UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

RODRIGO DOMINGUES

PROBABILIDADE NO ENSINO BÁSICO: POSSIBILIDADES PARA UMA ABORDAGEM AXIOMÁTICA.

PONTA GROSSA
2023

RODRIGO DOMINGUES

PROBABILIDADE NO ENSINO BÁSICO: POSSIBILIDADES PARA UMA ABORDAGEM AXIOMÁTICA.

Dissertação apresentada para a obtenção do título de Mestre em Matemática na Universidade Estadual de Ponta Grossa. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Prof. Dr. Jocemar de Quadros Chagas

PONTA GROSSA
2023

Domingues, Rodrigo
D671 Probabilidade no ensino básico possibilidades para uma abordagem axiomática / Rodrigo Domingues. Ponta Grossa, 2023.
88 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Jocemar de Quadros Chagas.

1. Probabilidade negativa. 2. Axiomas. 3. Sequência didática. I. Chagas, Jocemar de Quadros. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Matemática. III.T.

CDD: 519.2

Ficha catalográfica elaborada por Angela Maria de Oliveira- CRB9/1111

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
Av. General Carlos Cavalcanti, 4748 - Bairro Uvaranas - CEP 84030-900 - Ponta Grossa - PR - https://uepg.br

TERMO

TERMO DE APROVAÇÃO

RODRIGO DOMINGUES

"PROBABILIDADE NO ENSINO BÁSICO: POSSIBILIDADES PARA UMA ABORDAGEM AXIOMÁTICA"

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Ponta Grossa 01 de novembro de 2023.

Membros da Banca:

Prof. Dr. Jocemar de Quadros Chagas - (UEPG) – Presidente

Prof. Dr. Airton Kist - (UEPG) - Membro Interno

Prof. Dr. Francisco Souto de Souza Júnior - (UFERSA) - Membro Externo

Prof. Dr. Leonardo Pires - (UEPG) – Suplente

Documento assinado eletronicamente por **Jocemar de Quadros Chagas**, **Professor(a)**, em 01/11/2023, às 16:52, conforme Resolução UEPG CA 114/2018 e art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

Documento assinado eletronicamente por **Airton Kist**, **Professor(a)**, em 01/11/2023, às 16:58, conforme Resolução UEPG CA 114/2018 e art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

Documento assinado eletronicamente por **Francisco Souto de Sousa Júnior**, **Usuário Externo**, em 01/11/2023, às 19:03, conforme Resolução UEPG CA 114/2018 e art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

Documento assinado eletronicamente por **Adriana Aparecida Telles**, **Secretário(a)**, em 13/11/2023, às 10:18, conforme Resolução UEPG CA 114/2018 e art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

A autenticidade do documento pode ser conferida no site https://sei.uepg.br/autenticidade informando o código verificador **1683594** e o código CRC **0BBC21D0**.

AGRADECIMENTOS

À Deus que me fortalece e me anima em seguir em frente. Pela força espiritual para a realização deste trabalho.

À Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG) e ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

À família pelo apoio e incentivo na vida acadêmica.

Ao professor Dr. Jocemar de Quadros Chagas pela orientação, pelos ensinamentos, incentivo e apoio que tornaram possível a realização deste trabalho.

A todos os professores do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Pólo UEPG, que foram tão importantes pelas lições e ensinamentos dados.

Aos demais colegas e amigos que auxiliaram na execução deste trabalho.

RESUMO

No presente trabalho, cujo tema principal trata do conteúdo de probabilidade e de seu ensino, apresentamos como este conteúdo está sendo trabalhado em nosso país, através de uma análise documental baseada em documentos oficiais da educação e em livros integrantes do Plano Nacional do Livro Didático. Com o objetivo de contribuirmos com o ensino do conteúdo probabilidade, especialmente na escola pública, propomos uma abordagem de ensino axiomática para o 8º ano do ensino fundamental. Uma sequência didática é produto desta dissertação. Adicionalmente, em um paralelo com as geometrias não-euclidianas, apresentamos uma extensão para a teoria de probabilidade de A. Kolmogorov, devida a M. Burgin. Tal teoria estendida admite a possibilidade de probabilidades negativas. Como aplicações de probabilidades negativas, apresentamos um modelo de precificação de opções e uma análise do lançamento de meia moeda.

Palavras-chave: Probabilidade Negativa. Axiomas. Sequência Didática.

ABSTRACT

In the present work, whose main theme deals with the content of probability and its teaching, we present how this content is being worked on in Brazil, through a documentary analysis based on official education documents and books that are part of the national textbook plan (Brazil). With the aim of contributing to the teaching of probability, especially in public schools, we propose an axiomatic teaching approach for the 8th year of elementary school. A didactic sequence is the product of this dissertation. Additionally, in parallel with non-Euclidean geometries, we present an extension to A. Kolmogorov's probability theory, due to M. Burgin. This extended theory admits the possibility of negative probabilities. As applications of negative probabilities, we present an option pricing model and an analysis of the half-coin toss.

Keywords: Negative Probability. Axioms. Didactic Sequence.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CREP	Currículo Referencial do Estado do Paraná
CRR	Modelo de Cox, Ross e Rubinstein
DCE	Diretrizes Curriculares Estaduais
FGP	Função Geradora de Probabilidade
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD	Plano Nacional do Livro Didático
PR	Paraná
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SBMAC	Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os objetos de estudo nesta dissertação são a probabilidade e o ensino de probabilidade no ensino básico. Com o objetivo de contribuirmos com a maneira como o conteúdo de probabilidade vem sendo ensinado, propomos uma abordagem de ensino axiomática para 8º ano do ensino fundamental. Para fundamentar tal proposição, realizamos um levantamento em legislações e regulamentações recentes no país e no Estado do Paraná e nos livros didáticos integrantes do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) em vigor no ano 2023, seguido de uma análise documental que nos permitiu identificar as recomendações contidas nos documentos oficiais, bem como a abordagem utilizada nos livros didáticos para o tratamento do conteúdo probabilidade, categorizados por interpretações de probabilidade.

A probabilidade é um conceito integrante do quantitativo de conteúdos de matemática que devem ser ensinados no ensino básico. Embora o ensino de probabilidade normalmente apareça contextualizado com jogos, a importância de aprender probabilidade no ensino básico reside na sua utilização histórica como ferramenta de observação social (20) e utilidade prática para tomadas de decisão. Uma dificuldade natural para o ensino de probabilidade são suas características muitas vezes contra intuitivas (23). Além disso, observações de sala de aula permitem inferir que os alunos apresentam dificuldade na construção de espaços amostrais e eventos em situações que envolvam o princípio multiplicativo.

Com o objetivo de identificarmos possibilidades para contribuirmos com o ensino de probabilidade no ensino básico, destacamos a seguinte questão norteadora: "como o conteúdo de probabilidade está sendo ensinado no ensino básico?". Vários caminhos podem ser trilhados para responder essa questão, e vários vem sendo objetos de pesquisa na área de educação matemática. Em específico em teses e dissertações publicadas recentemente no Brasil. Nesse sentido, M. Costa (11) apresentou um estado da arte sobre ensino de probabilidade no ensino básico em dissertações e teses no Brasil finalizadas entre 2000 e 2020. Em suas conclusões são apontados, por exemplo, um excesso de aplicações em jogos e a carência de outros tipos de exemplos. Além disso, em análise que realizamos em livros didáticos atuais e em documentos oficiais que regem a educação em nosso país, não observamos a presença ou a indicação de uma abordagem axiomática para este nível de ensino. O resultado de nossa análise é corroborado pelas conclusões de B. Silveira (26).

Compreendemos uma probabilidade como a medida das chances de um evento acontecer. Essa medida é caracterizada por ser um número entre zero e um. Porém, esse número precisa estar entre zero e um? Se a resposta fosse não, poderíamos supor que existem probabilidades negativas ou maiores que um? Nesse caso, o que caracterizaria as probabilidades negativas, por exemplo? Esse objeto de estudo já existe e essa questão pode ser dividida em duas: uma formal e outra ontológica. A questão formal se refere a como generalizar a teoria axiomática a fim de incluir a possibilidade de probabilidades negativas. Já a questão ontológica se refere a suas aplicações.

Em 1932 Eugene Wigner obteve valores negativos para probabilidade ao estudar correções quânticas (30), mas não chegou a usar o termo "probabilidade negativa". Esse termo foi citado pela primeira vez em 1942 pelo físico Paul Dirac no artigo "A interpretação Física da Mecânica Quântica" (12), e o assunto recebeu maior atenção com os estudos de Richard Feynman em mecânica quântica. Em 1945, Maurice S. Bartlett elaborou as consistências matemática e lógica sobre probabilidades negativas (4). Posteriormente, probabilidades negativas foram utilizadas em alguns problemas e paradoxos, como por exemplo a análise do lançamento de meia moeda, publicado por Gabor J. Székely em 2005, e em aplicações em computação quântica (1, 5), finanças (9, 16) e cálculo (18).

Na tentativa de dar nossa contribuição à resposta para a questão norteadora "como o conteúdo probabilidade está sendo ensinado no ensino básico?", iremos discutir o problema de pesquisa, e apresentar contribuições para o ensino de probabilidade no ensino básico indicando um caminho para o ensino da probabilidade a partir de axiomas. No Capítulo 2 fazemos um estudo documental do que os documentos oficiais que tratam da educação em nosso país indicam para o ensino de probabilidade no ensino básico, bem como uma análise de todos os livros didáticos de matemática integrantes do PNLD 2020 a 2023 para o ensino o ensino fundamental e do PNLD iniciado em 2021 para o ensino médio. Na tentativa de propormos uma leve alteração à forma como a probabilidade vem sendo ensinada no 8º ano do ensino fundamental, no Capítulo 3 apresentamos um módulo didático que introduz a teoria de probabilidade de forma axiomática.

No Capítulo 4, avançamos um pouco além da questão de como se ensina probabilidade, e pensamos um pouco na teoria das probabilidades. Tratamos não apenas da teoria axiomática proposta por A. Kolmogorov (17), mas em um paralelo com as geometrias não euclidianas, que surgiram ao substituir um axioma, estudamos extensões da teoria de probabilidade e algumas de suas aplicações. No Apêndice A propomos uma sequência didática para o ensino de probabilidade no 8º ano do ensino fundamental com uma abordagem axiomática, e no Apêndice B apresentamos uma seleção de exercícios que consideramos adequados à verificação da aprendizagem dos conceitos presentes no Apêndice A.

2 O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM E A PROBABILIDADE EM DOCUMENTOS OFICIAIS DA EDUCAÇÃO

O princípio fundamental da contagem e a probabilidade são assuntos que aparecem juntos tanto no ensino fundamental (anos finais) como no ensino médio. Neste Capítulo, abordaremos as orientações curriculares relacionadas a esses dois conteúdos, separados por etapas de ensino: ensino fundamental e ensino médio.

Com o objetivo de fazer uma análise documental sobre o que é recomendado (e executado) para o ensino de probabilidade, consultamos inicialmente os documentos oficiais pertinentes, e a seguir os livros didáticos integrantes do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD).

A nível nacional, consultamos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (6) e a comparamos aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (8). A nível estadual, consultamos o Currículo Referencial do Estado do Paraná (CREP) (22) e as Diretrizes Curriculares Estaduais (DCEs) (21). Na Seção 2.1 apresentamos uma síntese das recomendações para o ensino fundamental, e na Seção 2.2 para ensino médio. Na Seção 2.3, apresentamos uma análise do que e de que forma os livros didáticos abordam o conteúdo probabilidade.

2.1 ENSINO FUNDAMENTAL

Em relação aos objetivos referentes ao princípio fundamental da contagem e à probabilidade para o 3º ciclo (6º e 7º anos) e para o 4º ciclo (8º e 9º anos), os PCNs (8) apresentam objetivos conforme dispostos no Quadro 2.1.

Quadro 2.1: Conteúdos sugeridos nas Orientações Educacionais Complementares aos PCN's

3º ciclo	Do raciocínio estatístico e probabilístico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: * construir um espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos.
4º ciclo	Do raciocínio combinatório, estatístico e probabilístico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: * resolver situações-problema que envolvam o raciocínio combinatório e a determinação da probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão.

Fonte: Adaptado de: BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 2018.

Segundo esse documento, no 6º e 7º ano o aluno era ensinado a fazer uso do princípio multiplicativo para estimar uma probabilidade de sucesso para determinado evento, enquanto que no 8º e 9º ano o aluno era ensinado resolver situações problema envolvendo raciocínio combinatório e probabilidade.

Atualmente, considerando a BNCC (6), o princípio multiplicativo e a probabilidade aparecem juntos no 8º ano. No Quadro 2.2 apresentamos as unidades temáticas e as habilidades referentes ao princípio fundamental da contagem e à probabilidade do 6º ao 9º do ensino fundamental.

Quadro 2.2: Competências encontradas na Base Nacional Comum Curricular

Unidades Temáticas	Habilidades
Probabilidades e estatística	(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.
Probabilidades e estatística	(EF07MA34) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.
Números	(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo
Probabilidades e estatística	(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.
Probabilidades e estatística	(EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

Fonte:Adaptado de: BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017.

Segundo a BNCC (6), o princípio multiplicativo e a probabilidade aparecem juntos pelo fato de que nessa etapa a capacidade de enumeração de elementos do espaço amostral está associado a problemas de contagem.

Os PCNs (8) defendem o mesmo ponto de vista, afirmando que:

> Relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades.

Nas DCEs (21) do Estado do Paraná, os conteúdos eram separados em conteúdos estruturantes: números e álgebra, grandezas e medidas, geometrias, funções e tratamento da informação. O princípio multiplicativo e a probabilidade faziam parte do tratamento da informação, que era trabalhada somente no 9º ano. O Quadro 2.3 apresenta como esses conteúdos eram abordados segundo as DCEs (21).

Quadro 2.3: Conteúdos sugeridos nas Diretrizes Curriculares do Paraná

Série / ano	Conteúdos estruturantes	Conteúdos básicos	Avaliação
8ª série / 9º ano	Tratamento da informação	Noções de Análise Combinatória; Noções de Probabilidade; Estatística; Juros Compostos	Desenvolva o raciocínio combinatório por meio de situações-problema que envolvam contagens, aplicando o princípio multiplicativo; Descreva o espaço amostral em um experimento aleatório; Calcule as chances de ocorrência de um determinado evento; Resolva situações-problema que envolvam cálculos de juros compostos

Fonte: Adaptado de: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica.** Matemática, 2008.

Consultamos como esses conteúdos são abordados, a nível estadual, no CREP (22), que atualmente é o documento, semelhante à BNCC (6), em vigor no Estado do Paraná. O Quadro 2.4 apresenta os objetos de conhecimento e a habilidades referentes a cada conteúdo, segundo o CREP.

Quadro 2.4: Conteúdos sugeridos no Currículo Referencial do Estado do Paraná

(continua)

Objetos de conhecimento	Orientações de conteúdo	Objetivo de aprendizagem
Noções de probabilidade	Probabilidade	(PR.EF06MA30.s.6.58) Representar e calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional não negativo (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.
Noções de probabilidade	Probabilidade de um evento ocorrer	(PR.EF06MA30.s.6.75) Representar e calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional não negativo (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.
Noções de probabilidade	Experimento aleatório e probabilidade	(PR.EF07MA34.s.7.80) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências. (PR.EF07MA34.d.7.81) Calcular e interpretar a probabilidade de ocorrência de um evento aleatório. (PR.EF07MA34.d.7.82) Descrever os resultados de um experimento aleatório.

Quadro 2.4: Conteúdos sugeridos no Currículo Referencial do Estado do Paraná

(conclusão)

Noções de probabilidade	Contagem	(PR.EF08MA03.s.8.56) Resolver e elaborar problemas, de diversos contextos, envolvendo contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo. (PR.EF08MA03.d.8.57) Compreender o princípio multiplicativo da contagem.
Noções de probabilidade	Probabilidade	(PR.EF08MA22.s.8.58) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1. (PR.EF08MA22.d.8.59) Compreender e representar o número de possibilidades de eventos por meio de contagens, árvore de possibilidades e do princípio multiplicativo. (PR.EF09MA20.s.9.45) Reconhecer e compreender, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

Fonte: Adaptado de: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Referencial Curricular do Paraná:** Matemática, 2018.

Observe que, diferente das DCEs (21), no CREP (22) há a indicação para que os conteúdos de probabilidade sejam trabalhados desde o 6º ano.

2.2 ENSINO MÉDIO

Em relação aos objetivos e habilidades para o ensino médio, os PCNs (8) apresentavam as unidades temáticas separadas por eixo estruturador, sendo que o conteúdo contagem era trabalhado na 2ª série e probabilidade na 3ª série, conforme disposto no Quadro 2.5.

Quadro 2.5: Conteúdos sugeridos nas Orientações Educacionais Complementares aos PCN's

(continua)

Unidades temáticas	Conteúdos	Habilidades
Contagem	Princípio multiplicativo; Problemas de contagem	Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos. Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem. Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem.

Quadro 2.5: Conteúdos sugeridos nas Orientações Educacionais Complementares aos PCN's

(conclusão)

Probabilidade	Possibilidades; Cálculo de probabilidades.	Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados. Quantificar e fazer previsões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolvam o pensamento probabilístico. Identificar em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas modelos e problemas que fazem uso de estatísticas e probabilidades.

Fonte: Adaptado de: BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 2018.

Diferente dos PCNs (8), em que o princípio multiplicativo e a probabilidade eram trabalhados em diferentes séries, na BNCC (6) esses conteúdos são trabalhados na 1ª série conforme as habilidades (EM13MAT310) e (EM13MAT311) apresentadas no Quadro 2.6.

Quadro 2.6: Competências encontradas na Base Nacional Comum Curricular

(continua)

Competência específica	Habilidades
1) Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).
3) Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore. (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade. (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

Quadro 2.6: Competências encontradas na Base Nacional Comum Curricular

(conclusão)

5) Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: Adaptado de: BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017.

A análise combinatória e a probabilidade, a nível estadual, são trabalhados dentro do conteúdo estruturante tratamento da informação, conforme é apresentado no Quadro 2.7.

Quadro 2.7: Conteúdos sugeridos nas Diretrizes Curriculares do Paraná

Conteúdos estruturantes	Conteúdos básicos	Avaliação
Tratamento da informação	Análise Combinatória; Binômio de Newton; Estudo das Probabilidades; Estatística; Matemática Financeira	Recolha, interprete e analise dados através de cálculos, permitindo-lhe uma leitura crítica dos mesmos; Realize cálculos utilizando Binômio de Newton; Compreenda a ideia de probabilidade; Realize estimativas, conjecturas a respeito de dados e informações estatísticas; Compreenda a Matemática Financeira aplicada ao diversos ramos da atividade humana; Perceba, através da leitura, a construção e interpretação de gráficos, a transição da álgebra para a representação gráfica e vice-versa

Fonte: Adaptado de: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica.** Matemática, 2008

2.3 A PROBABILIDADE NO PLANO NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO

Neste tópico apresentaremos como a probabilidade é abordada nos livros didáticos do PNLD. Analisamos todos os livros disponíveis no ano 2023: 11 coleções para o enino fundamental e 10 para o ensino médio (ver Quadros 2.8 e 2.9). Utilizamos como categorias de análise cinco interpretações de probabilidade: Probabilidade Clássica, Probabilidade Frequentista, Probabilidade Subjetiva, Probabilidade Geométrica e Probabilidade Axiomática.

