\ &= (1 - Z_1) Z_1 \frac{1}{(1 - Z_1)^2} = \frac{Z_1}{1 - Z_1} = \frac{e^{-\hbar\omega/k_B T}}{1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}} \\ \bar{n} &= \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

e a probabilidade de encontrar n fótons no estado térmico igual a ρ_{nn} . A partir da Equação 3.61, usando $e^{-\hbar\omega/k_B T} = \bar{n}/(1 + \bar{n})$, pode-se escrever o estado térmico em termos do número médio de fótons \bar{n} (LOUDON, 2000; MEYSTRE; SARGENT, 2007; ORSZAG, 2016; SCULLY; ZUBAIRY, 1997),

$$\rho = \frac{1}{1 + \bar{n}} \sum_n \left(\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^n |n\rangle\langle n| = \sum_n \frac{(\bar{n})^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}} |n\rangle\langle n|. \quad (3.62)$$

É possível realizar uma transformação no estado térmico mediada pelo operador de compressão $S(\xi)$, a fim de gerar um *estado térmico comprimido* $\tilde{\rho}$, definido como (FEARN; COLLETT, 1988; KIM; OLIVEIRA; KNIGHT, 1989a; KIM; OLIVEIRA; KNIGHT, 1989b)

$$\tilde{\rho} = S(\xi)\rho S^\dagger(\xi) = (1 - Z_1) \sum_n Z_1^n S(\xi)|n\rangle\langle n|S^\dagger(\xi). \quad (3.63)$$

Seguindo Kim, Oliveira e Knight (1989b), utilizando a definição acima e as Equações 3.38 e 3.39, para um parâmetro de compressão real $\xi = r$, pode-se calcular a variância nas quadraturas X e Y para o estado térmico comprimido. Portanto, para isso, é necessário primeiro encontrar

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= \text{Tr}[X\tilde{\rho}] \\ &= \sum_m \langle m| \left[\left(\frac{a + a^\dagger}{2} \right) (1 - Z_1) \sum_n Z_1^n S(\xi)|n\rangle\langle n|S^\dagger(\xi) \right] |m\rangle \\ &= \frac{1 - Z_1}{2} \sum_n Z_1^n \langle n|S^\dagger(\xi)(a + a^\dagger) \left(\sum_m |m\rangle\langle m| \right) S(\xi)|n\rangle \\ &= \frac{1 - Z_1}{2} \sum_n Z_1^n \langle n|S^\dagger(\xi)(a + a^\dagger)S(\xi)|n\rangle \\ &= \frac{1 - Z_1}{2} \sum_n Z_1^n \left[\langle n|(a \cosh r - a^\dagger \sinh r)|n\rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle n|(a^\dagger \cosh r - a \sinh r)|n\rangle \right] \\ \langle X \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (3.64)$$

e

$$\begin{aligned} \langle X^2 \rangle &= \text{Tr}[X^2\tilde{\rho}] \\ &= \frac{1 - Z_1}{4} \sum_n Z_1^n \langle n|S^\dagger(\xi)(a + a^\dagger)^2 S(\xi)|n\rangle \\ &= \frac{1 - Z_1}{4} \sum_n Z_1^n \langle n|S^\dagger(\xi)(aa + a^\dagger a^\dagger + 2a^\dagger a + 1)S(\xi)|n\rangle \\ &= \frac{1 - Z_1}{4} \sum_n Z_1^n \left[-(2n + 1) \cosh r \sinh r - (2n + 1) \cosh r \sinh r \right. \\ &\quad \left. + 2n(\cosh^2 r + \sinh^2 r) + 2 \sinh^2 r + 1 \right]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Agora, utilizando as identidades (WEISSTEIN, 2023):

$$\cosh^2 r + \sinh^2 r = \cosh 2r, \quad (3.66)$$

$$2 \cosh r + \sinh r = \sinh 2r, \quad (3.67)$$

$$\sinh^2 r = \frac{\cosh 2r - 1}{2}, \quad (3.68)$$

a Equação 3.65 torna-se

$$\begin{aligned} \langle X^2 \rangle &= \frac{1 - Z_1}{4} \sum_n Z_1^n [2n(\cosh 2r - \sinh 2r) + (\cosh 2r - \sinh 2r)] \\ &= 2e^{-2r} \frac{1 - Z_1}{4} \sum_n n Z_1^n + e^{-2r} \frac{1 - Z_1}{4} \sum_n Z_1^n \\ \langle X^2 \rangle &= \frac{1}{4}(2\bar{n} + 1)e^{-2r}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Por fim, tem-se que (KIM; OLIVEIRA; KNIGHT, 1989b),

$$(\Delta X)^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = \frac{1}{4}(2\bar{n} + 1)e^{-2r}; \quad (3.70)$$

e de forma semelhante obtém-se,

$$(\Delta Y)^2 = \frac{1}{4}(2\bar{n} + 1)e^{2r}, \quad (3.71)$$

que são resultados esperados, já que a ação do operador de compressão sobre um estado é justamente alterar as variâncias das quadraturas neste estado, de modo a diminuir uma e aumentara a outra.

4 EFEITO CASIMIR DINÂMICO: HAMILTONIANO EFETIVO

Neste capítulo, revisita-se um método para se obter o hamiltoniano efetivo para a descrição do Efeito Casimir Dinâmico no qual se estuda a produção de fótons a partir do estado de vácuo, devido ao processo de excitação paramétrica quântica, resultado da variação temporal de parâmetros geométricos de uma cavidade ressonante. Na ausência de dissipação, que em geral é descrita por um acoplamento do sistema com um reservatório térmico, a evolução de um sistema quântico é unitária e descrita por um operador de evolução determinado a partir do operador hamiltoniano do sistema. Em cavidades ideais, aquelas com alto fator de qualidade, que são implementadas do ponto de vista experimental em ambiente criogênico (AGNESI et al., 2009; BRAGGIO et al., 2004), o operador hamiltoniano é um operador dependente do tempo, definindo o que se denomina um sistema quântico não-estacionário, para os quais métodos para se determinar a dinâmica são bem estabelecidos na literatura (MARKOV, 1987; DODONOV; MAN'KO, 2003).

A geração de fótons a partir do estado de vácuo em cavidades ressonantes com paredes móveis foi primeiramente investigada por Moore (1970), que propôs uma teoria quântica relativística para a luz linearmente polarizada no interior de uma cavidade com fronteiras refletoras móveis, fundamentada na análise da estrutura simplética do espaço de soluções da equação de onda no calibre de Coulomb, dentro do formalismo da Teoria de Campos. Porém, Moore (1970) deixa claro que, diferente do caso onde as paredes da cavidade estão fixas (como no Capítulo 2), na abordagem desenvolvida por ele não é possível encontrar um hamiltoniano fundamental para o sistema quântico uma vez assumidas determinadas condições de contorno para o problema, fundamentais para se levar em conta o movimento das paredes oscilantes.

Mais de uma década depois do trabalho de Moore, ainda dentro do formalismo da Teoria de Campos (relativística), Razavy e Terning (1985) desenvolvem a primeira abordagem hamiltoniana do problema, onde os autores constroem um hamiltoniano efetivo por meio do qual é possível descrever a dinâmica do campo dentro da cavidade (unidimensional) de maneira diferente do formalismo empregado por Moore. Posteriormente a esse trabalho, Dodonov, Klimov e Nikonov (1993) analisam a criação de fótons a partir do estado de vácuo do campo eletromagnético devido a variação temporal da permissividade elétrica ϵ de um meio dielétrico.

Partindo das ideias apresentadas nos trabalhos acima referidos, Law (1994) propõe, dentro de um contexto não-relativístico, um hamiltoniano efetivo para o problema de geração de fótons em uma cavidade (unidimensional) com paredes móveis que possui um meio dielétrico em seu interior, dessa maneira possibilitando o emprego do formalismo hamiltoniano desenvolvido no contexto da Ótica Quântica, o que apresenta grande versatilidade em relação aos métodos anteriores. Como o trabalho desenvolvido no Capítulo 6

pressupõe que a dinâmica dos fótons dentro da cavidade é dada pelo hamiltoniano efetivo obtido por Law, neste capítulo é apresentado o método empregado por Law para se obter o hamiltoniano efetivo.

4.1 QUANTIZAÇÃO DO CAMPO COM FRONTEIRAS MÓVEIS

Na abordagem desenvolvida por Law uma das placas (espelhos) está fixa na posição $x = 0$, enquanto a outra oscila com $x = r(t)$. O espaço entre as placas é preenchido por um meio dielétrico linear não dispersivo com permissividade elétrica $\epsilon(x, t)$, já a permeabilidade magnética μ é assumida como sendo constante (neste capítulo adota-se $\mu = c = \hbar = 1$, a fim de facilitar a notação). O ponto de partida deste procedimento é a densidade Lagrangeana clássica do campo eletromagnético $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A_j, \dot{A}_j, \partial_i A_j)$ no interior da cavidade considerando a formulação em uma única dimensão, uma vez que a extensão para o problema tridimensional é direta. A forma da Lagrangeana clássica é escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\epsilon(x, t) \left(\frac{\partial A(x, t)}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial A(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right], \quad (4.1)$$

onde $A(x, t)$ é o vetor potencial clássico, a partir do qual se obtém os campos elétrico e magnético no interior da cavidade. A equação de Lagrange para a densidade Lagrangeana (recomenda-se verificar (COHEN-TANNOUDI; DUPONT-ROC; GRYNBERG, 1989, p. 92)) é dada por,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_j} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_j} - \sum_i \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i A_j)} \right), \quad (4.2)$$

onde $i, j = x, y, z$. Note que o segundo termo do lado direito da equação 4.2 contém a derivadas da densidade Lagrangeana em relação as derivadas das componentes do vetor potencial em relação as coordenadas. Para o modelo em análise, o vetor potencial é unidimensional e depende apenas da coordenada x . Tomando-se a densidade Lagrangeana na forma 4.1 e aplicando a equação 4.2 resulta na equação de onda para o componente unidimensional do vetor potencial, na forma

$$\frac{d}{dt} \left[\epsilon(x, t) \frac{\partial A(x, t)}{\partial t} \right] = \frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial x^2}, \quad (4.3)$$

sendo uma equação do tipo onda no calibre de Coulomb no qual se considera o potencial escalar $\phi = 0$. Trata-se de uma equação diferencial parcial de segunda ordem tanto para a coordenada da posição quanto para o tempo. Note que o fator $\epsilon(x, t)$ pode depender explicitamente do tempo e isto produz um termo adicional na equação de onda padrão escrita na forma

$$\epsilon(x, t) \frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial \epsilon(x, t)}{\partial t} \frac{\partial A(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial x^2}, \quad (4.4)$$

o que modifica a forma da solução devido a este fator associado a dissipação. No caso idealizado, as condições de contorno surgem do fato de que o campo elétrico deve anular-se nas paredes condutoras da cavidade, de modo que para qualquer instante de tempo t é necessário que

$$A(0, t) = A(r(t), t) = 0. \quad (4.5)$$

A partir da equação de Lagrange, defini-se o *momento conjugado* $\hat{\pi}$ como (COHEN-TANNOUDJI; DUPONT-ROC; GRYNBERG, 1989, p. 93),

$$\hat{\pi}(x, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_x} = \epsilon(x, t) \frac{\partial A(x, t)}{\partial t}. \quad (4.6)$$

A quantização é feita ao tomar $A(x, t)$ e $\pi(x, t)$ como operadores, seguindo as relações de comutação para tempos iguais (COHEN-TANNOUDJI; DUPONT-ROC; GRYNBERG, 1989),

$$[\hat{A}(x, t), \hat{A}(x', t)] = [\hat{\pi}(x, t), \hat{\pi}(x', t)] = 0, \quad [\hat{A}(x, t), \hat{\pi}(x', t)] = i\delta(x - x'), \quad (4.7)$$

com a condição adicional de hermiticidade,

$$\hat{A}^\dagger(x, t) = \hat{A}(x, t), \quad \hat{\pi}^\dagger(x, t) = \hat{\pi}(x, t). \quad (4.8)$$

De acordo com Law, não é possível obter um hamiltoniano fundamental $H(\hat{A}(x, t), \hat{\pi}(x, t))$ diretamente a partir da formulação Lagrangeana para esse caso, pois a descrição da interação do campo com as correntes induzidas na placa que se move pode ser bastante complicada. Por isso que, para contornar esse problema, assume-se as condições de contorno da Equação 4.5. Porém, uma vez assumidas estas condições de contorno, não se torna possível determinar um hamiltoniano fundamental, complicação esta que deriva da formulação original do problema apresentada por Moore (1970). Porém, mesmo utilizando as condições de contorno, o problema em se determinar $\hat{A}(x, t)$ a partir da Equação 4.3 não é trivial. Devido a condição de contorno variável, a *distribuição espacial* ϕ_k da onda eletromagnética dentro da cavidade não depende apenas da coordenada espacial x , mas também possui uma dependência temporal, já que a distribuição espacial depende das dimensões da cavidade, que neste caso, variam no tempo, logo $\phi_k = \phi_k(x, t)$. Assim, não é possível aplicar diretamente, para a Equação 4.3, o método de separação de variáveis que foi empregado na quantização do campo eletromagnético no Capítulo 2.

4.2 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DAS COORDENADAS $\hat{q}_k(t)$ E $\hat{p}_k(t)$

Neste sentido, Law sugere que um *hamiltoniano efetivo* H_{ef} pode ser encontrado ao abordar a condição de contorno variável $x = r(t)$ como uma sucessão temporal de condições de contorno fixas, ou seja, como se a placa que se move estivesse fixa em

cada instante de tempo t , definindo, assim, em cada um destes instantes um *problema estacionário*, similar ao que foi descrito no Capítulo 2. Desta forma, no instante de tempo t , a distribuição espacial da onda “congela”, fazendo com que $\phi_k(x, t) \rightarrow \phi_{kt}(x)$, e da mesma forma a permissividade elétrica $\epsilon(x, t) \rightarrow \epsilon_t(x)$, tornando possível expandir $\hat{A}(x, t)$ em termos da base de modos $\{\phi_{kt}(x)\}$,

$$\hat{A}(x, t) = \sum_k \hat{q}_k(t) \phi_{kt}(x), \quad (4.9)$$

onde a quantização aparece nos coeficientes que determinam a dependência temporal $\hat{q}_k(t)$, assim como no Capítulo 2.

Aplicando então a separação de variáveis para a Equação 4.3 utilizando a Equação 4.9, obtém-se, para a parte espacial,

$$\frac{\partial \phi_{kt}(x)}{\partial x^2} + \epsilon_t(x) \omega_k^2(t) \phi_{kt}(x) = 0, \quad \phi_k(0) = \phi_{kt}(r(0)) = 0, \quad (4.10)$$

que constitui um *problema de autovalor de Sturm-Liouville*, o que faz com que os modos $\phi_{kt}(x)$ sigam a condição de ortonormalidade,

$$\int_0^{r(t)} dx \epsilon_t(x) \phi_{kt}(x) \phi_{jt}(x) = \delta_{k,j}. \quad (4.11)$$

Partindo do mesmo conceito, é também possível expandir momento conjugado $\hat{\pi}(x, t)$ em termos da base de modos $\{\phi_{kt}(x)\}$,

$$\hat{\pi}(x, t) = \epsilon_t(x) \sum_k \hat{p}_k(t) \phi_{kt}(x), \quad (4.12)$$

onde o termo $\epsilon_t(x)$ surge devido a definição de $\hat{\pi}(x, t)$ (Equação 4.6), porém não se pode tomar diretamente $\hat{p}_k(t) = \dot{\hat{q}}_k(t)$, como se poderia fazer em um caso realmente estacionário, pois a dependência temporal total de $\hat{A}(x, t)$ e $\hat{\pi}(x, t)$ não se deve somente a $\hat{q}_k(t)$ e $\hat{p}_k(t)$, respectivamente, mas também a $\phi_k(x, t)$ e $\epsilon(x, t)$.

Utilizando a condição de ortonormalidade, é possível obter $\hat{q}_k(t)$ e $\hat{p}_k(t)$ a partir de $\hat{A}(x, t)$ e $\hat{\pi}(x, t)$, respectivamente,

$$\hat{q}_k(t) = \int_0^{r(t)} dx \epsilon_t(x) \hat{A}(x, t) \phi_{kt}(x), \quad (4.13)$$

$$\hat{p}_k(t) = \int_0^{r(t)} dx \hat{\pi}(x, t) \phi_{kt}(x). \quad (4.14)$$

Como os operadores $\hat{A}(x, t)$ e $\hat{\pi}(x, t)$ são Hermitianos, segue que

$$\hat{q}_k^\dagger(t) = \int_0^{r(t)} dx \epsilon_t(x) \hat{A}^\dagger(x, t) \phi_{kt}(x) = \int_0^{r(t)} dx \epsilon_t(x) \hat{A}(x, t) \phi_{kt}(x) = \hat{q}_k(t), \quad (4.15)$$

$$\hat{p}_k^\dagger(t) = \int_0^{r(t)} dx \hat{\pi}^\dagger(x, t) \phi_{kt}(x) = \int_0^{r(t)} dx \hat{\pi}(x, t) \phi_{kt}(x) = \hat{p}_k(t). \quad (4.16)$$

Da Equação 4.7 deduz-se que os operadores $\hat{q}_k(t)$ e $\hat{p}_k(t)$ seguem a relação de comutação

$$[\hat{q}_k(t), \hat{q}_j(t)] = 0, \quad [\hat{p}_k(t), \hat{p}_j(t)] = 0, \quad [\hat{q}_k(t), \hat{p}_j(t)] = i\delta_{k,j}, \quad (4.17)$$

que é exatamente a relação de canônica de comutação generalizada entre os operadores de posição $\hat{q}_k(t)$ e momento $\hat{p}_k(t)$, que também aparece na quantização do campo eletromagnético, Equação 2.38. Essa é uma consequência natural, já que os operadores $\hat{q}_k(t)$ e $\hat{p}_k(t)$ surgem a partir da expansão do operador de posição generalizado $\hat{A}(x, t)$ e do operador de momento conjugado $\hat{\pi}(x, t)$, respectivamente, em termos do base de modos $\{\phi_{kt}(x)\}$. Neste sentido, as equações que determinam a dinâmica dos operadores $\hat{A}(x, t)$ e $\hat{\pi}(x, t)$ definem a dinâmica dos operadores $\hat{q}_k(t)$ e $\hat{p}_k(t)$. Assim, a equação de movimento para $\hat{q}_k(t)$ é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{q}_k(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\int_0^{r(t)} dx \epsilon_t(x) \hat{A}(x, t) \phi_{kt}(x) \right] \\ &= \int_0^{r(t)} dx \frac{\partial}{\partial t} \left[\epsilon_t(x) \hat{A}(x, t) \phi_{kt}(x) \right] + \left[\epsilon_t(x) \hat{A}(x, t) \phi_{kt}(x) \frac{dx}{dt} \right]_{x=r(t)} \\ &\quad - \left[\epsilon_t(x) \hat{A}(x, t) \phi_{kt}(x) \frac{dx}{dt} \right]_{x=0}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

mas devido às condições de contorno $\phi_{kt}(0) = \phi_{kt}(r(t)) = 0$ os dois últimos termos somem, logo

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{q}_k(t)}{dt} &= \int_0^{r(t)} dx \frac{\partial \epsilon_t(x)}{\partial t} \hat{A}(x, t) \phi_{kt}(x) + \int_0^{r(t)} dx \left[\epsilon_t(x) \frac{\partial \hat{A}(x, t)}{\partial t} \right] \phi_{kt}(x) \\ &\quad + \int_0^{r(t)} dx \epsilon_t(x) \hat{A}(x, t) \frac{\partial \phi_{kt}(x)}{\partial t} \\ &= \int_0^{r(t)} dx \hat{\pi}(x, t) \phi_{kt}(x) + \left[\int_0^{r(t)} dx \frac{\partial \epsilon_t(x)}{\partial t} \hat{A}(x, t) \phi_{kt}(x) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{r(t)} dx \epsilon_t(x) \hat{A}(x, t) \frac{\partial \phi_{kt}(x)}{\partial t} \right]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Usando a Equação 4.9 pode-se reescrever o termo entre colchetes como

$$[\dots] = \sum_j \hat{q}_j(t) \left(\int_0^{r(t)} dx \frac{\partial \epsilon_t(x)}{\partial t} \phi_{jt}(x) \phi_{kt}(x) + \int_0^{r(t)} dx \epsilon_t(x) \phi_{jt}(x) \frac{\partial \phi_{kt}(x)}{\partial t} \right). \quad (4.20)$$

Derivando a condição de ortonormalidade em relação ao tempo, obtém-se

$$\frac{d}{dt} \int_0^{r(t)} dx \epsilon_t(x) \phi_{jt}(x) \phi_{kt}(x) = \frac{d}{dt} \delta_{k,j} = 0, \quad (4.21)$$

o que implica na identidade

$$\begin{aligned} - \int_0^{r(t)} dx \epsilon_t(x) \frac{\partial \phi_{jt}(x)}{\partial t} \phi_{kt}(x) &= \int_0^{r(t)} dx \frac{\partial \epsilon_t(x)}{\partial t} \phi_{jt}(x) \phi_{kt}(x) \\ &\quad + \int_0^{r(t)} dx \epsilon_t(x) \phi_{jt}(x) \frac{\partial \phi_{kt}(x)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

Em seguida, utilizando a Equação 4.14 e definindo

$$G_{k,j}(t) \equiv - \int_0^{r(t)} dx \epsilon_t(x) \frac{\partial \phi_{jt}(x)}{\partial t} \phi_{kt}(x), \quad (4.23)$$

a Equação 4.19 torna-se

$$\frac{d\hat{q}_k(t)}{dt} = \hat{p}_k(t) + \sum_j \hat{q}_j(t) G_{k,j}(t). \quad (4.24)$$

Nota-se que o termo $G_{k,j}(t)$ aparece devido à condição de contorno não estacionária, pois no caso do contorno da cavidade fosse fixa $\partial \phi_{jt}(x)/\partial t = \partial \phi_j(x)/\partial t = 0$ e $G_{k,j}(t) = 0$, logo a Equação 4.24 tornaria-se

$$\frac{d\hat{q}_k(t)}{dt} = \hat{p}_k(t). \quad (4.25)$$

Procedendo de forma similar, pode-se obter a equação de movimento para o operador $\hat{p}_k(t)$,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{p}_k(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\int_0^{r(t)} dx \hat{\pi}(x, t) \phi_{kt}(x) \right] \\ &= \int_0^{r(t)} dx \frac{\partial}{\partial t} [\hat{\pi}(x, t) \phi_{kt}(x)] + \left[\hat{\pi}(x, t) \phi_{kt}(x) \frac{dx}{dt} \right]_{x=r(t)} \\ &\quad - \left[\hat{\pi}(x, t) \phi_{kt}(x) \frac{dx}{dt} \right]_{x=0} \\ &= \int_0^{r(t)} dx \frac{\partial \hat{\pi}(x, t)}{\partial t} \phi_{kt}(x) + \int_0^{r(t)} dx \hat{\pi}(x, t) \frac{\partial \phi_{kt}(x)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Uma vez que o operador $\hat{\pi}(x, t)$ satisfaz a equação,

$$\frac{\partial \hat{\pi}(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\epsilon(x, t) \left(\frac{\partial \hat{A}(x, t)}{\partial t} \right) \right] = \frac{\partial^2 \hat{A}(x, t)}{\partial x^2}, \quad (4.27)$$

que implica em

$$\int_0^{r(t)} dx \frac{\partial \hat{\pi}(x, t)}{\partial t} \phi_{kt}(x) = \int_0^{r(t)} dx \frac{\partial^2 \hat{A}(x, t)}{\partial x^2} \phi_{kt}(x) = \sum_j \hat{q}_j(t) \int_0^{r(t)} dx \frac{\partial \phi_{jt}^2(x)}{\partial x^2} \phi_{kt}(x). \quad (4.28)$$

Da Equação 4.10, tem-se que

$$\frac{\partial^2 \phi_{jt}(x)}{\partial x^2} = -\epsilon_t(x) \omega_j^2(t) \phi_{jt}(x), \quad (4.29)$$

que aplicado a Equação 4.28 resulta em

$$\begin{aligned} \int_0^{r(t)} dx \frac{\partial \hat{\pi}(x, t)}{\partial t} \phi_{kt}(x) &= \sum_j \hat{q}_j(t) \int_0^{r(t)} dx \frac{\partial \phi_{jt}^2(x)}{\partial x^2} \phi_{kt}(x) \\ &= - \sum_j \omega_j^2(t) \hat{q}_j(t) \int_0^{r(t)} dx \epsilon_t(x) \phi_{jt}(x) \phi_{kt}(x) \\ &= - \sum_j \omega_j^2(t) \hat{q}_j(t) \delta_{j,k} = -\omega_k^2(t) \hat{q}_k(t). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Utilizando a Equação 4.12

$$\begin{aligned} \int_0^{r(t)} dx \hat{\pi}(x, t) \frac{\partial \phi_{kt}(x)}{\partial t} &= \sum_j \hat{p}_j(t) \int_0^{r(t)} dx \epsilon_t(x) \phi_{jt}(x) \frac{\partial \phi_{kt}(x)}{\partial t} \\ &= - \sum_j \hat{p}_j(t) G_{j,k}(t). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Assim, com os dois resultados acima, a equação de movimento para $\hat{p}_k(t)$ torna-se

$$\frac{d\hat{p}_k(t)}{dt} = -\omega_k^2(t) \hat{q}_k(t) - \sum_j \hat{p}_j(t) G_{j,k}(t). \quad (4.32)$$

4.3 HAMILTONIANO EFETIVO NAS VARIÁVEIS BOSÔNICAS

Com as Equações 4.24 e 4.32 é possível encontrar um hamiltoniano efetivo escrito em termos dos operadores bosônicos de aniquilação $\hat{a}_k(t)$ e criação $\hat{a}_k^\dagger(t)$. Esses operadores são definidos por

$$\hat{a}_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k(t)}} [\omega_k(t) \hat{q}_k(t) + i\hat{p}_k(t)], \quad \hat{a}_k^\dagger(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k(t)}} [\omega_k(t) \hat{q}_k(t) - i\hat{p}_k(t)]; \quad (4.33)$$

nota-se que diferente da definição de $\hat{a}_k(t)$ e $\hat{a}_k^\dagger(t)$ apresentada no Capítulo 2, agora a frequência ω_k também varia no tempo.

O hamiltoniano efetivo $H_{ef}(\hat{a}_k(t), \hat{a}_k^\dagger(t))$ pode ser encontrado utilizando a equação de movimento de Heisenberg para os operadores $\hat{a}_k(t)$ e $\hat{a}_k^\dagger(t)$,

$$i \frac{d\hat{a}_k(t)}{dt} = [\hat{a}_k(t), H_{ef}] \quad , \quad i \frac{d\hat{a}_k^\dagger(t)}{dt} = [\hat{a}_k^\dagger(t), H_{ef}]; \quad (4.34)$$

para isso é primeiro necessário encontrar $d\hat{a}_k(t)/dt$ e $d\hat{a}_k^\dagger(t)/dt$ utilizando os operadores $\hat{a}_k(t)$ e $\hat{a}_k^\dagger(t)$ escritos em relação a $\hat{q}_k(t)$ e $\hat{p}_k(t)$.

Então, derivando a Equação 4.33 em relação ao tempo, tem-se para a taxa de variação temporal do operador de aniquilação a forma

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{a}_k(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\omega_k(t) \hat{q}_k(t) + i\hat{p}_k(t)}{\sqrt{2\omega_k(t)}} \right] \\ &= -\frac{\dot{\omega}_k(t)}{2\omega_k(t)} \left[\frac{\omega_k(t) \hat{q}_k(t) + i\hat{p}_k(t)}{\sqrt{2\omega_k(t)}} \right] + \frac{\dot{\omega}_k(t)}{\sqrt{2\omega_k(t)}} \hat{q}_k(t) \\ &\quad + \frac{\omega_k(t)}{\sqrt{2\omega_k(t)}} \left(\frac{d\hat{q}_k(t)}{dt} \right) + \frac{i}{\sqrt{2\omega_k(t)}} \left(\frac{d\hat{p}_k(t)}{dt} \right), \end{aligned} \quad (4.35)$$

enquanto para o operador de criação a forma

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{a}_k^\dagger(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\omega_k(t)\hat{q}_k(t) - i\hat{p}_k(t)}{\sqrt{2\omega_k(t)}} \right] \\
&= -\frac{\dot{\omega}_k(t)}{2\omega_k(t)} \left[\frac{\omega_k(t)\hat{q}_k(t) - i\hat{p}_k(t)}{\sqrt{2\omega_k(t)}} \right] + \frac{\dot{\omega}_k(t)}{\sqrt{2\omega_k(t)}} \hat{q}_k(t) \\
&\quad + \frac{\omega_k(t)}{\sqrt{2\omega_k(t)}} \left(\frac{d\hat{q}_k(t)}{dt} \right) - \frac{i}{\sqrt{2\omega_k(t)}} \left(\frac{d\hat{p}_k(t)}{dt} \right).
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Levando-se em consideração a definição dos operadores $\hat{q}_k(t)$ e $\hat{p}_k(t)$ em termos de $\hat{a}_k(t)$ e $\hat{a}_k^\dagger(t)$,

$$\hat{q}_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k(t)}} (\hat{a}_k(t) + \hat{a}_k^\dagger(t)) , \quad \hat{p}_k(t) = i\sqrt{\frac{\omega_k(t)}{2}} (\hat{a}_k^\dagger(t) - \hat{a}_k(t)) ; \tag{4.37}$$

pode-se reescrever as derivadas temporais das Equações 4.24 e 4.32

$$\frac{d\hat{q}_k(t)}{dt} = i\sqrt{\frac{\omega_k(t)}{2}} (\hat{a}_k^\dagger(t) - \hat{a}_k(t)) + \sum_j \frac{\hat{a}_j(t) + \hat{a}_j^\dagger(t)}{\sqrt{2\omega_j(t)}} G_{kj}(t), \tag{4.38}$$

$$\frac{d\hat{p}_k(t)}{dt} = -\omega_k^2(t) \left(\frac{\hat{a}_k(t) + \hat{a}_k^\dagger(t)}{\sqrt{2\omega_k(t)}} \right) - i \sum_j \sqrt{\frac{\omega_j(t)}{2}} (\hat{a}_j^\dagger(t) - \hat{a}_j(t)) G_{jk}(t). \tag{4.39}$$

Assim, reescrevendo as Equações 4.35 e 4.36 em termos dos operadores $\hat{a}_k(t)$ e

$\hat{a}_k^\dagger(t)$, resulta em

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{a}_k(t)}{dt} &= -\frac{\dot{\omega}_k(t)}{2\omega_k(t)}\hat{a}_k(t) + \frac{\dot{\omega}_k(t)}{\sqrt{2\omega_k(t)}\sqrt{2\omega_k(t)}}\left(\hat{a}_k(t) + \hat{a}_k^\dagger(t)\right) \\
&\quad + \frac{\omega_k(t)}{\sqrt{2\omega_k(t)}}\left[i\sqrt{\frac{\omega_k(t)}{2}}\left(\hat{a}_k^\dagger(t) - \hat{a}_k(t)\right) + \sum_j \frac{\hat{a}_j(t) + \hat{a}_j^\dagger(t)}{\sqrt{2\omega_j(t)}}G_{kj}(t)\right] \\
&\quad + \frac{i}{\sqrt{2\omega_k(t)}}\left[-\omega_k^2(t)\left(\frac{\hat{a}_k(t) + \hat{a}_k^\dagger(t)}{\sqrt{2\omega_k(t)}}\right)\right. \\
&\quad \left.- i\sum_j \sqrt{\frac{\omega_j(t)}{2}}\left(\hat{a}_j^\dagger(t) - \hat{a}_j(t)\right)G_{jk}(t)\right] \\
&= \frac{\dot{\omega}_k(t)}{2\omega_k(t)}\hat{a}_k^\dagger(t) - i\omega_k(t)\hat{a}_k(t) + \frac{1}{2}\sum_j \sqrt{\frac{\omega_k(t)}{\omega_j(t)}}G_{kj}(t)\hat{a}_j(t) \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_j \sqrt{\frac{\omega_j(t)}{\omega_k(t)}}G_{jk}(t)\hat{a}_j(t) + \frac{1}{2}\sum_j \sqrt{\frac{\omega_k(t)}{\omega_j(t)}}G_{kj}(t)\hat{a}_j^\dagger(t) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_j \sqrt{\frac{\omega_j(t)}{\omega_k(t)}}G_{jk}(t)\hat{a}_j^\dagger(t) \\
i\frac{d\hat{a}_k(t)}{dt} &= \frac{i\dot{\omega}_k(t)}{2\omega_k(t)}\hat{a}_k^\dagger(t) + iG_{kk}\hat{a}_k^\dagger(t) + \omega_k(t)\hat{a}_k(t) \\
&\quad + \frac{i}{2}\sum_{j\neq k}\left[\left(\sqrt{\frac{\omega_k(t)}{\omega_j(t)}}G_{kj}(t) - \sqrt{\frac{\omega_j(t)}{\omega_k(t)}}G_{jk}(t)\right)\hat{a}_j(t)\right. \\
&\quad \left.+ \left(\sqrt{\frac{\omega_k(t)}{\omega_j(t)}}G_{kj}(t) + \sqrt{\frac{\omega_j(t)}{\omega_k(t)}}G_{jk}(t)\right)\hat{a}_j^\dagger(t)\right], \tag{4.40}
\end{aligned}$$

e da mesma forma

$$\begin{aligned}
i\frac{d\hat{a}_k(t)}{dt} &= \frac{i\dot{\omega}_k(t)}{2\omega_k(t)}\hat{a}_k(t) + iG_{kk}\hat{a}_k(t) - \omega_k(t)\hat{a}_k^\dagger(t) \\
&\quad + \frac{i}{2}\sum_{j\neq k}\left[\left(\sqrt{\frac{\omega_k(t)}{\omega_j(t)}}G_{kj}(t) + \sqrt{\frac{\omega_j(t)}{\omega_k(t)}}G_{jk}(t)\right)\hat{a}_j(t)\right. \\
&\quad \left.+ \left(\sqrt{\frac{\omega_k(t)}{\omega_j(t)}}G_{kj}(t) - \sqrt{\frac{\omega_j(t)}{\omega_k(t)}}G_{jk}(t)\right)\hat{a}_j^\dagger(t)\right]. \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Tendo em vista que as Equações 4.40 e 4.41 são lineares em relação a $\hat{a}_k(t)$ e $\hat{a}_k^\dagger(t)$, assume-se que a forma geral de $H_{ef}(\hat{a}_k(t), \hat{a}_k^\dagger(t))$ seja quadrática em relação a estes operadores. Assim, a forma geral do hamiltoniano efetivo quadrático é

$$H_{ef}(\hat{a}_k(t), \hat{a}_k^\dagger(t)) = \sum_{i,j} \left(w_{ij}\hat{a}_i^\dagger(t)\hat{a}_j(t) + v_{ij}\hat{a}_i(t)\hat{a}_j^\dagger(t) + \beta_{ij}\hat{a}_i(t)\hat{a}_j(t) + \gamma_{ij}\hat{a}_i^\dagger(t)\hat{a}_j^\dagger(t) \right), \tag{4.42}$$

então a tarefa se torna determinar os coeficientes w_{ij} , v_{ij} , β_{ij} , γ_{ij} a partir da Equação 4.34. Começando por $[\hat{a}_k(t), H_{ef}]$,

$$[\hat{a}_k(t), H_{ef}] = \sum_{i,j} \left(w_{ij} [\hat{a}_k(t), \hat{a}_i^\dagger(t) \hat{a}_j(t)] + v_{ij} [\hat{a}_k(t), \hat{a}_i(t) \hat{a}_j^\dagger(t)] \right. \\ \left. + \beta_{ij} [\hat{a}_k(t), \hat{a}_i(t) \hat{a}_j(t)] + \gamma_{ij} [\hat{a}_k(t), \hat{a}_i^\dagger(t) \hat{a}_j^\dagger(t)] \right). \quad (4.43)$$

Utilizando a relação bosônica de comutação (Equação 2.39), segue que

$$[\hat{a}_k(t), \hat{a}_i^\dagger(t) \hat{a}_j(t)] = [\hat{a}_k(t), \hat{a}_i^\dagger(t)] \hat{a}_j(t) + \hat{a}_i^\dagger(t) [\hat{a}_k(t), \hat{a}_j(t)] = \delta_{ki} \hat{a}_j(t), \quad (4.44)$$

$$[\hat{a}_k(t), \hat{a}_i(t) \hat{a}_j^\dagger(t)] = [\hat{a}_k(t), \hat{a}_i(t)] \hat{a}_j^\dagger(t) + \hat{a}_i(t) [\hat{a}_k(t), \hat{a}_j^\dagger(t)] = \delta_{kj} \hat{a}_i(t), \quad (4.45)$$

$$[\hat{a}_k(t), \hat{a}_i(t) \hat{a}_j(t)] = [\hat{a}_k(t), \hat{a}_i(t)] \hat{a}_j(t) + \hat{a}_i(t) [\hat{a}_k(t), \hat{a}_j(t)] = 0, \quad (4.46)$$

$$[\hat{a}_k(t), \hat{a}_i^\dagger(t) \hat{a}_j^\dagger(t)] = [\hat{a}_k(t), \hat{a}_i^\dagger(t)] \hat{a}_j^\dagger(t) + \hat{a}_i^\dagger(t) [\hat{a}_k(t), \hat{a}_j^\dagger(t)] = \delta_{ki} \hat{a}_j^\dagger(t) + \delta_{kj} \hat{a}_i^\dagger(t). \quad (4.47)$$

Substituindo os resultados acima na Equação 4.43

$$[\hat{a}_k(t), H_{ef}] = \sum_{i,j} \left(w_{ij} \delta_{ki} \hat{a}_j(t) + v_{ij} \delta_{kj} \hat{a}_i(t) + \gamma_{ij} [\delta_{ki} \hat{a}_j^\dagger(t) + \delta_{kj} \hat{a}_i^\dagger(t)] \right) \\ = \sum_j w_{kj} \hat{a}_j(t) + \sum_i v_{ik} \hat{a}_i(t) + \sum_j \gamma_{kj} \hat{a}_j^\dagger(t) + \sum_i \gamma_{ik} \hat{a}_i^\dagger(t) \\ = w_{kk} \hat{a}_k(t) + 2\gamma_{kk} \hat{a}_k^\dagger(t) + \sum_{j \neq k} w_{kj} \hat{a}_j(t) \\ + \sum_{j \neq k} v_{jk} \hat{a}_j(t) + \sum_{j \neq k} \gamma_{kj} \hat{a}_j^\dagger(t) + \sum_{j \neq k} \gamma_{jk} \hat{a}_j^\dagger(t), \quad (4.48)$$

onde na última linha foi trocado todos os índices i por j .

Agora, comparando a Equação 4.40 com a Equação 4.48, observa-se que

$$w_{kk} = \omega_k(t), \quad \gamma_{kk} = \frac{i\dot{\omega}_k(t)}{4\omega_k(t)} + \frac{iG_{k,k}}{2}, \quad w_{kj} = \frac{i}{2} \frac{\sqrt{\omega_k(t)}}{\sqrt{\omega_j(t)}} G_{kj}(t), \\ v_{jk} = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\omega_j(t)}{\omega_k(t)}} G_{jk}(t), \quad \gamma_{kj} = \frac{i}{2} \frac{\sqrt{\omega_k(t)}}{\sqrt{\omega_j(t)}} G_{kj}(t), \\ \gamma_{jk} = \frac{i}{2} \frac{\sqrt{\omega_j(t)}}{\sqrt{\omega_k(t)}} G_{jk}(t). \quad (4.49)$$

Realizando o mesmo procedimento para $[\hat{a}_k(t), H_{ef}]$, encontra-se

$$\begin{aligned} [\hat{a}_k^\dagger(t), H_{ef}] &= -w_{kk}a_j^\dagger(t) - 2\beta_{kk}\hat{a}_k(t) - \sum_{j \neq k} w_{jk}\hat{a}_j^\dagger(t) \\ &\quad - \sum_{j \neq k} v_{kj}\hat{a}_j^\dagger(t) - \sum_{j \neq k} \beta_{kj}\hat{a}_j(t) - \sum_{j \neq k} \beta_{jk}\hat{a}_j(t), \end{aligned} \quad (4.50)$$

e comparando com a Equação 4.41, verifica-se que

$$\begin{aligned} w_{kk} &= \omega_k(t), \quad \beta_{kk} = -\frac{i\dot{\omega}_k(t)}{4\omega_k(t)} - \frac{iG_{kk}}{2}, \quad w_{kj} = \frac{i\sqrt{\omega_k(t)}}{2\sqrt{\omega_j(t)}}G_{kj}(t), \\ v_{kj} &= -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\omega_k(t)}{\omega_j(t)}}G_{kj}(t), \quad \beta_{kj} = -\frac{i\sqrt{\omega_k(t)}}{2\sqrt{\omega_j(t)}}G_{kj}(t), \\ \beta_{jk} &= -\frac{i\sqrt{\omega_j(t)}}{2\sqrt{\omega_k(t)}}G_{jk}(t), \end{aligned} \quad (4.51)$$

o que está de acordo com os resultados obtidos anteriormente.

Por fim, para poder utilizar os resultados obtidos para os coeficientes, é mais conveniente reescrever a Equação 4.42 como

$$\begin{aligned} H_{ef} &= \sum_j \left(w_{jj}a_j^\dagger(t)\hat{a}_j(t) + \beta_{jj}\hat{a}_j^2(t) + \gamma_{jj}\hat{a}_j^{\dagger 2}(t) \right) \\ &\quad + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \left(w_{ij}\hat{a}_i^\dagger(t)\hat{a}_j(t) + v_{ij}\hat{a}_i(t)\hat{a}_j^\dagger(t) + \beta_{ij}\hat{a}_i(t)\hat{a}_j(t) + \gamma_{ij}\hat{a}_i^\dagger(t)\hat{a}_j^\dagger(t) \right), \end{aligned} \quad (4.52)$$

assim, ajustando os índices, encontra-se que

$$\begin{aligned} H_{ef} &= \sum_j \omega_j(t)a_j^\dagger(t)\hat{a}_j(t) - i \left(\frac{\dot{\omega}_j(t)}{4\omega_j(t)} + \frac{G_{jj}}{2} \right) (\hat{a}_j^2(t) - \hat{a}_j^{\dagger 2}(t)) \\ &\quad + \frac{i}{2} \sum_{i \neq j} \left(\frac{\sqrt{\omega_i(t)}}{\sqrt{\omega_j(t)}} G_{ij}(t) \right) [\hat{a}_i^\dagger(t)\hat{a}_j(t) - \hat{a}_i(t)\hat{a}_j^\dagger(t) - \hat{a}_i(t)\hat{a}_j(t) + \hat{a}_i^\dagger(t)\hat{a}_j^\dagger(t)]. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Definindo os coeficientes,

$$\chi_j = \left(\frac{\dot{\omega}_j(t)}{4\omega_j(t)} + \frac{G_{jj}}{2} \right) = \left(\frac{\dot{\omega}_j(t)}{4\omega_j(t)} + \frac{g_j}{2} \right), \quad \eta_{ij} = \left(\frac{\sqrt{\omega_i(t)}}{\sqrt{\omega_j(t)}} G_{ij}(t) \right), \quad (4.54)$$

a forma final do H_{ef} escrito em termos dos operadores bosônicos $\hat{a}^\dagger(t)$ e $\hat{a}(t)$ é dada por

$$\begin{aligned} H_{ef} &= \sum_j \omega_j(t)a_j^\dagger(t)\hat{a}_j(t) + i\chi_j(t) (\hat{a}_j^{\dagger 2}(t) - \hat{a}_j^2(t)) \\ &\quad + \frac{i}{2} \sum_{i \neq j} \eta_{i,j}(t) [\hat{a}_i^\dagger(t)\hat{a}_j(t) - \hat{a}_i(t)\hat{a}_j^\dagger(t) - \hat{a}_i(t)\hat{a}_j(t) + \hat{a}_i^\dagger(t)\hat{a}_j^\dagger(t)]. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Nota-se que o operador H_{ef} é um operador Hermitiano, como era esperado. A forma do H_{ef} na Equação 4.55 é a mais geral, abrangendo todos os modos do campo eletromagnético dentro da cavidade. Porém, é possível analisar o comportamento do sistema a partir do caso mais simples, ou seja, onde apenas um dos modos da campo dentro da cavidade é excitado pelo movimento da parede. Neste caso,

$$H_{ef} = \omega_1(t)a_1^\dagger(t)\hat{a}_1(t) + i\chi_1(t)\left(\hat{a}_1^{\dagger 2}(t) - \hat{a}_1^2(t)\right), \quad (4.56)$$

e na Representação de Schrödinger

$$H_{ef} = \omega_1(t)a_1^\dagger\hat{a}_1 + i\chi_1(t)\left(\hat{a}_1^{\dagger 2} - \hat{a}_1^2\right), \quad (4.57)$$

onde, em ambos os casos,

$$\chi_1(t) = \left(\frac{\dot{\omega}_1(t)}{4\omega_1(t)} + \frac{g_1}{2}\right). \quad (4.58)$$

O hamiltoniano efetivo na Equação 4.57 está na Representação de Schrödinger, tornando evidente que o sistema descrito por este hamiltoniano não é estacionário, já que as funções $\omega_1(t)$ e $\chi_1(t)$ possuem uma dependência temporal explícita. Como na Representação de Schrödinger a evolução temporal do sistema a partir do estado de vácuo se dá por meio da Equação de Schrödinger, o termo $\chi(t)$ é algumas vezes referido como o fator de compressão (ou “squeezing”), já que no hamiltoniano efetivo este termo possui uma ação similar ao do operador de compressão (Equação 3.36), que é a de aniquilar ou criar dois fótons ao mesmo tempo.

Segundo Law (1994) essa análise mais simples é fisicamente justificada pela maneira como o espelho que se move oscila, pois nem todos os modos são excitados pela oscilação do espelho, mas apenas os modos que entram em ressonância com esta oscilação é que são efetivamente excitados. Dessa maneira, é possível definir uma trajetória apropriada para o espelho que se move a fim de excitar apenas o modo da cavidade desejado. Visando esta propriedade, Dodonov e Klimov (1996) estudaram a geração e detecção de fótons a partir do estado de vácuo para um modo de uma cavidade ideal com parede vibrante. Observou-se que quando a frequência da parede vibrante é o dobro da frequência do modo da cavidade, atinge-se o máximo da produção de fótons, onde movimento da parede vibrante é determinado pela forma

$$r(t) = r_0 [1 + \varepsilon \cos(2\omega_0 t)], \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad (4.59)$$

o que leva a autofrequência dependente do tempo $\omega(t)$ ter a forma

$$\omega(t) = \omega_0 [1 + 2\delta \cos(2\omega_0 t)], \quad (4.60)$$

onde δ é a profundidade de modulação da frequência e ω_0 é a frequência não-perturbada do modo do campo eletromagnético em ressonância com o movimento da parede. Com

essas formas determinadas, Dodonov e Klimov (1996) estabelecem uma estimativa para a produção de fótons associada aos parâmetros do sistema, como fator de qualidade da cavidade e seu tamanho: ocorre produção de fótons da ordem de centenas desde que o fator de qualidade da cavidade exceda 10^{10} e a amplitude de excitação paramétrica (amplitude de vibração das paredes da cavidade) seja maior que 10^{-10} para a frequência de microndas da ordem de 10 GHz.

5 DISSIPACÃO EM SISTEMAS QUÂNTICOS

Este capítulo destina-se a apresentar a Equação Mestra como um modelo para se descrever o efeito de dissipação em um sistema quântico acoplado a um reservatório térmico. Na seção 5.1 é apresentada a dedução da Equação Mestra para o caso mais simples, que consiste em um oscilador harmônico quântico acoplado a um reservatório térmico. Na seção 5.2 é apresentada uma generalização da Equação Mestra em termos das coordenadas bosônicas, onde considera-se que o estado inicial do sistema é um estado Gaussiano, e a partir deste formalismo deduz-se as equações da dinâmica do primeiro e segundo momento de um estado Gaussiano, que regem a evolução temporal do sistema quântico.

5.1 EQUAÇÃO MESTRA PARA UM MODO ACOPLADO A UM RESERVATÓRIO TÉRMICO

Nesta seção será deduzida de forma Equação Mestra na aproximação de Born-Markov para um oscilador harmônico quântico acoplado a um reservatório térmico, baseando-se na dedução apresentada por Breuer e Petruccione (2002, Capítulo 3), Lambropoulos e Petrosyan (2007, Capítulos 4 e 5), Louisell (1973, Capítulo 6), (MEYSTRE; SARGENT, 2007, Capítulo 15), Orszag (2016, Capítulo 9), Rice (2020, Capítulo 8).

Com a Equação Mestra é possível descrever a dinâmica de um sistema pequeno acoplado a um sistema maior (geralmente um reservatório térmico). No caso abordado neste capítulo, o sistema pequeno A é um oscilador harmônico quântico e o sistema grande B é um reservatório térmico à temperatura T que pode ser considerado como um conjunto grande de osciladores harmônicos quânticos. A versatilidade de se trabalhar com este modelo é que diversos tipos de sistemas quânticos são representados pela álgebra do oscilador harmônico quântico, como fótons, fônons em um cristal, um circuito LCR quantizado, etc.

Nesta formulação o estado do sistema A é representado operador densidade ρ_A que pertence ao espaço de Hilbert \mathcal{H}_A e o hamiltoniano não perturbado deste sistema é (BREUER; PETRUCCIONE, 2002; MEYSTRE; SARGENT, 2007; ORSZAG, 2016; RICE, 2020)

$$H_A = \hbar\Omega a^\dagger a. \quad (5.1)$$

Já o hamiltoniano não perturbado do sistema B é

$$H_B = \sum_j \hbar\omega_j b_j^\dagger b_j, \quad (5.2)$$

e este sistema é representado pelo operador densidade ρ_B pertencente ao espaço de Hilbert \mathcal{H}_B , que é dado pela Equação 3.54

$$\rho_B = \frac{\exp(-H_B/k_B T)}{\text{Tr}[\exp(-H_B/k_B T)]}, \quad (5.3)$$

ou seja, ρ_B é diagonal na base de autoestados de H_B (LOUISELL, 1973; MEYSTRE; SARGENT, 2007; ORSZAG, 2016; RICE, 2020).

A interação entre os dois sistemas se dá por meio do hamiltoniano de interação

$$V = \hbar \sum_j (g_j a^\dagger b_j + g_j^* b_j^\dagger a), \quad (5.4)$$

que representa a destruição de um quantum no reservatório e simultânea criação de um quanta no sistema A , ou vice-versa, e g_j é a constante de acoplamento que dita o quão forte é a interação entre os dois sistemas (LOUISELL, 1973; MEYSTRE; SARGENT, 2007; ORSZAG, 2016; RICE, 2020).

O sistema total $A + B$ é representado pelo operador densidade ρ_{AB} que pertence ao espaço de Hilbert $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ e que no tempo $t_0 = 0$, quando os sistemas A e B são postos em contato, fatoriza-se em $\rho_{AB}(0) = \rho_A(0) \otimes \rho_B(0) = \rho_A(0)\rho_B(0)$ (BREUER; PETRUCCIONE, 2002; ORSZAG, 2016). Já o hamiltoniano do sistema total é

$$H = H_0 + V, \quad (5.5)$$

onde,

$$H_0 = H_A + H_B, \quad [H_A, H_B] = 0, \quad (5.6)$$

em que H_0 é apenas o hamiltoniano dos sistemas A e B na ausência de interação (BREUER; PETRUCCIONE, 2002; LOUISELL, 1973; MEYSTRE; SARGENT, 2007; ORSZAG, 2016; RICE, 2020).

Todos estes operadores apresentados estão na Representação de Schrödinger. Nesta representação a equação de movimento do operador densidade ρ_{AB} é dada pela Equação de von Neumann (Equação A.22) (BREUER; PETRUCCIONE, 2002; LAMBROPOULOS; PETROSYAN, 2007; LOUISELL, 1973; MEYSTRE; SARGENT, 2007; ORSZAG, 2016; RICE, 2020)

$$\dot{\rho}_{AB} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho_{AB}]. \quad (5.7)$$

Porém, resolver esta equação para todos os tempos t pode ser bem difícil, quando não impossível (BREUER; PETRUCCIONE, 2002; LOUISELL, 1973; MEYSTRE; SARGENT, 2007; RICE, 2020). Contudo, a dinâmica que realmente interessa é a do sistema pequeno A , que sofre muito mais com a influência do reservatório, do que este com a

influência daquele (BREUER; PETRUCCIONE, 2002; LAMBROPOULOS; PETROSYAN, 2007; LOUISELL, 1973; MEYSTRE; SARGENT, 2007; ORSZAG, 2016; RICE, 2020).

Assim, o trabalho é o de encontrar a equação de movimento para o operador densidade reduzido ρ_A tomando o traço parcial $\text{Tr}_B(\dot{\rho}_{AB})$ sobre o reservatório (BREUER; PETRUCCIONE, 2002; LAMBROPOULOS; PETROSYAN, 2007; LOUISELL, 1973; MEYSTRE; SARGENT, 2007; ORSZAG, 2016; RICE, 2020). Para realizar isso, é preferível trabalhar na Representação de Interação, a fim de eliminar a evolução livre (e mais rápida) do sistema e depois passar o resultado para a Representação de Schrödinger (MEYSTRE; SARGENT, 2007; ORSZAG, 2016; RICE, 2020).