- A definição clássica estabelece uma razão entre a quantidade de casos favoráveis e quantidade de casos possíveis para evento igualmente prováveis;

- A probabilidade frequentista é feita por meio de coleta de dados de experimentos realizados e estabelece uma razão entre frequência do evento e o total de realizações;
- A probabilidade subjetiva não possui cálculos e, conforme Faria (13), está condicionada à tomada de decisão do indivíduo ou à experiência sobre a probabilidade de ocorrer um resultado específico;
- A probabilidade geométrica estabelece uma razão entre grandezas como comprimento, área e volume.
- Na probabilidade axiomática a teoria é desenvolvida a partir de axiomas.

Para efeito de organização, dividiremos as informações, obtidas através das análises dos livros do PNLD, por etapas de ensino: ensino fundamental e ensino médio.

2.3.1 Ensino Fundamental

Os livros presentes no guia do PNLD para o ensino fundamental estão elencados no Quadro 2.8:

Quadro 2.8: Livros sugeridos no PNLD para o ensino fundamental

L1	A conquista da matemática	José Ruy Giovanni Junior e Benedicto Castrucci.
L2	Matemática	Carlos N. C. de Oliveira e Felipe Fugita.
L3	Matemática	Adilson Longen.
L4	Araribá Mais: Matemática	Mara Regina Garcia Gay, Willian Raphael Silva.
L5	Matemática Bianchini	Edwaldo Bianchini.
L6	Teláris Matemática	Luiz Roberto Dante.
L7	Matemática Essencial	Patricia Moreno Pataro e Rodrigo Balestri.
L8	Matemática: Realidade e Tecnologia	Joamir Souza.
L9	Convergências Matemática	Eduardo Rodrigues Chavante.
L10	Matemática: Compreensão e Prática	Ênio Silveira.
L11	Trilhas da Matemática	Fausto Arnaud Sampaio.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Em relação às coleções do 6º ano, todas apresentam a definição clássica de probabilidade, exceto a coleção L10, que não faz nenhuma menção sobre o conteúdo.

Em relação às coleções do 7º ano, todas apresentam a definição clássica, exceto a coleção L4, que apresenta somente a definição frequentista. A coleção L9 aborda a definição frequentista em algumas atividades, assim como a coleção L11 que apresenta a definição frequentista e a geométrica. A definição subjetiva não foi comtemplada em nenhuma das coleções.

Em relação às coleções do 8º ano, todas apresentam a definição clássica, exceto a coleção L5, que não faz nenhuma menção sobre o conteúdo. As coleções L1, L7, L9 e L11 apresentam a definição frequentista em atividades. A coleção L7 apresenta a definição geométrica, mas em atividades.

Em relação às coleções do 9º ano, todas apresentam a definição clássica. As coleções L2, L3 e L6 apresentam a definição frequentista e as coleções L5, L8 e L11 apresentam a definição frequentista, mas em atividades. A coleção L11 apresenta a definição geométrica, mas em atividades.

2.3.2 Ensino Médio

Para o ensino médio, os livros presentes no guia do PNLD estão elencados no quadro 2.9:

Quadro 2.9: Livros sugeridos no PNLD para o ensino médio

L1	Matemática e suas Tecnologias: Estatística, Probabilidade e Matemática Financeira	Eduardo Chavante e Diego Prestes
L2	Matemática nos Dias de Hoje: Probabilidade e Estatística.	Jefferson Cevada, Daniel Romão da Silva, Gabriel Gleich Prado e João Guilherme B. Colpani.
L3	Multiversos Matemática: Estatística e Probabilidade	Joamir Roberto de Souza
L4	Diálogo: Matemática e suas Tecnologias - Estatística e Probabilidade	Lilian Aparecida Teixeira.
L5	Interação Matemática: a Estatística e a Resolução de Problemas por meio de Análise Combinatória e Probabilidade	Adilson Longen e Rodrigo Morozetti Blanco.
L6	Prisma Matemática: Estatística, Combinatória e Probabilidade	José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior e Paulo Roberto Câmara de Sousa.
L7	Matemática Interligada: Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade	Thais Marcelle de Andrade.
L8	Matemática em Contextos: Análise Combinatória, Probabilidade e Computação	Luiz Roberto Dante e Fernando Viana.
L9	Conexões: Estatística e Probabilidade	Fabio Martins de Leonardo.
L10	Ser Protagonista: Estatística e Probabilidade	Katia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Considerando as definições sobre probabilidade, Silveira (26) aponta que todas as coleções apresentam a definição clássica. A definição frequentista é contemplada somente nas coleções L1, L2, L3, L4, L5, L9 e L10. A definição subjetiva é apresentada somente da coleção L2 e nenhuma das coleções apresentam a definição geométrica.

3 PROPOSTA DE ENSINO AXIOMÁTICA DE PROBABILIDADE

Visando justificar a possibilidade de ensinar a probabilidade a partir dos axiomas, bem como introduzir uma proposta de ensino axiomático de probabilidade destinado à aplicação no 8º ano do ensino fundamental, iniciamos este capítulo indicando os axiomas de Kolmogorov para a probabilidade.

Alguns conceitos básicos são necessários. Chamamos de *experimento aleatório* um procedimento que pode gerar resultados diferentes a cada vez que é repetido. Cada resultado que se pode obter ao executar um experimento aleatório é denominado *evento simples*. *Espaço amostral* é o nome dado ao conjunto de todos os resultados possíveis (eventos simples) para um determinado experimento aleatório. Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de *evento*. Dado um espaço amostral, a *probabilidade* atribuída a um evento específico é uma medida que descreve a possibilidade de que tal evento ocorra como resultado à execução do experimento aleatório.

Considere S um espaço amostral dado e $A, B \subset S$ subconjuntos de S. Então, sobre a probabilidade P relacionada aos conjuntos A, B e S assumimos os axiomas a seguir.

Axioma K1: $P(A) \geq 0$. A probabilidade é um número não-negativo.

Axioma K2: $P(S) = 1$. O espaço amostral contém todos os possíveis resultados do experimento, assim é um evento certo.

Axioma K3: Se dois eventos A e B são mutuamente exclusivos, então a probabilidade de A ou B é igual a probabilidade de A somada à probabilidade de B. Ou seja:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

O mesmo vale para qualquer número de eventos mutuamente exclusivos.

3.1 DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA

Conforme indicado na Seção 2.3, há cinco definições para a probabilidade: Clássica, Frequentista, Subjetiva, Geométrica e Axiomática. Soares (27) analisou as definições Clássica, Frequentista e Subjetiva, conforme indicadas para se trabalhar no 8º ano do ensino fundamental, e concluiu que todas satisfazem a definição axiomática de probabilidade. Vamos apresentar brevemente o estudo de Soares (27) e reproduzir a mesma ideia para a definição geométrica de probabilidade.

Probabilidade Clássica: Na Probabilidade Clássica todos os eventos possuem a mesma chance de ocorrer. Algumas situações em que esta interpretação está presente são: lançamento de um dado ou uma moeda, sorteio de uma bola em uma urna.

Para ilustrar que a interpretação clássica satisfaz a definição axiomática, Soares (27) apresenta o seguinte exemplo: Considere o lançamento imparcial de um dado honesto. O espaço amostral é dado por:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

e os eventos elementares por

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 2, \quad A_3 = 3, \quad A_4 = 4, \quad A_5 = 5 \quad \text{e} \quad A_6 = 6.$$

A probabilidade de qualquer um dos eventos $A_1, A_2, ..., A_6$ ocorrer é igual a $1/6$. Logo:

$$P(S) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) = 1.$$

Soares (27) conclui que a definição axiomática foi satisfeita, uma vez que os três axiomas foram cumpridos.

Probabilidade frequentista: A probabilidade frequentista é definida através da frequência relativa da ocorrência de um evento quando este é repetido inúmeras vezes.

Soares (27) afirma que a interpretação frequentista também cumpre os axiomas, pois:

1) A frequência relativa de um evento é um número positivo;

2) Assim como a probabilidade de um evento certo, a frequência relativa de um evento certo é sempre 1;

3) Dados dois ou mais eventos disjuntos, a probabilidade da união desses eventos será dada pela frequência relativa acumulada desses dois eventos.

Probabilidade subjetiva: A probabilidade subjetiva é atribuída conforme a crença de que um evento ocorrerá.

Segundo Soares (27), para atribuir esse tipo de probabilidade a um evento deve-se ter coerência, e levar em consideração os axiomas. Por exemplo, espera-se que o valor atribuído a um evento deva estar entre 0 e 1 e que a união de eventos complementares deva ser igual a 1.

Probabilidade geométrica: A probabilidade geométrica estabelece uma razão entre grandezas geométricas de mesmo tipo, como entre comprimentos, áreas ou volumes.

Como exemplo, apresentamos a seguinte situação: Em um campeonato de arco e flecha um competidor deve acertar o alvo, que tem a forma disposta na Figura 3.1.

Consideremos o espaço amostral $S = \{\text{acertar o alvo}\}$ e os eventos dados por $A = \{\text{acertar na faixa branca}\}$; $B = \{\text{acertar na faixa preta}\}$; $C = \{\text{acertar na faixa azul}\}$; $D = \{\text{acertar na faixa vermelha}\}$ e $E = \{\text{acertar na faixa amarela}\}$.

Figura 3.1: Representação de um alvo para arco e flecha

Fonte: Elaborado pelo Autor (2023).

Supondo que o competidor executa um tiro com arco e acerta o alvo, observe que a probabilidade de ter acertado qualquer uma das faixas é um valor positivo, logo cumpre o 1º axioma. E da união dos eventos temos que $P(A \cup B \cup C \cup D \cup E) = P(S) = 1$.

Portanto, através da análise de exemplos como os indicados para se trabalhar no 8º ano do ensino fundamental, concluímos que todas as 4 interpretações de probabilidade devem satisfazer a definição axiomática, embora as abordagens usadas nos livros do PNLD não indiquem explicitamente os axiomas.

3.2 PROPOSTA AXIOMÁTICA PARA O 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Como observado no Capítulo 2, as coleções do atual PNLD não apresentam a Probabilidade Axiomática. Nesta Seção, apresentaremos uma proposta de ensino do conteúdo de probabilidade que inclua axiomas. Essa proposta será feita em relação aos conteúdos de 8º ano e deve contemplar a seguinte competência da BNCC (6):

- (EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

A proposta tem a seguinte sequência:

1º) Como motivação, sugerimos a apresentação do problema de Monty Hall;

2º) Para introduzir os conceitos relevantes para a compreensão da probabilidade, indicamos a apresentação de alguns exemplos (no nosso caso, retirados do livro "Probabilidade e estatística: Aspectos de tomada de decisões e incerteza para o ensino fundamental e médio", de L. Rifo (24));

3º) Para continuar a exposição do conteúdo, indicamos a retomada da situação inicial;

4º) Em seguida, sugerimos a apresentação de alguns exercícios resolvidos, em que sejam utilizados o princípio fundamental da contagem e teoremas decorrentes dos axiomas.

Uma sugestão para a aplicação da sequência didática que propomos (Apêndice A), bem como exemplos e exercícios sugeridos, podem ser vistos na continuidade deste Capítulo.

3.2.1 O Problema de Monty Hall

O problema de Monty Hall foi inspirado em um jogo de um programa de televisão da década de 1970.

O problema (e o jogo) consiste na seguinte situação: existem três portas fechadas, sendo que atrás de uma delas há um carro e atrás das outras duas há bodes, um atrás de cada porta. Pede-se ao competidor que escolha uma das portas para encontrar o carro. Depois disso, o apresentador abre uma das portas não-escolhidas e revela um bode. Então o apresentador dá ao competidor duas opções:

a) manter a porta escolhida;

b) trocar pela outra porta fechada que sobrou.

Uma abordagem desse problema está disponível no portal da OBMEP, no blog dos Clubes de Matemática da OBMEP. Para acessá-lo, basta usar o link: `<http://clubes.obmep.org.br/blog/probabilidades-o-problema-de-monty-hal/#:~:text=Inicialmente%2C%20a%20probabilidade%20de%20termos,probabilidade%20de%20ganhar%20o%20carro!>`.

Com relação à escolha que o competidor deve fazer, existe uma estratégia que maximiza a chance de ganhar o carro? Veremos a seguir que usando probabilidade podemos elaborar uma estratégia para aumentar as chances de ganhar. Para isso, precisamos aprender o que é probabilidade, e como lidar com ela. Vamos aos conceitos.

3.2.2 Experimento Aleatório

Um experimento é considerado aleatório se ao repetí-lo inúmeras vezes o resultado é sempre imprevisível. São exemplos de experimentos aleatórios:

- Lançar uma moeda;
- Lançar um dado;
- Retirar uma carta de um baralho;
- Selecionar ao acaso uma bola em uma urna.

3.2.3 Espaço Amostral

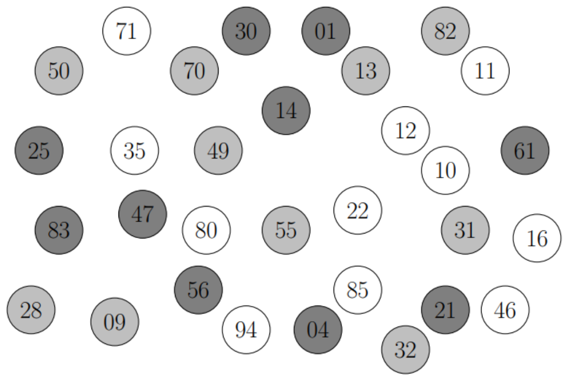
Definimos como espaço amostral (S) o conjunto de todos os resultados possíveis em um experimento aleatório. Como exemplo considere a seguinte situação:

Exemplo 3.1 *Um número é selecionado sem preferência dentre os números 00, 01, 02, ..., 98, 99, conforme é apresentado na figura 3.2.*

Neste exemplo, selecionar um elemento corresponde a um experimento aleatório, pois não há como prever qual elemento será selecionado. O espaço amostral é o conjunto

$$S = \{00, 01, 02, ..., 98, 99\}. \tag{1}$$

Figura 3.2: Selecionando sem preferência.



Fonte: Livro Probabilidade e Estatística, L. Rifo (2021).

3.2.4 Evento

Definimos como evento qualquer subconjunto do espaço amostral. Para denotar eventos usaremos letras maiúsculas do nosso alfabeto.

Como exemplo, considere no espaço amostral S, dado na equação (1) o seguinte evento

$$E_0 = \{\text{número de } S \mid \text{o primeiro dígito é igual a zero}\},$$

ou seja, E_0 é um subconjunto de S, tal que $E_0 = \{00, 01, 02, ..., 08, 09\}$.

Quando um evento for igual ao espaço amostral, chamamos esse evento de evento certo. E quando um evento não possui nenhum elemento, chamamos de evento impossível.

3.2.5 Probabilidade

A probabilidade (P) de um evento acontecer é dada pela razão entre o número de elementos do evento (E) e o número de elementos do espaço amostral (S), ou seja:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}.$$

Onde $n(E)$ representa o número de elementos do evento E e $n(S)$ representa o número de elementos do espaço amostral S.

Exemplo 3.2 *Ao selecionar um elemento do conjunto* $S = \{00, 01, 02, ...98, 99\}$*, qual a probabilidade do primeiro dígito ser igual a zero?*

Resolução: O evento $E_0 = \{00, 01, 02, ..., 08, 09\}$ possui 10 elementos, logo $n(E) = 10$. Já o espaço amostral S possui 100 elementos, logo $n(S) = 100$. Portanto a probabilidade $P(E_0)$, de um elemento do conjunto S selecionado ao acaso ter primeiro dígito igual a zero, é dada por:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}.$$

3.2.6 Axiomas da Probabilidade

Usamos os termos "os axiomas da probabilidade", ou "os axiomas de Kolmogorov" para nos referirmos aos três axiomas apresentados a seguir (axiomas já dispostos no início do deste Capítulo 3):

Sejam S um espaço amostral e $A, B \subset S$ eventos de S. Então, assumimos os seguintes axiomas sobre a probabilidade P.

Axioma K1: $P(A) \geq 0$. A probabilidade é um número não-negativo.

Axioma K2: $P(S) = 1$. O espaço amostral contém todos os possíveis resultados do experimento, assim é um evento certo.

Axioma K3: Se dois eventos A e B são mutuamente exclusivos, então a probabilidade de A ou B ocorrer é igual a probabilidade de A ocorrer somada à probabilidade de B ocorrer. Ou seja:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

O mesmo vale para qualquer número finito de eventos mutuamente exclusivos.

3.2.7 Consequência dos Axiomas

Dos axiomas decorrem os seguintes teoremas.

Teorema 3.1 (Monotonicidade) *Se* $A \subset B$*, então* $P(A) \leq P(B)$*.*

Demonstração: Se $A = B$, então $P(A) = P(B)$. Agora, se $A \subset B$ então $n(A) < n(B)$, o que leva à conclusão com o sinal de menor. □

Corolário 3.1 (Probabilidade do conjunto vazio) $P(\emptyset) = 0$.

Teorema 3.2 (Convexidade ou Limite numérico) *Se A é um evento, então*

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Demonstração: Como $\emptyset \subset A \subset S$, pelo Teorema 3.1 segue que $P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(S)$, o que por sua vez implica em $0 \leq P(A) \leq 1$. □

Definição 3.1 (Eventos mutuamente exclusivos) *Dizemos que dois eventos são mutuamente exclusivos se a ocorrência de um deles implica a não ocorrência do outro.*

3.2.8 Eventos Complementares

Seja $A \subset S$ um evento e $P(A)$ a probabilidade do evento A ocorrer. Denotamos por A^C o evento complementar de A em S, e por $P(A^C)$ a probabilidade do evento A não ocorrer.