Na Representação de Intereção a equação de movimento para o operador densidade é dada pela Equação A.32 (LOUISELL, 1973; MEYSTRE; SARGENT, 2007; ORSZAG, 2016; RICE, 2020),

$$\dot{\varrho}_{AB} = -\frac{i}{\hbar} [V_I(t), \varrho_{AB}], \quad (5.8)$$

e da Equação A.29, com $t_0 = 0$,

$$\begin{aligned} V_I(t) &= e^{iH_0t/\hbar} V e^{-iH_0t/\hbar} \\ &= \hbar \sum_j \left[g_j \left(e^{iH_A t/\hbar} a^\dagger e^{-iH_A t/\hbar} \right) \left(e^{iH_B t/\hbar} b_j e^{-iH_B t/\hbar} \right) \right. \\ &\quad \left. + g_j^* \left(e^{iH_B t/\hbar} b_j^\dagger e^{-iH_B t/\hbar} \right) \left(e^{iH_A t/\hbar} a e^{-iH_A t/\hbar} \right) \right] \\ &= \hbar \sum_j \left[g_j \left(a^\dagger e^{i\Omega t} \right) \left(b_j e^{-i\omega_j t} \right) + g_j^* \left(b_j^\dagger e^{i\omega_j t} \right) \left(a e^{-i\Omega t} \right) \right] \\ V_I(t) &= \hbar a^\dagger F(t) + \hbar a F^\dagger(t), \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde foi utilizada a evolução livre dos operadores de aniquilação e criação (Equações B.34 e B.35), tanto do reservatório quanto do sistema A , e na terceira linha foi definido

$$F(t) = \sum_j g_j b_j e^{i(\Omega - \omega_j)t}. \quad (5.10)$$

Agora, integrando Equação 5.8 em relação ao tempo, obtém-se (LAMBROPOULOS; PETROSYAN, 2007; ORSZAG, 2016; RICE, 2020)

$$\varrho_{AB}(t) = \varrho_{AB}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' [V_I(t'), \varrho_{AB}(t')], \quad (5.11)$$

e substituindo esse resultado em Equação 5.8

$$\dot{\varrho}_{AB}(t) = -\frac{i}{\hbar} [V_I(t), \varrho_{AB}(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [V_I(t), [V_I(t'), \varrho_{AB}(t')]]. \quad (5.12)$$

Tomando o traço parcial sobre o reservatório (BREUER; PETRUCCIONE, 2002; LAMBROPOULOS; PETROSYAN, 2007; LOUISELL, 1973; MEYSTRE; SARGENT, 2007; ORSZAG, 2016; RICE, 2020),

$$\text{Tr}_B(\dot{\varrho}_{AB}(t)) = -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}_B([V_I(t), \varrho_{AB}(0)]) - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_B([V_I(t), [V_I(t'), \varrho_{AB}(t'))]), \quad (5.13)$$

o primeiro termo do lado direito desta equação some, pois no tempo $t_0 = 0$ o operador densidade $\varrho_{AB}(0)$ se fatoriza, logo surgem termos do tipo

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_B(V_I(t)\varrho_{AB}(0)) &= \hbar a^\dagger \varrho_A(0) \text{Tr}_B(F(t)\varrho_B) + \hbar a \varrho_A(0) \text{Tr}_B(F^\dagger(t)\varrho_B) \\
&= \hbar a^\dagger \varrho_A(0) \langle F(t) \rangle + \hbar a \varrho_A(0) \langle F^\dagger(t) \rangle \\
&= \sum_j \left(\hbar a^\dagger \varrho_A(0) g_j e^{i(\Omega - \omega_j)t} \langle b_j \rangle + \hbar a \varrho_A(0) g_j^* e^{-i(\Omega - \omega_j)t} \langle b_j^\dagger \rangle \right) \\
\text{Tr}_B(V_I(t)\varrho_{AB}(0)) &= 0,
\end{aligned} \tag{5.14}$$

já que ϱ_B é diagonal na base de autoestados do reservatório, assim $\langle b_j \rangle = \langle b_j^\dagger \rangle = 0$, então a Equação 5.13 torna-se

$$\text{Tr}_B(\dot{\varrho}_{AB}(t)) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_B([V_I(t), [V_I(t'), \varrho_{AB}(t')]]) . \tag{5.15}$$

Utilizando $(ABC)^\dagger = C^\dagger B^\dagger A^\dagger$ e levando em conta que os operadores V_I e $\varrho_{AB}(t)$ são hermitianos, o comutador na Equação 5.15 pode ser reescrito em uma forma melhor (MEYSTRE; SARGENT, 2007, p. 355),

$$[V_I(t), [V_I(t'), \varrho_{AB}(t)]] = V_I(t)V_I(t')\varrho_{AB}(t) - V_I(t)\varrho_{AB}(t)V_I(t') + a.h. , \tag{5.16}$$

onde o termo “*a.h.*” significa adjunto hermitiano e assim a Equação 5.15 torna-se

$$\text{Tr}_B(\dot{\varrho}_{AB}(t)) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_B(V_I(t)V_I(t')\varrho_{AB}(t) - V_I(t)\varrho_{AB}(t)V_I(t') + a.h.) . \tag{5.17}$$

Para encontrar a equação de movimento para $\varrho_A(t)$ a partir da Equação 5.17 é necessário levar em conta a aproximação de Born. Nesta aproximação, o acoplamento entre o sistema A e o reservatório é fraco, de maneira que o reservatório, devido ao seu grande tamanho, sofre muito pouco a influência do sistema A , enquanto este é fortemente afetado pelo reservatório, de maneira que se pode tomar (BREUER; PETRUCCIONE, 2002; LAMBROPOULOS; PETROSYAN, 2007; LOUISELL, 1973; RICE, 2020)

$$\varrho_{AB}(t) \approx \varrho_A(t)\varrho_B. \tag{5.18}$$

A ideia acima é reforçada pela aproximação de Markov, que considera o reservatório como um sistema sem memória, ou seja, o seu estado atual não depende do estado passado (BREUER; PETRUCCIONE, 2002; LOUISELL, 1973; RICE, 2020). Assim, por mais que o sistema A gere excitações nos modos do reservatório, este recupera o estado de equilíbrio em um tempo τ_c , o tempo de correlação, proporcional ao inverso do tamanho da banda de frequências do reservatório (LOUISELL, 1973; MEYSTRE; SARGENT, 2007). Como o reservatório é um sistema com muitos modos densamente espaçados, o tamanho da banda é grande, logo o tempo de correlação τ_c é muito pequeno se comparado ao tempo t em que ocorre a dinâmica do sistema A (BREUER; PETRUCCIONE, 2002; LOUISELL, 1973; MEYSTRE; SARGENT, 2007; RICE, 2020).

Então, utilizando as Equações 5.9 e 5.18, a Equação 5.17 torna-se (LOUISELL, 1973; MEYSTRE; SARGENT, 2007; ORSZAG, 2016; RICE, 2020)

$$\begin{aligned}
\dot{\varrho}_A(t) = & -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \left[\hbar^2 a^\dagger a^\dagger \varrho_A(t) \text{Tr}_B(F(t)F(t')) \varrho_B \right. \\
& + \hbar^2 a^\dagger a \varrho_A(t) \text{Tr}_B(F(t)F^\dagger(t')) \varrho_B + \hbar^2 a a^\dagger \varrho_A(t) \text{Tr}_B(F^\dagger(t)F(t')) \varrho_B \\
& + \hbar^2 a a \varrho_A(t) \text{Tr}_B(F^\dagger(t)F^\dagger(t')) \varrho_B - \hbar^2 a^\dagger \varrho_A(t) a^\dagger \text{Tr}_B(F(t) \varrho_B F(t')) \\
& - \hbar^2 a^\dagger \varrho_A(t) a \text{Tr}_B(F(t) \varrho_B F^\dagger(t')) - \hbar^2 a \varrho_A(t) a^\dagger \text{Tr}_B(F^\dagger(t) \varrho_B F(t')) \\
& \left. - \hbar^2 a \varrho_A(t) a \text{Tr}_B(F^\dagger(t) \varrho_B F^\dagger(t')) + a.h. \right], \tag{5.19}
\end{aligned}$$

e usando a propriedade cíclica do traço $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB) = \text{Tr}(BCA)$,

$$\begin{aligned}
\dot{\varrho}_A(t) = & -\int_0^t dt' \left[a^\dagger a^\dagger \varrho_A(t') \langle F(t)F(t') \rangle \right. \\
& + a^\dagger a \varrho_A(t') \langle F(t)F^\dagger(t') \rangle + a a^\dagger \varrho_A(t') \langle F^\dagger(t)F(t') \rangle \\
& + a a \varrho_A(t') \langle F^\dagger(t)F^\dagger(t') \rangle - a^\dagger \varrho_A(t') a^\dagger \langle F(t')F(t) \rangle \\
& - a^\dagger \varrho_A(t') a \langle F^\dagger(t')F(t) \rangle - a \varrho_A(t') a^\dagger \langle F(t')F^\dagger(t) \rangle \\
& \left. - a \varrho_A(t') a \langle F^\dagger(t')F^\dagger(t) \rangle + a.h. \right]. \tag{5.20}
\end{aligned}$$

Usando a Equação 5.10, os valores médios na Equação 5.20 tomam a forma de (MEYSTRE; SARGENT, 2007, p. 356)

$$\begin{aligned}
\langle F(t)F^\dagger(t') \rangle & = \sum_{i,j} \langle g_i b_i e^{i(\Omega-\omega_i)t} g_j^* b_j^* e^{-i(\Omega-\omega_j)t'} \rangle \\
& = \sum_{i,j} g_i g_j^* \langle b_i b_j^\dagger \rangle e^{i\Omega(t-t')} e^{i(\omega_j t' - \omega_i t)} \\
& = \sum_i |g_i|^2 \langle b_i b_i^\dagger \rangle e^{i(\Omega-\omega_i)\tau}, \tag{5.21}
\end{aligned}$$

onde $\tau = t - t'$ é um tempo muito pequeno comparado ao tempo t em que o sistema A varia de forma significativa, porém é muito maior que o tempo de correlação τ_c .

Realizando uma mudança de variável na integral da Equação 5.20 de t' para τ e levando em consideração o tamanho de τ em relação t para tomar $\varrho_A(t - \tau) = \varrho_A(t)$, a integral em relação a τ resultará em termos como (LOUISELL, 1973; MEYSTRE; SARGENT, 2007; ORSZAG, 2016; RICE, 2020)

$$\int_0^t dt' \langle F(t)F^\dagger(t') \rangle \rightarrow \sum_i |g_i|^2 \langle b_i b_i^\dagger \rangle \int_0^t d\tau e^{i(\Omega-\omega_i)\tau}, \tag{5.22}$$

de maneira similar ao que foi feito na seção 2.4, devido a larga banda de frequências do reservatório, a soma sobre os modos do reservatório pode ser convertida em uma integral sobre o contínuo de modos $\sum_i \rightarrow \int D(\omega) d\omega$ sendo $D(\omega)$ a respectiva densidade de modos, assim

$$\sum_i |g_i|^2 \langle b_i b_i^\dagger \rangle \int_0^t d\tau e^{i(\Omega-\omega_i)\tau} \rightarrow \int d\omega D(\omega) |g(\omega)|^2 \langle b(\omega) b^\dagger(\omega) \rangle \int_0^t d\tau e^{i(\Omega-\omega)\tau}. \tag{5.23}$$

Como τ é muito menor que o tempo t , o limite superior da integral sobre τ pode ser estendendo ao infinito, assim essa integral se torna uma *integral incompleta de Fourier*¹ (LOUISELL, 1973; MEYSTRE; SARGENT, 2007; ORSZAG, 2016; RICE, 2020)

$$\int_0^\infty d\tau e^{\pm i(\Omega - \omega)\tau} = \pi\delta(\Omega - \omega) \pm P\left(\frac{1}{\Omega - \omega}\right), \quad (5.24)$$

onde P significa o valor principal de Cauchy. Ignorando o valor principal, a Equação 5.23 torna-se (LOUISELL, 1973; MEYSTRE; SARGENT, 2007; ORSZAG, 2016; RICE, 2020)

$$\int d\omega D(\omega)|g(\omega)|^2 \langle b(\omega)b^\dagger(\omega) \rangle \pi\delta(\Omega - \omega) = \frac{\gamma}{2} \langle b(\Omega)b^\dagger(\Omega) \rangle, \quad (5.25)$$

onde

$$\gamma = 2\pi D(\Omega)|g(\Omega)|^2. \quad (5.26)$$

Por fim, da Equação 5.21 fica fácil ver que termos como $\langle F^\dagger F^\dagger \rangle$ e $\langle FF \rangle$ na Equação 5.20 desaparecem, pois $\langle b^\dagger b^\dagger \rangle = \langle bb \rangle = 0$, dessa forma só sobram termos como $\langle FF^\dagger \rangle$ e $\langle F^\dagger F \rangle$, assim a Equação 5.20 fica (MEYSTRE; SARGENT, 2007; ORSZAG, 2016; RICE, 2020)

$$\begin{aligned} \dot{\varrho}_A(t) &= -\frac{\gamma}{2} \langle b(\Omega)b^\dagger(\Omega) \rangle [a^\dagger a \varrho_A(t) - a \varrho_A(t) a^\dagger] \\ &\quad - \frac{\gamma}{2} \langle b^\dagger(\Omega)b(\Omega) \rangle [a a^\dagger \varrho_A(t) - a^\dagger \varrho_A(t) a] + a.h., \end{aligned} \quad (5.27)$$

e reconhecendo o termo $\langle b^\dagger(\Omega)b(\Omega) \rangle$ como o número médio de quanta no reservatório $\bar{n}(\Omega)$ e também $\langle b(\Omega)b^\dagger(\Omega) \rangle = \bar{n}(\Omega) + 1$, obtêm-se

$$\begin{aligned} \dot{\varrho}_A(t) &= -\frac{\gamma}{2} (\bar{n}(\Omega) + 1) [a^\dagger a \varrho_A(t) + \varrho_A(t) a^\dagger a - 2a \varrho_A(t) a^\dagger] \\ &\quad - \frac{\gamma}{2} \bar{n}(\Omega) [a a^\dagger \varrho_A(t) + \varrho_A(t) a a^\dagger - 2a^\dagger \varrho_A(t) a], \end{aligned} \quad (5.28)$$

que é a Equação Mestra na Representação de Interação.

A conexão entre o operador densidade na Representação de Interação $\varrho_A(t)$ e o operador densidade na Representação de Schrödinger ρ , se dá por meio da Equação A.31 (MEYSTRE; SARGENT, 2007, p. 354, 355)

$$\rho(t) = U_A(t) \varrho_A(t) U_A^\dagger(t) = e^{-iH_A t/\hbar} \varrho_A(t) e^{iH_A t/\hbar}, \quad (5.29)$$

derivando esta equação em relação ao tempo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(t) &= -\frac{i}{\hbar} H_A e^{-iH_A t/\hbar} \varrho_A(t) e^{iH_A t/\hbar} + \frac{i}{\hbar} e^{-iH_A t/\hbar} \varrho_A(t) e^{iH_A t/\hbar} H_A \\ &\quad + e^{-iH_A t/\hbar} \frac{\partial \varrho_A(t)}{\partial t} e^{iH_A t/\hbar} \\ &= -\frac{i}{\hbar} \left(H_A \rho(t) - \rho(t) H_A - \frac{\hbar}{i} U_A(t) \frac{\partial \varrho_A(t)}{\partial t} U_A^\dagger(t) \right) \\ \dot{\rho}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \left([H_A, \rho(t)] + i\hbar U_A(t) \dot{\varrho}_A(t) U_A^\dagger(t) \right). \end{aligned} \quad (5.30)$$

¹ Ver Merzbacher (1998, Apêndice 1).

Então, utilizando a Equação 5.1 e $U_A^\dagger(t)U_A(t) = U_A(t)U_A^\dagger(t) = I$ na Equação 5.30, obtém-se a Equação Mestra na Representação de Schrödinger (MEYSTRE; SARGENT, 2007; ORSZAG, 2016; RICE, 2020)

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) = & -\frac{i}{\hbar} [H_A, \rho(t)] - \frac{\gamma}{2} (\bar{n}(\Omega) + 1) [a^\dagger a \rho(t) + \rho(t) a^\dagger a - 2a \rho(t) a^\dagger] \\ & - \frac{\gamma}{2} \bar{n}(\Omega) [a a^\dagger \rho(t) + \rho(t) a a^\dagger - 2a^\dagger \rho(t) a]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

A partir da Equação Mestra é possível encontrar a equação diferencial que determina o valor médio de qualquer operador O na representação de Schrödinger, pertencente ao espaço de Hilbert \mathcal{H}_A , que age sobre o sistema A ao tomar o traço parcial na Equação 5.31

$$\text{Tr}_A\{O\dot{\rho}(t)\} = \frac{\partial}{\partial t} (\text{Tr}_A\{O\rho(t)\}) = \frac{\partial}{\partial t} \langle O \rangle. \quad (5.32)$$

O operado densidade $\rho(t)$ que descreve um sistema quântico contém todas as informações relativas as propriedades físicas do sistema. Pode ser considerado para um único subsistema ou sistemas compostos de duas partes (bipartido) ou de muitas partes partes (multipartido), para os quais propriedades de correlação podem ser estudadas. No entanto, existem formas alternativas para se estudar a dinâmica de tais sistemas, considerando formulação alternativas, nas quais ao invés de estudar uma equação diferencial para operadores, a dinâmica é descrita por meio de equações diferenciais para funções reais. Esta questão é considerada no que se segue, no qual se apresenta uma formulação adequada para sistemas de variáveis contínuas.

5.2 MODOS BOSÔNICOS ACOPLADOS

Nesta seção é discutida a abordagem, apresentada por Dodonov e Man'ko (2003), necessária para descrever a dinâmica do sistema quântico de interesse para esse trabalho (Capítulo 6). Este sistema possui dois graus de liberdade, descritos em termos do operador $\hat{\mathbf{z}} = (\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3, \hat{z}_4)$, que pode ser escrito, por exemplo, como $\hat{\mathbf{z}} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger)$.

Da definição usual dos operadores de criação e aniquilação é sabido que o comutador entre esses operadores são números complexos constantes, que nesse formalismo são representados por

$$[\hat{z}_\alpha, \hat{z}_\beta] = \Xi_{\alpha\beta} = -\Xi_{\beta\alpha}, \quad (5.33)$$

onde os coeficientes $\Xi_{\alpha\beta}$ formam a matriz anti-simétrica Ξ de ordem $2N = 4$, sendo N o número de graus de liberdade do sistema. Além disso, existe uma matriz de transformação S que relaciona os operadores $\hat{\mathbf{z}}^\dagger$ e $\hat{\mathbf{z}}$, tal que

$$\hat{\mathbf{z}}^\dagger = S\hat{\mathbf{z}}, \quad (5.34)$$

e esta relação também pode ser escrita em termos dos elementos de matriz

$$\hat{z}_\mu^\dagger = \sum_{\nu=1}^4 S_{\mu\nu} \hat{z}_\nu \quad \rightarrow \quad \hat{z}_\mu^\dagger = S_{\mu\nu} \hat{z}_\nu, \quad (5.35)$$

onde, do lado direito da equação acima, é adotada a notação simplificada, em que índices repetidos implicam em somatório sobre estes índices. Esse conjunto de notações e transformações são considerados ao longo deste apêndice.

5.2.1 Equação Mestra para Dois Modos Acoplados

Nesta seção é apresentada a forma geral da Equação Mestra para dois modos bosônicos acoplados, que é uma generalização da Equação Mestra apresentada no seção 5.1. O formalismo apresentado nesta seção é o ponto de partida para análise do problema que é discutido no Capítulo 6, já que neste problema os modos bosônicos correspondentes ao detector estão acoplados a um banho térmico.

Como se trata de um sistema com dois graus de liberdade, em que os modos bosônicos estão acoplados, o hamiltoniano hermitiano do sistema é quadrático em relação aos operadores de criação e aniquilação desses modos. Este hamiltoniano, representado em termos das coordenadas bosônicas $\hat{\mathbf{z}}$, é escrito como

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{z}} B \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{2} \hat{z}_\alpha B_{\alpha\beta}(t) \hat{z}_\beta, \quad (5.36)$$

em que os elementos de matriz $B_{\alpha\beta}$ são funções dependentes do tempo e satisfazem a propriedade

$$B_{\alpha\beta}(t) = B_{\beta\alpha}(t), \quad (5.37)$$

a fim de manter o hamiltoniano simetrizado (além de ser hermitiano). Essa simetriação é feita para cada termo do hamiltoniano. Como exemplo, um termo do tipo $\hbar\omega \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1$ é hermitiano, mas pode ser simetrizado ao fazer

$$\begin{aligned} \hbar\omega \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 &= \frac{1}{2} \hbar\omega (2\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1) = \frac{1}{2} \hbar\omega (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1) = \frac{1}{2} \hbar\omega (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger - 1) \\ &= \frac{1}{2} \hbar\omega \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \frac{1}{2} \hbar\omega \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger - \frac{1}{2} \hbar\omega, \end{aligned} \quad (5.38)$$

o último termo do lado direito representa um pequeno desvio nos níveis de energia, mas se torna irrelevante para a análise do problema, já que na Equação Mestra o hamiltoniano entra como um comutador com o operador densidade reduzido $\hat{\rho}_{12}$, e esse termo, por ser um número, comuta com $\hat{\rho}_{12}$, não contribuindo, dessa forma, na dinâmica de $\hat{\rho}_{12}$.

A forma geral da Equação Mestra na Representação de Schrödinger associada ao operador densidade reduzido $\hat{\rho}_{12} = \hat{\rho}_{12}(t)$, que descreve a dinâmica de dois modos bosônicos acoplados, é escrita como

$$\frac{d\hat{\rho}_{12}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}_{12}] + \sum_{j=1}^m \left(2\hat{\Phi}_j \hat{\rho}_{12} \hat{\Phi}_j^\dagger - \hat{\Phi}_j \hat{\Phi}_j^\dagger \hat{\rho}_{12} - \hat{\rho}_{12} \hat{\Phi}_j \hat{\Phi}_j^\dagger \right), \quad (5.39)$$

onde os operadores lineares $\hat{\Phi}_j$ e $\hat{\Phi}_j^\dagger$ são escritos em termos das coordenadas bosônicas $\hat{\mathbf{z}}$ de acordo com a forma

$$\hat{\Phi}_j = \varphi_{j\mu} \hat{z}_\mu, \quad \hat{\Phi}_j^\dagger = \bar{\varphi}_{j\mu} \hat{z}_\mu^\dagger, \quad \mu = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, m, \quad (5.40)$$

em que o número m de operadores lineares $\hat{\Phi}_j$ depende da forma específica da equação mestra associada a cada problema.

É possível construir uma forma compacta, mas ainda geral, para a Equação Mestra a partir da Equação 5.39, assumindo que o hamiltoniano tenha a forma descrita na Equação 5.36. Ao que se segue, será apresentada a construção desta forma compacta, assumindo $\hbar = 1$. Analisando o comutador do lado direito da Equação 5.39, nota-se que o mesmo pode ser escrito como

$$[\hat{H}, \hat{\rho}_{12}] = \frac{1}{2} B_{\alpha\beta}(t) \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta \hat{\rho}_{12} - \frac{1}{2} B_{\alpha\beta}(t) \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta, \quad (5.41)$$

já os termos pertencentes ao somatório em j são formas lineares em $\hat{\rho}_{12}$ que dependem dos operadores $\hat{\Phi}_j$ e $\hat{\Phi}_j^\dagger$. A partir da Equação 5.40 é fácil ver que

$$2\hat{\Phi}_j \hat{\rho}_{12} \hat{\Phi}_j^\dagger = 2\varphi_{j\alpha} \bar{\varphi}_{j\mu} \hat{z}_\alpha \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\mu^\dagger = 2\varphi_{j\alpha} \bar{\varphi}_{j\mu} S_{\mu\beta} \hat{z}_\alpha \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\beta, \quad (5.42)$$

$$\hat{\Phi}_j \hat{\Phi}_j^\dagger \hat{\rho}_{12} = \varphi_{j\alpha} \bar{\varphi}_{j\mu} \hat{z}_\alpha \hat{z}_\mu^\dagger \hat{\rho}_{12} = \varphi_{j\alpha} \bar{\varphi}_{j\mu} S_{\mu\beta} \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta \hat{\rho}_{12}, \quad (5.43)$$

$$\hat{\rho}_{12} \hat{\Phi}_j \hat{\Phi}_j^\dagger = \varphi_{j\alpha} \bar{\varphi}_{j\mu} \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha \hat{z}_\mu^\dagger = \varphi_{j\alpha} \bar{\varphi}_{j\mu} S_{\mu\beta} \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta, \quad (5.44)$$

onde utilizou-se a Equação 5.35 para escrever \hat{z}_μ^\dagger em função de \hat{z}_β . Assim, levando em consideração as Equações 5.41 e 5.44, a Equação 5.39 pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_{12}}{dt} &= -\frac{i}{2} B_{\alpha\beta}(t) \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta \hat{\rho}_{12} + \frac{i}{2} B_{\alpha\beta}(t) \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta + 2 \sum_{j=1}^m \varphi_{j\alpha} \bar{\varphi}_{j\mu} S_{\mu\beta} \hat{z}_\alpha \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\beta \\ &\quad - \sum_{j=1}^m \varphi_{j\alpha} \bar{\varphi}_{j\mu} S_{\mu\beta} \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta \hat{\rho}_{12} - \sum_{j=1}^m \varphi_{j\alpha} \bar{\varphi}_{j\mu} S_{\mu\beta} \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Nota-se que existem três tipos de termos do lado direito da Equação 5.45, proporcionais a $\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta$, $\hat{z}_\alpha \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\beta$ e $\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta$. Assim, pode-se evidenciar esses termos para escrever a Equação Mestra em uma forma compacta

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_{12}}{dt} &= \left[-\frac{i}{2} B_{\alpha\beta}(t) - \sum_{j=1}^m \varphi_{j\alpha} \bar{\varphi}_{j\mu} S_{\mu\beta} \right] \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta \hat{\rho}_{12} \\ &\quad + \left[\frac{i}{2} B_{\alpha\beta}(t) - \sum_{j=1}^m \varphi_{j\alpha} \bar{\varphi}_{j\mu} S_{\mu\beta} \right] \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta + 2 \sum_{j=1}^m \varphi_{j\alpha} \bar{\varphi}_{j\mu} S_{\mu\beta} \hat{z}_\alpha \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\beta, \end{aligned} \quad (5.46)$$

o que implica na forma

$$\frac{d\hat{\rho}_{12}}{dt} = \hat{z}_\alpha L_{\alpha\beta} \hat{z}_\beta \hat{\rho}_{12} + \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha R_{\alpha\beta} \hat{z}_\beta + \hat{z}_\alpha K_{\alpha\beta} \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\beta, \quad (5.47)$$

com $L_{\alpha\beta}(t)$, $R_{\alpha\beta}(t)$ e $K_{\alpha\beta}$ identificados como

$$L_{\alpha\beta}(t) = -\frac{i}{2}B_{\alpha\beta}(t) - \sum_{j=1}^m \varphi_{j\alpha} \bar{\varphi}_{j\mu} S_{\mu\beta}, \quad (5.48)$$

$$R_{\alpha\beta}(t) = \frac{i}{2}B_{\alpha\beta}(t) - \sum_{j=1}^m \varphi_{j\alpha} \bar{\varphi}_{j\mu} S_{\mu\beta}, \quad (5.49)$$

$$K_{\alpha\beta} = 2 \sum_{j=1}^m \varphi_{j\alpha} \bar{\varphi}_{j\mu} S_{\mu\beta}, \quad (5.50)$$

que são elementos das matrizes L , R e K . Em termos destas matrizes, a Equação Mestra em sua forma compacta é

$$\frac{d\hat{\rho}_{12}}{dt} = \hat{\mathbf{z}}L\hat{\mathbf{z}}\hat{\rho}_{12} + \hat{\rho}_{12}\hat{\mathbf{z}}R\hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{z}}K\hat{\rho}_{12}\hat{\mathbf{z}}. \quad (5.51)$$

Se por algum procedimento for determinada a forma da Equação Mestra em algum problema específico em Mecânica Quântica, descrito em termos das coordenadas bosônica, então é possível obter a forma explícita das matrizes L , R e K . Porém, ainda de forma geral, a condição de normalização para o operador densidade $\mathbf{Tr}[\hat{\rho}_{12}(t)] = 1$ deve ser respeitada, o que implica em

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{Tr}[\hat{z}_\alpha L_{\alpha\beta} \hat{z}_\beta \hat{\rho}_{12} + \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha R_{\alpha\beta} \hat{z}_\beta + \hat{z}_\alpha K_{\alpha\beta} \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\beta] \\ 0 &= L_{\alpha\beta} \mathbf{Tr}[\hat{z}_\beta \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha] + R_{\alpha\beta} \mathbf{Tr}[\hat{z}_\beta \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha] + K_{\alpha\beta} \mathbf{Tr}[\hat{z}_\alpha \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\beta], \end{aligned}$$

como existe um somatório sobre os índices α e β , é possível trocar estes índices sem prejuízo do resultado final, então realizando esta troca no último termo do lado direito, tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= L_{\alpha\beta} \mathbf{Tr}[\hat{z}_\beta \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha] + R_{\alpha\beta} \mathbf{Tr}[\hat{z}_\beta \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha] + K_{\beta\alpha} \mathbf{Tr}[\hat{z}_\beta \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha] \\ 0 &= (L_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta} + \tilde{K}_{\alpha\beta}) \mathbf{Tr}[\hat{z}_\beta \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha], \end{aligned} \quad (5.52)$$

como essa relação é válida para qualquer $\hat{\rho}_{12}$, conclui-se que

$$(L_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta} + \tilde{K}_{\alpha\beta}) = 0, \quad (5.53)$$

esta relação se torna essencial para as deduções que são apresentada na próxima seção.