Teorema 3.3 *Se A é um evento, então $P(A^C) = 1 - P(A)$.*

Demonstração: Observe que A e A^C são eventos mutuamente exclusivos e $A \cup A^C = S$, logo pelo 3º axioma de Kolmogorov temos que $P(A) + P(A^C) = 1$ e, portanto, $P(A^C) = 1 - P(A)$. □

Exemplo 3.3 *Ao selecionar um elemento do conjunto $S = \{00, 01, 02, ...98, 99\}$, qual a probabilidade de os dois dígitos serem diferentes?*

Resolução: Para este exemplo consideraremos dois eventos: o evento A: "os dois dígitos são iguais", cuja probabilidade é $P(A) = 1/10$; e o evento complementar de A denotado por B: "os dois dígitos são diferentes". Note que os eventos A e B são mutuamente exclusivos e além disso $A \cup B = S$, logo pelo 3º axioma de Kolmogorov, temos:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ P(S) &= P(A) + P(B) \\ 1 &= \frac{1}{10} + P(B) \\ P(B) &= \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.4 *Ao selecionar um elemento do conjunto $S = \{00, 01, 02, ...98, 99\}$, qual a probabilidade de não observarmos um número não múltiplo de 5?*

Resolução: Considere A o evento "observar um número múltiplo de 5". Assim, tal conjunto é formado pelos seguintes elementos: 00, 05, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, e temos $n(A) = 20$. Desta forma, a probabilidade de o evento A ocorrer é dada por $P(A) = 20/100 = 1/5$.

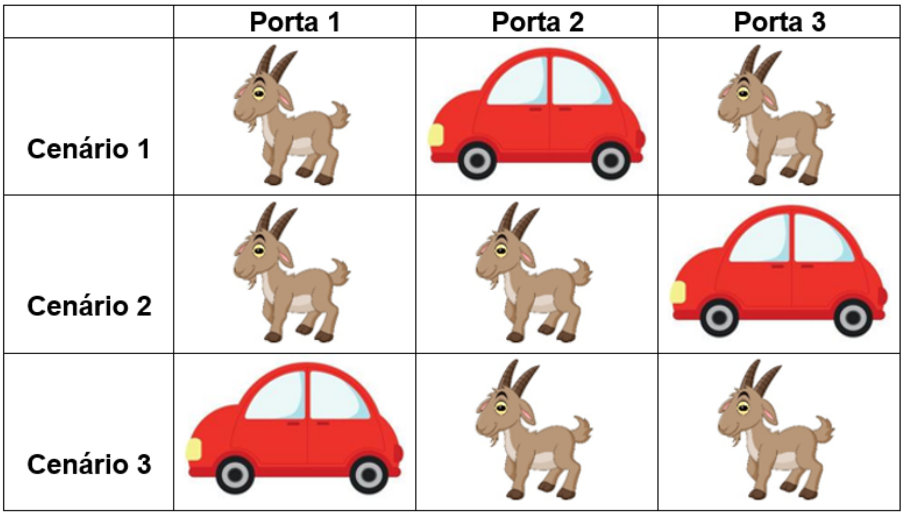
Logo pelo Teorema 3.3, a probabilidade do evento A^C = "observar um número não múltiplo de 5" é dada por:

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$
$$P(A^C) = 1 - \frac{1}{5}$$
$$P(A^C) = \frac{4}{5}.$$

3.2.9 Retomando a Situação Inicial

Retornando ao problema de Monty Hall, existem inicialmente 3 cenários possíveis. O carro pode estar na porta 1 ou na porta 2 ou na porta 3. A Figura 3.3 apresenta esses cenários:

Figura 3.3: Cenários possíveis do Problema de Monty Hall



Fonte: elaborado pelo autor (2023)

Vamos analisar duas situações:

1ª) A porta 1 foi escolhida e houve troca;

2ª) A porta 1 foi escolhida e não houve troca.

Para a 1ª situação, os cenários 1 (C_1) e 2 (C_2) são favoráveis, logo a probabilidade de ganhar o carro $P(G)$ é dada por $P(G) = P(C_1) + P(C_2) = 1/3 + 1/3 = 2/3$.

Para a 2ª situação, somente o cenário 3 (C_3) é favorável, logo a probabilidade de ganhar o carro $P(G)$ é dada por $P(G) = P(C_3) = 1/3$.

Portanto a melhor estratégia para ganhar o jogo é trocar a porta escolhida na segunda rodada, após o apresentador abrir uma porta não premiada.

3.2.10 Exercícios Resolvidos

A seguir apresentamos alguns exercícios resolvidos , em que são utilizados o princípio fundamental da contagem e teoremas decorrentes dos axiomas.

Exercício 3.1 *Se um dado honesto for lançado imparcialmente 4 vezes, qual a probabilidade de saírem faces pares em todos os lançamentos?*

Resolução: Para cada dado a probabilidade da face voltada para cima ser par é dada pela razão 1/2, logo a probabilidade de saírem faces pares em todos os lançamentos é dada por

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}.$$

Exercício 3.2 *Em uma urna, há 10 bolas numeradas de 1 a 10. Ao sortear uma bola, ao acaso, qual a probabilidade de que seu número não seja um número primo ímpar?*

Resolução: Os números primos de 1 a 10 são $2, 3, 5$ e 7. Dentre eles são impares os números $3, 5$ e 7, logo a probabilidade de que um número sorteado seja um número primo ímpar é 3/10. Portanto, pelo teorema 3.3 a probabilidade de que um número não seja um primo ímpar é dada por:

$$1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}.$$

Exercício 3.3 *Dentro de uma caixa, são colocadas bolas numeradas de 1 a 50 para que uma delas seja sorteada em uma promoção. Luiz pegou todos os múltiplos de cinco. Qual a chance dele não ganhar o sorteio?*

Resolução: Seja A o evento "o número sorteado é múltiplo de cinco". Como os múltiplos de cinco entre 1 e 50 são os números: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, a probabilidade do evento A acontecer é $P(A) = 1/5$. Logo pelo Teorema 3.3, a probabilidade de Luís não ganhar é dada pela probabilidade do evento complementar de A, ou seja,

$$P(A^C)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}.$$

Exercício 3.4 *Em uma urna, há 10 bolas azuis, 5 bolas verdes e 5 bolas brancas. Ao retirar-se aleatoriamente uma bola da urna, a probabilidade de ela não ser branca é de:*

a) 1/15

b) 1/4

c) 1/3

d) 3/4

Resolução: Na urna tem 20 bolas, sendo 10 azuis, 5 verdes e 5 brancas. Logo a probabilidade da bola ser branca $P(B)$ é:

$$P(B) = \frac{1}{4}.$$

Logo, pelo Teorema 3.3, temos que a probabilidade da bola não ser branca é $1-1/4 = 3/4$.

Exercício 3.5 *Ao escolher ao acaso, um número natural de três algarismos significativos distintos, qual é a probabilidade de que o último algarismo (referente às unidades) não seja igual a 3?*

Resolução: O número de elementos do espaço amostral será dado pela quantidade de números naturais com 3 algarismos distintos, isto é:

$$n(S) = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648.$$

Seja A o evento "escolher um número de três algarismos cuja a unidade é igual a 3". Temos que a quantidade de elementos de A é dada por:

$$n(A) = 8 \cdot 8 \cdot 1 = 64.$$

Assim, a probabilidade de o evento A ocorrer é dada por $P(A) = 64/648 = 8/81$. Pelo Teorema 3.3, a probabilidade de A não ocorrer é

$$P(A^C) = 1 - \frac{8}{81} = \frac{73}{81}.$$

Exercício 3.6 *Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 são formados números de 4 algarismos distintos. Um deles é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de ele ser: a) par? b) ímpar?*

a) **par?** Resolução: O número de elementos do espaço amostral é dado por

$$n(S) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Seja B o evento "o número escolhido é par". Logo, se o algarismo das unidades for 2, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ elementos, e se o algarismo das unidades for 4, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ elementos. Portanto o evento B possui 48 elementos. E a probabilidade de B ocorrer é dada por $P(B) = \dfrac{48}{120} = \dfrac{2}{5}$.

b) **ímpar?** Resolução: O evento complementar de B, que corresponde ao número retirado ser ímpar, tem por probabilidade 1 menos a probabilidade de B, isto é: $P(B^C) = 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$.

No Apêndice B, apresentamos uma sequência de exercícios e problemas de probabilidade adequados ao 8º ano do ensino fundamental.

4 TEORIAS AXIOMÁTICAS

Conforme Sassi Jr. (25), ao passo que a matemática grega evoluiu, métodos empíricos foram deixados de lado para dar lugar a métodos dedutivos. Assim surgiu o método axiomático que consiste em deduzir proposições por meio de afirmações consideradas como verdadeiras (axiomas).

Uma teoria, criada a partir de um método axiomático, é chamada de teoria axiomática. Quando já existe uma teoria axiomática consolidada, e no conjunto de seus axiomas básicos negamos ou substituímos um axioma, podemos determinar uma nova ou alterada teoria que pode ser consistente quando dela não derivam contradições. Uma teoria axiomática alterada, quando consistente, também é uma teoria axiomática.

4.1 O EXEMPLO DA GEOMETRIA

Como exemplo de uma teoria axiomática alterada, citamos o caso da Geometria Euclidiana e da Geometria Hiperbólica. Através de tentativas de demonstrar o quinto postulado da Geometria Euclidiana pelo método de redução ao absurdo, verificou-se a consistência de uma nova teoria com o quinto postulado alterado, hoje conhecido por Geometria Hiperbólica.

4.1.1 Axiomática de Euclides

Segundo Barbosa (3), Euclides escreveu a obra Elementos por volta do ano 300 a.C. Nessa obra Euclides reuniu em um único texto todos os teoremas conhecidos e demonstrados por seus predecessores.

Os 10 axiomas de Euclides são divididos em dois grupos, sendo 5 noções comuns e 5 postulados. A seguir enunciamos os 10 axiomas, extraídos da obra Elementos de Euclides e conforme Barbosa (3):

Noções comuns

(a) Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais.

(b) Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.

(c) Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.

(d) Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.

(e) O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

Postulados

I. Pode-se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos.

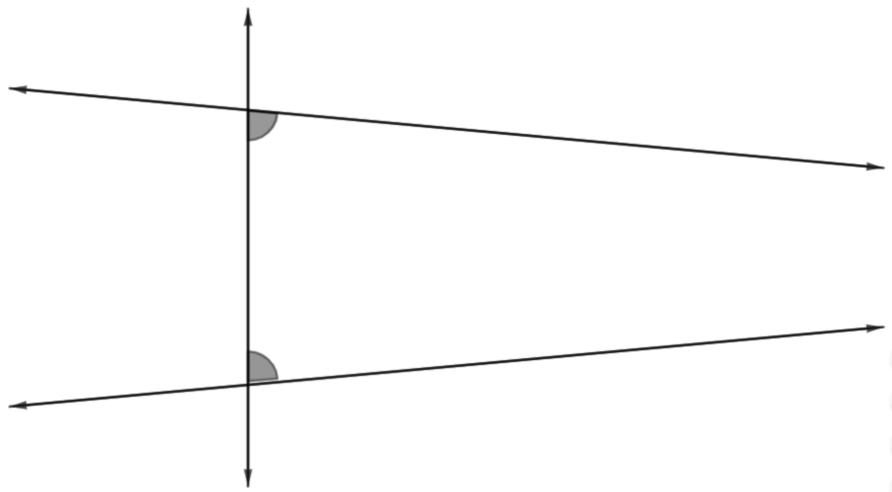
II. Pode-se continuar (de uma única maneira) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

III. Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.

IV. Todos os ângulos retos são iguais.

V. É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Figura 4.1: Representação do 5º Postulado de Euclides



Fonte: Augustini (2)

4.1.2 Axiomática de Hilbert

Conforme Valerio (29), D. Hilbert criou, a partir dos 5 Postulados de Euclides, 5 grupos de axiomas, conforme dispostos a seguir.

Axiomas de Incidência

i) Dados dois pontos distintos, existe uma única reta passando por esses pontos.

ii) Qualquer reta possui pelo menos dois pontos.

iii) Existem pelo menos três pontos distintos e não colineares, ou seja, que não pertencem à mesma reta.

Axiomas de Ordem

i) Se um ponto B está entre A e C, então, os três pontos pertencem a uma mesma reta, e B está entre C e A.

ii) Para quaisquer dois pontos distintos A e C, existe pelo menos um ponto B pertencente à reta AC tal que C está entre A e B.

iii) Se três pontos distintos estão sobre uma mesma reta, não mais que um ponto está entre os outros dois.

iv) Axioma de Pasch: Sejam A, B e C três pontos que não estão sobre uma mesma reta, e seja l uma reta do plano que não contém algum dos três pontos. Então, se l intercepta o segmento AB, ela também intercepta o segmento AC ou o segmento BC.

Axiomas de Congruência

i) Se A e B são dois pontos em uma reta l e A' é um outro ponto de uma reta l', não necessariamente distinta da anterior, então é possível encontrar um ponto B' em um dado lado da reta l' tal que os segmentos AB e $A'B'$ são congruentes.

ii) Se um segmento $A'B'$ e um outro segmento $A''B''$ são congruentes a um mesmo segmento AB, então os segmentos $A'B'$ e $A''B''$ são congruentes entre si.

iii) Sobre uma reta l, sejam AB e BC dois segmentos da mesma que, exceto por B, não tem pontos em comum. Além disso, sobre uma outra ou a mesma reta l', sejam $A'B'$ e $B'C'$ dois segmentos que, exceto por B', não têm pontos em comum. Neste caso, se AB é congruente a $A'B'$ e BC é congruente a $B'C'$, então AC é congruente a $A'C'$.

iv) Se $\angle ABC$ é um ângulo, e se $B'C'$ é um raio, ou seja, um lado do ângulo, então existe exatamente um raio $A'B'$ em cada lado de $B'C'$ tal que $\angle A'B'C'$ é congruente a $\angle ABC$. Além disso, cada ângulo é congruente a si mesmo.

v) Se para dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, AB é congruente a $A'B'$, AC é congruente a $A'C'$ e $\angle BAC$ é congruente a $\angle B'A'C'$, então $\angle ABC$ é congruente a $\angle A'B'C'$ e $\angle ACB$ é congruente a $\angle A'C'B'$.

Axiomas de Continuidade

i) Axioma de Arquimedes: Se AB e CD são segmentos, então existe um número natural n tal que n cópias de CD construídas continuamente de A ao longo do raio AB passará além do ponto B.

ii) Axioma da Completude da Reta (Axioma de Cantor): Se $\{I^{(n)} = A^{(n)}B^{(n)}, n \in \mathbb{N}\}$, é uma coleção de segmentos encaixados, então existe pelo menos um ponto P pertencente a todos os segmentos da coleção.

Axioma das Paralelas.

Em um ponto não pertencente a uma reta dada incide uma única reta que não a intercepta.

4.1.3 O Quinto Postulado da Geometria Euclidiana

Em busca de uma demonstração para o quinto postulado de Euclides surgiram inúmeras afirmações equivalentes, chamadas por Barbosa (3) de substitutos. Para o autor, uma proposição P é chamada de substituto se a teoria axiomática desenvolvida com os 4 primeiros axiomas mais a proposição P coincidem com a Geometria Euclidiana. Para demonstrar que P é um substituto para o 5º postulado deve-se executar duas etapas:

1) Deve-se saber que P é uma proposição da Geometria Euclidiana.

2) Na teoria desenvolvida usando os quatro axiomas mais a proposição P, pode-se provar o 5º postulado.

Barbosa (3) apresenta os substitutos para o 5º Postulado de Euclides, com o objetivo de exibir a profundidade das repercussões do 5º postulado. Dispomos tais substitutos a seguir.

- Postulado V1 (Axioma de Playfair): Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.

- Postulado V2. A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos.

- Postulado V3. Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.

- Postulado V4. Existe um par de retas equidistantes.

- Postulado V5. Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um círculo passando por estes três pontos.

- Postulado V6. Se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então, o último também é reto.

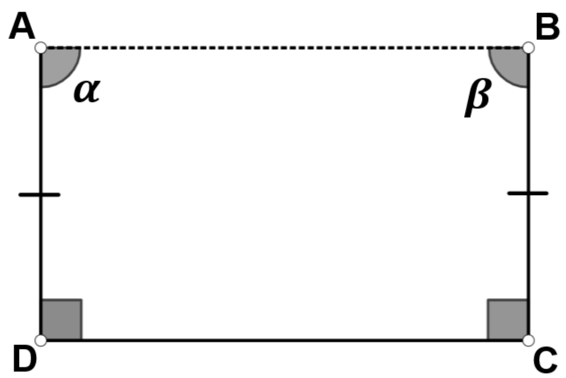
- Postulado V7. Por qualquer ponto dentro de um ângulo menor do que dois terços de um ângulo reto, pode-se traçar uma reta que corta os dois lados do ângulo.

Muitos matemáticos tentaram demonstrar o quinto postulado a partir dos quatro primeiros. Entre eles podemos destacar Giovanni Girolamo Saccheri e Johann Heinrich Lambert, que utilizaram o método de redução por absurdo para demonstrar o quinto postulado. A seguir, descrevemos o raciocínio desenvolvido por esses matemáticos, conforme apresentado por Augustini (2).

G. G. Sacheri

Considere um quadrilátero conforme disposto na Figura 4.2.

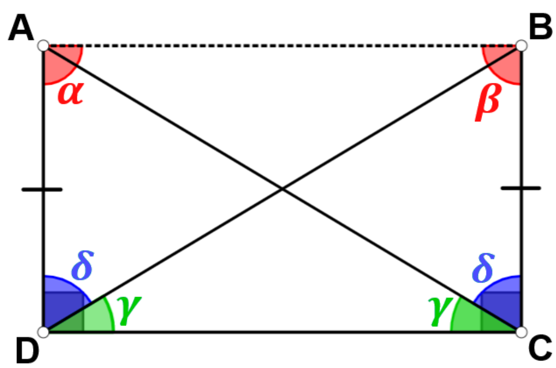
Figura 4.2: Quadrilátero de Sacheri



Fonte: Augustini (2)

Note que $\angle\alpha = \angle\beta$. Como $\angle ADC \equiv \angle BCD$, então perguntamos se vale que $\angle ACD \equiv \angle BDC$ (que possuem medida γ, conforme indicado na Figura 4.3).

Figura 4.3: Quadrilátero de Sacheri com detalhes



Fonte: Augustini (2)

De maneira análoga, temos $\angle ADB \equiv \angle BCA$ com medida $\delta = \dfrac{\pi}{2} - \gamma$. Dessa última igualdade temos que $\angle ABC \equiv \angle BAD$ e com isso $\angle\alpha = \angle\beta$.

Saccheri considerou a existência de um retângulo como um substituto equivalente para o quinto postulado. A negação da existência desse retângulo implica em dois casos:

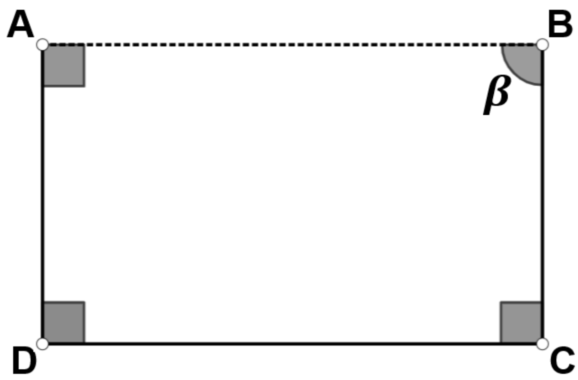
1º caso: Se $\alpha = \beta > \frac{\pi}{2}$, a reta AB teria comprimento finito, o que contraria o 2º postulado.