5.2.2 Equações da Dinâmica do Primeiro e Segundo Momentos de um Estado Gaussiano

A evolução temporal de um sistema quântico, definido por um operador hamiltoniano quadrático, com estado inicial Gaussiano é descrita por um estado Gaussiano (SERAFINI, 2017, cap. 3). Um estado Gaussiano é caracterizado por ser perfeitamente representado por seu primeiro e segundo momento. As equações da dinâmica

para o primeiro momento $\langle \hat{z}_\mu \rangle = \mathbf{Tr} [\hat{z}_\mu \hat{\rho}_{12}(t)]$ e para o segundo momento anti-simétrico $\langle \hat{z}_\mu \hat{z}_\nu \rangle = \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12}(t) \hat{z}_\mu \hat{z}_\nu]$ são obtidas a partir da Equação Mestra. Na Representação de Schrödinger, o primeiro momento é definido como

$$y_\mu(t) = \langle \hat{z}_\mu \rangle (t) = \mathbf{Tr} [\hat{z}_\mu \hat{\rho}_{12}(t)] = \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12}(t) \hat{z}_\mu]. \quad (5.54)$$

A equação diferencial de primeira ordem para o primeiro momento é construída a partir de

$$\frac{dy_\mu(t)}{dt} = \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12}(t) \dot{\hat{z}}_\mu] = \mathbf{Tr} \left[\frac{d\hat{\rho}_{12}(t)}{dt} \hat{z}_\mu \right], \quad (5.55)$$

considerando a Equação 5.47, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{dy_\mu(t)}{dt} &= \mathbf{Tr} [(\hat{z}_\alpha L_{\alpha\beta} \hat{z}_\beta \hat{\rho}_{12} + \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha R_{\alpha\beta} \hat{z}_\beta + \hat{z}_\alpha K_{\alpha\beta} \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\beta) \hat{z}_\mu] \\ \frac{dy_\mu(t)}{dt} &= \mathbf{Tr} [\hat{z}_\alpha L_{\alpha\beta} \hat{z}_\beta \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\mu] + \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha R_{\alpha\beta} \hat{z}_\beta \hat{z}_\mu] + \mathbf{Tr} [\hat{z}_\alpha K_{\alpha\beta} \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\beta \hat{z}_\mu] \\ \frac{dy_\mu(t)}{dt} &= L_{\alpha\beta} \mathbf{Tr} [\hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\mu] + R_{\alpha\beta} \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta \hat{z}_\mu] + K_{\alpha\beta} \mathbf{Tr} [\hat{z}_\alpha \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\beta \hat{z}_\mu] \\ \frac{dy_\mu(t)}{dt} &= L_{\alpha\beta} \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\mu \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta] + R_{\alpha\beta} \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta \hat{z}_\mu] + K_{\alpha\beta} \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\beta \hat{z}_\mu \hat{z}_\alpha]. \end{aligned} \quad (5.56)$$

A partir da Equação 5.35 verifica-se que

$$\hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta = \Xi_{\alpha\beta} + \hat{z}_\beta \hat{z}_\alpha, \quad (5.57)$$

o que implica nas seguintes relações

$$\hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta \hat{z}_\mu = \Xi_{\beta\mu} \hat{z}_\alpha + \Xi_{\alpha\mu} \hat{z}_\beta + \hat{z}_\mu \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta, \quad (5.58)$$

$$\hat{z}_\beta \hat{z}_\mu \hat{z}_\alpha = \Xi_{\beta\mu} \hat{z}_\alpha + \hat{z}_\mu \hat{z}_\beta \hat{z}_\alpha, \quad (5.59)$$

substituindo essas relações na Equação 5.56

$$\begin{aligned} \frac{dy_\mu(t)}{dt} &= L_{\alpha\beta} \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\mu \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta] \\ &\quad + R_{\alpha\beta} \Xi_{\beta\mu} \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha] + R_{\alpha\beta} \Xi_{\alpha\mu} \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\beta] + R_{\alpha\beta} \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\mu \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta] \\ &\quad + K_{\alpha\beta} \Xi_{\beta\mu} \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha] + K_{\alpha\beta} \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\mu \hat{z}_\beta \hat{z}_\alpha], \end{aligned} \quad (5.60)$$

assim como já justificado anteriormente, é possível realizar uma troca de índices, para reescrever os termos

$$K_{\alpha\beta} \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\mu \hat{z}_\beta \hat{z}_\alpha] = K_{\beta\alpha} \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\mu \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta] = \tilde{K}_{\alpha\beta} \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\mu \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta], \quad (5.61)$$

$$R_{\alpha\beta} \Xi_{\alpha\mu} \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\beta] = R_{\beta\alpha} \Xi_{\beta\mu} \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha] = \tilde{R}_{\alpha\beta} \Xi_{\beta\mu} \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha], \quad (5.62)$$

logo a equação dinâmica para $y_\mu(t)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\frac{dy_\mu(t)}{dt} &= \left(L_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta} + \tilde{K}_{\alpha\beta} \right) \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\mu \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta] \\
&\quad + R_{\alpha\beta} \Xi_{\beta\mu} \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha] + \tilde{R}_{\alpha\beta} \Xi_{\beta\mu} \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha] \\
&\quad + K_{\alpha\beta} \Xi_{\beta\mu} \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha] \\
\frac{dy_\mu(t)}{dt} &= \left(R_{\alpha\beta} \Xi_{\beta\mu} + \tilde{R}_{\alpha\beta} \Xi_{\beta\mu} + K_{\alpha\beta} \Xi_{\beta\mu} \right) y_\alpha(t) \\
\frac{dy_\mu(t)}{dt} &= \Xi_{\beta\mu} \left(\tilde{R}_{\beta\alpha} + R_{\beta\alpha} + \tilde{K}_{\beta\alpha} \right) y_\alpha(t),
\end{aligned} \tag{5.63}$$

onde da primeira para segunda linha foi utilizada a Equação 5.53 e também a definição $y_\alpha(t) = \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha]$.

Em adição ao resultado obtido, nota-se que $\Xi_{\beta\mu} = -\Xi_{\mu\beta}$ e também $\tilde{K}_{\beta\alpha} = -L_{\beta\alpha} - R_{\beta\alpha}$, assim é possível obter a forma compacta para a equação dinâmica do primeiro momento

$$\begin{aligned}
\frac{dy_\mu(t)}{dt} &= \Xi_{\mu\beta} \left(L_{\beta\alpha} - \tilde{R}_{\beta\alpha} \right) y_\alpha(t) \\
\frac{dy_\mu(t)}{dt} &= A_{\mu\alpha}(t) y_\alpha(t),
\end{aligned} \tag{5.64}$$

onde define-se os elementos $A_{\mu\alpha}(t)$ da matriz A como

$$A_{\mu\alpha}(t) = \Xi_{\mu\beta} \left(L_{\beta\alpha} - \tilde{R}_{\beta\alpha} \right); \tag{5.65}$$

nota-se que a matriz A é determinada a partir das matrizes que compõem a forma compacta da Equação Mestra, assim, a partir da forma específica da Equação Mestra para um dado problema, obtém-se a equação dinâmica do primeiro momento do estado Gaussiano.

Resta agora determinar a equação que rege a dinâmica do segundo momento anti-simétrico do estado Gaussiano $m_{\alpha\beta}(t) = \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12}(t) \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta]$. O procedimento para se obter esta equação é muito similar àquele realizado para o primeiro momento. Assim, tem-se que

$$\begin{aligned}
\frac{dm_{\alpha\beta}(t)}{dt} &= \mathbf{Tr} \left[\frac{\hat{\rho}_{12}(t)}{dt} \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta \right] \\
\frac{dm_{\alpha\beta}(t)}{dt} &= \mathbf{Tr} \left[(\hat{z}_\mu L_{\mu\nu} \hat{z}_\nu \hat{\rho}_{12} + \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\mu R_{\mu\nu} \hat{z}_\nu + \hat{z}_\mu K_{\mu\nu} \hat{\rho}_{12} \hat{z}_\nu) \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta \right] \\
\frac{dm_{\alpha\beta}(t)}{dt} &= L_{\mu\nu} \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta \hat{z}_\mu \hat{z}_\nu] + R_{\mu\nu} \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\mu \hat{z}_\nu \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta] \\
&\quad + K_{\mu\nu} \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\nu \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta \hat{z}_\mu],
\end{aligned} \tag{5.66}$$

a partir da relação de comutação (Equação 5.35), observa-se que é possível reescrever os termos

$$\hat{z}_\mu \hat{z}_\nu \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta = \Xi_{\nu\alpha} \hat{z}_\mu \hat{z}_\beta + \Xi_{\nu\beta} \hat{z}_\mu \hat{z}_\alpha + \Xi_{\mu\alpha} \hat{z}_\beta \hat{z}_\nu + \Xi_{\mu\beta} \hat{z}_\alpha \hat{z}_\nu + \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta \hat{z}_\mu \hat{z}_\nu, \tag{5.67}$$

$$\hat{z}_\nu \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta \hat{z}_\mu = \Xi_{\nu\alpha} \hat{z}_\beta \hat{z}_\mu + \Xi_{\nu\beta} \hat{z}_\alpha \hat{z}_\mu + \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta \hat{z}_\nu \hat{z}_\mu, \tag{5.68}$$

agora, prosseguindo de maneira similiar ao modo como chegou-se na Equação 5.63, obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{dm_{\alpha\beta}(t)}{dt} &= \left(L_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} + \tilde{K}_{\mu\nu} \right) \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12} \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta \hat{z}_\mu \hat{z}_\nu] + R_{\mu\nu} \Xi_{\nu\alpha} m_{\mu\beta} + R_{\mu\nu} \Xi_{\nu\beta} m_{\mu\alpha} \\
&+ R_{\mu\nu} \Xi_{\mu\alpha} m_{\beta\nu} + R_{\mu\nu} \Xi_{\mu\beta} m_{\alpha\nu} + K_{\mu\nu} \Xi_{\nu\alpha} m_{\beta\mu} + K_{\mu\nu} \Xi_{\nu\beta} m_{\alpha\mu} \\
\frac{dm_{\alpha\beta}(t)}{dt} &= R_{\mu\nu} \Xi_{\nu\alpha} m_{\mu\beta} + R_{\mu\nu} \Xi_{\nu\beta} m_{\mu\alpha} + R_{\mu\nu} \Xi_{\mu\alpha} m_{\beta\nu} \\
&+ R_{\mu\nu} \Xi_{\mu\beta} m_{\alpha\nu} + K_{\mu\nu} \Xi_{\nu\alpha} m_{\beta\mu} + K_{\mu\nu} \Xi_{\nu\beta} m_{\alpha\mu} \\
\frac{dm_{\alpha\beta}(t)}{dt} &= -\Xi_{\alpha\nu} \tilde{R}_{\nu\mu} m_{\mu\beta} + R_{\mu\nu} \Xi_{\nu\beta} (m_{\alpha\mu} + \Xi_{\mu\alpha}) - R_{\mu\nu} \Xi_{\alpha\mu} (m_{\nu\beta} + \Xi_{\beta\nu}) \\
&+ m_{\alpha\nu} \tilde{R}_{\nu\mu} \Xi_{\mu\beta} - K_{\mu\nu} \Xi_{\alpha\nu} (m_{\mu\beta} + \Xi_{\beta\mu}) + K_{\mu\nu} \Xi_{\nu\beta} m_{\alpha\mu} \\
\frac{dm_{\alpha\beta}(t)}{dt} &= -\Xi_{\alpha\nu} \tilde{R}_{\nu\mu} m_{\mu\beta} - \Xi_{\alpha\nu} \tilde{K}_{\nu\mu} m_{\mu\beta} - \Xi_{\alpha\mu} R_{\mu\nu} m_{\nu\beta} - \Xi_{\alpha\mu} R_{\mu\nu} \Xi_{\nu\beta} + \Xi_{\alpha\mu} R_{\mu\nu} \Xi_{\nu\beta} \\
&+ m_{\alpha\mu} R_{\mu\nu} \Xi_{\nu\beta} + m_{\alpha\nu} \tilde{R}_{\nu\mu} \Xi_{\mu\beta} + m_{\alpha\mu} K_{\mu\nu} \Xi_{\nu\beta} + \Xi_{\alpha\nu} \tilde{K}_{\nu\mu} \Xi_{\mu\beta} \\
\frac{dm_{\alpha\beta}(t)}{dt} &= \Xi_{\alpha\nu} \tilde{K}_{\nu\mu} \Xi_{\mu\beta} - \Xi_{\alpha\mu} \left(R_{\mu\nu} + \tilde{R}_{\mu\nu} + \tilde{K}_{\mu\nu} \right) m_{\nu\beta} \\
&+ m_{\alpha\mu} \left(R_{\mu\nu} + \tilde{R}_{\mu\nu} + K_{\mu\nu} \right) \Xi_{\nu\beta}, \tag{5.69}
\end{aligned}$$

levando em consideração que $A_{\alpha\nu} = \left(R_{\mu\nu} + \tilde{R}_{\mu\nu} + \tilde{K}_{\mu\nu} \right)$ e $\tilde{A}_{\nu\beta} = \left(R_{\mu\nu} + \tilde{R}_{\mu\nu} + K_{\mu\nu} \right)$, chega-se a forma final da equação de primeira ordem para o segundo momento anti-simétrico,

$$\frac{dm_{\alpha\beta}(t)}{dt} = \Xi_{\alpha\nu} \tilde{K}_{\nu\mu} \Xi_{\mu\beta} + A_{\alpha\nu} m_{\nu\beta} + m_{\alpha\nu} \tilde{A}_{\nu\beta}. \tag{5.70}$$

O segundo momento **simétrico** pode ser obtido a partir do segundo momento anti-simétrico,

$$M_{\alpha\beta}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{Tr} [\hat{\rho}_{12}(t) (\hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta + \hat{z}_\beta \hat{z}_\alpha)] = \frac{1}{2} (m_{\alpha\beta} + m_{\beta\alpha}) = \frac{1}{2} (m_{\alpha\beta} + \tilde{m}_{\alpha\beta}), \tag{5.71}$$

e sua respectiva equação dinâmica

$$\frac{dM_{\alpha\beta}(t)}{dt} = D_{\alpha\beta} + A_{\alpha\nu} M_{\nu\beta} + M_{\alpha\nu} \tilde{A}_{\nu\beta}, \tag{5.72}$$

onde define-se

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \Xi_{\alpha\mu} \left(K_{\mu\nu} + \tilde{K}_{\mu\nu} \right) \Xi_{\nu\beta}. \tag{5.73}$$

Com as equações que determinam a evolução temporal do primeiro e segundo momento do estado Gaussiano, é possível analisar as propriedades deste estado ao se determinar a forma específica da Equação Mestra para um sistema quântico com hamiltoniano quadrático, assim como é feito no Capítulo 6.

6 DINÂMICA DE MODOS ACOPLADOS

Neste capítulo discute-se os aspectos analíticos e algébricos no estudo da interação do modo de uma cavidade parametricamente excitada (cavidades de paredes moveis) com um detector quântico modelado por um circuito RLC quantizado. Revisitamos o procedimento para a solução da dinâmica de um hamiltoniano dependente do tempo por meio do qual o sistema é reduzido ao estudo de um sistema de equações diferenciais com coeficientes constantes. Para estados térmico comprimidos, são dadas as soluções das matrizes das covariâncias simetrizadas a partir das quais as propriedades de cada um dos subsistemas quânticos podem ser descritas, e informações relativas as correlações quânticas podem ser obtidas para diferentes medidas já estabelecidas. Ressalta-se que nestes estudo o foco principal foi a aplicação do formalismo matemático desenvolvido por Dodonov e Man'ko (2003).

6.1 O HAMILTONIANO E A CORRESPONDENTE EQUAÇÃO MESTRA

No processo de detecção de fótons na cavidade introduz-se uma antena em condições adequadas de modo que a antena pode ser descrita por um oscilador harmônico quântico no sentido de um circuito LC quantizado¹. Na ausência da dissipação, este sistema tem seu operador hamiltoniano descrito na forma (CASTRO; DODONOV, 2014)

$$\begin{aligned} H_{eff} &= \omega(t)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \omega_0\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + i\chi(t)(\hat{a}_1^{\dagger 2} - \hat{a}_1^2) + \zeta\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + \zeta^*\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 \\ &= \omega(t)\hat{N}_1 + \omega_0\hat{N}_2 + i\chi(t)(\hat{a}_1^{\dagger 2} - \hat{a}_1^2) + \zeta\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + \zeta^*\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2, \end{aligned} \quad (6.1)$$

onde ζ descreve a constante de acoplamento entre os modos 1 e 2. Além disso, $\omega(t) = \omega_0 [1 + 2\varepsilon\delta_0 \text{sen}(\eta\omega_0 t)]$ para a qual a profundidade de modulação $\delta = \varepsilon\delta_0$ é assumida pequena uma vez que se considera a excitação paramétrica no regime fraco com $\varepsilon \ll 1$. Aqui ε deve ser entendido como o parâmetro que dita a ordem de grandeza das constantes que aparecem no problema.

O coeficiente de “squeezing” ou compressão é dado por

$$\chi(t) = \frac{1}{4\omega(t)} \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{\eta\delta\omega_0 \cos(\eta\omega_0 t)}{2[1 + 2\delta \text{sen}(\eta\omega_0 t)]} \simeq \frac{p\omega_0\delta}{2} \cos(\eta\omega_0 t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (6.2)$$

nota-se que, diferente da Equação 4.58, na equação acima não existe o termo g_1 , já que este termo depende do meio dielétrico dentro da cavidade e neste caso assume-se que exista vácuo no interior da cavidade.

¹ Um circuito LC quantizado também pode ser escrito em termos dos operadores bosônicos de criação e aniquilação, esta quantização é apresentada por Louisell (1973, Seção 4.1).

Na Equação 6.2 o fator η pode, a princípio, ser considerado arbitrário, e escrito na forma $\eta = p(1 + \varepsilon\kappa_0)$, onde p refere-se ao fator de frequência de modo livre, com $\varepsilon\kappa_0 = \kappa$ sendo uma possível dissonância que pode ocorrer na frequência paramétrica do modo da cavidade. Note que o operador 6.1 descreve um sistema quântico não-estacionário devido a dependência temporal explícita nos fatores $\omega(t)$ e $\chi(t)$. Para esse sistema a evolução ocorre de forma unitária, porém se observa que a energia se altera no decorrer do tempo. Trata-se de um modelo no qual se estuda o Efeito Casimir Dinâmico focando na produção e detecção de fótons conforme já considerado por Castro, Cacheffo e Dodonov (2013) e Castro e Dodonov (2013). No caso de um detector não-ideal, deve-se considerar a presença de um reservatório térmico (CASTRO; DODONOV, 2014) que afeta a contagem do número de fótons detectados, quando comparado aos resultados obtidos por Castro, Cacheffo e Dodonov (2013) e Castro e Dodonov (2013). A presença do reservatório térmico atrapalha a detecção de fótons de modo a tornar o processo de contagem de fótons ineficiente dependendo das propriedades que caracterizam o reservatório térmico. Neste caso, a dinâmica da produção e detecção de fótons é obtida a partir do estudo das soluções da equação mestra, que para este caso é escrita na forma

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}}{dt} = & -i \left[\omega(t)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + i\chi(t)(\hat{a}_1^{\dagger 2} - \hat{a}_1^2) + \omega_0\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \zeta^*\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \zeta\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger, \hat{\rho} \right] \\ & - \left\{ \gamma(1 + \nu)(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 - 2\hat{a}_2\hat{\rho}\hat{a}_2^\dagger) + \gamma\nu(\hat{a}_2\hat{a}_2^\dagger\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{a}_2\hat{a}_2^\dagger - 2\hat{a}_2^\dagger\hat{\rho}\hat{a}_2) \right\}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Na Equação Mestra 6.3 a primeira linha do lado direito descreve a evolução unitária dos osciladores harmônicos acoplados, modelando a cavidade e o detector dissipativo. Os outros termos, na segunda linha da equação, descrevem a evolução não-unitária causada pela interação do detector com o seu reservatório térmico, caracterizado pelo número médio de excitações ν no equilíbrio térmico e coeficiente de dissipação γ . A dissipação é tratada no regime de acoplamento fraco entre o detector e o reservatório, de tal modo que $\gamma = \varepsilon\gamma_0$, com $\varepsilon \ll 1$. O parâmetro ν diz respeito ao número de fótons no reservatório térmico e depende da temperatura absoluta deste reservatório de acordo com a equação de Planck

$$\nu = [\exp(\Upsilon/T) - 1]^{-1}, \quad (6.4)$$

onde Υ é a constante característica do reservatório térmico.

É importante estar atento que somente o detector interage com o reservatório térmico, de modo que o efeito do reservatório sobre o modo parametricamente excitado ocorre devido o acoplamento bilinear do tipo onda girante entre os modos. O acoplamento entre os modos é considerado no limite do acoplamento fraco, da mesma ordem de grandeza da dissipação e amplitude de excitação paramétrica, isto é, $\zeta = \varepsilon\zeta_0$ com $\varepsilon \ll 1$. Outro aspecto a ser considerado na Equação 6.3 é a dependência explícita no tempo no termo entre colchetes do lado direito da equação mestra. Do ponto de vista operacional, isto introduz uma dificuldade adicional no tratamento analítico para se obter a solução. Porém há um

procedimento simples para se eliminar essas dependências temporais indesejadas, mantendo ainda uma boa precisão na detecção de fótons. Dodonov e Dodonov (2013) apresenta um esquema simples que reduz o problema ao da solução de um sistema estacionário, onde a dependência temporal explícita desaparece do operador hamiltoniano com suposições compatíveis com os limites considerados no contexto da produção e detecção de fótons. No que se segue, discute-se os principais aspectos do esquema considerado para o operador hamiltoniano efetivo, e com isso fica demonstrado o ganho do ponto de vista da simplificação na solução da equação mestra.

Na Equação 6.1, o termo relevante para a produção de fótons no interior da cavidade é o fator proporcional a $\chi(t)$, pois o fator $2\varepsilon\delta_0 \sin(\eta\omega_0 t)$, que aparece junto ao operador número da cavidade \hat{N}_1 devido a $\omega(t)$, representa uma pequena flutuação no número médio de fótons do modo da cavidade e pode ser desconsiderado na computação do número de fótons produzidos (CASTRO; DODONOV, 2014). Neste sentido ele pode ser desconsiderado na equação mestra, de modo que levando em conta uma correção de ordem zero no parâmetro ε , a frequência se torna $\omega(t) = \omega_0$. Além disso, no intuito de simplificar a apresentação das equações no texto, considera-se em geral na literatura os fatores ω_0 e \hbar em um sistema de unidade de modo que podem ser tomados como igual a 1. Como primeira aproximação, na Representação de Schrödinger, o operador hamiltoniano efetivo, descrevendo o interação entre o modo da cavidade $(\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1)$ e a antena $(\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2)$ (circuito RLC, onde R é devido a dissipação) é dado por

$$H_{eff} = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \zeta(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger) - i\kappa(t)(\hat{a}_1^2 - \hat{a}_1^{\dagger 2}), \quad \kappa(t) = \frac{p\varepsilon\delta_0}{2} \cos(\eta t), \quad (6.5)$$

com a constante de acoplamento assumida como sendo uma constante real $\zeta = \zeta^*$, onde os efeitos não lineares não são levados em consideração. Então, pode-se considerar o problema na Representação de Interação para se eliminar os termos referentes aos operadores números, que na aproximação considerada acima, podem ser tratados como os termos livres do operador hamiltoniano. Assim, por meio das transformações de similaridade dadas na forma

$$\hat{a}_k = \hat{\mathbf{a}}_k(t)e^{it}, \quad \hat{a}_k^\dagger = \hat{\mathbf{a}}_k^\dagger(t)e^{-it}, \quad (6.6)$$

tem-se para o operador efetivo H_{eff} no quadro da interação a forma

$$\hat{H}_{eff} = \zeta(\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger \hat{\mathbf{a}}_2 + \hat{\mathbf{a}}_1 \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger) - i\kappa(t)(\hat{\mathbf{a}}_1^2 e^{2it} - \hat{\mathbf{a}}_1^{\dagger 2} e^{-2it}). \quad (6.7)$$

Até este ponto, fez-se uma mudança da Representação de Schrödinger para a Representação de Interação. Na ausência da dissipação, tem-se que o operador densidade $\hat{\sigma}(t)$ na Representação de Interação evolue no tempo de acordo com a equação de Liouville-von-Neuman escrita na forma

$$\frac{d\hat{\sigma}(t)}{dt} = -i[\hat{V}_{eff}(t), \hat{\sigma}(t)], \quad (6.8)$$

onde o operador efetivo \hat{V}_{eff} possui uma dependência explícita no tempo dada por

$$\hat{V}_{eff} = \zeta(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger) - i\chi(t)(\hat{a}_1^2 e^{2it} - \hat{a}_1^{\dagger 2} e^{-2it}). \quad (6.9)$$

Do ponto de vista da Equação Mestra na Representação de Interação, este ainda não é um resultado adequado, porque ainda existe uma dependência temporal. Nota-se que o operador efetivo \hat{V}_{eff} depende explicitamente do tempo por meio do fator $\chi(t)$ que aparecerá explicitamente na Equação Mestra, considerando-se a dissipação. Mas, a ideia interessante neste ponto consiste em se considerar a aproximação de onda girante no fator de “squeezing” presente no operador efetivo \hat{V}_{eff} conforme:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{eff} &= -i\chi(t)(\hat{a}_1^2 e^{2it} - \hat{a}_1^{\dagger 2} e^{-2it}) \mapsto -i\eta_f \delta \frac{(e^{i\eta t} + e^{-i\eta t})}{4} (\hat{a}_1^2 e^{2it} - \hat{a}_1^{\dagger 2} e^{-2it}) \\ &\mapsto \frac{i\eta_f \delta}{4} (\hat{a}_1^{\dagger 2} e^{i(\eta-2)t} + \hat{a}_1^{\dagger 2} e^{-i(\eta+2)t} - \hat{a}_1^2 e^{i(\eta+2)t} - \hat{a}_1^2 e^{-i(\eta-2)t}), \end{aligned}$$

e assumindo-se que $\eta = 2(1 + \kappa)$, obtém-se para \hat{S}_{eff} que

$$\hat{S}_{eff} = \frac{i\varepsilon\delta_0}{2} (\hat{a}_1^{\dagger 2} e^{i2\kappa t} + \hat{a}_1^{\dagger 2} e^{-i(4+2\kappa)t} - \hat{a}_1^2 e^{i(4+2\kappa)t} - \hat{a}_1^2 e^{-2i\kappa t}).$$

Removendo-se os termos que oscilam rapidamente na aproximação de onda girante, uma vez que seu efeito não é sentido na escala de tempo na qual se observa a produção de fótons, o que resulta em

$$\hat{S}_{eff} = \frac{i\varepsilon\delta_0}{2} (\hat{a}_1^{\dagger 2} e^{i2\kappa t} - \hat{a}_1^2 e^{-2i\kappa t}),$$

porém, o operador efetivo ainda depende do tempo, ainda que em uma forma mais simples, dado por

$$\hat{V}_{eff} = \zeta(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger) + \frac{i\varepsilon\delta_0}{2} (\hat{a}_1^{\dagger 2} e^{2i\kappa t} - \hat{a}_1^2 e^{-2i\kappa t}), \quad (6.10)$$

para o qual a equação mestra no quadro de interação apresenta-se na forma

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}}{dt} &= -i \left[\zeta(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger) + \frac{i\varepsilon\delta_0}{2} (\hat{a}_1^{\dagger 2} e^{2i\kappa t} - \hat{a}_1^2 e^{-2i\kappa t}), \hat{\sigma} \right] \\ &\quad - \left\{ \varepsilon\gamma_0(1 + \nu) (\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \hat{\sigma} + \hat{\sigma} \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 - 2\hat{a}_2 \hat{\sigma} \hat{a}_2^\dagger) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon\gamma_0\nu (\hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{\sigma} + \hat{\sigma} \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger - 2\hat{a}_2^\dagger \hat{\sigma} \hat{a}_2) \right\}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Este resultado ainda não é satisfatório do ponto de vista matemático, e pode ser simplificado por meio de uma transformação de coordenadas dada por

$$\hat{\mathbf{b}}_k(t) = \hat{\mathbf{a}}_k e^{-i\kappa t}, \quad \hat{\mathbf{b}}_k^\dagger(t) = \hat{\mathbf{a}}_k^\dagger e^{i\kappa t}, \quad (6.12)$$

isto define os operadores $(\hat{\mathbf{b}}_k, \hat{\mathbf{b}}_k^\dagger)$ em termos dos operadores $(\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger)$, para os quais se escreve uma equação mestra com os coeficientes independentes do tempo para $\hat{\sigma}(t)$, que na sua

forma padrão se escreve como

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}(t)}{dt} = & -i \left[\zeta \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger \hat{\mathbf{b}}_2 + \zeta \hat{\mathbf{b}}_1 \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger + \frac{i\delta}{2} (\hat{\mathbf{b}}_1^{\dagger 2} - \hat{\mathbf{b}}_1^2), \hat{\sigma}(t) \right] \\ & - \left\{ \gamma(1 + \nu) (\hat{\mathbf{b}}_2^\dagger \hat{\mathbf{b}}_2 \hat{\sigma}(t) + \hat{\sigma}(t) \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger \hat{\mathbf{b}}_2 - 2\hat{\mathbf{b}}_2 \hat{\sigma}(t) \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger) \right. \\ & \left. + \gamma\nu (\hat{\mathbf{b}}_2 \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger \hat{\sigma}(t) + \hat{\sigma}(t) \hat{\mathbf{b}}_2 \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger - 2\hat{\mathbf{b}}_2^\dagger \hat{\sigma}(t) \hat{\mathbf{b}}_2) \right\}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Desta forma, o problema de dependência temporal da equação mestra é simplificado, permitindo aplicar o formalismo definido por Dodonov e Man'ko (2003, p. 180) para o tratamento analítico da dinâmica de sistemas quadráticos dissipativos no contexto de estados iniciais Gaussianos.

6.2 DINÂMICA DE MODOS ACOPLADOS

Para o sistema em estudo, cujo hamiltoniano é descrito por um hamiltoniano quadrático, o foco está na análise do seu comportamento dinâmico para estados iniciais Gaussianos. Estes estados incluem estados coerentes, estados comprimidos, estados térmico e térmico comprimido. No estudo de sistemas quadráticos de evolução unitária, na ausência de processos que acarretam perda de coerência, tem-se que estados iniciais Gaussianos evoluem como estados Gaussianos (CERF; LEUCHS; POLZIK, 2007, cap. 22). Isto acarreta uma grande simplificação no estudo das propriedades dinâmicas de cada um dos subsistemas, bem como no estudo das propriedades de correlações dos sistemas. Isto porque para uma distribuição Gaussiana, todas as suas propriedades são perfeitamente determinadas por seus primeiro e segundo momentos (SERAFINI, 2017, Sec. 3.3). Então, para o caso de um sistema quântico da forma expressa em (6.13), todas as propriedades podem ser obtidas se é conhecida a evolução temporal dos momentos correspondentes. Considera-se dessa forma a formulação no contexto das variáveis contínuas na linguagem dos operadores de criação ou aniquilação na Representação de Interação. É importante se ter em mente que tanto faz usar a Representação de Schrödinger quanto a Representação de Interação, sendo esta última a mais adequada porque simplifica as equações.

No que se segue, revisita-se os resultados apresentados por Castro e Dodonov (2014) uma vez que os mesmos serão relevantes para os resultados inéditos obtidos neste estudo. Essa discussão resulta de uma revisão dos resultados já publicados, mas que tem como propósito o aprendizado do formalismo e uma avaliação crítica dos procedimentos envolvidos para se obter as soluções da dinâmica do sistema. Neste contexto, introduz-se a notação $\mathbf{y} = (\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger, \hat{\mathbf{b}}_2, \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger)$, observando que o ordenamento é estabelecido de tal maneira que as representações matriciais pertinentes ao sistema sejam expressas em formas de matrizes de blocos de matrizes. Neste contexto, o valor médio associado a cada um dos operadores bosônicos se determina segundo a forma $\langle \mathbf{y} \rangle \equiv \text{Tr}(\hat{\rho} \mathbf{y})$, que nada mais são do que os primeiros momentos associados a dinâmica do sistema. De acordo com a formulação

apresentada por Dodonov e Man'ko (2003, p. 181), os primeiros momentos obedecem a equação diferencial

$$d\langle \mathbf{y} \rangle / dt = \mathbf{A} \langle \mathbf{y} \rangle. \quad (6.14)$$

Na equação 6.14 a matriz \mathbf{A} é obtida por meio das matrizes \mathbf{L} , \mathbf{R} e $\mathbf{\Xi}$ definidas a partir da equação mestra 6.13 conforme já apresentado no seção 5.2. As matrizes \mathbf{L} , \mathbf{R} e $\mathbf{\Xi}$ são escritas na forma

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\delta & 0 & 0 & -i\zeta \\ 0 & \delta & -i\zeta & 0 \\ 0 & -i\zeta & 0 & -2\gamma\nu \\ -i\zeta & 0 & -2\gamma(1+\nu) & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 & i\zeta \\ 0 & -\delta & i\zeta & 0 \\ 0 & i\zeta & 0 & -2\gamma\nu \\ i\zeta & 0 & -2\gamma(1+\nu) & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.16)$$

$$\mathbf{\Xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.17)$$

a partir das quais \mathbf{A} é determinada segundo a equação

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Xi}(\mathbf{L} + \tilde{\mathbf{R}}), \quad (6.18)$$

onde $\tilde{\mathbf{R}}$ é a matriz transposta de \mathbf{R} . A matriz \mathbf{A} de ordem 4 determina a evolução temporal dos primeiros momentos e tem sua forma dada (conforme obtida em (CASTRO; DODONOV, 2014)) por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2\beta & -i\zeta & 0 \\ 2\beta & 0 & 0 & i\zeta \\ -i\zeta & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & i\zeta & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^1 & \mathbf{A}_1^2 \\ \mathbf{A}_2^1 & \mathbf{A}_2^2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 2\beta\sigma_1 & -i\zeta\sigma_3 \\ -i\zeta\sigma_3 & -\gamma\sigma_4 \end{bmatrix}, \quad (6.19)$$

onde σ_1 , σ_2 e σ_3 são as matrizes de Pauli de ordem 2, enquanto σ_4 corresponde à matriz identidade de ordem 2. Por conveniência, adota-se $\delta = 2\beta$ no que se segue. O cálculo explícito para se chegar a matriz \mathbf{A} , no sentido de revisar os aspectos gerais da teoria desenvolvida por Dodonov e Man'ko (2003, p. 181), estão apresentados no seção 5.2.

Observando a forma explícita da matriz 6.19, na estrutura de bloco diagonal, nota-se que os blocos diagonais \mathbf{A}_1^1 e \mathbf{A}_2^2 , respectivamente, explicitam as características

do modo parametricamente excitado e do detector (na Representação de Interação) relevantes para dinâmica dos primeiros momentos. No bloco \mathbf{A}_1^1 o fator β diz respeito a amplitude da excitação paramétrica do modo da cavidade, enquanto no bloco \mathbf{A}_2^2 tem-se γ , o parâmetro que caracteriza o acoplamento com o reservatório associado ao detector. Observando os blocos fora da diagonal \mathbf{A}_1^2 e \mathbf{A}_2^1 , nota-se a presença da constante acoplamento associada a interação do modo da cavidade com o detector de fótons. Na ausência do acoplamento, os termos fora da diagonal são matrizes nula e cada um dos subsistemas quânticos evoluem no tempo de forma independente. No caso de $\zeta = 0$, a dinâmica do modo e do detector seriam independentes e nenhum tipo de correlação haveria entre eles, impedindo trocas de quaisquer propriedades referentes a cada um dos modos. Para os estados Gaussianos que evoluem no tempo por meio de hamiltonianos quadráticos na Equação Mestre padrão, apenas os primeiros momentos não são suficientes para a descrição da dinâmica. É necessário determinar a evolução temporal dos momentos de segunda ordem, sendo que esses são os fatores relevantes para se estudar as propriedades de correlações entre os modos. Neste sentido, pode-se analisar os momentos de segunda ordem não-simetrizados ou simetrizados, a depender da conveniência do modelo em estudo e quais as propriedades a serem consideradas. Para a análise das correlações entre modos é mais adequado os momentos de segunda ordem simetrizados, e neste sentido, define-se a matriz das covariâncias \mathbf{M} de ordem 4 cujos elementos são definidos como $M_{jk} = \text{Tr}[\hat{\rho}(\hat{y}_j\hat{y}_k + \hat{y}_k\hat{y}_j)]/2 - \langle\hat{y}_j\rangle\langle\hat{y}_k\rangle$. Esta definição² é válida tanto para a Representação de Schrödinger quanto para a Representação de Interação. Os elementos de matriz \mathbf{M} obedecem a um sistema de equações diferenciais de primeira ordem na forma

$$d\mathbf{M}/dt = \mathbf{A}\mathbf{M} + \mathbf{M}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{D}, \quad (6.20)$$

onde $\tilde{\mathbf{A}}$ é a matriz transposta de \mathbf{A} . Note que tanto os momentos de primeira ordem quanto os de segunda ordem satisfazem sistemas de equações de primeira ordem. A princípio isto implica que no estudo de sistemas quadráticos dissipativos com estados iniciais Gaussianos, o procedimentos de soluções analíticas estão disponíveis na vasta literatura no contexto matemático. Além disso, os procedimentos de cálculo numérico para as soluções das equações podem ser implementados em quaisquer plataformas de cálculo como o Maple, Mathematica ou Matlab (BARNES; FULFORD, 2011; GANDER; KWOK, 2018; WANG, 2008).

A equação 6.20 é determinada a partir da equação mestra padrão do tipo 6.13, considerando a definição da matriz das covariâncias M_{jk} , conforme os resultados obtidos por Dodonov e Man'ko (2003), que estão discutidos no seção 5.2. A análise dos aspectos operacionais e das definições desta formulação é relevante para o domínio do tópico e para a aplicação em estudos futuros que visam a análise de sistemas quânticos com um número

² Nota-se que o termo $\langle\hat{y}_j\rangle\langle\hat{y}_k\rangle$ pode ser ignorado, assim como é feito no seção 5.2, já que é possível definir o centro do sistema de coordenadas como o centro da distribuição Gaussiana, logo os primeiros momentos $\langle\mathbf{y}\rangle$ zeram.

maior de graus de liberdade. Na dedução da equação 6.20, obtém-se o fator contendo a matriz de difusão \mathbf{D} , determinada a partir das matrizes $\mathbf{\Xi}$ e \mathbf{K} , sendo esta última dada por (conforme apresentado no seção 5.2)

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\gamma(1 + \nu) \\ 0 & 0 & 2\gamma\nu & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.21)$$

de acordo com a equação $\mathbf{D} = \frac{1}{2}\mathbf{\Xi}(\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}})\mathbf{\Xi}$, que assume a forma

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\gamma\tilde{\nu} \\ 0 & 0 & 2\gamma\tilde{\nu} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_2^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2^2 = 2\gamma\tilde{\nu}\sigma_1, \quad \tilde{\nu} = \nu + 1/2, \quad (6.22)$$

o bloco diagonal \mathbf{D} corresponde ao efeito de dissipação devido ao acoplamento do detector com o reservatório térmico, que depende da constante de acoplamento γ e do número médio de fótons do reservatório ν . Quanto maior o valor de γ ou de $\tilde{\nu}$ mais intenso é o efeito de difusão no sistema acoplado.

A partir do método de solução analítica para sistemas de equações diferenciais de primeira ordem com coeficientes constantes é possível determinar as soluções do sistema de equações diferenciais correspondentes ao primeiro momento por um procedimento direto e simples. Seguindo o procedimento conforme em (DODONOV; MAN'KO, 2003, p. 181) as soluções das equações Eqs. 6.14 and 6.20 são dadas em termos de uma matriz de evolução $\mathbf{U}(t)$, de tal forma que

$$\langle \mathbf{y} \rangle_t = \mathbf{U}(t)\langle \mathbf{y} \rangle_0, \quad (6.23)$$

onde a matriz de evolução $\mathbf{U}(t)$ está determinada a partir da matriz \mathbf{A} segundo a forma (BOYCE; DIPRIMA; MEADE, 2017, Capítulo 7)

$$\mathbf{U}(t) = \exp(\mathbf{A}t). \quad (6.24)$$

Nota-se que a matriz representando o operador evolução temporal $\mathbf{U}(t)$ é a exponenciação da matriz \mathbf{A} , uma vez que \mathbf{A} não dependa explicitamente do tempo. A matriz das covariâncias \mathbf{M} e a matriz \mathbf{U} são representadas na forma de blocos de matrizes como

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1^1 & \mathbf{M}_1^2 \\ \mathbf{M}_2^1 & \mathbf{M}_2^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^1 & \mathbf{U}_1^2 \\ \mathbf{U}_2^1 & \mathbf{U}_2^2 \end{bmatrix}. \quad (6.25)$$

Pela forma como a matriz das covariâncias está definida, é fácil verificar que \mathbf{M} é uma matriz simétrica, significando que ela é igual a sua transposta, $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}$. Isto implica

para os blocos de matrizes \mathbf{M}_i^j as seguintes igualdades

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_1^1 & \tilde{\mathbf{M}}_1^2 \\ \tilde{\mathbf{M}}_2^1 & \tilde{\mathbf{M}}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1^1 & \mathbf{M}_1^2 \\ \mathbf{M}_2^1 & \mathbf{M}_2^2 \end{bmatrix} = \mathbf{M}, \quad (6.26)$$

ou $\tilde{\mathbf{M}}_1^1 = \mathbf{M}_1^1$, $\tilde{\mathbf{M}}_2^1 = \mathbf{M}_2^1$, $\tilde{\mathbf{M}}_1^2 = \mathbf{M}_1^2$ e $\tilde{\mathbf{M}}_2^2 = \mathbf{M}_2^2$.

A matriz de evolução temporal $\mathbf{U}(t)$ também é uma matriz simétrica uma vez que a matriz \mathbf{A} é também simétrica (HORN; JOHNSON, 2012). Com isso, tem-se que

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_1^1 & \tilde{\mathbf{U}}_1^2 \\ \tilde{\mathbf{U}}_2^1 & \tilde{\mathbf{U}}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^1 & \mathbf{U}_1^2 \\ \mathbf{U}_2^1 & \mathbf{U}_2^2 \end{bmatrix} = \mathbf{U}, \quad (6.27)$$

que implica para as matrizes blocos as relações $\tilde{\mathbf{U}}_1^1 = \mathbf{U}_1^1$, $\tilde{\mathbf{U}}_2^1 = \mathbf{U}_2^1$, $\tilde{\mathbf{U}}_1^2 = \mathbf{U}_1^2$ e $\tilde{\mathbf{U}}_2^2 = \mathbf{U}_2^2$.

No estudo da dinâmica do sistema composto pelo modo da cavidade e detector, assume-se a ausência de correlação no instante inicial, implicando que $\mathbf{M}_1^2(0) = \mathbf{M}_2^1(0) = \mathbf{0}$. Isto implica para as soluções de matrizes blocos de ordem 2 as formas apresentadas em Castro e Dodonov (2014), e que foram obtidas por Dodonov e Manko (1985),

$$\mathbf{M}_1^1(t) = \mathbf{U}_1^1 \mathbf{M}_1^1(0) \mathbf{U}_1^1 + \mathbf{U}_1^2 \mathbf{M}_2^2(0) \mathbf{U}_2^1 + \int_0^t \mathbf{U}_1^2(t-\tau) \mathbf{D}_2^2 \mathbf{U}_2^1(t-\tau) d\tau, \quad (6.28)$$

$$\mathbf{M}_2^2(t) = \mathbf{U}_2^2 \mathbf{M}_2^2(0) \mathbf{U}_2^2 + \mathbf{U}_2^1 \mathbf{M}_1^1(0) \mathbf{U}_1^2 + \int_0^t \mathbf{U}_2^1(t-\tau) \mathbf{D}_2^2 \mathbf{U}_2^2(t-\tau) d\tau, \quad (6.29)$$

$$\mathbf{M}_1^2(t) = \mathbf{U}_1^1 \mathbf{M}_1^1(0) \mathbf{U}_1^2 + \mathbf{U}_1^2 \mathbf{M}_2^2(0) \mathbf{U}_2^2 + \int_0^t \mathbf{U}_1^2(t-\tau) \mathbf{D}_2^2 \mathbf{U}_2^2(t-\tau) d\tau, \quad (6.30)$$

$$\mathbf{M}_2^1(t) = \mathbf{U}_2^1 \mathbf{M}_1^1(0) \mathbf{U}_1^1 + \mathbf{U}_2^2 \mathbf{M}_2^2(0) \mathbf{U}_2^1 + \int_0^t \mathbf{U}_2^2(t-\tau) \mathbf{D}_2^2 \mathbf{U}_2^1(t-\tau) d\tau, \quad (6.31)$$

estas soluções estão expressas na sua forma geral e resultam do estudo de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem 6.20. Note que na ausência de dissipação, quando o fator de difusão \mathbf{D}_2^2 é igual a zero, as soluções são dadas na forma mais simples

$$\mathbf{M}_1^1(t) = \mathbf{U}_1^1 \mathbf{M}_1^1(0) \mathbf{U}_1^1 + \mathbf{U}_1^2 \mathbf{M}_2^2(0) \mathbf{U}_2^1, \quad (6.32)$$

$$\mathbf{M}_2^2(t) = \mathbf{U}_2^2 \mathbf{M}_2^2(0) \mathbf{U}_2^2 + \mathbf{U}_2^1 \mathbf{M}_1^1(0) \mathbf{U}_1^2, \quad (6.33)$$

$$\mathbf{M}_1^2(t) = \mathbf{U}_1^1 \mathbf{M}_1^1(0) \mathbf{U}_1^2 + \mathbf{U}_1^2 \mathbf{M}_2^2(0) \mathbf{U}_2^2, \quad (6.34)$$

$$\mathbf{M}_2^1(t) = \mathbf{U}_2^1 \mathbf{M}_1^1(0) \mathbf{U}_1^1 + \mathbf{U}_2^2 \mathbf{M}_2^2(0) \mathbf{U}_2^1. \quad (6.35)$$

No caso da ausência de dissipação, nota-se o elemento $\mathbf{M}_1^1(t)$ evolue no tempo de forma que o primeiro termo do lado direito depende de $\mathbf{M}_1^1(0)$ evoluído no tempo de acordo com a matriz bloco \mathbf{U}_1^1 . Já o segundo termo, depende das propriedades relativas ao detector evoluindo no tempo segundo as matrizes blocos de \mathbf{U} fora da diagonal, resultado da correlação presente no sistema. Isto significa que as propriedades pertinentes ao modo da cavidade ressonante serão influenciadas pelas propriedades do detector desde que haja correlação entre os modos por meio da interação caracterizada pela constante ζ . Uma situação análoga acontece para o elemento de matriz \mathbf{M}_2^2 . Analisar as soluções sem

dissipação é importante, uma vez que isso permite comparar os resultados da dinâmica deste modelo com os resultados obtidos por Castro, Cacheffo e Dodonov (2013) e Castro e Dodonov (2013). Nestes últimos trabalhos, foram aplicados métodos assintóticos para a solução de equações diferenciais de segunda ordem no limite de acoplamento fraco. O método da média temporal (BOGOLIUBOV; MITROPOLSKY, 1961) ou das escalas múltiplas (NAYFEH, 2008) são adequados aos problemas para sistemas quânticos não-estacionários acoplados quando as intensidades das interações são fracas e a dinâmica do sistema é observada para tempos curtos. Tais métodos são úteis quando os coeficientes das equações diferenciais são dependentes do tempo.

No caso do Efeito Casimir Dinâmico, as soluções obtidas em (CASTRO; CACHEFFO; DODONOV, 2013; CASTRO; DODONOV, 2013) são satisfatórias para a descrição da dinâmica de produção de fótons no limite do acoplamento fraco e foram obtidas para a ausência da dissipação, aplicando-se métodos assintóticos para a solução de equações diferenciais de segunda ordem. Porém, o método e aproximações discutidas em (CASTRO; DODONOV, 2014) e analisado aqui, são mais simples, diretos e envolvem a solução de equações diferenciais de primeira ordem com coeficientes constantes. Para o modelo em estudo, as soluções da matriz de evolução obtidas por Castro e Dodonov (2014) são dadas pelas formas

$$\mathbf{U}_1^1 = \frac{1}{2} (F_+ \sigma_4 + F_- \sigma_1), \quad (6.36)$$

$$\mathbf{U}_2^2 = \frac{1}{2} (K_+ \sigma_4 - K_- \sigma_1), \quad (6.37)$$

$$\mathbf{U}_1^2 = -\frac{\zeta}{2} (G_- \sigma_2 + iG_+ \sigma_3), \quad (6.38)$$

para as quais

$$\mathbf{U}_2^1 = \tilde{\mathbf{U}}_1^2 = -\frac{\zeta}{2} (G_- \tilde{\sigma}_2 + iG_+ \tilde{\sigma}_3) = \frac{\zeta}{2} (G_- \sigma_2 - iG_+ \sigma_3), \quad \tilde{\sigma}_2 = -\sigma_2. \quad (6.39)$$

Para as matrizes bloco 6.36 - 6.37, as funções F_{\pm} , K_{\pm} e G_{\pm} são dadas na forma

$$F_{\pm} = E_+ (C_- - \beta_- S_-) \pm E_- (C_+ - \beta_+ S_+), \quad (6.40)$$

$$K_{\pm} = E_+ (C_- + \beta_- S_-) \pm E_- (C_+ + \beta_+ S_+), \quad (6.41)$$

$$G_{\pm} = E_+ S_- \pm E_- S_+, \quad (6.42)$$

onde as funções E_{\pm} , C_{\pm} , S_{\pm} são escritas na forma

$$E_{\pm} = e^{\beta_{\pm} t}, \quad C_{\pm} = \cosh(R_{\pm} t), \quad S_{\pm} = \frac{\sinh(R_{\pm} t)}{R_{\pm}}, \quad (6.43)$$

e os parâmetros de acoplamento e de dissipação do sistema estão presentes nas definições

$$\beta_{\pm} = \pm\beta - (\gamma/2), \quad R_{\pm} = \sqrt{\beta_{\pm}^2 - \zeta^2}. \quad (6.44)$$

É evidente que γ é interpretado como o fator de decaimento na dinâmica do sistema, conforme pode ser visto diretamente da definição de E_{\pm} e β_{\pm} . Além disso, para as soluções da matriz de evolução temporal, é direto verificar da forma de R_{\pm} que há dois regimes possíveis de solução: quando $\beta_{\pm}^2 > \zeta^2$, R é uma constante real positiva e portanto as soluções para C_{\pm} e S_{\pm} são funções hiperbólicas, enquanto para $\beta_{\pm}^2 < \zeta^2$, o parâmetro R é um número imaginário puro que implica em funções trigonométricas. O regime trigonométrico corresponde ao caso no qual a amplitude de excitação paramétrica é menor que a intensidade de acoplamento entre o modo e o detector. No regime hiperbólico tem-se que a amplitude de excitação paramétrica é maior que a intensidade do acoplamento entre o modo e o detector. Este resultado está claramente apontado por (CASTRO; CACHEFFO; DODONOV, 2013; CASTRO; DODONOV, 2013; CASTRO; DODONOV, 2014), e tem uma relevância significativa no que diz respeito a dinâmica dos modos acoplados. Diferentes regimes implicam em diferentes comportamentos dinâmicos das propriedades de cada um dos modos e nas suas propriedades de correlações, o que se irá discutir na próxima seção.

A partir das equações acima, é possível determinar as soluções para a evolução temporal do sistema na ausência de dissipação, assumindo $\gamma = 0$ nas soluções para o caso de um modo da cavidade interagindo com o detector. Neste caso, estas soluções permitem uma comparação dos diferentes procedimentos de solução e aproximações consideradas na construção do modelo para descrever o Efeito Casimir Dinâmico. Castro, Cacheffo e Dodonov (2013) e Castro e Dodonov (2013) aplicam o método dos invariantes quânticos na formulação das componentes de quadraturas (DODONOV; MAN'KO, 2003, p. 162), assumindo regime de acoplamento fraco e pequenos valores para a amplitude de excitação paramétrica, de forma análoga à considerada para o operador hamiltoniano 6.1. No caso das soluções devido a Castro e Dodonov (2014), assumindo $\gamma = 0$, tem-se os parâmetros e funções correspondentes às equações 6.36 - 6.38, escritos na forma

$$E_{\pm}^{(0)} = e^{\pm\beta t}, \quad C^{(0)} = \cosh(R^{(0)}t), \quad S^{(0)} = \frac{\sinh(R^{(0)}t)}{R^{(0)}}, \quad (6.45)$$

com R reescrito na forma $R^{(0)} = \sqrt{\beta^2 - \zeta^2}$. As funções F_{\pm} , K_{\pm} e G_{\pm} assumem uma forma mais simples dada por

$$F_{\pm}^{(0)} = E_{+}^{(0)}(C^{(0)} + \beta S^{(0)}) \pm E_{-}^{(0)}(C^{(0)} - \beta S^{(0)}), \quad (6.46)$$

$$K_{\pm}^{(0)} = E_{+}^{(0)}(C^{(0)} - \beta S^{(0)}) \pm E_{-}^{(0)}(C^{(0)} + \beta S^{(0)}), \quad (6.47)$$

$$G_{\pm}^{(0)} = (E_{+}^{(0)} \pm E_{-}^{(0)})S^{(0)}. \quad (6.48)$$

A partir das soluções obtidas por Castro e Dodonov (2014), um estudo completo do sistema modo-cavidade pode ser realizado para um amplo quadro de valores de estados iniciais e valores de parâmetros do sistema. Ressaltamos que em Castro e Dodonov (2014) o foco central foi o estudo das propriedades quânticas como compressão do modo, função de

distribuição de fótons e de quantidades caracterizando as flutuações quânticas associadas ao modo da cavidade e detector, sob o efeito de dissipação. Foram considerados como estados Gaussianos iniciais o estado de vácuo e estados térmico tanto para o modo da cavidade quanto para o detector. No entanto, as propriedades de correlação entre os subsistemas é um aspecto importante a ser estudado no Efeito Casimir Dinâmico e pode ser analisado considerando-se como estados iniciais Gaussianos o estado térmico comprimido. A razão da escolha do estado térmico comprimido é devido ao fato do “squeeze” aprimorar as propriedades não-clássicas dos estados da luz, e isso é relevante no aprimoramento das correlações quânticas no sistema (BRAUNSTEIN; LOOCK, 2005).