2º caso: Se $\alpha = \beta < \frac{\pi}{2}$, não é possível chegar a uma contradição, pelo contrário, é possível deduzir novos resultados, que seriam teoremas de uma geometria não Euclidiana.

J. H. Lambert

Lambert usou um raciocínio semelhante ao de Saccheri, porém considerou somente um ângulo definido como β, conforme disposto na Figura 4.4.

Figura 4.4: Quadrilátero de Lambert



Fonte: Augustini (2)

Lambert considerou duas situações em que $\beta > \frac{\pi}{2}$ e $\beta < \frac{\pi}{2}$. Não chegou a uma contradição, porém chegou ao seguinte teorema da geometria hiperbólica:

> "A área de um triângulo hiperbólico é proporcional a diferença entre π e a soma das medidas em radianos de seus ângulos internos."

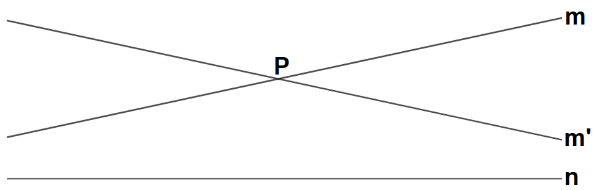
4.1.4 Geometria Hiperbólica

Lobachewsky também tentou demonstrar o quinto postulado de Euclides, porém sem sucesso, mas reconheceu a existência e desenvolveu resultados de uma nova geometria que seria chamada de geometria hiperbólica. Ao negar o quinto postulado chegou na seguinte afirmação, conhecida como postulado de Lobachewsky:

> "Por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas distintas que não intersectam a reta dada."

Conforme Augustini (2), considerando os quatro primeiros axiomas de Hilbert e substituindo o quinto postulado de Euclides pelo postulado de Lobachewsky, obtém-se o sistema axiomático para a Geometria Hiperbólica.

Figura 4.5: Postulado de Lobachewsky



Fonte: Barbosa (3)

4.2 TEORIA AXIOMÁTICA EM PROBABILIDADE

Nesta seção, de forma semelhante ao que foi exemplificado com a geometria, apresentaremos possibilidades de alterações para a teoria de probabilidade. Primeiramente, iremos apresentar o sistema axiomático de Kolmogorov, para em seguida apresentar uma variação de teoria axiomática de probabilidade, obtida ao considerar a negação do 3º axioma de Kolmogorov.

4.2.1 Axiomas de Probabilidade Segundo Kolmogorov

Considere E uma coleção de elementos ξ que chamaremos eventos elementares, e F um conjunto de subconjuntos de E. Os elementos do conjunto F são chamados de eventos aleatórios. Os axiomas de probabilidade, segundo Kolmogorov, podem ser descritos pelo conjunto de proposições disposto a seguir.

I) F é um corpo de conjuntos.

II) F contém o conjunto E.

III) A cada conjunto A de F é atribuído um número real não negativo $P(A)$. Este número é chamado de probabilidade do evento A.

IV) $P(E)$ é igual a 1.

V) Se A e B não têm nenhum elemento em comum, então vale $P(A+B) = P(A)+P(B)$.

A Construção de Campos de Probabilidade.

Os campos de probabilidade mais simples são construídos como segue. Tomamos um conjunto finito arbitrário $E = \xi_1, \xi_2, ..., \xi_k$ e um conjunto arbitrário $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_k$ de números não negativos com a soma $\rho_1 + \rho_2 + ... + \rho_k = 1$. F é tomado como o conjunto de todos os subconjuntos em E, e consideramos:

$$P(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k) = \rho_{i_1} + \rho_{i_2} + ... + \rho_{i_\lambda}.$$

Nesses casos, $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_k$ são chamados de probabilidades elementares dos eventos $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k$, ou simplesmente probabilidades elementares. Desta forma são derivados todos os possíveis campos finitos de probabilidade em que F consiste no conjunto de todos os subconjuntos de E (o campo de probabilidade é chamado finito se o conjunto E for finito.)

A negação do 3º axioma de probabilidade.

O 3º axioma de Kolmogorov informa que a probabilidade de um evento é um número real não negativo. A negação desse axioma implica na existência de probabilidades negativas. Na Seção 4.2.5 reproduzimos uma teoria matemática de probabilidades estendidas que inclui a admissão de probabilidades negativas, conforme apresentada por M. Burgin (10). Antes disso, fazemos um breve apanhado histórico da probabilidade negativa, bem como analisamos um experimento mental que implica na necessidade da admissão de probabilidades negativas.

4.2.2 História da Probabilidade Negativa

Segundo Morgado et al. (20), a teoria de probabilidade surgiu por meio de correspondências entre Blaise Pascal (1623 - 1662) e Pierre de Fermat (1601 - 1665). Nessas correspondências ambos discutiam sobre a probabilidade de ganhar em jogos de cartas. Porém, antes disso a probabilidade já tinha sido objeto de estudo em jogos devido à busca por encontrar uma maneira segura de ganhar.

Ainda conforme Morgado et al. (20), a teoria de probabilidade não despertou interesse entre os matemáticos que se seguiram a Pascal e Fermat, mas esse assunto voltou a receber atenção ao se perceber a sua utilidade como instrumento de observação social.

Apenas em 1930 Kolmogorov definiu o conjunto de axiomas matemáticos usados atualmente para tratar a probabilidade.

Já a probabilidade negativa começou com a teoria de Klein-Gordon, descoberta em 1927 por Oskar Klein (1894 - 1977, da Suécia) e Walter Gordon (1893 - 1939, da Alemanha). Inicialmente, tal teoria foi considerada fisicamente sem sentido, mas levou outro físico a dedicar esforços nessa área. Paul Dirac (1902 - 1984), ao estudar probabilidades negativas, criou a equação de Dirac em 1928. Cerca de uma década depois, Dirac retornou a dedicar esforços às probabilidades negativas e escreveu um artigo intitulado "A interpretação Física da Mecânica Quântica", onde introduziu o conceito de probabilidades negativas. Nesse artigo, Dirac (12) cita que "energias e probabilidades negativas não devem ser consideradas como [meras] tolices. São conceitos bem definidos matematicamente, como um negativo de dinheiro".

Em 1932 Eugene Wigner obteve valores negativos para probabilidade ao estudar correções quânticas (30), e em 1945 Maurice S. Bartlett elaborou as consistências matemática e lógica sobre probabilidades negativas (4).

Em 1987 Richard Feynman também fez contribuições a essa área. Em uma delas argumentou: “ninguém se opõe ao uso de números negativos em cálculos, embora ‘menos três maçãs’ não seja um conceito válido na vida real”.

Após os trabalhos de Feynman, surgiram algumas publicações sobre uso de probabilidades negativas, por exemplo, com aplicações em mecânica quântica, computação quântica, refluxo de probabilidade quântica, lançamento de meia moeda, entropia e finanças.

4.2.3 Para que Servem as Probabilidade Negativas

S. Abramsky e A. Brandenburger (1) afirmaram, citando Feynman: “A única diferença entre um mundo clássico probabilístico e as equações do mundo quântico é que, de uma forma ou de outra, parece que as probabilidades teriam que ser negativas. . .”

A. Blass e Y. Gurevich (5) afirmam que o princípio da incerteza impõe um limite para a precisão com que a posição x e momento p de uma partícula podem ser conhecidas simultaneamente. Podemos conhecer as distribuições de probabilidade de x e p individualmente, mas as distribuições conjuntas de x e p não fazem sentido físico, embora a questão de saber se existe uma distribuição conjunta apropriada faz sentido matemático. Em 1932, Wigner apresentou essa distribuição conjunta, que apresentava alguns valores negativos. Wigner alertou ainda que tais valores negativos não deveriam impedir o uso como uma função auxiliar da distribuição por ele apresentada.

Em um paralelo com o fato de que os números complexos não são quantidades, mas mesmo assim podem ser usados para resolver equações algébricas, as probabilidades negativas podem atuar como ferramenta para explicar determinadas situações, como o experimento mental disposto a seguir exemplifica.

4.2.4 Um Experimento Mental que Acarreta em Probabilidades Negativas

Experimentos mentais são experimentos não realizáveis na prática, usados para compreender aspectos não experimentáveis do universo, sendo que suas consequências podem ser exploradas pela imaginação, pela física e pela matemática. Abramsky e Branderburger (1) propuseram um cenário para ilustrar pedagogicamente o uso de probabilidades negativas em mecânica quântica, através do experimento envolvendo registradores de bits, conhecido como experimento mental de Piponi. Reproduzimos tal experimento mental a seguir.

Considere um sistema composto por dois registradores de bits A e B (que são circuitos digitais capazes de armazenar e deslocar informações binárias, conforme esquema disposto na Figura 4.6). Tal circuito possui os seguintes elementos:

- Um flip-flop A e um flip-flop B: circuito digital pulsado, que atua como memória de um bit;

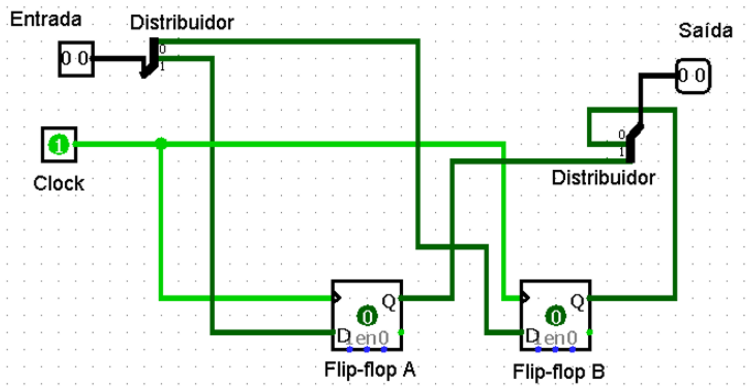
- Uma entrada;

- Uma saída;

- Dois distribuidores;

- Um clock.

Figura 4.6: Registrador de dois bits



Fonte: Elaborado pelo autor

A cada execução do sistema podemos fazer as seguintes observações:

1º) Podemos ler A ou B, mas não ambos.

2º) Alternativamente, podemos observar o exclusivo de A e B. O exclusivo de A e B será denotado pelo símbolo $A \otimes B$

O que descobrimos pela observação do sistema é que, em cada execução (clock):

I. Quando lemos A, sempre obtemos o valor 1.

II. Quando lemos B, sempre obtemos o valor 1.

III. Quando observamos $A \otimes B$, obtemos sempre o valor 1.

De I. e II., inferimos que A = 1 e B = 1, mas isso contradiz o item III., que diz que a observação resulta em $A \otimes B = 1$.

É possível usar probabilidades negativas para explicar esse comportamento.

Seja P uma distribuição de probabilidade associada ao espaço amostral

$$\Omega = \{(A, B) : A, B \in \{0, 1\}\},$$

e seja $p_{A,B} = P(A, B)$. A soma das probabilidades deve ser igual a 1, ou seja:

$$p_{0,0} + p_{0,1} + p_{1,0} + p_{1,1} = 1.$$

Porém, quando observamos o flip-flop A, temos duas opções para o flip-flop B: 0 ou 1, cada uma com probabilidade de 1/2 de acontecer, ou seja:

$$p_{1,0} + p_{1,1} = 1.$$

Analogamente, quando observamos o flip-flop B, temos duas opções para o flip-flop A: 0 ou 1, cada uma com probabilidade de 1/2 de acontecer, ou seja:

$$p_{0,1} + p_{1,1} = 1.$$

E quando observamos o flip-flop A ou o flip-flop B, obtemos:

$$p_{0,1} + p_{1,0} = 1.$$

Resolvendo então o sistema de equações, obtemos:

$$p_{0,0} = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad p_{0,1} = p_{1,0} = p_{1,1} = \frac{1}{2}.$$

Ou seja, se aceitarmos atribuir probabilidades negativas, como Feynman sugeriu, a contradição encontrada é facilmente resolvida.

4.2.5 Uma Probabilidade Estendida

O objetivo nesta Seção é apresentar uma teoria axiomática, que admita a possibilidade de probabilidades negativas, e que seja obtida através da negação do 3º axioma de Kolmogorov. Escolhemos apresentar a teoria desenvolvida por M. Burgin (10).

Burgin (10) inicia apresentando os conceitos primitivos, que apresentamos a seguir.

Consideramos Ω um conjunto consistindo em duas partes irredutíveis (subconjuntos), denotados por Ω^+ e Ω^-. Um conjunto de subconjuntos de Ω pode ser denotado por F. Elementos dos subconjuntos F são chamados eventos aleatórios. Dado um evento qualquer $w \in \Omega$, chamamos $-w$ de antievento de w. O símbolo P é usado para representar uma função de F para o conjunto $\mathbb{R}$ de números reais.

Dado um conjunto $F \subset \Omega$, definimos o subconjunto F^+ por $F^+ := \{X \in F;\ X \subseteq \Omega^+\}$. Elementos do conjunto F^+ são chamados eventos aleatórios positivos. Elementos do subconjunto Ω^+ que pertencem a F^+ são chamados eventos aleatórios positivos elementares. Elementos de Ω^- que pertencem a F^- são chamados eventos aleatórios negativos elementares.

Dado um evento A, a probabilidade do complemento desse evento será denotado por $P(C_\Omega A)$.

Para qualquer conjunto $X \subseteq \Omega^+$, definimos

$$\begin{aligned} X^+ &= X \cap \Omega^+, \\ X^- &= X \cap \Omega^-, \\ -X &= \{-w; w \in X\}, \\ F^- &= \{-A;\ A \in F^+\}. \end{aligned}$$

Se $A \in F^+$, então $-A$ é chamado de antievento de A. Elementos de F^- são chamados eventos aleatórios negativos ou antieventos aleatórios.

A seguir, descrevemos como Burgin (10) desenvolveu sua teoria, propondo a axiomatização, bem como enunciando definições e propriedades, que reproduzimos a partir deste ponto. Importante salientar que, em nossa apresentação, corrigimos alguns erros de digitação que encontramos no trabalho (10), bem como acrescentamos algumas demonstrações.

Definição 4.1 *A função P de F para o conjunto $\mathbb{R}$ de números reais é chamada de função de probabilidade se satisfaz os axiomas 4.1-4.11, dispostos a seguir.*

Axioma 4.1 *(Estrutura de ordem): Existe um mapeamento $\alpha : \Omega \to \Omega$ tal que α^2 é um mapeamento identidade em Ω, com as seguintes propriedades:*

i) $\alpha(w) = -w$ para qualquer evento w de Ω;

ii) $\alpha(\Omega^+) \supseteq \Omega^-$;

iii) se $w \in \Omega^+$, então $\alpha(w) \notin \Omega^+$.

Axioma 4.2 *(Estrutura algébrica): $F^+ = \{X \in F; X \subseteq \Omega^+\}$ é uma álgebra de conjuntos, que tem Ω^+ como um membro.*

Obs.: Uma *álgebra de conjuntos* é um anel $\mathcal{B}$ de conjuntos com elemento unidade, isto é, existe elemento $E \in \mathcal{B}$ tal que, para qualquer elemento $A \in \mathcal{B}$, vale $A \cap E = A$. Um *anel de conjuntos* é um sistema $\mathcal{B}$ de conjuntos para o qual valem as propriedades: (i) $A, B \in \mathcal{B}$ implica em $A \cap B \in \mathcal{B}$, e (ii) $A, B \in \mathcal{B}$ implica em $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) \in \mathcal{B}$. Uma álgebra de conjuntos fechada com respeito a seu complemento é chamada de *corpo de conjuntos*.

Axioma 4.3 *(Normalização): $P(\Omega^+) = 1$.*

Axioma 4.4 *(Composição):*

$$F \equiv \{X \mid X^+ \subseteq F^+,\ e\ X^- \subseteq F^-,\ e\ X^+ \cap -X^- \equiv \varnothing,\ e\ X^- \cap -X^+ \equiv \varnothing\}.$$

Axioma 4.5 *(Aditividade finita): Vale $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, para todos os conjuntos $A, B \in F$ tais que $A \cap B \equiv \varnothing$.*

Axioma 4.6 *(Aniquilação de evento e antievento): Para qualquer elemento w de Ω e conjunto de índices I, vale a seguinte igualdade entre conjuntos:*

$$\{v_i, w, -w \mid v_i, w \in \Omega, \ com \ i \in I\} = \{v_i \mid v_i \in \Omega, \ com \ i \in I\}.$$

Obs.: O Axioma 6 mostra que dois elementos w e $-w$ se cancelam, por isso necessitamos dois símbolos de igualdade. Nesta Seção, o símbolo "$\equiv$" denota igualdade de conjuntos por cancelamento, por exemplo, $\{w, -w\} \equiv \varnothing$; e o símbolo "$=$" denota igualdade de conjuntos ou igualdade de elementos de conjuntos, como estamos acostumados.

Axioma 4.7 *(Adequação): Para quaisquer conjuntos $A, B \in F$, a igualdade $A = B$ implica na igualdade $P(A) = P(B)$. Por exemplo, $P(\{w, -w\}) \equiv P(\varnothing) = 0$.*

Axioma 4.8 *(Não negatividade): $P(A) \geq 0$, para todo $A \in F^+$.*

Axioma 4.9 *(Continuidade): Se $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq ...A_i \supseteq ...$ é uma sequência decrescente de eventos A_i de F^+ tal que $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$, então $\lim\limits_{i \to \infty} P(A_i) = 0$.*

Axioma 4.10 *(Decomposição): Para qualquer $A \in F$, temos $P(A) = P(A^+) + P(A^-)$.*

Axioma 4.11 *(Aditividade finita positiva): Para quaisquer conjuntos $A, B \in F^+$, tais que $A \cap B = \varnothing$ e $A \cap -B = \varnothing$, vale $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.*

Definição 4.2 *A tríade (Ω, F, P) é chamada de espaço de probabilidade estendido.*

Definição 4.3 *Se $A \in F$, então o número $P(A)$ é chamado de probabilidade estendida do evento A.*

Assim como no caso da probabilidade clássica, os Axiomas 4.9 e 4.10 são adicionados para garantir a ideia de continuidade na avalição de probabilidades de conjuntos encaixados e na decomposição de conjuntos. O Axioma 4.11 é uma restrição ao Axioma 4.5. Os Axiomas 4.1 a 4.8 são suficientes para a dedução da maior parte das propriedades que são enunciadas a seguir.

Lema 4.1 *O conjunto obtido ao aplicar o mapeamento α ao subconjunto Ω^+ é o conjunto de antieventos do subconjunto Ω^+, igual ainda a Ω^-, isto é, $\alpha(\Omega^+) = -\Omega^+ = \Omega^-$. Analogamente, vale $\alpha(\Omega^-) = -\Omega^- = \Omega^+$.*

Demonstração: Do Axioma 4.1(i) é imediato que:

$$\alpha(\Omega^+) = -\Omega^+. \tag{2}$$

O Axioma 4.1(ii) nos diz que $\alpha(\Omega^+) \supseteq \Omega^-$. Logo, para mostrar que $\alpha(\Omega^+) = \Omega^-$, basta mostrar que $\alpha(\Omega^+) \subseteq \Omega^-$. Mas esta inclusão é imediata, pois sua negação implicaria na existência de $w_0 \in \Omega^+$ tal que $\alpha(w_0) \notin \Omega^-$, isto é, $\alpha(w_0) \in \Omega^+$, contradizendo o Axioma 4.1(iii). Concluímos, portanto, que

$$\alpha(\Omega^+) = \Omega^-. \tag{3}$$

Das equações (2) e (3) conclui-se que que $\alpha(\Omega^+) = -\Omega^+ = \Omega^-$. A prova da outra expressão é análoga. □

Proposição 4.1 *O mapeamento α é injetivo, e os conjuntos Ω^+ e Ω^- tem a mesma cardinalidade, isto é, $|\Omega^+| = |\Omega^-|$.*

Demonstração: Vamos supor que $-w_1 = -w_2$. Como $\alpha(w_1) = -w_1$ e $\alpha(w_2) = -w_2$, temos que $\alpha(w_1) = \alpha(w_2)$ e assim $w_1 = w_2$.

Do Axioma 4.1 (ii), $\alpha(\Omega^+) \supseteq \Omega^-$ e do Lema 4.1 temos que $\alpha(\Omega^+) = \Omega^-$ e $\alpha(\Omega^-) = \Omega^+$, de onde conclui-se que $|\Omega^+| = |\Omega^-|$. □

Corolário 4.1 *(Simetria do domínio): Um elemento qualquer w pertence Ω^+ se, e somente se, o anti-evento $-w$ pertence Ω^-.*

Corolário 4.2 *(Simetria do elemento): Para qualquer elemento $w \in \Omega$ vale $-(-w) = w$.*

Corolário 4.3 *(Simetria do evento): Para qualquer evento $X \in \Omega$ vale $-(-X) = X$.*

Lema 4.2 *Para qualquer elemento $w \in \Omega$ tem-se $\alpha(w) \neq w$.*

Demonstração: Se $w \in \Omega^+$, então pelo Axioma 4.1 $\alpha(w) \notin \Omega^+$, e assim vale $\alpha(w) \neq w$. Vamos mostrar que o mesmo vale para Ω^-. Para isso assumiremos que $w \in \Omega^-$ e que $\alpha(w) = w$. Seja v um elemento de Ω^+, vamos supor $\alpha(v) = w$. Do Axioma 4.1, como α é um mapeamento de identidade, temos:

$$\alpha(\alpha(v)) = \alpha(w) = w.$$

Mas, como $\alpha(\alpha(v)) = v$, então $w = v$. Mas $w \in \Omega^-$, e como temos $v \in \Omega^+$, isso contradiz o Axioma 4.1. Assim, o lema fica provado por contradição. □

Proposição 4.2 *A interseção dos conjuntos Ω^+ e Ω^- é vazia, isto é: $\Omega^+ \cap \Omega^- = \varnothing$.*

Demonstração: Considere $w \in \Omega^+ \cap \Omega^-$, ou seja, considere w tal que $w \in \Omega^+$ e $w \in \Omega^-$. Como $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$, pelo Axioma 4.1 vale $-w \in \Omega \setminus (\Omega^+ \cap \Omega^-) = \Omega \setminus \Omega^+ = \Omega^- \setminus \Omega^+$, ou seja, $-w \in \Omega^- \setminus \{w\}$. Então, pelo Axioma 6, $\Omega^- = \Omega^- \setminus \{w\}$. No entanto, isso contradiz a irredutibilidade de Ω^-, e somos obrigados a conluir que $\Omega^+ \cap \Omega^- = \varnothing$. □

Proposição 4.3 *Os conjuntos* F^+ *de eventos aleatórios positivos* F^- *de eventos aleatórios negativos obedecem as seguintes inclusões:* $F^+ \subseteq F$; $F^- \subseteq F$ *e* $F \subseteq F^+ \cup F^-$.

Demonstração: Os conjuntos de eventos aleatórios positivos elementares F^+ são definidos por $F^+ = \{x \in F; x \subseteq \Omega^+\}$. Como F representa um conjunto de subconjuntos de Ω, temos que $F^+ \subseteq F$. Analogamente $F^- \subseteq F$. Pelo Axioma 4.4, segue que $F \subseteq F^+ \cup F^-$. □

Proposição 4.4 *Dado um conjunto de eventos* X*, tem-se* $X \subseteq \Omega^+$ *se, e somente se,* $-X \subseteq \Omega^-$.

Demonstração: Do Corolário 4.1, temos que um evento $w \in \Omega^+$ se, e somente se, o anti-evento $-w \in \Omega^-$. Logo, se $w \in X^+$, então $-w \in X^-$. Assim, concluímos que $X \subseteq \Omega^+$ e $X \subseteq \Omega^+$. □

Proposição 4.5 *O conjunto de eventos aleatórios negativos pode ser descrito como:*

$$F^- = \{X \in F;\ X \subseteq \Omega^-\} = F \cap \Omega^-.$$

Demonstração: O conjunto F^+ é definido como $F^+ = \{X \in F; X \subseteq \Omega^+\}$, logo, por analogia, podemos escrever $F^- = \{X \in F; X \subseteq \Omega^-\}$, ou ainda $F^- = F \cap \Omega^-$. □

Corolário 4.4 *A interseção dos conjuntos* F^+ *e* F^- *é vazia, isto é,* $F^+ \cap F^- = \varnothing$.

Lema 4.3 *A união entre um conjunto de eventos com o conjunto de anti-eventos é igual ao conjunto vazio, por aniquilação, isto é,*

$$X \cup -X \equiv \varnothing,$$

para qualquer subconjunto X *de* Ω.

Demonstração: Para qualquer elemento $w \in X$, existe o elemento $-w \in -X$. Pelo Axioma 4.6, concluímos que $X \cup -X \equiv \varnothing$. □

A união com aniquilação de dois subconjuntos é dada pela expressão

$$X + Y = (X \cup Y) \setminus [(X \cap -Y) \cup (-X \cap Y)]. \tag{4}$$

Neste caso, o símbolo "\" representa aniquilação.

Lema 4.4 *Para quaisquer subconjuntos* X, Y, $Z \in \Omega$, *vale:*

a) $X + X = X$;

b) $X + Y = Y + X$*;*

c) $X + \varnothing = X$*;*

d) $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$*;*

e) Se $X, Y \in \Omega^+$ (Ω^-)*, vale* $X + Y = X \cup Y$*.*

Demonstração:

a) Da Equação (4), temos $X + X = (X \cup X) \setminus [(X \cap -X) \cup (-X \cap X)]$. Como $(-X \cap X) = \varnothing$, então $X + X = (X \cup X)$, mas $X \cup X = X$. Logo $X + X = X$.

b) Da Equação (4), temos $X + Y = (X \cup Y) \setminus [(X \cap -Y) \cup (-X \cap Y)]$. Mas como como a união e a interseção de conjuntos são operações comutativas, segue que

$$X+Y = (Y \cup X) \setminus [(-Y \cap X) \cup (Y \cap -X)] = (Y \cup X) \setminus [(Y \cap -X) \cup (-Y \cap X)] == Y+X.$$

c) Da Equação (4), segue que $X + \varnothing = (X \cup \varnothing) \setminus [(X \cap -\varnothing) \cup (-X \cap \varnothing)]$, expressão que pode ser reescrita como $X + \varnothing = (X \cup \varnothing) \setminus \varnothing$, ou ainda, $X + \varnothing = X$.

d) Sejam $X^+, Y^+, Z^+ \in \Omega^+$. Da Equação 4 temos:

$$X^+ + (Y^+ + Z^+) = (X^+ \cup (Y^+ + Z^+)) \setminus [(X^+ \cap -(Y^+ + Z^+)) \cup (-X^+ \cap (Y^+ + Z^+))]$$

Observe que $-X^+$ e $-(Y^+ + Z^+) \notin \Omega^+$ logo $[(X^+ \cap -(Y^+ + Z^+)) \cup (-X^+ \cap (Y^+ + Z^+))] \equiv \varnothing$. Assim $X^+ + (Y^+ + Z^+) = (X^+ \cup (Y^+ + Z^+))$. E da Equação (4) temos $X^+ + (Y^+ + Z^+) = X^+ \cup (Y^+ \cup Z^+) \setminus [(Y^+ \cap -Z^+) \cup (-Y^+ \cap Z^+)]$. Como $-Z^+$ e $-Y+ \notin \Omega^+$ então $(Y^+ \cap -Z^+) \cup (-Y^+ \cap Z^+) \equiv \varnothing$. Dessa forma obtemos:

$$X^+ + (Y^+ + Z^+) = X^+ \cup Y^+ \cup Z^+ \tag{5}$$

Desenvolvendo o 2º membro através da Equação (4) temos:

$$(X^+ + Y^+) + Z^+ = ((X^+ + Y^+) \cup Z^+) \setminus [((X^+ + Y^+) \cap -Z^+) \cup (-(X^+ + Y^+) \cap Z^+)]$$

Como $-Z^+$ e $-(X+Y) \notin \Omega^+$ então $((X^+ + Y^+) \cap -Z^+) \cup (-(X^+ + Y^+) \cap Z^+) \equiv \varnothing$ logo $(X^+ + Y^+) + Z^+ = (X^+ + Y^+) \cup Z^+$. E $(X^+ + Y^+) + Z^+ = ((X^+ \cup Y^+) \setminus [(X^+ \cap -Y^+) \cup (-X^+ \cap Y^+)]) \cup Z^+$. Como $-Y^+$ e $-X^+ \notin \Omega^+$ então $(X^+ \cap -Y^+) \cup (-X^+ \cap Y^+) \equiv \varnothing$. Dessa forma obtemos:

$$(X^+ + Y^+) + Z^+ = X^+ \cup Y^+ \cup Z^+ \tag{6}$$

Das Equações 5 e 6 temos que:

$$X^+ + (Y^+ + Z^+) = (X^+ + Y^+) + Z^+ \tag{7}$$

Analogamente obtemos:

$$X^- + (Y^- + Z^-) = (X^- + Y^-) + Z^- \tag{8}$$

Somando as Equações 7 e 8, e usando o Lema 4.4 (b) e o fato de que $X^+ \cup X^- = X^+ + X^- = X$, $Y^+ \cup Y^- = Y^+ + Y^- = Y$ e $Z^+ \cup Z^- = Z^+ + Z^- = Z$, obtemos que $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$

e) Considerando $X, Y \in \Omega^+$, vale $(X \cap -Y) \cup (-X \cap Y) \equiv \varnothing$, igualdade que, ao substituirmos na Equação (4), nos fornece $X + Y = X \cup Y$.

□

Lema 4.5 *Não valem as propriedades distributivas entre interseção e adição. Mais especificamente:*

a) Não vale a propriedade distributiva da interseção com relação a adição, isto é,

$$Z \cap (X + Y) \neq Z \cap X + Z \cap Y;$$

b) Não vale a propriedade distributiva da adição com relação a interseção, isto é,

$$X + (Y \cap Z) \neq (X \cap Y) + (X \cap Z).$$

Lema 4.6 *Para quaisquer subconjuntos A, $B \in \Omega$, vale $A \cap B = (A^+ \cap B^+) + (A^- \cap B^-)$.*

Demonstração: Supondo $A \subset \Omega$, existem subconjuntos A^+ e A^- tais que $A^+ \subset \Omega^+$, $A^- \subset \Omega^-$ e $A^+ \cup A^- = A$. Da mesma forma, se $B \in \Omega$, então vale $B^+ \subset \Omega^+$, $B^- \subset \Omega^-$ e $B^+ \cup B^- = B$. Portanto, podemos calcular:

$$\begin{aligned}
A \cap B &= (A^+ \cup A^- = A) \cap (B^+ \cup B^- = B), \\
A \cap B &= (A^+ \cap B^+) \cup (A^+ \cap B^-) \cup (A^- \cap B^+) \cup (A^- \cap B^-).
\end{aligned}$$

Como $A^+ \subset \Omega^+$, $A^- \subset \Omega^-$, $B^+ \subset \Omega^+$ e $B^- \subset \Omega^-$, pela Proposição 4.2 decorre que $A^+ \cup B^- = \varnothing$ e $A^- \cup B^+ = \varnothing$ e portanto, obtemos apenas

$$A \cap B = (A^+ \cap B^+) \cup (A^- \cap B^-).$$

Aplicando o Lema 4.4(e), encontramos $A \cap B = (A^+ \cap B^+) + (A^- \cap B^-)$. □

Lema 4.7 *Para quaisquer subconjuntos A e B de Ω, vale $A \setminus B = (A^+ \setminus B^+) + (A^- \setminus B^-)$.*

Demonstração: Semelhante à demonstração do Lema 4.6, calculamos

$$\begin{aligned} A \setminus B &= (A^+ \cup A^+) \setminus (B^- \cup B^-), \\ A \setminus B &= (A^+ \setminus B^+) \cup (A^+ \setminus B^-) \cup (A^- \setminus B^+) \cup (A^- \setminus B^-). \end{aligned}$$

Como $A^+ \subset \Omega^+$, $A^- \subset \Omega^-$, $B^+ \subset \Omega^+$ e $B^- \subset \Omega^-$, pela Proposição 4.2 decorre que $A^+ \setminus B^- = \varnothing$ e $A^- \setminus B^+ = \varnothing$, e assim ficamos apenas com $A \setminus B = (A^+ \setminus B^+) \cup (A^- \setminus B^-)$. Finalmente, pelo Lema 4.4(e), obtemos $A \setminus B = (A^+ \setminus B^+) + (A^- \setminus B^-)$. □

Lema 4.8 *Para qualquer conjunto X de F, vale $X = X^+ + X^- = X^+ \cup X^-$.*

Demonstração: Seja $X \subseteq \Omega$, logo temos que $X^+ = X \cap \Omega^+$ e $X^- = X \cap \Omega^-$ então:

$$X^+ \cup X^- = (X \cap \Omega^+) \cup (X \cap \Omega^-) = X \cap (\Omega^+ \cup \Omega^-).$$

Como $\Omega^+ \cup \Omega^- = \Omega$, temos $X^+ \cup X^- = X \cap \Omega = X$. □

Lema 4.9 *Para quaisquer conjuntos $X, Y \in F$, vale $A + B = (A^+ + B^+) + (A^- + B^-)$.*

Demonstração: Pelo Lema 4.8, sabemos que $A = A^+ + A^-$ e $B = B^+ + B^-$. Logo, podemos escrever

$$A + B = (A^+ + A^-) + (B^+ + B^-).$$

Utlizando o Lema 4.4(d), obtemos $A + B = (A^+ + B^+) + (A^- + B^-)$. □

Lema 4.10 *A probabilidade atribuída a um conjunto de eventos vazio é nula, isto é,*

$$P(\varnothing) = 0.$$

Demonstração: Usando o Axioma 4.5, aplicado aos conjuntos A e $\varnothing$, podemos calcular:

$$\begin{aligned} P(A \cup \varnothing) = P(A) + P(\varnothing) &\Leftrightarrow P(A \cup \varnothing) - P(A) = P(\varnothing) \\ &\Leftrightarrow P(A) - P(A) = P(\varnothing), \end{aligned}$$

Logo, concluímos que se deve ter $P(\varnothing) = 0$. $\square$

Lema 4.11 *Para qualquer $X \subseteq \Omega$, a interseção entre X^+ e X^- é vazia, isto é,*

$$X^+ \cap X^- = \varnothing.$$

Demonstração: Seja $X \subseteq \Omega$. Sabemos que $X^+ = X \cap \Omega^+$ e $X^- = X \cap \Omega^-$. Logo, podemos escrever

$$X^+ \cap X^- = (X \cap \Omega^+) \cap (X \cap \Omega^-) = X \cap (\Omega^+ \cap \Omega^-).$$

Como $\Omega^+ \cap \Omega^- = \varnothing$, ficamos apenas com $X^+ \cap X^- = X = X \cap (\Omega^+ \cap \Omega^-)$, ou ainda, $X^+ \cap X^- = X \cap \varnothing$, que implica em $X^+ \cap X^- = \varnothing$. $\square$

Teorema 4.1 *(Simetria de álgebra) Se F^+ é uma álgebra de conjuntos (ou corpo de conjuntos), então F^- é uma álgebra de conjuntos (ou corpo de conjuntos).*

Demonstração: Suponhamos que F^+ seja uma álgebra de conjuntos, e tomemos dois eventos aleatórios negativos $H, K \in F^-$. Pela definição do conjunto de antieventos aleatórios F^-, podemos escrever $H = -A$ e $K = -B$, para alguns eventos aleatórios positivos $A, B \in F^+$. Então,

$$H \cap K = (-A) \cap (-B) = -(A \cap B).$$

Mas como F^+ é uma álgebra de conjuntos, vale $A \cap B \in F^+$, e portanto $H \cap K \in F^-$.

De maneira semelhante, obtemos

$$H \cup K = (-A) \cup (-B) = -(A \cup B).$$

Como F^+ é uma álgebra de conjuntos, vale $A \cup B \in F^+$, e temos $H \cup K \in F^-$.

De forma análoga, podemos concluir que $H \setminus K \in F^-$.

Além disso, se F^+ tem um elemento unitário E, então $-E$ é um elemento unitário em F^-.

Concluímos, portanto, que F^- é uma álgebra de conjuntos.

Supomos agora que F^+ é um corpo de conjuntos, e tomamos um subconjunto $H \in F^-$. Pela definição de F^-, podemos escrever $H = -A$ para algum evento aleatório positivo $A \in F^+$. Isso significa que $C_{\Omega^+}A = \Omega^+ \setminus A \in F^+$. Ao mesmo tempo, vale

$$C_{\Omega^-}H = \Omega^- \setminus H = (-\Omega^+) \setminus (-A) = -(\Omega^+ \setminus A) = -C_{\Omega^+}A.$$

Como o complementar $C_{\Omega^+}A$ pertence a F^+, o conjunto complementar $C_{\Omega^-}H$ de H pertence a F^-. Consequentemente, F^- é um corpo de conjuntos. $\square$

Proposição 4.6 *Para quaisquer dois eventos aleatórios $X, Y \in F$, vale*

$$P(X + Y) = P(X \cup Y).$$

Demonstração: Do Lema 4.4(e), temos que para quaisquer subconjuntos X e Y de Ω^+ (Ω^-) vale $X + Y = X \cup Y$, logo $P(X + Y) = P(X \cup Y)$. □

Teorema 4.2 *Se F^+ é um corpo de conjuntos (ou uma álgebra de conjuntos), então F é um corpo de conjuntos (ou uma álgebra de conjuntos) em relação às operações adição $(+)$ e interseção $(\cap)$.*

Demonstração: Suponhamos que F^+ seja uma álgebra de conjuntos, e tomemos dois eventos aleatórios $A, B \in F$. Então, pelo Teorema 4.1, F^- é uma álgebra de conjuntos.