6.3 MATRIZ DAS COVARIÂNCIAS PARA O ESTADO TÉRMICO COMPRIMIDO

A equação mestra 6.13 e a sua contrapartida dada por 6.20, definindo uma equação dinâmica para os elementos da matriz das covariâncias \mathbf{M} , descrevem a interação entre o modo de cavidade e o detector, sendo este modelado por um circuito RLC quântico. Uma vez que ambos os sistemas quânticos interagem entre si, correlações de natureza clássica e quântica podem estar presentes no sistema. Um estudo completo de medidas de correlação quântica exige uma revisão dos aspectos fundamentais da teoria quântica no contexto dos sistemas de variáveis contínuas, tema que será objeto de estudos futuros (CERF; LEUCHS; POLZIK, 2007). Então para o sistema em estudo, parte-se do fato de que tanto o modo da cavidade ressonante quanto o detector encontram-se inicialmente em estados térmicos comprimidos. Desta forma, assume-se para cada um dos subsistemas (modo e detector, $k = 1, 2$) o estado térmico comprimido, para o qual se parametriza a correspondente matriz das covariâncias simetrizadas no instante inicial de acordo com:

$$\mathbf{M}_k^k(0) = \sum_{p=1}^3 \mathfrak{w}_p^{kk} \sigma_p + \mathfrak{w}_4^{kk} \sigma_4 = \mathfrak{c}_k \sigma_1 + \mathfrak{s}_k \sigma_4, \quad (6.49)$$

para o qual os elementos \mathfrak{w}_p^{kk} , $p = 1, 2, 3, 4$ tem a forma

$$\mathfrak{w}_1^{kk} = \mathfrak{c}_k, \quad \mathfrak{w}_2^{kk} = 0, \quad \mathfrak{w}_3^{kk} = 0, \quad \mathfrak{w}_4^{kk} = \mathfrak{s}_k. \quad (6.50)$$

Os parâmetros do estado térmico comprimido \mathfrak{c}_k e \mathfrak{s}_k são identificados de acordo com

$$\mathfrak{c}_k = v_k \cosh(2r_k), \quad \mathfrak{s}_k = -v_k \sinh(2r_k), \quad (6.51)$$

os parâmetros r_k e v_k estão associados as propriedades de cada um dos modos associados ao sistema. Da teoria geral do operador densidade caracterizando as propriedades estatísticas associadas a um estado quântico arbitrário, governado por uma equação mestra, tem-se que $\text{Tr}[\rho(t)] = 1$ enquanto $\text{Tr}[\rho^2(t)] \leq 1$ (BREUER; PETRUCCIONE, 2002, seção 2.1.3).

Para o sistema em estudo, considerando-se estados iniciais Gaussianos a medida da sua pureza $\mu_k = \text{Tr}[\rho^2(t)]$ é determinada a partir do valor de v_k segundo a equação (CASTRO; DODONOV, 2006; CASTRO; SIQUEIRA; DODONOV, 2008)

$$\mu_k = \text{Tr}[\rho^2(t)] = \frac{1}{\sqrt{2v_k}}. \quad (6.52)$$

Da teoria geral do operador densidade, uma vez que $\text{Tr}[\rho^2(t)] \leq 1$, tem-se que $v_k \geq 1/2$. Um estado Gaussiano inicial puro implica em $v_k = 1/2$ enquanto um estado misto tem-se $v_k > 1/2$. Além disso, caracteriza-se o grau de compressão de cada um dos modos por meio do coeficiente principal de compressão ou invariante de compressão \mathcal{S}_k (LUKS; PERINOVÁ; HRADIL, 1988; DODONOV, 2002; SOARES et al., 2022), determinado como sendo

$$\mathcal{S}_k(t) = \frac{1}{2} \langle b_k^\dagger b_k + b_k b_k^\dagger \rangle - 2 | \langle b_k b_k \rangle |. \quad (6.53)$$

Para o estado coerente $\mathcal{S}_k = 1$, enquanto para um estado comprimido $\mathcal{S}_k < 1$. Neste sentido, tem-se então uma grandeza física associada a um dado modo k que identifica a natureza do estado quanto a ser ou não um estado comprimido. Para um dado estado Gaussiano no instante inicial, tem-se $\mathcal{S}_k(0)$ determinado como

$$\mathcal{S}_k(0) = 2\vartheta_k \exp(-2r_k), \quad (6.54)$$

dessa forma, para um estado Gaussiano inicial puro, para o qual $v_k = 1/2$, tem-se o valor da compressão determinado pelo parâmetro r_k . Para $r_k = 0$, tem-se um estado puro sem compressão, o que pode ser um estado coerente $|\alpha\rangle$, por exemplo.

No que se segue, discute-se o procedimento operacional para se determinar a forma explícita das matrizes das covariâncias simetrizadas, considerando os estados iniciais como sendo térmicos comprimidos parametrizados segundo a equação 6.49. No estudo realizado por Castro e Dodonov (2014), tanto para o estado inicial do modo quanto do detector, assumiu-se o estado térmico, uma vez que o propósito do problema era a descrição da natureza dos estados quânticos evoluídos de cada um dos subsistemas. Nestas condições tem-se que $\mathfrak{w}_4^{kk} = 0$, de modo que o efeito da compressão no estado inicial não pode ser investigado. Para o presente estudo, interessa saber como a compressão dos estados iniciais afetam as propriedades de correlação entre o modo e o detector, quando “squeezing” é levado em consideração. Para se determinar a forma funcional da matriz das covariâncias simetrizadas, considera-se a solução da matriz \mathbf{U} determinada por Castro e Dodonov (2014) aplicada ao estado inicial 6.49. O Procedimento operacional para se determinar as matrizes das covariâncias se baseia no mesmo apresentado por Solak (2021, apêndice B), mas cujo propósito foi determinar as propriedades dos modos como as energias de flutuações quânticas e pureza para dois modos parametricamente excitados, nos quais os efeitos de dissipação são levados em consideração, mas cujos resultados finais são obtidos assumindo como estados Gaussianos iniciais os estados térmicos com $\mathfrak{w}_4^{kk} = 0$.

Seguindo os procedimentos algébricos apresentados por Solak (2021), tem-se que a solução da matriz das covariâncias pode ser escrita como a soma de dois fatores, $\mathbf{V}_i^j(t)$ e $\mathbf{L}_i^j(t, \gamma)$ escritos na forma

$$\mathbf{M}_i^j(t) = \mathbf{V}_i^j(t) + \mathbf{L}_i^j(t, \gamma), \quad (6.55)$$

a parte livre de dissipação dos blocos de matrizes das covariâncias $\mathbf{V}_i^j(t)$ são escritos na forma geral (em concordância com as equações 6.32 - 6.35)

$$\mathbf{V}_i^j(t) = \mathbf{U}_i^1 \mathbf{M}_1^1(0) \mathbf{U}_1^j + \mathbf{U}_i^2 \mathbf{M}_2^2(0) \mathbf{U}_2^j. \quad (6.56)$$

Os termos $\mathbf{L}_i^j(t, \gamma)$ dependentes dos termos de difusão \mathbf{D}_2^2 , são dados por

$$\mathbf{L}_i^j(t, \gamma) = \int_0^t \left[\mathbf{U}_i^1(t - \tau) \mathbf{D}_1^1 \mathbf{U}_1^j(t - \tau) \right] d\tau, \quad (6.57)$$

e correspondem ao canal de dissipação atuando no detector somente. Nesta formulação, adota-se para as matrizes \mathbf{U}_i^j em 6.36 - 6.38 as formas

$$\mathbf{U}_i^j = \sum_{p=1}^3 \mathbf{u}_p^{ij} \sigma_p + \mathbf{u}_4^{ij} \sigma_4, \quad (6.58)$$

a partir das soluções 6.36 - 6.39 tem-se que para as formas \mathbf{u}_p^{ij} as seguintes matrizes:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} F_- & 0 \\ 0 & -K_- \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{\zeta}{2} \begin{bmatrix} 0 & G_- \\ -G_- & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.59)$$

$$\mathbf{u}_3 = -\frac{i\zeta}{2} \begin{bmatrix} 0 & G_+ \\ G_+ & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} F_+ & 0 \\ 0 & K_+ \end{bmatrix}. \quad (6.60)$$

Nota-se que o procedimento algébrico apresentado por Solak (2021) é baseado na álgebra das matrizes de Pauli. Para se determinar os blocos $\mathbf{V}_i^j(t)$ é necessário efetuar produtos envolvendo até três matrizes de Pauli, juntamente com a matriz identidade de ordem 2. Para tal propósito aplica-se o procedimento algébrico de Solak (2021) para se escrever a forma final das matrizes $\mathbf{V}_i^j(t)$ e $\mathbf{L}_i^j(t, \gamma)$. Dessa forma, tem-se que

$$\mathbf{V} = \sum_{s=1}^3 \mathbf{v}_s \sigma_s + \mathbf{v}_4 \sigma_4, \quad (6.61)$$

onde os coeficientes \mathbf{v}_s são determinados por uma composição de produtos de matrizes de

ordem 2, conforme (SOLAK, 2021, pag. 98):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \imath (u_2 \mathfrak{w}_4 u_3 - u_3 \mathfrak{w}_4 u_2) + u_1 \mathfrak{w}_1 u_1 - u_2 \mathfrak{w}_1 u_2 - u_3 \mathfrak{w}_1 u_3 \\ &+ u_1 \mathfrak{w}_4 u_4 + u_4 \mathfrak{w}_1 u_4 + u_4 \mathfrak{w}_4 u_1, \end{aligned} \quad (6.62)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \imath (u_3 \mathfrak{w}_1 u_4 + u_3 \mathfrak{w}_4 u_1) - \imath (u_1 \mathfrak{w}_4 u_3 + u_4 \mathfrak{w}_1 u_3) + u_1 \mathfrak{w}_1 u_2 \\ &+ u_2 \mathfrak{w}_1 u_1 + u_2 \mathfrak{w}_4 u_4 + u_4 \mathfrak{w}_4 u_2, \end{aligned} \quad (6.63)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 &= \imath (u_1 \mathfrak{w}_4 u_2 + u_4 \mathfrak{w}_1 u_2) - \imath (u_2 \mathfrak{w}_1 u_4 + u_2 \mathfrak{w}_4 u_1) + u_1 \mathfrak{w}_1 u_3 \\ &+ u_3 \mathfrak{w}_1 u_1 + u_3 \mathfrak{w}_4 u_4 + u_4 \mathfrak{w}_4 u_3, \end{aligned} \quad (6.64)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_4 &= \imath (u_3 \mathfrak{w}_1 u_2 - u_2 \mathfrak{w}_1 u_3) + u_1 \mathfrak{w}_1 u_4 + u_1 \mathfrak{w}_4 u_1 + u_4 \mathfrak{w}_1 u_1 \\ &+ u_3 \mathfrak{w}_4 u_3 + u_2 \mathfrak{w}_4 u_2 + u_4 \mathfrak{w}_4 u_4, \end{aligned} \quad (6.65)$$

as estruturas \mathfrak{w}_k são dadas segundo as formas

$$\mathfrak{w}_1 = \begin{bmatrix} \mathfrak{c}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{c}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{w}_4 = \begin{bmatrix} \mathfrak{s}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{s}_2 \end{bmatrix}. \quad (6.66)$$

Para se determinar as formas explícitas das funções $\mathbf{v}(t)$ efetua-se as operações matriciais em 6.62 - 6.65. O resultado de tal operação, segundo o procedimento algébrico em Solak (2021), e determinado neste trabalho, resulta nas estruturas de matrizes:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \mathfrak{E}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{E}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \mathfrak{R} \\ -\mathfrak{R} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & \mathfrak{S} \\ \mathfrak{S} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} \mathfrak{B}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{B}_2 \end{bmatrix}, \quad (6.67)$$

os termos referentes as estruturas matriciais \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_4 são dados por

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{1}{4} [(F_+^2 + F_-^2) \mathfrak{c}_1 + \zeta^2 (G_+^2 + G_-^2) \mathfrak{c}_2 - 2\mathfrak{s}_2 \zeta^2 G_+ G_- + 2\mathfrak{s}_1 F_+ F_-], \quad (6.68)$$

$$\mathfrak{E}_2 = \frac{1}{4} [(K_+^2 + K_-^2) \mathfrak{c}_2 + \zeta^2 (G_+^2 + G_-^2) \mathfrak{c}_1 + 2\mathfrak{s}_1 \zeta^2 G_+ G_- - 2\mathfrak{s}_2 K_+ K_-], \quad (6.69)$$

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{1}{4} [(F_+^2 + F_-^2) \mathfrak{s}_1 - \zeta^2 (G_+^2 + G_-^2) \mathfrak{s}_2 + 2\mathfrak{c}_2 \zeta^2 G_+ G_- + 2\mathfrak{c}_1 F_+ F_-], \quad (6.70)$$

$$\mathfrak{B}_2 = \frac{1}{4} [(K_+^2 + K_-^2) \mathfrak{s}_2 - \zeta^2 (G_+^2 + G_-^2) \mathfrak{s}_1 - 2\mathfrak{c}_1 \zeta^2 G_+ G_- - 2\mathfrak{c}_2 K_+ K_-], \quad (6.71)$$

enquanto as estruturas matriciais \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 são escritas na forma

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= -\frac{\zeta}{4} [(F_+ G_+ + F_- G_-) \mathfrak{c}_1 - (K_+ G_+ + K_- G_-) \mathfrak{c}_2 \\ &+ (F_+ G_- + F_- G_+) \mathfrak{s}_1 + (K_+ G_- + K_- G_+) \mathfrak{s}_2], \end{aligned} \quad (6.72)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= -\frac{\imath \zeta}{4} [(F_+ G_+ + F_- G_-) \mathfrak{s}_1 + (K_+ G_+ + K_- G_-) \mathfrak{s}_2 \\ &+ (F_+ G_- + F_- G_+) \mathfrak{c}_1 - (K_+ G_- + K_- G_-) \mathfrak{c}_2], \end{aligned} \quad (6.73)$$

onde se observa a proporcionalidade com a constante de acoplamento ζ . No caso do desacoplamento entre o modo da cavidade e o detector verifica-se que \mathfrak{R} e \mathfrak{S} são iguais a zero e, portanto, a correlação entre os modos desaparece.

Na ausência de dissipação, quando as soluções 6.45 - 6.48 são aplicadas, tem-se as seguintes correspondências $\mathfrak{E}_k \rightarrow \mathfrak{E}_k^{(0)}$, $\mathfrak{B}_k \rightarrow \mathfrak{B}_k^{(0)}$, $\mathfrak{R}_k \rightarrow \mathfrak{R}_k^{(0)}$ e $\mathfrak{S}_k \rightarrow \mathfrak{S}_k^{(0)}$. Nesta situação particular, tem-se como resultado as soluções

$$\mathbf{M}_k^k(t) = \mathfrak{E}_k^{(0)} \sigma_1 + \mathfrak{B}_k^{(0)} \sigma_4, \quad (6.74)$$

onde $\mathfrak{E}_k^{(0)}$ é a energia média adimensional associada ao modo k , e $\mathfrak{B}_k^{(0)}$ corresponde ao valor médio do operador adimensional b_k^2 (CASTRO; DODONOV, 2014, seção IV). No entanto, o de maior interesse é a solução completa na qual o efeito do reservatório no modo 2 (detector) é levado em consideração. Para isso, é preciso determinar o valor dos blocos de matrizes $\mathbf{L}_i^j(t, \gamma)$, considerando-se estados iniciais Gaussianos térmicos comprimidos. No entanto, note que os elementos $\mathbf{L}_i^j(t, \gamma)$ dependem apenas das matrizes de difusão \mathbf{D} e de evolução temporal do sistema \mathbf{D} . Isto implica que o resultado obtido por Castro e Dodonov (2014), referente à parte dissipativa, pode ser aplicado.

O estado inicial não afeta a natureza da dissipação na dinâmica das matrizes de covariância. Mesmo assim, considera-se importante apresentar a estrutura da solução e o procedimento algébrico para se determinar os blocos de matrizes $\mathbf{L}_i^j(t, \gamma)$, uma vez que em (CASTRO; DODONOV, 2014) este resultado não está apresentado de forma explícita. Portanto, tem-se que

$$\mathbf{L}_i^j(t, \gamma) = \int_0^t [\mathbf{U}_i^1(t - \tau) \mathbf{D}_2^2 \mathbf{U}_1^j(t - \tau)] d\tau, \quad (6.75)$$

podendo ser escrita na forma

$$\mathbf{L}_i^j(t, \gamma) = \int_0^t \mathbf{I}_i^j(t - \tau) d\tau, \quad (6.76)$$

com $\mathbf{I}_i^j(t - \tau)$ escrito em termos das matrizes de Pauli na forma

$$\mathbf{I} = \sum_{p=1}^3 \boldsymbol{\eta}_p(t - \tau) \sigma_p + \boldsymbol{\eta}_4(t - \tau) \sigma_4, \quad (6.77)$$

os fatores $\boldsymbol{\eta}_k(t - \tau)$ são dados na forma (SOLAK, 2021, apêndice B)

$$\boldsymbol{\eta}_1(t - \tau) = 2[(\mathbf{u}_4(\mathbf{t}) \partial \mathbf{u}_4(\mathbf{t}) + \mathbf{u}_1(\mathbf{t}) \partial \mathbf{u}_1(\mathbf{t})) - (\mathbf{u}_2(\mathbf{t}) \partial \mathbf{u}_2(\mathbf{t}) + \mathbf{u}_3(\mathbf{t}) \partial \mathbf{u}_3(\mathbf{t}))], \quad (6.78)$$

$$\boldsymbol{\eta}_2(t - \tau) = 2[(\mathbf{u}_2(\mathbf{t}) \partial \mathbf{u}_1(\mathbf{t}) + \mathbf{u}_1(\mathbf{t}) \partial \mathbf{u}_2(\mathbf{t})) + \imath (\mathbf{u}_3(\mathbf{t}) \partial \mathbf{u}_4(\mathbf{t}) - \mathbf{u}_4(\mathbf{t}) \partial \mathbf{u}_3(\mathbf{t}))], \quad (6.79)$$

$$\boldsymbol{\eta}_3(t - \tau) = 2[(\mathbf{u}_3(\mathbf{t}) \partial \mathbf{u}_1(\mathbf{t}) + \mathbf{u}_1(\mathbf{t}) \partial \mathbf{u}_3(\mathbf{t})) + \imath (\mathbf{u}_4(\mathbf{t}) \partial \mathbf{u}_2(\mathbf{t}) - \mathbf{u}_2(\mathbf{t}) \partial \mathbf{u}_4(\mathbf{t}))], \quad (6.80)$$

$$\boldsymbol{\eta}_4(t - \tau) = 2[(\mathbf{u}_4(\mathbf{t}) \partial \mathbf{u}_1(\mathbf{t}) + \mathbf{u}_1(\mathbf{t}) \partial \mathbf{u}_4(\mathbf{t})) + \imath (\mathbf{u}_3(\mathbf{t}) \partial \mathbf{u}_2(\mathbf{t}) - \mathbf{u}_2(\mathbf{t}) \partial \mathbf{u}_3(\mathbf{t}))], \quad (6.81)$$

onde é assumida a notação $\mathbf{t} = t - \tau$ e ∂^{kk} escrita na forma

$$\partial^{kk} = \gamma_k \tilde{\nu}_k, \quad (6.82)$$

(índices repetidos significa soma) de modo que

$$\mathfrak{d} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \tilde{\nu}_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \tilde{\nu}_2 \end{bmatrix}, \quad (6.83)$$

com γ_1 igual a zero devido ao fato do modo da cavidade ser ideal e não haver acoplamento com reservatório. Note que para a notação aplicada nesta seção, tem-se que $\gamma_2 = \gamma$ e $\tilde{\nu}_2 = \tilde{\nu}$ associando as constantes definidas para a equação mestra. Logo, uma vez

$$\mathbf{L}_i^j(t, \gamma) = \int_0^t \left[\sum_{p=1}^3 \eta_p^{ij}(t - \tau) \sigma_p + \eta_4^{ij}(t - \tau) \sigma_4 \right] d\tau, \quad (6.84)$$

tem-se como resultado final a forma

$$\mathbf{L}_i^j(t, \gamma) = \sum_{p=1}^3 \mathfrak{L}_p^{ij}(t) \sigma_p + \mathfrak{L}_4^{ij}(t) \sigma_4, \quad (6.85)$$

para a qual

$$\mathfrak{L}_p^{ij}(t) = \int_0^t \eta_p^{ij}(t - \tau) d\tau, \quad \mathfrak{L}_4^{ij}(t) = \int_0^t \eta_4^{ij}(t - \tau) d\tau \quad p = 1, 2, 3. \quad (6.86)$$

Portanto, a partir das formas explícitas dos elementos de matriz de evolução temporal \mathbf{U} pode se determinar as formas explícitas da parte dissipativa da matriz das covariâncias. Por outro lado, as expressões 6.86 permitem implementar os cálculos diretamente em plataformas de computação simbólica como o Maple ou Mathematica.

As formas explícitas para os elementos $\eta_k(t - \tau)$ são dadas por

$$\eta_1(\mathbf{t}) = \frac{\gamma \tilde{\nu}}{2} \begin{bmatrix} \zeta^2 [(G_-(\mathbf{t}))^2 + (G_+(\mathbf{t}))^2] & 0 \\ 0 & (K_-(\mathbf{t}))^2 + (K_+(\mathbf{t}))^2 \end{bmatrix}, \quad (6.87)$$

$$\eta_2(\mathbf{t}) = \frac{\gamma \tilde{\nu} \zeta}{2} \begin{bmatrix} 0 & K_+(\mathbf{t})G_+(\mathbf{t}) + K_-(\mathbf{t})G_-(\mathbf{t}) \\ -K_+(\mathbf{t})G_+(\mathbf{t}) - K_-(\mathbf{t})G_-(\mathbf{t}) & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.88)$$

$$\eta_3(\mathbf{t}) = \frac{i\gamma \tilde{\nu} \zeta}{2} \begin{bmatrix} 0 & K_+(\mathbf{t})G_-(\mathbf{t}) + K_-(\mathbf{t})G_+(\mathbf{t}) \\ K_+(\mathbf{t})G_-(\mathbf{t}) + K_-(\mathbf{t})G_+(\mathbf{t}) & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.89)$$

$$\eta_4(\mathbf{t}) = \frac{\gamma \tilde{\nu}}{2} \begin{bmatrix} \zeta^2 G_+(\mathbf{t})G_-(\mathbf{t}) & 0 \\ 0 & -K_+(\mathbf{t})K_-(\mathbf{t}) \end{bmatrix}, \quad (6.90)$$

nota-se que os parâmetros do estado inicial não aparecem explicitamente nas equações 6.87 - 6.90. Apenas parâmetros do sistema estão evidenciados, podendo-se afirmar que o efeito da dissipação na dinâmica do sistema independe das características do estado inicial.

Dessa forma, tem-se que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{l}_1(\mathbf{t}) &= \frac{\gamma\tilde{\nu}}{2} \begin{bmatrix} \zeta^2 \int_0^t [(G_-(\mathbf{t}))^2 + (G_+(\mathbf{t}))^2] d\tau & 0 \\ 0 & \int_0^t (K_-(\mathbf{t}))^2 + (K_+(\mathbf{t}))^2 d\tau \end{bmatrix}, \\
\mathfrak{l}_2(\mathbf{t}) &= \frac{\gamma\tilde{\nu}\zeta}{2} \begin{bmatrix} 0 & \int_0^t [K_+(\mathbf{t})G_+(\mathbf{t}) + K_-(\mathbf{t})G_-(\mathbf{t})] d\tau \\ -\int_0^t [K_+(\mathbf{t})G_+(\mathbf{t}) + K_-(\mathbf{t})G_-(\mathbf{t})] d\tau & 0 \end{bmatrix}, \\
\mathfrak{l}_3(\mathbf{t}) &= \frac{i\gamma\tilde{\nu}\zeta}{2} \begin{bmatrix} 0 & \int_0^t [K_+(\mathbf{t})G_-(\mathbf{t}) + K_-(\mathbf{t})G_+(\mathbf{t})] d\tau \\ \int_0^t [K_+(\mathbf{t})G_-(\mathbf{t}) + K_-(\mathbf{t})G_+(\mathbf{t})] d\tau & 0 \end{bmatrix}, \\
\mathfrak{l}_4(\mathbf{t}) &= \frac{\gamma\tilde{\nu}}{2} \begin{bmatrix} \zeta^2 \int_0^t G_+(\mathbf{t})G_-(\mathbf{t})d\tau & 0 \\ 0 & \int_0^t K_+(\mathbf{t})K_-(\mathbf{t})d\tau \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Os elementos dos blocos de matrizes $\mathfrak{l}_1(\mathbf{t})$ e $\mathfrak{l}_4(\mathbf{t})$ foram determinados por Castro e Dodonov (2014), que determina o efeito da dissipação nas propriedades quânticas do modo da cavidade e do detector. No presente trabalho, determinar os fatores $\mathfrak{l}_2(\mathbf{t})$ e $\mathfrak{l}_3(\mathbf{t})$ é relevante porque são os termos necessários para a análise da dinâmica das correlações entre o modo da cavidade e do detector, que completam os resultados de 6.72 e 6.73. A solução final, na notação estabelecida por Solak (2021), os blocos \mathbf{M}_i^j de matrizes das covariâncias são expressos na forma

$$\mathbf{M}_1^1 = \mathbf{m}_1^{11}\sigma_1 + \mathbf{m}_2^{11}\sigma_2 + \mathbf{m}_3^{11}\sigma_3 + \mathbf{m}_4^{11}\sigma_4, \quad (6.91)$$

$$\mathbf{M}_2^2 = \mathbf{m}_1^{22}\sigma_1 + \mathbf{m}_2^{22}\sigma_2 + \mathbf{m}_3^{22}\sigma_3 + \mathbf{m}_4^{22}\sigma_4, \quad (6.92)$$

$$\mathbf{M}_1^2 = \mathbf{m}_1^{12}\sigma_1 + \mathbf{m}_2^{12}\sigma_2 + \mathbf{m}_3^{12}\sigma_3 + \mathbf{m}_4^{12}\sigma_4, \quad (6.93)$$

$$\mathbf{M}_2^1 = \mathbf{m}_1^{21}\sigma_1 + \mathbf{m}_2^{21}\sigma_2 + \mathbf{m}_3^{21}\sigma_3 + \mathbf{m}_4^{21}\sigma_4. \quad (6.94)$$

com as matrizes \mathbf{w}_k dadas segundo as equações

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1(t) & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_2(t) \end{bmatrix} \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{R}(t) \\ -\mathcal{R}(t) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{K}(t) \\ \mathcal{K}(t) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1(t) & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_1(t) \end{bmatrix}. \quad (6.95)$$

A partir de resultados determinados por (CASTRO; DODONOV, 2014, seção IV,

Eq. 32 - 39), obte-se para as formas das funções $\mathcal{E}_k(t)$ e $\mathcal{B}_k(t)$ as expressões

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \frac{1}{4} \left[(F_+^2 + F_-^2) \mathbf{c}_1 + \zeta^2 (G_+^2 + G_-^2) \mathbf{c}_2 - 2\mathbf{s}_2 \zeta^2 G_+ G_- + 2\mathbf{s}_1 F_+ F_- \right] \\ &+ \frac{\gamma}{2} \tilde{\nu} \zeta^2 (\Theta_+ + \Theta_-), \end{aligned} \quad (6.96)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &= \frac{1}{4} \left[(K_+^2 + K_-^2) \mathbf{c}_2 + \zeta^2 (G_+^2 + G_-^2) \mathbf{c}_1 + 2\mathbf{s}_1 \zeta^2 G_+ G_- - 2\mathbf{s}_2 K_+ K_- \right] \\ &+ \frac{\gamma}{2} \tilde{\nu} (\Xi_+ + \Xi_-), \end{aligned} \quad (6.97)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \frac{1}{4} \left[(F_+^2 + F_-^2) \mathbf{s}_1 - \zeta^2 (G_+^2 + G_-^2) \mathbf{s}_2 + 2\mathbf{c}_2 \zeta^2 G_+ G_- + 2\mathbf{c}_1 F_+ F_- \right] \\ &+ \frac{\gamma}{2} \tilde{\nu} \zeta^2 (\Theta_+ - \Theta_-), \end{aligned} \quad (6.98)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2 &= \frac{1}{4} \left[(K_+^2 + K_-^2) \mathbf{s}_2 - \zeta^2 (G_+^2 + G_-^2) \mathbf{s}_1 - 2\mathbf{c}_1 \zeta^2 G_+ G_- - 2\mathbf{c}_2 K_+ K_- \right] \\ &+ \frac{\gamma}{2} \tilde{\nu} (\Xi_+ - \Xi_-), \end{aligned} \quad (6.99)$$

com as definições para Θ_{\pm} , Ξ_{\pm} definidas em (CASTRO; DODONOV, 2014) por meio das equações

$$\Theta_{\pm} = \frac{E_{\pm}}{\Gamma_{\mp}} \left[E_{\pm} S_{\mp} (\beta_{\pm} S_{\mp} - C_{\mp}) + \tilde{S}_{\pm} \right], \quad (6.100)$$

$$\Xi_{\pm} = \frac{E_{\pm}}{\Gamma_{\mp}} \left\{ E_{\pm} S_{\mp} \left[\eta_{\pm} S_{\mp} + C_{\mp} (\zeta^2 \pm 4\beta\beta_{\mp}) \right] + \tilde{S}_{\pm} (\zeta^2 \pm 4\beta\beta_{\pm}) \right\}, \quad (6.101)$$

com as funções Γ_{\pm} e \tilde{S}_{\pm} escritas na forma

$$\Gamma_{\pm} = \zeta^2 \pm 2\beta\gamma, \quad \tilde{S}_{\pm} = \sinh(\beta_{\pm} t) / \beta_{\pm}, \quad (6.102)$$

e com os parâmetros η_{\pm} dados por

$$\eta_{\pm} = \zeta^2 (\mp 3\beta - \gamma/2) \pm 4\beta\beta_{\mp}^2. \quad (6.103)$$

Nota-se que as soluções para as funções \mathcal{E}_k e \mathcal{B}_k são mais gerais que as obtidas por Castro e Dodonov (2014) devido aos termos proporcionais aos fatores \mathbf{s}_k . Assim, tem-se as funções necessárias para se determinar as energias médias tanto do modo quanto do detector bem como seus correspondentes valores de pureza, levando-se em conta o efeito de compressão do estado inicial que potencializa a não clássicidade dos estados quânticos iniciais.