Pelo Lema 4.8, podemos escrever $A = A^+ + A^-$ e $B = B^+ + B^-$.

Pelo Axioma 4.4, sabemos que $A^+, B^+ \in F^+$ e $A^-, B^- \in F^-$, e pela Proposição 4.2, sabemos que vale $A^+ \cap A^- = \varnothing$, $B^+ \cap B^- = \varnothing$, $A = A^+ \cup A^-$, e $B = B^+ \cup B^-$.

Pelo Lema 4.6, $A \cap B = (A^+ \cap B^+) + (A^- \cap B^-)$. Assim, podemos escrever

$$(A \cap B)^+ = A^+ \cap B^+ \quad \text{e} \quad (A \cap B)^- = A^- \cap B^-.$$

Como F^+ é uma álgebra de conjuntos, vale $(A \cap B)+ = A^+ \cap B^+ \in F^+$. Assim como no Teorema 4.1, segue que F^- é uma álgebra de conjuntos, e vale$(A \cap B)^- = A^- \cap B^- \in F^-$. Consequentemente, concluímos que $A \cap B \in F$.

Usando o Lema 4.7, podemos escrever $A \setminus B = (A^+ \setminus B^+) + (A^- \setminus B^-)$, e ainda

$$(A \setminus B)^+ = A^+ \setminus B^+ \quad \text{e} \quad (A \setminus B)^- = A^- \setminus B^-.$$

Como F^+ é uma álgebra de conjuntos, vale $(A \setminus B)^+ = A^+ \setminus B^+ \in F^+$. Conforme o Teorema 4.1, F^- é uma álgebra de conjuntos, e segue que $(A \setminus B)^- = A^- \setminus B^- \in F^-$. Consequentemente, concluímos que $A \setminus B \in F$.

Pelo Lema 4.9, podemos escrever $A + B = (A^+ + B^+) + (A^- + B^-)$. Assim, vale

$$(A + B)^+ = A^+ + B^+ \quad \text{e} \quad (A + B)^- = A^- + B^-.$$

Como F^+ é uma álgebra de conjuntos, vale $(A + B)^+ = A^+ + B^+ = A^+ \cup B^+ \in F^+$. Como no Teorema 1, F^- é uma álgebra de conjuntos, e segue que $(A+B)^- = A^- + B^- = A^- \cup B^- \in F^-$. Consequentemente, temos $A + B \in F$.

Além disso, se F^+ tem um elemento unitário E, então $-E$ é um elemento unitário em F^- e $E \cup -E$ é um elemento unitário em F.

Assim, F é uma álgebra de conjuntos.

Agora, supomos que F^+ é um corpo de conjuntos e tomamos $A \in F$. Pelo Teorema 4.1, F^- é um corpo de conjuntos. Pelo Lema 4.8, segue que $A = A^+ + A^-$. Como, pela Proposição 4.2, vale $\Omega^+ \cap \Omega^- = \varnothing$, temos que

$$C_\Omega A = C_\Omega^+ A^+ + C_\Omega^- A.$$

Então, o conjunto complementar $C_\Omega^+ A^+$ pertence a F^+, pois F^+ é um corpo de conjuntos, enquanto pelo Teorema 4.1 $C_\Omega^- A^-$ pertence a F^-. Consequentemente, $C_\Omega A$ pertence a F, e concluímos que F é um corpo de conjuntos. $\square$

Proposição 4.7 *A interseção entre um conjunto de eventos X e um conjunto de anti-eventos Y é igual ao anti-evento da interseção entre o conjunto de anti-eventos de X e o conjunto de evento Y, isto é: $X \cap -Y = -(-X \cap Y)$.*

Demonstração: Tome $w \in X$. Pelo Corolário 3, sabemos que $-w \in -X$. Da mesma forma, se $w \in -Y$ então $-w \in Y$. Agora, se $w \in X$ e $w \in -Y$, então $w \in X \cap -Y$. Pelo Corolário 4.3 segue que $-w \in (-X \cap Y)$; pelo Corolário 4.2 segue que $w = -(-w)$, e pelo Corolário 4.3 segue que $-(-X \cap Y) = X \cap -Y$, ou seja, $X \cap -Y = -(-X \cap Y)$. $\square$

Proposição 4.8 *Para qualquer evento aleatório A de F, vale $P(A) = -P(-A)$.*

Demonstração: Do Lema 4.3, temos $A \cup -A \equiv \varnothing$. Do Axioma 4.6 $P(A \cup -A) = P(\varnothing)$. Do Axioma 4.5 $P(A \cup -A) = P(A) + P(-A)$ e do Lema 4.10 $P(\varnothing) = 0$. Assim, podemos calcular

$$\begin{aligned} P(A \cup -A) = P(A) + P(-A) \quad &\Leftrightarrow \quad P(\varnothing) = P(A) + P(-A) \\ &\Leftrightarrow \quad 0 = P(A) + P(-A), \end{aligned}$$

e concluímos que se deve ter $P(A) = -P(-A)$. $\square$

Corolário 4.5 *(Não positividade): Para todo $A \in F^-$, vale $P(A) \leq 0$.*

Teorema 4.3 *Para qualquer evento aleatório $A \in F$, vale*

$$P(A) = P(A^+) - P(-A^-) = P(A^+) + P(A^-).$$

Demonstração: Do Axioma 4.4, segue que $A = A^+ \cup A^-$. Pelo Axioma 4.5 temos $P(A) = P(A^+) + P(A^-)$, e pela Proposição 4.8 $P(A) = -P(-A)$, logo. tem-se que

$$P(A) = P(A^+) + P(A^-) \Leftrightarrow P(A) = P(A^+) - P(A^-).$$

$\square$

Teorema 4.4 *Para qualquer evento aleatório $A \in F$, vale*

$$P(C_\Omega A) = P(C_{\Omega^+}A^+) + P(C_{\Omega^+}(-A^-)) = P(C_{\Omega^+}A^+) + P(-C_{\Omega^-}A^-).$$

Proposição 4.9 *A probabilidade do conjunto Ω é nula, isto é, tem-se $P(\Omega) = 0$.*

Demonstração: Basta observar que

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing).$$

Logo, conclui-se que deve valer $P(\varnothing) = P(\Omega) - P(\Omega) = 0$. □

Na teoria de probabilidade segundo Kolmogorov, a relação entre a probabilidade de um evento aleatório e a probabilidade do complemento desse evento aleatório é dada por $P(C_\Omega A) = 1 - P(A)$. Porém, no contexto das probabilidades estendidas, a relação análoga é dada na Proposição 4.10, a seguir.

Proposição 4.10 *Para todo $A \in F$, vale $P(A) = -P(C_\Omega A)$.*

Demonstração: Considere A um subconjunto de F. Então, vale

$$A \cup C_\Omega A = \Omega \Rightarrow P(A \cup C_\Omega A) = P(\Omega).$$

Mas pela Proposição 4.9, sabemos que $P(\Omega) = 0$, logo deve-se ter $P(A \cup C_\Omega A) = 0$. Além disso, pelo Axioma 4.5, segue que

$$P(A \cup C_\Omega A) = P(A) + P(C_\Omega A).$$

Assim, conclui-se que $P(A) + P(C_\Omega A) = 0$ implica em $P(A) = -P(C_\Omega A)$. □

Proposição 4.11 *Se $A = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_k\} \in F$, com os elementos $w_1, w_2, w_3, ..., w_k$ pertencendo a F, vale*

$$P(A) = P(w_1) + P(w_2) + P(w_3) + ... + P(w_k).$$

Demonstração: Do Axioma 4.5, vale $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ para todos os conjuntos $A, B \in F$ tais que $A \cap B = \varnothing$. Logo, como $A = \{w_1, w_2, ...w_k\}$, pelo Axioma 4.5 segue que $P(A) = P(w_1) + P(w_2) + ... + P(w_k)$. □

Teorema 4.5 *Qualquer função de probabilidade P é monótona em F^+, ou seja: se $A \subseteq B$ e $A, B \in F^+$, então $P(A) \leq P(B)$; e é antimonótona em F^-, ou seja: se $H \subseteq K$ e $H, K \in F^-$, então $P(H) \geq P(K)$.*

Demonstração: Se $A \subseteq B$, então $B = A \cup C$ para algum evento C de F^+ que satisfaz $A \cap C = \varnothing$. Então, pelo Axioma 4.5, temos que $P(B) = P(A) + P(C)$. Como $A, C \in F^+$, segue pelo Axioma 4.8 que $P(A) \geq 0$ e $P(C) \geq 0$, o que permite concluir que $P(A) \leq P(B)$. □

Proposição 4.12 *Para todo $A \in F$, vale $1 \geq P(A) \geq -1$.*

Demonstração: Pelo Axioma 4.3 temos $P(\Omega^+) = 1$, e da Proposição 4.6 segue que $P(\Omega^-) = -1$. Como $A \in F$ e $F \in \Omega$, segue do Teorema 4.4 que $P(A) \leq 1$ para qualquer evento de F^+, e $P(A) \geq -1$ para qualquer evento de F^-. Assim, concluímos que vale $1 \geq P(A) \geq -1$ para qualquer $A \in F$. □

Teorema 4.6 *Todos os eventos da álgebra F têm a propriedade de continuidade.*

Demonstração: Considere uma sequência A_i decrescente de eventos de F, ou seja, uma sequência

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq ...A_i \supseteq ...$$

satisfazendo à condição $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$.

Pela Proposição 4.10, para qualquer subconjunto $X \in \Omega$ vale $X = X^+ \cup X^-$, então para todo $i = 1, 2, 3, ...$ tem-se $A_i = A_i^+ \cup A_i^-$. Além disso, pela Proposição 4.9, para qualquer subconjunto $X \in \Omega$ vale $X^+ \cap X^- = \varnothing$. Temos, portanto, duas sequências decrescentes de eventos, como segue:

$$A_1^+ \supseteq A_2^+ \supseteq A_3^+ \supseteq ...A_i^+ \supseteq ... \quad \text{e} \quad A_1^- \supseteq A_2^- \supseteq A_3^- \supseteq ...A_i^- \supseteq ...$$

Como $A_i \supseteq A_i^+$ para todo $i = 1, 2, 3, ...$, conclui-se que $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^+ = \varnothing$. Mas, como todos os eventos A_i^+ pertencem a F^+, segue do Axioma 4.9 que

$$\lim_{i \to \infty} P(A_i^+) = 0.$$

Analogamente, podemos obter

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^- = \varnothing,$$

e, como por definição todos os eventos $-A_i^-$ pertencem a F^+, conclui-se que

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} -A_i^- = \varnothing.$$

Portanto, segue também que $\lim_{i \to \infty} P(-A_i^-) = 0$. Pelo Axioma 4.6, vale $P(A_i^-) = -P(-A_i^-)$, e daí concluímos que

$$\lim_{i \to \infty} P(A_i^-) = 0.$$

Pelo Axioma 4.3, para todo $i = 1, 2, 3, ...$ vale $P(A_i) = P(A_i^+) + P(A_i^-)$. Portanto, usando as propriedades de limites, obtemos

$$\lim_{i\to\infty} P(A_i) = \lim_{i\to\infty} P(A_i^+) + \lim_{i\to\infty} P(A_i^-) = 0 + 0 = 0.$$

□

Teorema 4.7 *Os Axiomas 4.10 e 4.11 implicam o Axioma 4.5.*

Teorema 4.8 *Restrita à álgebra de conjuntos F^+, uma função de probabilidade estendida $P(A)$ é uma função de probabilidade convencional, que satisfaz os axiomas de probabilidade de Kolmogorov.*

Na teoria axiomática estendida de probabilidade, que apresentamos nesta Seção, o primeiro axioma define a estrutura algébrica usada para probabilidade clássica, enquanto outros três axiomas coincidem com os axiomas de probabilidade, segundo estipulados por Kolmogorov (17).

4.3 PROBABILIDADES NEGATIVAS EM FINANÇAS

Nesta Seção abordaremos uma aplicação de probabilidades negativas em modelos de precificação de opções. O modelo abordado será o modelo binomial CRR (desenvolvido por Cox, Ross e Rubinstein). Apresentamos inicialmente alguns termos técnicos referente ao mercado de opções e ao modelo binomial CRR, seguido de um exemplo de árvore binomial que recai em probabilidades negativas. Finalizaremos esta Seção explicando como interpretar tais probabilidades.

4.3.1 Algumas Noções em Finanças

Conforme A. Gutemberg (15), um *derivativo* é um contrato cujo valor depende do valor de outros ativos, chamados ativos subjacentes (ações, índices/cestas de ações, commodities, moedas, taxas de juros e índices de inflação). Mercado a termo, mercado futuro, mercado de swaps e mercado de opções são exemplo de derivativos.

O tipo de derivativo abordado nesta seção é o mercado de opções. Nesse mercado são negociados direitos de compra ou venda de um lote de ações, com preços e prazos de exercícios pré-estabelecidos.

Uma *opção* é um direito, mas não a obrigação, de adquirir ou vender ativos. Gutemberg (15) exemplifica da seguinte maneira:

> "O titular da Opção paga um prêmio para adquirir este direito do lançador, podendo exercê-lo ou revender a Opção no mercado. Por se tratar de um direito, o titular da Opção pode não exercê-lo e deixar que a Opção expire. Em contrapartida, a outra parte, o lançador, que recebeu o prêmio em dinheiro, não pode deixar de cumprir suas obrigações, caso venha a ser chamado a isto."

O mercado de opções apresenta um vocabulário que representa as características de cada opção:

- *Ativo-objeto:* é o bem, mercadoria ou ativo que se está negociando;
- *Titular:* é o comprador da opção (quem adquire os direitos de comprar ou de vender a opção);
- *Lançador:* é o vendedor da opção (quem cede os direitos ao titular, assumindo a obrigação de comprar ou de vender o objeto da opção);
- *Prêmio:* é o valor pago pelo titular ao lançador da opção para ter direito de comprar ou de vender o objeto da opção;
- *Preço de exercício:* preço pelo qual o titular pode exercer seu direito;
- *Data de exercício:* último dia no qual o titular pode exercer seu direito de comprar ou de vender, conhecido como data de vencimento da opção.

Existem dois tipos de opções:

- *Call (Opção de Compra):* Dá ao titular o direito de comprar o ativo-objeto em certa data, a um determinado preço.
- *Put (Opção de Venda):* Dá ao seu titular o direito de vender o ativo-objeto em certa data, a um determinado preço.

Quanto à forma de exercício elas podem ser classificadas em:

- *Americanas:* podem ser exercidas a qualquer tempo, até a data de vencimento;
- *Européias:* podem ser exercida na data de vencimento.

O preço de uma opção sobre ações está sujeito aos seguintes fatores:

- O preço atual da ação, $S_{u^0d^0}$;
- O preço de exercício ou *Strike*, K;
- O tempo até a expiração, T;

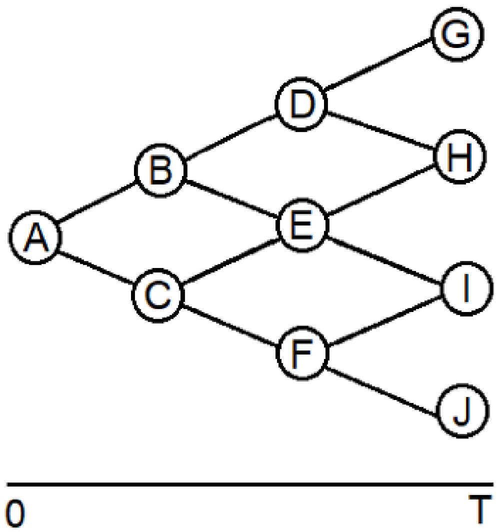
- A volatilidade do preço da ação, σ;
- A taxa de juros livre de risco, r;
- Os dividendos pagos esperados.

A Volatilidade é a medida de incerteza sobre os movimentos futuros desse preço. O aumento da volatilidade implica no aumento da probabilidade da ação ter desempenho muito bom ou muito ruim.

4.3.2 O Modelo Binomial CRR

O modelo binomial CRR foi desenvolvido em 1979 por três pesquisadores da área de finanças (Cox, Ross e Rubinstein), daí a sigla CRR. Nesse método, a cada avanço temporal, considera-se duas situações: uma em que o preço da ação sobe e outra em que o preço da ação cai, e assim por diante, formando uma árvore conforme o esquema disposto na Figura 4.7.

Figura 4.7: Esquema da árvore binomial com três passos



Fonte: Elaborado pelo Autor

Para cada nó da arvore (no esquema da Figura 4.7 representado pelas letras A, B, C, D, E, F, G, H, I e J), consideraremos uma razão de subida (u) e uma razão de descida (d) que terão influência no valor da ação, assim como uma probabilidade (p) da razão subir ou descer.

As expressões que definem valor esperado da ação e valor esperado do preço da opção que são usadas para a construção da árvore são dadas por:

$$\begin{aligned} u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \\ d &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \\ p &= \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}, \end{aligned}$$

onde u representa a razão de subida do ativo; d representa a razão de queda do ativo; p probabilidade do ativo subir; r representa a taxa de juros livre de risco até o vencimento; σ representa a volatilidade do preço da ação; Δt representa o tempo entre os nós da árvore, ou seja, $\Delta t = \frac{T}{n}$, em que T representa o tempo de vencimento da ação e n o número de passos da árvore. Segundo Gutemberg (15) quando $n \to \infty$ é adotado o modelo Black-Sholes-Merton para precificar as opções.

Após determinar o valor esperado do ativo, pode-se calcular o preço da opção avançando no sentido contrário da arvore através da fórmula:

$$C_{u^m d^n} = e^{-r\Delta t}[pC_{u^{m+1}d^n} + (1-p)C_{u^m d^{n+1}}]. \tag{9}$$

4.3.3 Precificação de Opções pelo Modelo Binomial

Para exemplificar a construção, o cálculo do valor das ações e o valor do preço das opções usaremos o seguinte exemplo de um modelo binomial de dois passos, extraído de Gutemberg (15): admita que o preço de uma ação começa com \$50 e pode aumentar ou diminuir 32, 2% em cada um dos períodos com 4 meses cada (na prática esses valores não estão prontamente disponíveis, conforme as fórmulas esses valores são encontrados em função da volatilidade); que a taxa de juro livre de risco seja 12% ao ano e o strike de 80.

Organizando os dados, obtemos:

$$S_{u^0d^0} = 50, \quad u = 1,323, \quad d = 0,678, \quad r = 0,12, \quad T = 4 \;\text{ e }\; n = 2.$$

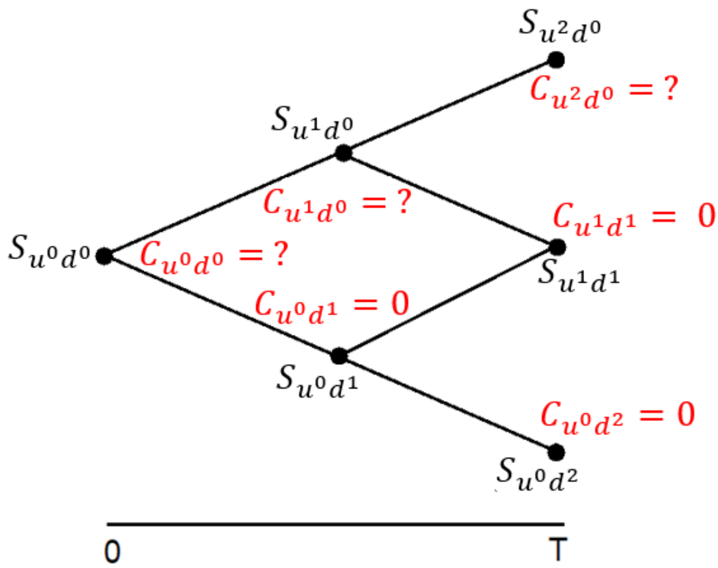
A árvore binomial com os valores de cada ação está apresentada na Figura 4.8.

A probabilidade do ativo subir é dada por:

$$\begin{aligned} p &= \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \\ p &= \frac{e^{0,12\times 4/12} - 0,678}{1,323 - 0,678} \\ p &= \frac{1,048 - 0,678}{0,645} = 0,5624. \end{aligned}$$

Como mencionado anteriormente, uma vez que a árvore foi construída e temos os valores de cada ação, obtemos os valores de cada opção fazendo os cálculos no sentido

Figura 4.8: Esquema do modelo binomial de dois passos



Fonte: Elaborado pelo Autor

oposto, usando a Equação 9. Logo, encontramos:

$$C_{u^2d^0} = 87,38 - 80 = \$7,38,$$

$$C_{u^1d^0} = e^{-0,12\times 4/12} = [0,5634 \times 7,38] = \$3,992,$$

e o valor da opção no nó inicial é dado por:

$$C_{u^0d^0} = e^{-0,12\times 4/12} = [0,5634 \times 3,992] = \$2,16.$$

4.3.4 Probabilidades Negativas no Modelo Binomial CRR

No exemplo da Seção 4.3.3 a probabilidade estava dentro do intervalo $[0,1]$, mas pode acontecer desse valores caírem fora do intervalo $[0,1]$. Segundo E. Haug (16), isso acontece quando $\sigma < |r\sqrt{\Delta t}|$.

De fato, considerando $p = \dfrac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$, ao supormos que $p > 1$ obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} > 1 \\
&e^{r\Delta t} - d > u - d \\
&e^{r\Delta t} > u, \text{ como } u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\
&e^{r\Delta t} > e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\
&r\Delta t > \sigma\sqrt{\Delta t} \\
&r\sqrt{\Delta t}\sqrt{\Delta t} > \sigma\sqrt{\Delta t}
\end{aligned}$$

$$r\sqrt{\Delta t} > \sigma. \tag{10}$$

Analogamente, ao supormos $p < 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} < 0\\
&e^{r\Delta t} - d < 0\\
&e^{r\Delta t} < d, \text{ como } d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\\
&e^{r\Delta t} < e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\\
&r\Delta t < -\sigma\sqrt{\Delta t}\\
&r\sqrt{\Delta t} < -\sigma. \qquad (11)
\end{aligned}$$

Das Desigualdades 10 e 11 obtemos a restrição $\sigma < |r\sqrt{\delta t}|$.

No exemplo a seguir, apresentado por Haug (16), o preço do ativo é \$100, o tempo até o vencimento do instrumento derivativo é de 6 meses, a volatilidade do ativo subjacente é de 2%, o custo de transporte do ativo subjacente é de 12% no primeiro mês e está aumentando em $0,5\%$ para cada mês subsequente. Para simplificar, usamos apenas seis etapas de tempo.

Organizando os dados obtemos: $S = 100$, $T = 0,5$, $r = 0,12$,$\sigma = 0,02$, $n = 6$. A partir disso chegamos a $\Delta t = 0,5/6 = 0,0833$, e

$$u = e^{0,02\sqrt{0,0833}} = 1,006 \quad \text{e} \quad d = e^{-0,02\sqrt{0,0833}} = 0,9942.$$

Além disso, obtemos uma probabilidade ascendente neutra ao risco de

$$p = \frac{e^{0,12\times 0,0833} - 0,9942}{1,006 - 0,9942} = 1,3689,$$

e obtemos uma probabilidade de baixa de

$$1 - p = 1 - 1,3689 = -0,3689.$$

Obteve-se, assim, uma probabilidade negativa.

Segundo Haug (16), quando nos deparamos com probabilidades negativas temos 3 escolhas:

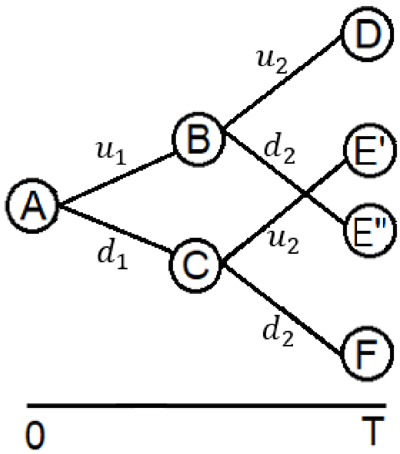
1º) Considerar as probabilidades negativas como inaceitáveis e descartar o modelo;

2º) Substituir as probabilidades negativas por valores consistentes com a axiomática de Kolmogorov;

3º) Usar as probabilidades negativas como uma ferramenta matemática para adicionar mais flexibilidade ao modelo.

Haug (16) menciona ainda que, na literatura, percebeu a ocorrência das escolhas 1 e 2 para este tipo de situação. Em relação à análise das probabilidades negativas obtidas, o autor afirma que obtê-las é um indicador de que o preço a termo e o preço de exercício podem estar fora do espaço amostral, ou seja, não cobertos pela localização dos nós da árvore, conforme é apresentado no esquema da Figura 4.9.

Figura 4.9: Esquema do modelo binomial com preço a termo e preço de exercício fora do espaço amostral



Fonte: Elaborado pelo Autor

Devido ao fato da volatilidade ser baixa, a diferença entre u e d também é baixa e por esse motivo não haverá muita diferença entre o preço em alta e o preço em queda. Assim, conforme Haug (16), calcular o preço a prazo pode ser obtido de maneira mais simples e eficiente. O autor ressalta que essas probabilidades são chamadas de probabilidades neutras ao risco e não devem ser confundidas com probabilidades reais.

4.4 LANÇAMENTO DE MEIA MOEDA

Para fechar este Capítulo, apresentamos uma aplicação de probabilidades negativas que refere-se a uma análise no lançamento de meia moeda, conforme proposta por Gabor J. Székely (28).

O experimento base é simples. Uma moeda possui dois lados, denotados por 0 e 1. A probabilidade de que cada lado caia voltada para cima em um lançamento é denotada por 1/2.

A ferramenta analítica para estudar adição de variáveis aleatórias de valor inteiro é definida por uma função geradora de probabilidade (FGP) dada por

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) z^k,$$

com $z \in \mathbb{C}$, em que $P(X = k)$ é a função de massa de probabilidade de X. Sendo assim, atribuindo os valores 0 e 1 para as faces de uma moeda, a FGP de uma moeda honesta é dada por

$$G_X(z) = \frac{1}{2} + \frac{z}{2}.$$

Ao analizarmos em $z = 0$, recuperamos a probabilidade $1/2$, atribuída para cada possibilidade $X = 0$ ou $X = 1$.

A adição de variáveis aleatórias independentes corresponde à multiplicação de suas FGP, então a FGP para o lançamento de α moedas, com $\alpha \in \mathbb{R}$, segundo Székely (28), é dado por:

$$G_X(z) = \left[\frac{1}{2}(1 + z)\right]^{\alpha}.$$

Por exemplo para $\alpha = 2$, a FGP é dada por:

$$G_X(z) = \left[\frac{1}{2}(1 + z)\right]^{2}.$$

Assim, para meia moeda, ou seja, para $\alpha = \frac{1}{2}$, a FGP é dada por

$$G_X(z) = \left[\frac{1}{2}(1 + z)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Machado (18), por meio da série de Taylor em torno de $z = 0$, definiu a seguinte expressão para o lançamento de meia moeda (com $\alpha = 1/2$):

$$\left[\tfrac{1}{2}(1 + z)\right]^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{8}z^2 + \tfrac{1}{16}z^3 - \tfrac{1}{128}z^4 + ...\right).$$

Ao comparar essa expansão com a expressão $G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) z^k$, Machado et al. (19) afirmam que, teoricamente, meias moedas possuem um número infinito de faces com as seguintes funções de massa: $P(X = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $P(X = 1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $P(X = 2) = -\frac{1}{8\sqrt{2}}$, $P(X = 3) = \frac{1}{16\sqrt{2}}$, $P(X = 4) = -\frac{5}{128\sqrt{2}}$, sendo que algumas dessas faces apresentam valores negativos para probabilidade, como nos casos $P(X = 2)$ e $P(X = 4)$.

Observe que ao realizar dois lançamentos de meia moeda recuperamos o caso de um lançamento de uma moeda.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Afim de verificarmos como a probabilidade vem sendo trabalhada no ensino básico, fizemos uma análise dos documentos pertinentes que abordam esta etapa de ensino. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Currículo Referencial Curricular do Paraná (CREP), respectivamente apresentam habilidades e objetivos de aprendizagem referentes a todos os conteúdos trabalhados na educação básica. Também analisamos todos os livros integrantes do PNLD para o ano de 2023. Percebemos que:

- em relação ao 8º ano do ensino fundamental a BNCC e o CREP indicam como habilidade ou objetivo calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1;
- as editoras apresentam em seus materiais didáticos diferentes abordagens para esse conteúdo, porém em nenhum livro pertencente ao atual PNLD foi verificada a ocorrência de uma abordagem axiomática.

Para preencher essa lacuna, na Seção 3 apresentamos uma abordagem de ensino que tem como objetivo proporcionar aos docentes um material didático que possibilite o trabalho com o conteúdo de probabilidade de forma axiomática, sem ênfase de jogos, visto que essa abordagem não é mencionada em materiais didáticos. Nossa abordagem está estruturada da seguinte maneira:

- inicialmente é apresentada uma situação problema como introdução do conteúdo e motivação para o ensino de probabilidade;
- em seguida sugerimos apresentar algumas definições e conceitos da teoria e então introduzir os axiomas;
- após isso, sugerimos a apresentação de alguns resultados que decorrem dos axiomas;
- por fim, propomos a apresentação de alguns exemplos e exercícios resolvidos.

Sabemos que uma teoria axiomática é desenvolvida a partir de deduções com base em um conjunto de axiomas, que são proposições primordiais consideradas verdadeiras. Dada uma teoria axiomática, é possível construir novas ou alteradas teorias ao se negar ou substituir um ou mais axiomas. Um exemplo disso é o surgimento da Geometria Hiperbólica. Essa teoria alterada da geometria surgiu a partir de frustradas tentativas de demonstração do quinto axioma de Euclides através da negação desse axioma. Como complemento ao estudo da teoria axiomática de probabilidade, no Capítulo 4:

- apresentamos uma teoria estendida de probabilidade, conforme desenvolvida por M. Burgin (10), que inclui probabilidades negativas;
- as probabilidades negativas possuem um papel de auxílio em cálculos, de forma semelhante a como as raízes quadradas de números negativos atuam na resolução de equações algébricas;
- quando uma probabilidade negativa é obtida, em vez de ignorada, seus valores devem ser interpretados. Para ilustrar esse fato, ao final apresentamos algumas aplicações de como a probabilidade negativa vem sendo recentemente utilizada.

É possível considerar a possibilidade de probabilidades negativas ao se negar o terceiro axioma de Kolmogorov (17). Da mesma forma é possível construir teorias estendidas de probabilidade que consideram probabilidades maiores do que um, embora não tenhamos dado ênfase neste tipo de teoria.

REFERÊNCIAS

1 ABRAMSKY, S; BRANDENBURGUER, A. An Operational Interpretation of Negative Probabilities and No-Signalling Models. **Horizons of the Mind.** : A Tribute to Prakash Panangaden, [s. l.], v. 8464, p. 59-75, 2014.

2 AUGUSTINI, Edson. **Introdução à Geometria Hiperbólica Plana.** 1. ed. atual. Uberlândia: FAMAT UFU, 2022. 144 p. ISBN 978-65-86084-61-0.

3 BARBOSA, J. L. M. **Geometria Hiperbólica.** 1. ed. Goiânia: UFG, 2002. 189 p. v. 1. ISBN 85-244-0194-X.

4 BARTLETT, M. S. Negative Probability. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**. [s. l.], v. 41, ed. 1, p. 71-73, 1945.

5 BLASS, A.; GUREVICH, Y. Negative probabilities what are they for. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, Michigan, V.54, N.31, p.27, 2022.

6 BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017.

7 BRASIL. Ministério da Educação. **PCN+ Ensino Médio**: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf

8 BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília, 1998. 148 p.

9 BURGIN, M; MEISSNER, G. **Negative Probabilities in Financial Modeling.** Wilmott Magazine. p. 60-65. 2012.

10 BURGIN, M. Extended Probabilities: Mathematical Foundations, **Preprint in Physics**: 0912.4767, 18p. 2009.

11 COSTA, M. N. **Ensino De Probabilidade**: Um Estado da Arte das Dissertações e Teses no Brasil no Período de 2000 a 2020. 2021 Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional – Profmat). Faculdade de Ciências exatas e Tecnológicas. Universidade do Estado de Mato Grosso. Barra do Bugres. 2021

12 DIRAC, F. R. S. The physical interpretation of quantum mechanics. **Proceedings of the Royal Society of London**. Series A. Mathematical and Physical Sciences, V.180 N.980, 1942.

13 FARIA, R. C. **Redes Probabilísticas**: Aprendendo estruturas e atualizando probabilidades. 2014. Dissertação (Mestrado em Ciências). Instituto de Matemática e Estatística. Universidade de São Paulo. São Paulo. 2014.

14 FEYNMAN, R. P. Negative Probabilities. In: Hiley, B.; Peat, F. D. **Quantum implications**: Essays in Honor of Davis Bohm. London: Routledge. p.235-248. 1987.

15 GUTEMBERG, A. A. **Modelo Binomial para precificação de opções.** 2022 Dissertação (Mestrado Profissional Em Matemática Em Rede Nacional-Profmat). Departamento de Matemática. Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa. 2022.

16 HAUG, E. G. Why so Negative to Negative Probabilities? **Wilmott Magazine**, p. 34-38. 2007.

17 KOLMOGOROV, A. N. **Foundations of the Theory of Probability**. 2 ed. Nova York: Mineola, 2018.

18 MACHADO, J. T. Fractional derivatives and negative probabilities. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v.79, 2019.

19 MACHADO, J. T; LOPES, A. M; DUARTE, F. B; ORTIGUEIRA M. D; RATO, R. T. Rhapsody in Fractal. **Fractional Calculus and Applied Analysis**. v.17. n.4, p.1203-1204, 2014.

20 MORGADO, A. C; CARVALHO, J. B. P; CARVALHO P. C. P; FERNANDEZ. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. 338 p. ISBN 978-85-8337-083-3.

21 PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática**. Curitiba: SEED/PR, 2008.

22 PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Referencial curricular do Paraná**: Matemática. Curitiba: SEED/PR, 2018.

23 PINHEIRO, M. G. C.; SILVA, A. F. G.; GALVÃO, M. E. E. L. Dos PCN à BNCC: Uma análise interpretativa das indicações de aprendizagens no tema probabilidade. **Revista Paranaense de Educação Matemática**. v. 09, n. 18, p. 137-151, 2020.

24 RIFO, Laura. **Probabilidade e Estatística:** Aspectos de tomada de decisão e incerteza para o Ensino Fundamental e Médio. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2021. 238 p. ISBN 978-65-990395-8-4.

25 SASSI JR., C. A. S. **Geometria Não Euclidiana.** 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática). Centro de Matemática, Computação e Cognição. Universidade Federal do ABC. Santo André. 2013.

26 SILVEIRA, B. L. **Interpretações de Probabilidade Contempladas nas Coleções de Matemática do PNLD - 2021 para o Novo Ensino Médio**. 2021. Dissertação (Mestrado Profissional Em Matemática Em Rede Nacional-Profmat). Departamento Acadêmico de Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco. 2021.

27 SOARES, M. B. **O Ensino de Probabilidade no 8º Ano Por Meio de Atividades Experimentais.** 2021. Dissertação (Mestrado Profissional Em Matemática Em Rede Nacional-Profmat). Campus Universitário do Baixo Tocantins. Universidade Federal do Pará. Abaetetuba. 2021.

28 SZÉKELY, G. J. Half of a Coin Negative Probabilities. **Wilmott Magazine**, p.66-68, 2005.

29 VALERIO, J. C. **Introdução a Geometria Hiperbólica.** 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Instituto de Ciências Exatas. Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora. 2017

30 WIGNER, E. On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium. **Physical Review**, v.40, n.749, 1932.

APÊNDICE A

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE UTILIZANDO UMA ABORDAGEM AXIOMÁTICA

Autor: Rodrigo Domingues
Orientador: Prof. Jocemar de Quadros Chagas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT (UEPG)

Esta sequência didática, indicada para o ensino de probabilidade para o 8º ano do ensino fundamental através de uma abordagem axiomática, está desenvolvida em 6 etapas (aulas), estruturadas como segue:

- Aula 1: Atividade diagnóstica no Plickers (ou Quizziz);
- Aula 2: Retomada de conteúdos se for necessário;
- Aula 3: História da probabilidade;
- Aulas 4 e 5: Consequência dos axiomas;
- Aula 6: Lista de exercícios.

Aula 1 – Atividade diagnóstica usando Plickers

Objetivos

- Relembrar Experimento aleatório, espaço amostral; evento e cálculo de probabilidade;

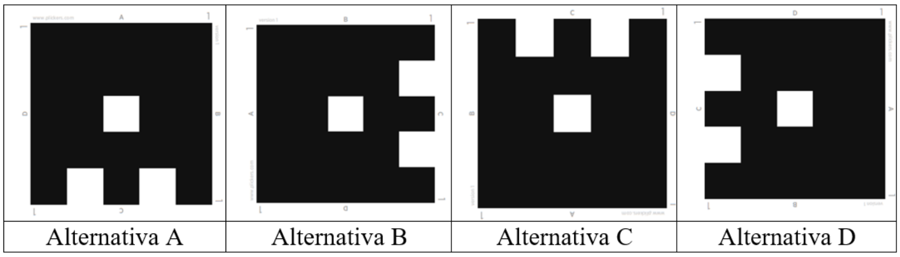
Duração: 50 minutos

Recursos: Televisão ou multimídia, notebook, Plataforma Plickers (ou Quizizz), quadro e giz.