No que se segue, determina-se as partes dissipativas das funções $\mathcal{R}(t)$ e $\mathcal{K}(t)$ que

estão nas matrizes blocos fora-da-diagonal. Desta forma, tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(t) &= -\frac{\zeta}{4} [(F_+G_+ + F_-G_-)\mathbf{c}_1 - (K_+G_+ + K_-G_-)\mathbf{c}_2 \\ &\quad + (F_+G_- + F_-G_+)\mathbf{s}_1 + (K_+G_- + K_-G_+)\mathbf{s}_2] \\ &\quad + \frac{\gamma\tilde{\nu}\zeta}{2} \int_0^t [K_+(\mathbf{t})G_+(\mathbf{t}) + K_-(\mathbf{t})G_-(\mathbf{t})] d\tau,\end{aligned}\tag{6.104}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(t) &= -\frac{i\zeta}{4} [(F_+G_+ + F_-G_-)\mathbf{s}_1 + (K_+G_+ + K_-G_-)\mathbf{s}_2 \\ &\quad + (F_+G_- + F_-G_+)\mathbf{c}_1 - (K_+G_- + K_-G_+)\mathbf{c}_2] \\ &\quad + \frac{i\gamma\tilde{\nu}\zeta}{2} \int_0^t [K_+(\mathbf{t})G_-(\mathbf{t}) + K_-(\mathbf{t})G_+(\mathbf{t})] d\tau,\end{aligned}\tag{6.105}$$

efetuando o processo de integração em 6.104 e 6.105 e aplicando as formas das funções K_{\pm} e G_{\pm} , tem-se como resultado final:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(t) &= -\frac{\zeta}{4} [(F_+G_+ + F_-G_-)\mathbf{c}_1 - (K_+G_+ + K_-G_-)\mathbf{c}_2 \\ &\quad + (F_+G_- + F_-G_+)\mathbf{s}_1 + (K_+G_- + K_-G_+)\mathbf{s}_2] \\ &\quad + \frac{\gamma\tilde{\nu}\zeta}{2} (\Upsilon_+ + \Upsilon_-),\end{aligned}\tag{6.106}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(t) &= -\frac{i\zeta}{4} [(F_+G_+ + F_-G_-)\mathbf{s}_1 + (K_+G_+ + K_-G_-)\mathbf{s}_2 \\ &\quad + (F_+G_- + F_-G_+)\mathbf{c}_1 - (K_+G_- + K_-G_+)\mathbf{c}_2] \\ &\quad + \frac{i\gamma\tilde{\nu}\zeta}{2} (\Upsilon_+ - \Upsilon_-),\end{aligned}\tag{6.107}$$

onde a função Υ_{\pm} é dada por

$$\begin{aligned}\Upsilon_{\pm} &= \frac{E_{\pm}^2}{R_{\mp}^2 - \beta_{\pm}^2} \left[(\beta_+\beta_- - R_{\mp}^2)S_{\mp}^2 - (\beta_{\pm} - \beta_{\mp})C_{\mp}S_{\mp} + \frac{\beta_{\pm} - \beta_{\mp}}{2\beta_{\pm}} \right] \\ &\quad - \frac{\beta_{\mp} - \beta_{\pm}}{2(R_{\mp}^2 - \beta_{\pm}^2)\beta_{\mp}}.\end{aligned}\tag{6.108}$$

Nota-se que se o modo da cavidade estiver desacoplado do detector, com $\zeta = 0$, os fatores de correlação $\mathcal{R}(t)$ e $\mathcal{K}(t)$ são iguais a zero, de forma que não há correlação entre os dois graus de liberdade do sistema. Portanto, tem-se como resultado final as matrizes de blocos de matrizes das covariâncias. Para os blocos diagonais, obtém-se

$$\mathbf{M}_k^k(t) = \mathcal{E}_k(t)\sigma_1 + \mathcal{B}_k(t)\sigma_4,\tag{6.109}$$

que encerram as propriedades relativas a cada um dos modos, como pureza e compressão. Para os blocos de matrizes não diagonais, tem-se que

$$\mathbf{M}_1^2(t) = \mathcal{R}(t)\sigma_2 + \mathcal{K}(t)\sigma_3,\tag{6.110}$$

nos quais as informações relativas as correlações está contida. Para tais blocos, tem-se a condição $\mathcal{K}(0) = \mathcal{R}(0) = 0$, implicando que no instante inicial os modos estão em um estado composto separável.

Desta forma, construiu-se as soluções para as matrizes das covariâncias para se estudar a dinâmica entre o modo de uma cavidade e o detector dissipativo, considerando estados iniciais Gaussianos os estados térmicos comprimidos. Destes resultados tem-se então as informações suficientes para um estudo completo das propriedades de cada um dos subsistemas quânticos bem como para a propriedades de correlação quântica. A presença da compressão é relevante para aprimorar a natureza não-clássica dos estados quânticos, e pode servir de robustez na proteção das propriedades de correlação no decorrer do tempo. Para tal propósito é necessário estudar o comportamento temporal de medidas de emaranhamento, como as introduzidas por Castro e Dodonov (2002), como a negatividade logarítmica (PLENIO, 2005; VIDAL; WERNER, 2002) a ser considerada no contexto das variáveis contínuas (ADESSO; ILLUMINATI, 2005) e outras medidas como a discórdia quântica (ADESSO; ILLUMINATI, 2005). Esta análise estará sendo considerada no contexto do formalismo simplético para sistemas de variáveis contínuas (SERAFINI, 2017).

7 CONCLUSÃO

Este trabalho foi estruturado de forma a encadear os tópicos abordados da maneira mais fluída possível. No desenvolvimento do texto, apresenta-se a segunda quantização da luz e algumas características relevantes que derivam desse processo, como os estados do campo eletromagnético descritos em termos da ação de operadores de aniquilação e criação em estados de número. A partir destes elementos associados ao campo eletromagnético foi possível abordar, no Capítulo 4, a formulação não-relativística proposta por Law para o Efeito Casimir Dinâmico, onde se demonstrou os aspectos algébricos para se obter o hamiltoniano efetivo quadrático em termos dos operadores bosônicos de aniquilação e criação, com o qual se pode descrever a dinâmica do estado do campo eletromagnético no interior da cavidade ressonante parametricamente excitada.

Um dos pontos no qual concentrou-se o trabalho foi o desenvolvimento dos cálculos apresentados, muitas vezes, de forma resumida em textos da área, criando uma dificuldade para os pesquisadores iniciantes neste campo de estudo. Contudo, este conteúdo tornou-se fundamental para tornar o assunto mais compreensível, além de ter sido essencial para iniciação do autor como pesquisador na área de Ótica Quântica. Por exemplo, no Capítulo 5, revisou-se os cálculos que permitem descrever a dissipação em estados quânticos por meio da Equação Mestra, que descreve a evolução temporal de um sistema acoplado a um reservatório térmico por meio do operador densidade associado a este sistema, desde que o acoplamento deste com o reservatório térmico seja fraco.

A partir da Equação Mestra bipartida em sua forma compacta, levando em conta um sistema que possui um hamiltoniano quadrático e estado inicial gaussiano, pôde-se obter as equações para evolução temporal dos primeiro e segundo momentos de um estado gaussiano, que determinam a dinâmica do sistema no contexto das variáveis contínuas. Essa formulação foi empregada para se analisar o problema da detecção de fótons gerados pelo Efeito Casimir Dinâmico por meio de um detector não ideal, modelado por um circuito RLC quantizado, descrito também em termos dos operadores bosônicos.

Considerou-se um cenário onde apenas um modo do campo eletromagnético dentro da cavidade é excitado pelo movimento da parede, o que é justificado fisicamente pela geometria da cavidade e pela escolha de uma amplitude de excitação paramétrica pequena. Também foi levado em conta um regime onde tanto o acoplamento entre o modo da cavidade e o detector, quanto o acoplamento deste com o reservatório térmico são fracos, permitindo assim a descrição do problema por meio das equações que determinam a dinâmica dos primeiro e segundo momentos de um estado gaussiano, apresentadas no Capítulo 5.

Considerou-se como estado gaussiano inicial do sistema, tanto para modo da cavidade quanto para o detector, o estado térmico comprimido. Assim, obteve-se a solução

para matriz das covariâncias (ou matriz dos segundos momentos) que determina a evolução temporal do sistema no contexto das variáveis contínuas. Essa solução é dada em forma de blocos de matrizes de ordem 2, que são determinados pelas matrizes de Pauli e pelas funções $\mathcal{E}_k(t)$, $\mathcal{B}_k(t)$, $\mathcal{R}(t)$ e $\mathcal{K}(t)$, que são escritas em termos dos parâmetros que configuram o sistema.

REFERÊNCIAS

- ADESSO, G.; ILLUMINATI, F. Gaussian measures of entanglement versus negativities: Ordering of two-mode gaussian states. *Physical Review A*, APS, v. 72, n. 3, p. 032334, 2005.
- AGNESI, A. et al. Mir: An experiment for the measurement of the dynamical casimir effect. *Journal of Physics: Conference Series*, v. 161, n. 1, p. 012028, apr 2009. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/161/1/012028>>.
- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F. E. *Mathematical Methods for Physicists: A comprehensive guide*. Waltham: Elsevier, 2013.
- BARNES, B.; FULFORD, G. R. *Mathematical modelling with case studies: a differential equations approach using Maple and MATLAB*. [S.l.]: CRC Press, 2011. v. 25.
- BOGOLIUBOV, N.; MITROPOLSKY, Y. *Asymptotic methods in nonlinear mechanics*. Gordon Breach, New York, 1961.
- BORDAG, M. et al. *Advances in the Casimir Effect*. New York: Oxford University Press, 2009.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B. *Elementary differential equations and boundary value problems*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2017.
- BRAGGIO, C. et al. Semiconductor microwave mirror for a measurement of the dynamical Casimir effect. *Review of Scientific Instruments*, v. 75, n. 11, p. 4967–4970, 2004. ISSN 00346748.
- BRAUNSTEIN, S. L.; LOOCK, P. V. Quantum information with continuous variables. *Reviews of modern physics*, APS, v. 77, n. 2, p. 513, 2005.
- BREUER, H. P.; PETRUCCIONE, F. *The Theory of Open Quantum Systems*. New York: Oxford University Press, 2002.
- CASTRO, A. D.; DODONOV, V. Purity and squeezing exchange between coupled bosonic modes. *Physical Review A*, APS, v. 73, n. 6, p. 065801, 2006.
- CASTRO, A. D.; DODONOV, V. D. Squeezing exchange and entanglement between resonantly coupled modes. *Journal of Russian Laser Research*, Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers, v. 23, p. 93–121, 2002.
- CASTRO, A. de; SIQUEIRA, R.; DODONOV, V. Effect of dissipation and reservoir temperature on squeezing exchange and emergence of entanglement between two coupled bosonic modes. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 372, n. 4, p. 367–374, 2008.
- CASTRO, A. S. M.; CACHEFFO, A.; DODONOV, V. V. Influence of the field-detector coupling strength on the dynamical Casimir effect. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, v. 87, n. 3, 2013. ISSN 10502947.
- CASTRO, A. S. M.; DODONOV, V. V. Parametric excitation of a cavity field mode coupled to a harmonic oscillator detector. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 46, n. 39, 2013. ISSN 17518113.

- CASTRO, A. S. M.; DODONOV, V. V. Continuous monitoring of the dynamical Casimir effect with a damped detector. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, v. 89, n. 6, 2014. ISSN 10941622.
- CERF, N. J.; LEUCHS, G.; POLZIK, E. S. *Quantum information with continuous variables of atoms and light*. [S.l.]: World Scientific, 2007.
- COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. *Quantum Mechanics: Volume 1: Basic concepts, tools, and applications*. 2. ed. Weinheim: Wiley–VCH, 2020.
- COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. *Quantum Mechanics: Volume 2: Angular momentum, spin, and approximation methods*. 2. ed. Weinheim: Wiley–VCH, 2020.
- COHEN-TANNOUDJI, C.; DUPONT-ROC, J.; GRYNBERG, G. *Photons and Atoms: Introduction to quantum electrodynamics*. United States of America: John Wiley & Sons, 1989.
- DALVIT, D. et al. *Casimir Physics*. Berlin: Springer, 2011.
- DODONOV, A. V.; DODONOV, V. V. Photon statistics in the dynamical Casimir effect modified by a harmonic oscillator detector. *Physica Scripta*, v. 87, n. T153, 2013. ISSN 00318949.
- DODONOV, V. Nonclassical states in quantum optics: a squeezed review of the first 75 years. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, IOP Publishing, v. 4, n. 1, p. R1, 2002.
- DODONOV, V. Fifty years of the dynamical casimir effect. *Physics*, MDPI, v. 2, n. 1, p. 67–104, 2020.
- DODONOV, V.; KLIMOV, A.; NIKONOV, D. Quantum phenomena in nonstationary media. *Physical Review A*, APS, v. 47, n. 5, p. 4422, 1993.
- DODONOV, V.; MANKO, O. Quantum damped oscillator in a magnetic field. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 130, n. 1, p. 353–366, 1985. ISSN 0378-4371.
- DODONOV, V. V.; KLIMOV, A. B. Generation and detection of photons in a cavity with a resonantly oscillating boundary. *Physical Review A*, APS, v. 53, n. 4, p. 2664, 1996.
- DODONOV, V. V.; MAN'KO, V. I. *Theory of nonclassical states of light*. [S.l.]: CRC Press, 2003.
- DUTRA, S. M. *Cavity Quantum Electrodynamics: The strange theory of light in a box*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2005.
- FEARN, H.; COLLETT, M. Representations of squeezed states with thermal noise. *Journal of Modern Optics*, Taylor & Francis, v. 35, n. 3, p. 553–564, 1988.
- GANDER, M. J.; KWOK, F. *Numerical analysis of partial differential equations using maple and MATLAB*. [S.l.]: SIAM, 2018.
- GARRISON, J. C.; CHIAO, R. Y. *Quantum Optics*. New York: Oxford University Press, 2008.

- GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Quantum Mechanics*. 2. ed. Upper Saddle River: Pearson Education, 2005.
- GRIFFITHS, D. J. *Eletrodinâmica*. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2011.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de física: óptica e física moderna*. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. *Matrix analysis*. [S.l.]: Cambridge university press, 2012.
- JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. 3. ed. United States of America: John Wiley & Sons, 1999.
- KIM, M.; OLIVEIRA, F. D.; KNIGHT, P. Photon number distributions for squeezed number states and squeezed thermal states. *Optics Communications*, Elsevier, v. 72, n. 1-2, p. 99–103, 1989.
- KIM, M.; OLIVEIRA, F. D.; KNIGHT, P. Properties of squeezed number states and squeezed thermal states. *Physical Review A*, APS, v. 40, n. 5, p. 2494, 1989.
- KLIMCHITSKAYA, G.; MOSTEPANENKO, V. Experiment and theory in the casimir effect. *Contemporary Physics*, Taylor & Francis, v. 47, n. 3, p. 131–144, 2006.
- LAMBRECHT, A.; REYNAUD, S. Casimir effect: theory and experiments. In: WORLD SCIENTIFIC. *International Journal of Modern Physics: Conference Series*. [S.l.], 2012. v. 14, p. 171–180.
- LAMBROPOULOS, P.; PETROSYAN, D. *Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information*. Berlin: Springer, 2007.
- LAMOREAUX, S. K. The casimir force: background, experiments, and applications. *Reports on progress in Physics*, IOP Publishing, v. 68, n. 1, p. 201, 2004.
- LAW, C. Effective hamiltonian for the radiation in a cavity with a moving mirror and a time-varying dielectric medium. *Physical Review A*, APS, v. 49, n. 1, p. 433, 1994.
- LIBOFF, R. L. *Introductory Quantum Mechanics*. 4. ed. San Francisco: Addison–Wesley, 2003.
- LOUDON, R. *The Quantum Theory of Light*. 3. ed. New York: Oxford University Press, 2000.
- LOUISELL, W. H. *Quantum Statistical Properties of Radiation*. New York: John Wiley & Sons, 1973.
- LUKS, A.; PERINOVÁ, V.; HRADIL, Z. Principal squeezing. *Acta physica polonica. A*, v. 74, n. 5, p. 713–721, 1988.
- MACHADO, K. D. *Teoria do eletromagnetismo: Voume 3*. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2006.
- MARKOV, M. A. Invariants and the evolution of nonstationary quantum systems. *Moscow Izdatel Nauka*, v. 183, 1987.
- MERZBACHER, E. *Quantum Mechanics*. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1998.

- MEYSTRE, P.; SARGENT, M. *Elements of Quantum Optics*. 4. ed. Berlin: Springer, 2007.
- MILONNI, P. W. *The Quantum Vacuum: An introduction to quantum electrodynamics*. San Diego: Academic Press, 1994.
- MILONNI, P. W. *An Introduction to Quantum Optics and Quantum Fluctuations*. New York: Oxford University Press, 2019.
- MOORE, G. T. Quantum theory of the electromagnetic field in a variable-length one-dimensional cavity. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 11, n. 9, p. 2679–2691, 1970.
- NAYFEH, A. H. *Perturbation methods*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.
- O’CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. *Light through the ages: Ancient greece to maxwell*. 2002. University of St Andrews. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Light_1/>. Acesso em: 10 mar. 2023.
- O’CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. *Light through the ages: Relativity and quantum era*. 2002. University of St Andrews. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Light_2/>. Acesso em: 10 mar. 2023.
- ORSZAG, M. *Quantum Optics: Including noise reduction, trapped ions, quantum trajectories, and decoherence*. 3. ed. Switzerland: Springer, 2016.
- PLENIO, M. B. Logarithmic negativity: a full entanglement monotone that is not convex. *Physical review letters*, APS, v. 95, n. 9, p. 090503, 2005.
- RAZAVY, M.; TERNING, J. Quantum radiation in a one-dimensional cavity with moving boundaries. *Physical Review D*, APS, v. 31, n. 2, p. 307, 1985.
- RICE, P. *An Introduction to Quantum Optics: An open systems approach*. Bristol: IOP Publishing, 2020.
- SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Modern Quantum Mechanics*. 2. ed. San Francisco: Addison–Wesley, 2011.
- SALASNICH, L. *Quantum Physics of Light and Matter: A modern introduction to photons, atoms and many-body systems*. Switzerland: Springer, 2014.
- SALINAS, S. R. A. *Introdução à Física Estatística*. 2. ed. São Paulo: Edusp, 1999.
- SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. S. *Quantum optics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- SERAFINI, A. *Quantum continuous variables: a primer of theoretical methods*. [S.l.]: CRC press, 2017.
- SHANKAR, R. *Principles of Quantum Mechanics*. 2. ed. New York: Plenum Press, 1994.
- SIMPSON, W.; LEONHARDT, U. *Forces of the Quantum Vacuum: An introduction to casimir physics*. Singapore: World Scientific, 2015.
- SOARES, C. et al. Entanglement and squeezing in dissipative parametric amplifier and converter. *Journal of Russian Laser Research*, Springer, v. 43, n. 1, p. 28–38, 2022.

- SOLAK, L. O. R. *Excitação paramétrica em modos acoplados: casos fechado e aberto*. 2021. Dissertação (Mestrado em Ciências – Área de Concentração – Física) — Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2021.
- TIPLER, P. A.; LLEWELLYN, R. A. *Física Moderna*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.
- VIDAL, G.; WERNER, R. F. Computable measure of entanglement. *Physical Review A*, APS, v. 65, n. 3, p. 032314, 2002.
- WALLS, D. F.; MILBURN, G. J. *Quantum Optics*. 2. ed. Berlin: Springer, 2008.
- WANG, F. Y. *Physics with Maple: The computer algebra resource for mathematical methods in physics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.
- WEISSTEIN, E. W. *Hyperbolic Functions*. 2023. MathWorld—A Wolfram Web Resource. Disponível em: <<https://mathworld.wolfram.com/HyperbolicFunctions.html>>. Acesso em: 10 fev. 2023.
- ZWIEBACH, B. *Chapter 4: Time dependent perturbation theory*. 2018. 73-110 p. MIT OpenCourseWare. Notas de aula. Disponível em: <https://ocw.mit.edu/courses/8-06-quantum-physics-iii-spring-2018/resources/mit8_06s18ch4/>. Acesso em: 29 dez. 2022.

APÊNDICE A – REPRESENTAÇÕES DA DINÂMICA QUÂNTICA

Este apêndice destina-se a fornecer uma breve revisão sobre as abordagens (*representações*) com que se pode descrever a evolução temporal de um sistema dentro do formalismo da Mecânica Quântica. Em verdade, como aponta Shankar (1994, p. 147), existem infinitas maneiras diferentes de realizar esta descrição. Porém, as representações relevantes para o estudo aqui apresentado, e que também mais comumente aparecem nos textos de Mecânica Quântica, são: a Representação de Schrödinger, a Representação de Heisenberg e a Representação de Interação (ou Dirac).

Estas três representações são equivalentes entre si (MERZBACHER, 1998, p. 323), ou seja, elas resultam na mesma dinâmica do sistema. Contudo, em alguns casos, torna-se conveniente realizar os cálculos em determinada representação a fim de facilitar as contas e então converter os resultados para a representação final desejada.

A.1 O OPERADOR DE EVOLUÇÃO TEMPORAL

Segundo Cohen-Tannoudji, Diu e Laloë (2020a, p. 313), o vetor de estado $|\psi(t)\rangle$ de um sistema no tempo $t \geq t_0$ correlaciona-se com o vetor de estado inicial $|\psi(t_0)\rangle$ deste sistema através de uma transformação linear. Assim, existe um operador linear $U(t, t_0)$ tal que:

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle. \quad (\text{A.1})$$

Denomina-se $U(t, t_0)$ de *operador de evolução temporal*. Como consequência direta de Equação A.1 tem-se que $U(t, t_0)$ é um operador unitário (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 2020a, p. 313, 314),

$$U(t', t') = I, \quad (\text{A.2})$$

$$U^\dagger(t, t') = U^{-1}(t, t') = U(t', t), \quad (\text{A.3})$$

$$U(t', t)U(t, t') = U^\dagger(t, t')U(t, t') = U(t, t')U^\dagger(t, t') = I, \quad (\text{A.4})$$

onde I é a *matriz identidade* e substituiu-se o parâmetro t_0 pela variável t' afim de tornar a notação mais geral.

Por outro lado, sabe-se que o formalismo da Mecânica Quântica postula que a evolução temporal de um sistema, representado pelo vetor de estado $|\psi(t)\rangle$, dá-se por meio da Equação de Schrödinger (SHANKAR, 1994, p. 143),

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle, \quad (\text{A.5})$$

em que H é o operador hamiltoniano associado ao sistema em questão.

A Equação A.5 também pode ser escrita na sua forma *bra*, tomando seu complexo conjugado e considerando o operador hamiltoniano como hermitiano $H = H^\dagger$, como o é na maioria dos casos (MERZBACHER, 1998, p 317, 318), tem-se:

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi(t)| = \langle\psi(t)|H. \quad (\text{A.6})$$

Agora, substituindo a Equação A.1 na Equação A.5,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle = HU(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \quad (\text{A.7})$$

e eliminando $|\psi(t_0)\rangle$, que pode ser retirado da derivada temporal, obtém-se

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) = HU(t, t_0). \quad (\text{A.8})$$

A equação diferencial de primeira ordem Equação A.8 é conhecida como a *Equação de Schrödinger para o operador de evolução temporal* (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011, p. 69) e define completamente $U(t, t_0)$ dada a condição inicial Equação A.1 (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 2020a, p. 313).

No caso mais simples, quando o operador hamiltoniano é independente do tempo, ou seja, o sistema é conservativo, a Equação A.8 pode ser facilmente resolvida (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 2020a; SAKURAI; NAPOLITANO, 2011) para fornecer:

$$U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar}. \quad (\text{A.9})$$

Deve-se notar que a forma de $U(t, t_0)$ na Equação A.9 está em total acordo com as Equações A.2 – A.4.

A.2 SCHRÖDINGER *VERSUS* HEISENBERG

Na seção anterior, para introduzir o operador de evolução temporal $U(t, t_0)$, utilizou-se uma representação da dinâmica quântica baseada na evolução temporal do vetor de estado $|\psi(t)\rangle$ de um determinado sistema. A essa maneira de representar a dinâmica de um sistema dá-se o nome de *Representação de Schrödinger* (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 2020a, p. 317).

Segundo Liboff (2003, p. 553, grifo do autor, tradução nossa), “A assim chamada *Representação de Schrödinger* refere-se à formulação baseada na equação de Schrödinger [Equação A.5].¹”. Mais especificamente, nesta representação, a dinâmica do sistema concentra-se no vetor de estado $|\psi(t)\rangle$, enquanto os *operadores* que atuam sobre o sistema são mantido fixos no tempo, salvo quando estes já possuem uma dependência temporal explícita (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 2020a; LIBOFF, 2003; MERZBACHER, 1998).

Contudo, como aponta Merzbacher (1998, p. 319, tradução nossa), “Vetores de estado em si não são quantidades observáveis ou mensuráveis.²”. Dentro deste contexto, Cohen-Tannoudji, Diu e Laloë (2020a, p. 317, tradução nossa), afirma:

“[...] todas as previsões da mecânica quântica (probabilidades, valores médios) são expressos em termos de produtos escalares de um bra e um ket ou elementos de matriz de operadores [...] [e] essas quantidades são invariantes quando a mesma transformação unitária é realizada nos kets e nos operadores.³”.

Seguindo este raciocínio, pode-se realizar uma transformação linear, associada ao operador $U(t_0, t) = U^\dagger(t, t_0)$ (Equação A.3), afim de tornar o vetor de estado $|\psi(t)\rangle$ estacionário (fixo no tempo) e, em contrapartida, tornar os operadores que atuam sobre o sistema dependentes do tempo, mesmo que estes não possuam dependência temporal explícita (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 2020a; LIBOFF, 2003; MERZBACHER, 1998).

A abordagem da dinâmica quântica que resulta desta transformação denomina-se *Representação de Heisenberg* e correlaciona-se com a Representação de Schrödinger através das transformações (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 2020a; LIBOFF, 2003; MERZBACHER, 1998; SAKURAI; NAPOLITANO, 2011):

$$|\psi_H\rangle \equiv U^\dagger(t, t_0)|\psi_S(t)\rangle = U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0)|\psi_S(t_0)\rangle = |\psi_S(t_0)\rangle, \quad (\text{A.10})$$

e

$$A_H(t) \equiv U^\dagger(t, t_0)A_S(t)U(t, t_0), \quad (\text{A.11})$$

onde o índice H serve para sinalizar que o ket ou o operador está na Representação de Heisenberg, enquanto o índice S sinaliza a Representação de Schrödinger.

Para reforçar a equivalência entre ambas as representações, pode-se, por exemplo, notar que o valor médio de um observável, em um dado instante de tempo, de fato

¹ “The so-called *Schrödinger picture* refers to the formulation which is based on the Schrödinger equation.” (LIBOFF, 2003, p. 553, grifo do autor).

² “State vectors themselves are not observable or measurable quantities.” (MERZBACHER, 1998, p. 319).

³ “all the predictions of quantum mechanics (probabilities, mean values) are expressed in terms of scalar products of a bra and a ket or matrix elements of operators [...] these quantities are invariant when the same unitary transformation is performed on the kets and on the operators.” (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 2020a, p. 317).

permanece o mesmo em ambas as representações (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011, p. 81):

$$\begin{aligned}\langle A \rangle_t &= \langle \psi_S(t) | A_S | \psi_S(t) \rangle = \langle \psi_S(t_0) | U^\dagger(t, t_0) A_S U(t, t_0) | \psi_S(t_0) \rangle \\ &= \langle \psi_H | A_H(t) | \psi_H \rangle.\end{aligned}\tag{A.12}$$

Utilizando a Equação A.11, a Equação A.4 e a Equação A.8 (junto de sua versão adjunta hermitiana), pode-se obter a equação de movimento para o operador $A_H(t)$ (COHEN-TANNOUJJI; DIU; LALOË, 2020a; LIBOFF, 2003; SAKURAI; NAPOLITANO, 2011):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} A_H(t) &= \frac{\partial}{\partial t} U^\dagger(t, t_0) A_S(t) U(t, t_0) + U^\dagger(t, t_0) \frac{\partial}{\partial t} A_S(t) U(t, t_0) \\ &\quad + U^\dagger(t, t_0) A_S(t) \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) \\ &= -\frac{1}{i\hbar} U^\dagger(t, t_0) H_S A_S(t) U(t, t_0) + \frac{1}{i\hbar} U^\dagger(t, t_0) A_S(t) H_S U(t, t_0) \\ &\quad + U^\dagger(t, t_0) \frac{\partial}{\partial t} A_S(t) U(t, t_0) \\ i\hbar \frac{d}{dt} A_H(t) &= -U^\dagger(t, t_0) H_S U(t, t_0) U^\dagger(t, t_0) A_S(t) U(t, t_0) \\ &\quad + U^\dagger(t, t_0) A_S(t) U(t, t_0) U^\dagger(t, t_0) H_S U(t, t_0) \\ &\quad + i\hbar U^\dagger(t, t_0) \frac{\partial}{\partial t} A_S(t) U(t, t_0) \\ &= -H_H(t) A_H(t) + A_H(t) H_H(t) + i\hbar U^\dagger(t, t_0) \frac{\partial}{\partial t} A_S(t) U(t, t_0) \\ i\hbar \frac{d}{dt} A_H(t) &= [A_H(t), H_H(t)] + i\hbar U^\dagger(t, t_0) \frac{\partial}{\partial t} A_S(t) U(t, t_0).\end{aligned}\tag{A.13}$$

A Equação A.13 é chamada de *Equação de Movimento de Heisenberg* (LIBOFF, 2003, p. 555, 556). Se o operador $A_S(t)$ não tiver dependência explícita no tempo, a Equação A.13 reduz-se a:

$$i\hbar \frac{d}{dt} A_H(t) = [A_H(t), H_H(t)].\tag{A.14}$$

Ainda aqui cabe mais uma observação: caso $U(t, t_0)$ seja dado pela Equação A.9, tem-se que H_S é independente do tempo e comuta com $U(t, t_0)$, então (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011, p. 83):

$$H_H(t) = U^\dagger(t, t_0) H_S U(t, t_0) = U^\dagger(t, t_0) U(t, t_0) H_S = H_S,\tag{A.15}$$

Assim, a Equação A.14 torna-se:

$$i\hbar \frac{d}{dt} A_H(t) = [A_H(t), H_S].\tag{A.16}$$

Dentro da Representação de Schrödinger, é possível obter uma expressão similar à Equação A.16 para um operador importante que possui dependência temporal mesmo nesta representação: o *operador densidade*; que, para um estado puro $|\psi(t)\rangle$, é definido por (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 2020a, p. 302):

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|. \quad (\text{A.17})$$

No caso mais geral, ρ pode representar uma *mistura estatística de estados* (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 2020a, p. 299–311):

$$\rho(t) = \sum_k p_k |\psi_k(t)\rangle\langle\psi_k(t)|, \quad (\text{A.18})$$

onde p_k representa a probabilidade do sistema estar no estado $|\psi_k(t)\rangle$ e $\sum_k p_k = 1$. Ambas as Equações A.17 e A.18 evidenciam que ρ é um operador Hermitiano $\rho^\dagger = \rho$.

O operador densidade satisfaz a condição de normalização (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011, p. 182):

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho) &= \sum_{k,i} p_k \langle u_i | \psi_k(t) \rangle \langle \psi_k(t) | u_i \rangle \\ &= \sum_k p_k \langle \psi_k(t) | \left(\sum_i |u_i\rangle\langle u_i| \right) | \psi_k(t) \rangle \\ &= \sum_k p_k \langle \psi_k(t) | \psi_k(t) \rangle = \sum_k p_k \\ \text{Tr}(\rho) &= \sum_k p_k = 1. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Outra propriedade importante do operador densidade é que ele pode ser utilizado para calcular a *média de ensemble* (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 2020a; MERZBACHER, 1998; SAKURAI; NAPOLITANO, 2011):

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A\rho) &= \sum_{k,i} p_k \langle u_i | A | \psi_k \rangle \langle \psi_k | u_i \rangle \\ &= \sum_k p_k \langle \psi_k | \left(\sum_i |u_i\rangle\langle u_i| \right) A | \psi_k \rangle \\ &= \sum_k p_k \langle \psi_k | A | \psi_k \rangle \text{Tr}(A\rho) = \sum_k p_k \langle A \rangle_{\psi_k}, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

obviamente que, para um estado puro, a Equação A.20 torna-se:

$$\text{Tr}(A\rho) = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \langle A(t) \rangle_\psi. \quad (\text{A.21})$$

Partindo de Equação A.17 e utilizando as Equações A.5 e A.6, obtém-se a equação que determina a evolução temporal do operador densidade (MERZBACHER, 1998, p. 319):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\rho &= \left(\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle\right)\langle\psi(t)| + |\psi(t)\rangle\left(\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi(t)|\right) \\
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho &= H|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| - |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|H \\
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho &= H\rho - \rho H \\
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho &= [H, \rho],
\end{aligned} \tag{A.22}$$

esta equação é conhecida como *Equação de von Neumann* ou *Equação de Liouville-von Neumann*, que é o análogo quântico da *Equação de Liouville* da Física Estatística Clássica (BREUER; PETRUCCIONE, 2002, p. 111).

Realizando um cálculo semelhante ao apresentado na Equação A.19, pode-se utilizar a Equação A.22 para obter a conservação da probabilidade em termos do operador densidade (MERZBACHER, 1998, p. 319):

$$\begin{aligned}
\text{Tr}\left(\frac{\partial}{\partial t}\rho\right) &= \text{Tr}([H, \rho]) = \text{Tr}(H\rho) - \text{Tr}(\rho H) \\
\text{Tr}\left(\frac{\partial}{\partial t}\rho\right) &= \langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle - \langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{A.23}$$

A.3 REPRESENTAÇÃO DE INTERAÇÃO

Em problemas de dinâmica quântica, nem sempre é interessante, e nem mesmo trivial, analisar a evolução temporal completa de um sistema. Muitas vezes, a informação que se deseja obter está toda contida em apenas uma parte da evolução temporal do sistema, o que reduz o trabalho.

Por exemplo, o hamiltoniano de um sistema submetido a uma perturbação externa tem a forma geral:

$$H = H_0 + V, \tag{A.24}$$

onde H_0 é o hamiltoniano do sistema na ausência da perturbação e independente do tempo, responsável por uma evolução temporal rápida, e V é um termo menor, que representa uma perturbação e é responsável por uma evolução temporal mais lenta (BREUER; PETRUCCIONE, 2002; COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 2020b).

A evolução temporal deste sistema, na Representação de Schrödinger, é determinada pela Equação de Schrödinger (A.5) (ZWIEBACH, 2018):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_S(t)\rangle = \underbrace{(H_0 + V)}_H |\psi_S(t)\rangle, \tag{A.25}$$

onde a evolução temporal é regida por H e não apenas H_0 .

Porém, pautando-se pelo argumento já apresentado na seção anterior, é possível realizar uma transformação unitária afim de tornar $|\psi_S(t)\rangle$ estacionário em relação a evolução temporal gerada por H_0 (SHANKAR, 1994; ZWIEBACH, 2018).

Desta transformação, origina-se a chamada *Representação de Interação (ou Dirac)*, que se conecta com a *Representação de Schrödinger* através de (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011; SHANKAR, 1994) :

$$|\psi_I(t)\rangle \equiv U_0^\dagger(t, t_0)|\psi_S(t)\rangle, \quad (\text{A.26})$$

$$A_I(t) \equiv U_0^\dagger(t, t_0)A_S U_0(t, t_0), \quad (\text{A.27})$$

onde o índice I denota a Representação de Interação e

$$U_0^\dagger(t, t_0) \equiv e^{iH_0(t-t_0)/\hbar}. \quad (\text{A.28})$$

Utilizando as Equações A.25, A.26 e A.28 e derivando $|\psi_I(t)\rangle$ em relação ao tempo (ZWIEBACH, 2018):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}|\psi_I(t)\rangle &= \frac{\partial}{\partial t} \left(U_0^\dagger(t, t_0)|\psi_S(t)\rangle \right) \\ &= \frac{i}{\hbar}H_0 U_0^\dagger(t, t_0)|\psi_S(t)\rangle + U_0^\dagger(t, t_0)\frac{\partial}{\partial t}|\psi_S(t)\rangle \\ &= -\frac{1}{i\hbar}H_0 U_0^\dagger(t, t_0)|\psi_S(t)\rangle + U_0^\dagger(t, t_0) \left(\frac{1}{i\hbar}(H_0 + V)|\psi_S(t)\rangle \right) \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_I(t)\rangle &= -H_0 U_0^\dagger(t, t_0)|\psi_S(t)\rangle + U_0^\dagger(t, t_0)H_0|\psi_S(t)\rangle + U_0^\dagger(t, t_0)V|\psi_S(t)\rangle \\ &= -H_0 U_0^\dagger(t, t_0)|\psi_S(t)\rangle + H_0 U_0^\dagger(t, t_0)|\psi_S(t)\rangle + U_0^\dagger(t, t_0)VI|\psi_S(t)\rangle \\ &= U_0^\dagger(t, t_0)VU_0(t, t_0)U_0^\dagger(t, t_0)|\psi_S(t)\rangle \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_I(t)\rangle &= V_I|\psi_I(t)\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

onde foi utilizado o fato de $U_0^\dagger(t, t_0)$ comutar com H_0 e $V_I \equiv U_0^\dagger(t, t_0)VU_0(t, t_0)$ é o hamiltoniano de perturbação na Representação de Interação.

A Equação A.29 é uma equação do tipo Equação de Schrödinger e demonstra que na Representação de Interação $|\psi_I(t)\rangle$ evolui no tempo apenas através do termo de perturbação V_I , como era esperado (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011; SHANKAR, 1994; ZWIEBACH, 2018).

Utilizando as Equações A.17 e A.26, pode-se encontrar o operador densidade na Representação de Interação:

$$\rho_I(t) = |\psi_I(t)\rangle\langle\psi_I(t)|, \quad (\text{A.30})$$

$$= U_0^\dagger(t, t_0)|\psi_S(t)\rangle\langle\psi_I|U_0(t, t_0)$$

$$\rho_I(t) = U_0^\dagger(t, t_0)\rho_S(t)U_0(t, t_0). \quad (\text{A.31})$$

Agora, partindo das Equações A.29 e A.30 e derivando $\rho_I(t)$ em relação ao tempo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho_I(t) &= \frac{\partial}{\partial t}(|\psi_I(t)\rangle\langle\psi_I(t)|) + |\psi_I(t)\rangle\frac{\partial}{\partial t}(\langle\psi_I(t)|) \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho_I(t) &= V_I|\psi_I(t)\rangle\langle\psi_I(t)| - |\psi_I(t)\rangle\langle\psi_I(t)|V_I \\ &= V_I\rho_I - \rho_IV_I \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho_I &= [V_I, \rho_I], \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

esta é a Equação de Von Neumann na Representação de Interação (BREUER; PETRUCCIONE, 2002, p. 114).

Realizando um cálculo semelhante ao que foi feito para obter a Equação A.13, mas dessa vez partindo da Equação A.27, pode-se obter, para um operador que não tenha dependência temporal na Representação de Schrödinger, a Equação de Movimento de Heisenberg na Representação de Interação (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011; SHANKAR, 1994):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}A_I(t) = [A_I(t), H_0]. \quad (\text{A.33})$$

lembrando que $U_0(t, t_0)$ comuta com H_0 .

Por fim, como apontam Shankar (1994) e Merzbacher (1998), pode-se interpretar as três representações como diferentes rotações no espaço de Hilbert. Na Representação de Schrödinger, é o vetor de estado que rotaciona em uma dada direção, enquanto a base do espaço, os autovetores dos operadores, ficam fixos. Na Representação de Heisenberg são os autovetores que giram em sentido contrário, enquanto os vetores de estado permanecem fixos. Já na Representação de Interação, a rotação se divide, os autovetores rotacionam de acordo com H_0 e os vetores de estados de acordo com V_I .

APÊNDICE B – OSCILADOR HARMÔNICO QUÂNTICO

Neste apêndice será realizada uma breve descrição do Oscilador Harmônico Quântico, com ênfase na abordagem deste problema utilizando os operadores de aniquilação e criação (método algébrico), que permeiam toda a Teoria Quântica de Campos e, em especial, a Ótica Quântica.

O Oscilador Harmônico Quântico (OHQ) é um problema já muito bem estabelecido na teoria quântica. Basicamente, quase todo livro texto de Mecânica Quântica, bem como de áreas mais específicas desta teoria, aborda este tópico. Algumas destas obras são: Cohen-Tannoudji, Diu e Laloë (2020a), Griffiths (2005), Lambropoulos e Petrosyan (2007), Liboff (2003), Merzbacher (1998), Meystre e Sargent (2007), Sakurai e Napolitano (2011), Shankar (1994).

B.1 O MÉTODO ALGÉBRICO

O operador hamiltoniano do OHQ é dado por (GRIFFITHS, 2005, p. 42):

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}, \quad (\text{B.1})$$

onde q e p são, respectivamente, os operadores de posição e momento, e seguem a *Relação Canônica de Comutação* (RCC):

$$[q, p] = i\hbar. \quad (\text{B.2})$$

O artifício utilizado para encontrar os autoestados de energia desse sistema, no método algébrico, consiste em tentar reescrever o operador hamiltoniano (B.1) em sua forma fatorada (GRIFFITHS, 2005, p. 42,43), do tipo:

$$p^2 + q^2 = (ip + q)(-ip + q). \quad (\text{B.3})$$

Nesse intuito, define-se os operadores não Hermitianos (GRIFFITHS, 2005; SAKURAI; NAPOLITANO, 2011):

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega q + ip), \quad (\text{B.4})$$

e seu adjunto:

$$a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega q - ip). \quad (\text{B.5})$$

Então, multiplicando os operadores a^\dagger e a , obtém-se (GRIFFITHS, 2005; SAKURAI; NAPOLITANO, 2011):

$$\begin{aligned}
a^\dagger a &= \frac{1}{2\hbar m\omega}(m\omega q - ip)(m\omega q + ip) \\
&= \frac{1}{2\hbar m\omega}((p^2 + (m\omega x)^2 + im\omega(qp - pq)) \\
&= \frac{1}{\hbar\omega} \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \frac{i}{2}\omega[q, p] \right) \\
a^\dagger a &= \frac{1}{\hbar\omega} H - \frac{1}{2},
\end{aligned} \tag{B.6}$$

logo,

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \tag{B.7}$$

A partir de um cálculo semelhante, pode-se obter o comutador entre a e a^\dagger (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011, p. 89):

$$[a, a^\dagger] = \frac{1}{2\hbar}(-i[q, p] + i[p, q]) = 1, \tag{B.8}$$

também conhecida como relação bosônica de comutação (MEYSTRE; SARGENT, 2007, p. 83).

Agora, definindo o operador número N como sendo (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011, p. 89):

$$N \equiv a^\dagger a, \tag{B.9}$$

tem-se que

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \tag{B.10}$$

onde os *estados de número* $|n\rangle$ são os autovetores de N e n são seus respectivos autovalores.

O comutador entre N e a pode ser obtido da Equação B.8 (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011, p. 90):

$$[N, a] = [a^\dagger a, a] = a^\dagger[a, a] + [a^\dagger, a]a = -a, \tag{B.11}$$

e, de forma similar:

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger[a, a^\dagger] + [a^\dagger, a^\dagger]a = a^\dagger. \tag{B.12}$$

Como H é uma função linear N , a base de autovetores de N é também a base dos autovetores de energia de H (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011, p. 90):

$$\begin{aligned}
H|n\rangle &= \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \\
H|n\rangle &= \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \\
H|n\rangle &= E_n |n\rangle,
\end{aligned} \tag{B.13}$$

assim, os autovalores de energia E_n são dados por:

$$E_n \equiv \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{B.14})$$

Resta saber agora o significado físico dos operadores a e a^\dagger . Para tanto, deve-se analisar qual a ação do operador número N sobre os *estados* $a|n\rangle$ e $a^\dagger|n\rangle$ (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011, p. 90):

$$\begin{aligned} N(a|n\rangle) &= ([N, a] + aN) |n\rangle = (-a + aN) |n\rangle \\ N(a|n\rangle) &= a(-1 + n) |n\rangle = (n - 1)a|n\rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

e semelhantemente,

$$N(a^\dagger|n\rangle) = (n + 1)a^\dagger|n\rangle. \quad (\text{B.16})$$

As Equações B.15 e B.16 mostram que $a|n\rangle$ e $a^\dagger|n\rangle$ também são estados de número e conseqüentemente autoestados de energia de operador hamiltoniano. Comparando essas equações com as Equações B.10 e B.13, fica claro que a ação de a sobre o estado $|n\rangle$ *destrói* um quanta de energia $\hbar\omega$, enquanto que a ação a^\dagger sobre este mesmo estado *cria* um quanta de energia (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011, p. 90). Por essa razão, denomina-se a de **operador de aniquilação** e a^\dagger de **operador de criação** (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 2020a; LIBOFF, 2003; SAKURAI; NAPOLITANO, 2011).

Comparando as Equações B.10 e B.15, conclui-se que (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011, p. 90):

$$a|n\rangle = c|n - 1\rangle, \quad (\text{B.17})$$

onde c é uma constante que deve ser determinada através da condição de normalização dos estados de número:

$$\langle n - 1|n - 1\rangle = \langle n|a^\dagger a|n\rangle = |c|^2 \langle n|n\rangle = |c|^2, \quad (\text{B.18})$$

porém, utilizando a definação $N = a^\dagger a$

$$\langle n - 1|n - 1\rangle = \langle n|a^\dagger a|n\rangle = |c|^2 \langle n|n\rangle = |c|^2. \quad (\text{B.19})$$

Comparando essas equações e tomando c como um número real, obtém-se (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011, p. 90,91):

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n - 1\rangle, \quad (\text{B.20})$$

também seguindo um raciocínio semelhante e utilizando a Equação B.8

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n + 1}|n + 1\rangle. \quad (\text{B.21})$$

Por fim, Sakurai e Napolitano (2011, p. 91) chama a atenção para um último detalhe importante: o requerimento da positividade da norma do estado $a|n\rangle$:

$$n = \langle n|N|n\rangle = (\langle n|a^\dagger)(a|n\rangle) \geq 0, \quad (\text{B.22})$$

implica que n não pode ser negativo, logo o valor mais baixo permitido é $n = 0$ e n deve ser um número inteiro não negativo, afim de garantir que a ação repetida de a sobre qualquer estado $|n\rangle$ não leve a autovalores negativos de N . Assim (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011, p. 91,92):

$$a|0\rangle = 0. \quad (\text{B.23})$$

Dessa forma, o estado mais baixo de energia, o *estado fundamental*, é $|0\rangle$, cujo o autovalor de energia é (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011, p. 91):

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega. \quad (\text{B.24})$$

Utilizando a Equação B.21 é possível construir qualquer autoestado de energia (ou estado de número) aplicando sucessivas vezes o operador de criação a^\dagger sobre o estado fundamental (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011, p. 91):

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \quad (\text{B.25})$$

Como os estados de número $|n\rangle$ são autovetores do operador Hermitiano N , eles devem ser ortonormais (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 2020a). Assim, utilizando as Equações B.20 e B.21, pode-se calcular os elementos de matriz dos operadores de aniquilação e criação (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 2020a; SAKURAI; NAPOLITANO, 2011):

$$\langle n'|a|n\rangle = \sqrt{n}\langle n'|n-1\rangle = \sqrt{n}\delta_{n',n-1}, \quad (\text{B.26})$$

$$\langle n'|a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\langle n'|n+1\rangle = \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}, \quad (\text{B.27})$$

o que deixa claro que esses operadores não são diagonais na base $\{|n\rangle\}$.

Invertendo as Equações B.5 e B.4, é possível escrever os operadores de posição e momento em função dos operadores de criação e aniquilação (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011, p. 92):

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a), \quad (\text{B.28})$$

$$p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a^\dagger - a). \quad (\text{B.29})$$

Segue diretamente das Equações B.26 e B.27 que os elementos de matriz de q e p são (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011, p. 92):

$$\langle n'|q|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1}), \quad (\text{B.30})$$

$$\langle n'|p|n\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1} - \sqrt{n}\delta_{n',n-1}). \quad (\text{B.31})$$

o que demonstra que q e p também não são diagonais na base $\{|n\rangle\}$.

B.2 EVOLUÇÃO TEMPORAL

Na seção anterior, para resolver o problema de encontrar os autoestados e autovalores de energia do Oscilador Harmônico Quântico, foi utilizada, de forma implícita, a Representação de Schrödinger, já que não foi discutida a dependência temporal dos operadores e vetores de estado que foram introduzidos.

Nesta seção, a descrição da evolução temporal ficará restrita a Representação de Heisenberg, pois é mais interessante para este trabalho concentrar a dependência temporal nos operadores, em vez dos vetores de estado. Sendo assim, por simplicidade, será omitido o índice H dos operadores.

O operador hamiltoniano do OHQ, na Representação de Heisenberg, pode ser escrito de maneira semelhante ao da Representação de Schrödinger (MERZBACHER, 1998, p. 333):

$$H(t) = \hbar\omega \left(a^\dagger(t)a(t) + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{B.32})$$

Utilizando a Equação de Movimento de Heisenberg (Equação A.14), pode-se encontrar a equação que determina a evolução temporal do operador de aniquilação (MERZBACHER, 1998; SAKURAI; NAPOLITANO, 2011):

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}a(t) &= [a(t), H(t)] = \hbar\omega[a(t), a^\dagger(t)a(t)] \\ &= \hbar\omega[a(t), a^\dagger(t)]a(t) = \hbar\omega a(t) \\ \frac{\partial}{\partial t}a(t) &= -i\omega a(t). \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Esta equação pode ser facilmente resolvida para fornecer (MERZBACHER, 1998; SAKURAI; NAPOLITANO, 2011):

$$a(t) = U^\dagger(t, t_0)a_S U(t, t_0) = a(t_0)e^{-i\omega(t-t_0)}, \quad (\text{B.34})$$

e de forma similar

$$a^\dagger(t) = U^\dagger(t, t_0) a_S^\dagger U(t, t_0) = a^\dagger(t_0) e^{i\omega(t-t_0)}. \quad (\text{B.35})$$

Substituindo as Equações B.34 e B.35 na Equação B.32 percebe-se que o hamiltoniano do OHQ, e, conseqüentemente, o operador número N , é independente do tempo mesmo na Representação de Heisenberg, o que já era esperado, pois este é um sistema conservativo (COHEN-TANNOUJJI; DIU; LALOË, 2020a; SAKURAI; NAPOLITANO, 2011).

A partir das Equações B.34 e B.35 é possível conhecer a dependência temporal de qualquer operador que seja uma função dos operadores a e a^\dagger (MERZBACHER, 1998; SAKURAI; NAPOLITANO, 2011). Por exemplo,

$$\begin{aligned} q(t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^\dagger(t) + a(t)) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^\dagger(t_0) e^{i\omega(t-t_0)} + a(t_0) e^{-i\omega(t-t_0)}) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (m\omega q(t_0) - ip(t_0)) \right) e^{i\omega(t-t_0)} \\ &\quad + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (m\omega q(t_0) + ip(t_0)) \right) e^{-i\omega(t-t_0)} \\ q(t) &= q(t_0) \cos(\omega(t-t_0)) + \left(\frac{p(t_0)}{m\omega} \right) \text{sen}(\omega(t-t_0)), \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

e seguindo o mesmo raciocínio,

$$p(t) = -m\omega q(t_0) \text{sen}(\omega(t-t_0)) + p(t_0) \cos(\omega(t-t_0)). \quad (\text{B.37})$$

Estas equações mostram que a evolução temporal dos operadores de posição $q(t)$ e momento $p(t)$ apresentam termos oscilantes, assim como seus análogos clássicos (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011).