Descrição da atividade e encaminhamentos metodológicos

Plickers é uma plataforma utilizada para aplicação de testes de maneira rápida que não requer o uso de internet por parte dos alunos. As perguntas apresentadas nessa plataforma são de múltipla escolha e apresentadas por meio de projetor. Os alunos respondem utilizando um cartão resposta na forma de QR code, conforme Figura 5.1, que deve ser escaneado pelo celular do professor. Conforme a posição em que o QR code é segurado o aplicativo reconhece as alternativas A, B, C ou D. Ao final da atividade o aplicativo

Figura 5.1: Exemplo de cartão resposta do aplicativo Plickers



Fonte: Plataforma Plickers (2023)

apresenta ao professor um relatório de desempenho dos estudantes. A plataforma Plickers pode ser encontrada no endereço `<https://get.plickers.com/>`.

Sugere-se que sejam apresentadas questões aos alunos, referentes a conteúdos já trabalhados, fazendo uso do aplicativo Plickers. Os alunos responderão as questões através de cartões resposta no formato de QR code (conforme a Figura 5.1) disponibilizados pelo professor.

A seguir, indicamos alguns exemplos de questões que podem ser usadas nesta atividade, para a verificação da aprendizagem dos conteúdos referentes à probabilidade que devem ser ensinados no 8º ano do ensino fundamental.

Questão 1) João colocou em uma caixa seis cartões numerados de 1 a 6. Em seguida, realizou o experimento aleatório de sortear um cartão e observar o número indicado. Qual é o espaço amostral desse experimento aleatório?

a) {A, B, C, ..., X, Y, Z}

b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

c) {A, E, I, O, U}

d) $\left\{0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, 1\right\}$

Questão 2) Em uma urna, havia cinco bolas coloridas sendo uma amarela, uma azul, uma verde, uma vermelha e uma cinza. Realizou-se o experimento aleatório de sortear uma das bolas da urna e observar sua cor. Assinale a alternativa que corresponde ao espaço amostral desse experimento aleatório.

a) $\{1, 2, 3, 4\}$

b) $\{1, 2, 3, 4, ...\}$

c) {amarela, azul, verde, vermelha, cinza }

d) {todas as cores}

Questão 3) Considere o seguinte experimento aleatório: sortear um número dentre os número naturais pares entre 0 e 20. Assinale a alternativa que corresponde ao espaço amostral desse experimento aleatório.

a) $N = \{0, 1, 2, 3, ..., 19, 20\}$

b) $\{1, 3, 5, ..., 19\}$
c) $\{2, 4, 6, 8, ..., 18\}$
d) $\{0, 2, 4, 6, 8, ..., 20\}$

Questão 4) Em uma caixa havia 9 bolas coloridas, sendo 3 amarelas, 2 azuis e 4 vermelhas. Uma bola é retirada de forma aleatória. Qual a probabilidade da bola retirada ser da cor vermelha?

a) 1/9
b) 1/4
c) 4/9
d) 4/5

Questão 5) Em uma urna há 20 bolas numeradas de 1 a 20. Se tirarmos uma bola desse urna, qual a probabilidade da bola retirada apresentar um número par?

a) 1/4
b) 1/2
c) 3/4
d) 2/3

Questão 6) Qual a probabilidade de sair cara no lançamento imparcial de uma moeda honesta?

a) 0
b) 1
c) 1/2
d) 1/3

Questão 7) Assinale a alternativa que corresponde a probabilidade de obter um número menor que 3 no lançamento de um dado honesto?

a) 1/2
b) 1/3
c) 1/4
d) 2/3

Questão 8) Qual é a probabilidade de jogar um dado honesto de seis faces e obter um número ímpar

a) 1/6
b) 1/4
c) 1/3
d) 1/2

Respostas
Questão 1) Alternativa b

Questão 2) Alternativa c
Questão 3) Alternativa c
Questão 4) Alternativa c
Questão 5) Alternativa b
Questão 6) Alternativa c
Questão 7) Alternativa b
Questão 8) Alternativa d

Aula 2 – Retomada de conteúdos: experimento aleatório, espaço amostral e evento

Objetivo (s)

- Relembrar Experimento aleatório, espaço amostral; evento e cálculo de probabilidade.

Duração: 50 minutos

Recursos: Televisão ou multimídia, slides, material impresso, quadro e giz.

Encaminhamentos metodológicos

1º Momento: *Após a atividade diagnóstica reforçar com os alunos os seguintes conceitos: experimento aleatório, espaço amostral e evento.*

Experimento aleatório

Um experimento é considerado aleatório se ao repetí-lo inúmeras vezes o resultado é sempre imprevisível. São exemplos de experimentos aleatórios:

- Lançar uma moeda;
- Lançar um dado;
- Retirar uma carta de um baralho;
- Selecionar ao acaso uma bola em uma urna.

Espaço amostral

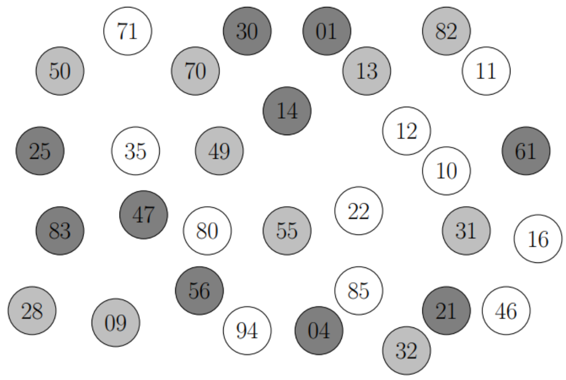
Definimos como espaço amostral (S) o conjunto de todos os resultados possíveis em um experimento aleatório. Como exemplo considere a seguinte situação:

Exemplo: Um número é selecionado sem preferência dentre os números 00, 01, 02, ..., 98, 99, conforme é apresentado na figura 3.2.

Neste exemplo, selecionar um elemento corresponde a um experimento aleatório, pois não há como prever qual elemento será selecionado. O espaço amostral é o conjunto

$$S = \{00, 01, 02, ..., 98, 99\}. \tag{12}$$

Figura 5.2: Selecionando sem preferência.



Fonte: Livro Probabilidade e Estatística, L. Rifo (2021).

Evento

Definimos como evento qualquer subconjunto do espaço amostral. Para denotar eventos usaremos letras maiúsculas do nosso alfabeto.

Como exemplo, considere no espaço amostral S, dado na Equação 12, o seguinte evento

$$E_0 = \{\text{número de } S \mid \text{o primeiro dígito é igual a zero}\},$$

ou seja, E_0 é um subconjunto de S, tal que $E_0 = \{00, 01, 02, ..., 08, 09\}$.

Quando um evento for igual ao espaço amostral, chamamos esse evento de evento certo. E quando um evento não possui nenhum elemento, chamamos de evento impossível.

2º Momento: *Aplicar alguns exercícios para ajudar na retomada dos conteúdos.*

Exercício 1) Um elemento é selecionado sem preferência dentre 00, 01, 02, ..., 98, 99.

a) Determine o espaço amostral

b) Determine os elementos do evento "o primeiro dígito é igual a zero"

c) Determine os elementos do evento "O número é múltiplo de 5"

d) Determine os elementos do evento o algarismo das dezenas é igual ao algarismo das unidades"

Exercício 2) Determine os elementos do espaço amostral para cada um dos seguintes experimentos aleatórios:

a) Lançamento de uma moeda:

b) Lançamento de duas moedas:

c) Lançamento de três moeda:

Exercício 3) Determine os elementos dos seguintes eventos:

a) Obter uma cara no lançamento de três moedas

b) Obter duas caras no lançamento de três moedas

Exercício 4) Considere o lançamento imparcial de uma moeda honesta três vezes consecutivas. Assinale a alternativa que corresponde ao número de elementos do espaço amostral desse experimento aleatório:

a) 4

b) 6

c) 8

d) 10

Exercício 5) Considere o experimento aleatório: "Lançar simultaneamente um dado de seis faces numeradas de 1 a 6 e uma moeda, e observar as faces do dado e da moeda voltadas para cima.“ O espaço amostral desse experimento é composto por quantos elementos?

Respostas

Exercício 1)

a) $S = \{00, 01, 02, 03, ..., 98, 99\}$

b) $E = \{00, 01, 02, 03, ..., 08, 09\}$

c) $E = \{00, 05, 10, 15, ..., 90, 95\}$

d) $E = \{00, 11, 22, 33, ..., 88, 99\}$

Exercício 2)

a) $S = \{C, K\}$

b) $S = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\}$

c) $S = \{(C, C, C), (C, C, K), (C, K, C), (K, C, C), (C, K, K,), (K, C, K), (K, K, C), (K, K, K)\}$

Exercício 3)
a) $E = \{(C, K, K,), (K, C, K), (K, K, C)\}$
b) $E = \{(C, C, K), (C, K, C), (K, C, C)\}$

Exercício 4) Alternativa c

Exercício 5) 12 elementos.

Aula 3 – História da teoria de probabilidade

Objetivos

- Identificar contextos em que a teoria da probabilidade está presente através de uma abordagem histórica;
- Compreender os axiomas da teoria de probabilidade.

Duração: 50 minutos.

Recursos: Texto, régua, canetas, post-it, cartolina ou folha A3.

Encaminhamentos metodológicos

A atividade consiste em 3 momentos:

1º momento: Leitura do texto "História da teoria de probabilidade";

2º momento: Construir uma linha do tempo sobre a história da teoria de probabilidade;

3° momento: Apresentação e discussão sobre a atividade.

Abaixo segue o texto sobre a história da teoria de probabilidade, adaptado de Morgado (20):

História da teoria de probabilidade

Diz-se geralmente que a Teoria das Probabilidades originou-se com Blaise Pascal (1623 –1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), devido à curiosidade de um cavalheiro, o Chevalier de Méré, jogador apaixonado, que em cartas discutiu com Pascal problemas relativos à probabilidade de ganhar em certos jogos de cartas. Despertado seu interesse pelo assunto, Pascal correspondeu-se com Fermat sobre o que hoje chamaríamos de probabilidades finitas.

Mas em verdade a teoria elementar das probabilidades já tinha sido objeto de atenção bem antes. Levando em conta o fascínio que os jogos de azar sempre exerceram sobre os homens, estimulando-os a achar maneiras seguras de ganhar, não é de espantar que muito cedo problemas relativos a jogos de cartas ou de dados tenham atraído a atenção de pessoas com mentes mais especulativas. Já na Divina Comédia, de Dante Alighieri (1265 – 1321), há uma referência a probabilidades em jogos de dados. Em verdade, o desenvolvimento da Análise Combinatória deve-se em grande parte à necessidade de resolver problemas de contagem originados na Teoria das Probabilidades.

A primeira obra conhecida em que se estudam as probabilidades é o livro De Ludo Aleae, (Sobre os jogos de Azar), de Girolamo Cardano (1501 – 1576), publicado em 1663. E possível que o interesse de Cardano pelos assuntos se dava a sua paixão pelos jogos de azar. Nas palavras de Isaac Todhunter, em sua História da Teoria Matemática da Probabilidade, "O livro pode ser bem descrito como um manual para jogadores. Contém muito sobre jogos, com descrição de jogos e com as preocupações que se deve ter para se proteger de adversários dispostos a trapacear; a discussão relativa às probabilidades são parte pequena de seu tratado". Uma tradução para o inglês moderno do livro de Cardano encontra-se no livro Cardano, the Gambling Scholar, de Oysten Ore.

Na parte dedicada à probabilidade Cardano mostra, entre outras coisas, de quantas maneiras podemos obter um número, lançando dois dados. Assim, por exemplo, 10 pode ser obtido de 3 maneiras: 5 em cada dado, 6 no primeiro e 4 no segundo, e 4 no primeiro e 6 no segundo. Além de Cardano, Johannes Kepler (1571 – 1630) fez algumas observações sobre probabilidades, em um livro publicado em 1606 (De Stellanova in pede Serpentarif), em que estuda as diferentes opiniões sobre o aparecimento de uma estrela brilhante em 1604.

Também Galileu (1564 – 1642) preocupou-se com as probabilidades, estudando jogos de dados, para responder à pergunta de um amigo: Com três dados, o número 9 e o número 10 podem ser obtidos de seis maneiras distintas, cada um deles. No entanto, a experiência mostra que 10 é obtido mais frequentemente do que 9. Como explicar isso? Galileu estudou cuidadosamente as probabilidades envolvidas e mostrou, corretamente que, de 216 casos possíveis, 27 são favoráveis ao aparecimento do número 10 e 25 são favoráveis ao aparecimento do número 9.

Malgrado investigações destes precursores, a Teoria das Probabilidades só começa a se desenvolver realmente a partir dos trabalhos de Pascal. Já vimos como Pascal estudou o triângulo aritmético que leva seu nome. Ele o aplicou ao estudo dos jogos de cartas. Christian Huygens (1629 – 1695) publicou em 1657 o primeiro tratado de Teoria das Probabilidades, o De Ratiociniis in Ludo Aleae.

A Teoria das Probabilidades não despertou logo grande interesse entre os matemáticos que se seguiram a Pascal e Fermat, os quais estavam atraí¬ dos pelas investigações relativas ao cálculo, criado por Newton e Leibniz. No entanto, percebeu-se imediatamente a utilidade da Teoria das Probabilidades para estudar situações como taxas de mortalidade, prêmios de seguros, etc. São inúmeras, ainda no século XVIII, as publicações estatísticas sobre impostos, doenças, condenações, etc., organizadas pelos governos, que viram logo o poder deste instrumento de observação social. Em 1662, John Graunt (1620 – 1674) utiliza os registros de falecimentos para determinar a taxa de mortalidade em Londres. Passou-se em seguida a utilizar a ideia de Graunt no cálculo de rendas vitalícias, que dependem da esperança de vida. A primeira tentativa séria de cálculo de rendas vitalícias é devida a Johan de Witt (1625 – 1672) juntamente com Johan Hudde (1628 – 1704), prefeito de Amsterdam, que consultavam frequentemente Huygens sobre o problema. Outros se interessaram por este problema. O astrônomo Edmund Halley (1656 – 1742) publicou uma tabela de taxas de mortalidade em 1693, posteriormente utilizada por de Moivre. Euler (1710 – 1761) e Simpson (1687 – 1768) também estudaram este problema, que envolve matemática, economia e política. Os primeiros resultados estatísticos realmente utilizados (por quase um século, pelas companhias de seguros inglesas), são as tabelas calculadas por Richard Price (1723 – 1791) em 1780, utilizando os registros de falecimento da diocese de Northampton.

No famoso livro de Jaime Bernoulli, Ars Conjectandi, que já citamos, encontramos um teorema de importância decisiva em Teoria das Probabilidades. Conhecido como Teorema de Bernoulli, é também chamado de Lei dos Grandes Números, nome que lhe foi dado pelo matemático francês Siméon Poisson (1781 – 1840). Este teorema foi a primeira tentativa de deduzir medidas estatísticas a partir de probabilidades. Ele afirma, por exemplo, que se dois eventos são igualmente prováveis, após um grande nú¬mero de experimentos eles terão sido obtidos aproximadamente o mesmo número de vezes. O teorema permite também deduzir qual a probabilidade de cada um dos eventos acontecer, sabendo como se comportaram em um grande número de experimentos. A Lei dos Grandes Números deu origem a discussões conceituais ou filosóficas sobre o conceito de probabilidade.

Jaime Bernoulli foi o primeiro de uma longa linhagem de matemáticos e sábios de uma família suíça. Seu diário mostra que ele começou a interessar-se pelos problemas de combinatória e de probabilidades em tomo de 1685. Manteve longa correspondência sobre o assunto com Leibniz, que levantava objeções ao Teorema de Bernoulli.

Chegamos no autor de destaque, o matemático francês Pierre Simon Laplace (1749 – 1827), que introduziu a probabilidade no mundo da "Matemática" oficialmente, em seu livro Théorie Analytique des Probabilités (Teoria Analítica das Probabilidades) de 1812, e partir deste, os estudos da probabilidade ganharam outra dimensão de pesquisa. Ele produziu seus melhores trabalhos nas áreas de mecânica celeste, probabilidade, equações diferenciais e geodésia.

A teoria da probabilidade deve mais a Laplace do que a qualquer outro matemático. Laplace escreveu e publicou diversos artigos sobre a teoria da probabilidade, reunindo "as ideias de Jacob Bernoulli, Abraham De Moivre, Thomas Bayes e Joseph Lagrange, o livro

Théorie Analytique des Probabilités foi uma sistematização dos conhecimentos e obras de teóricos que estudaram sobre probabilidade e que fortaleceram os estudos que Laplace defendia.

Devemos ainda citar o matemático inglês Thomas Bayes (1702 – 1761), que iniciou as investigações sobre o problema de achar as probabilidades das causas de um evento observado. No início do século XX a teoria das probabilidades tornou-se um eficaz instrumento, exato e fiável do conhecimento, nesse período, na Rússia, surgiu a célebre escola de San Petersburgo e nela matemáticos como Andrei N. Kolmogorov (1903-1987) que axiomatizou corretamente a Teoria das Probabilidades e um dos sucessos da sua abordagem foi dar uma definição rigorosa da expectância condicional.

Em 1933, Kolmogorov publicou uma nova monografia que em Inglês foi batizada de Foundations of Probability Theory (Fundamentos da Teoria da Probabilidade) iniciando a etapa moderna da teoria, na qual ele define a probabilidade pelos seguintes axiomas, organizando da seguinte forma: Sejam S um espaço amostral e $A, B \subset S$ eventos de S. Então, assumimos os seguintes axiomas sobre a probabilidade P.

Axioma K1: $P(A) \geq 0$. A probabilidade é um número não-negativo.

Axioma K2: $P(S) = 1$. O espaço amostral contém todos os possíveis resultados do experimento, assim é um evento certo.

Axioma K3: Se dois eventos A e B são mutuamente exclusivos, então a probabilidade de A ou B ocorrer é igual a probabilidade de A ocorrer somada à probabilidade de B ocorrer. Ou seja:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

O mesmo vale para qualquer número finito de eventos mutuamente exclusivos. “A partir de Kolmogorov o desenvolvimento das probabilidades tem seu crescimento exponencial sendo hoje um ramo importante da matemática”.

A partir do texto será construído uma linha do tempo com os principais acontecimentos que contribuirão para o desenvolvimento da teoria da probabilidade. Exemplificamos na Figura 5.3 uma sugestão de resposta para esta atividade:

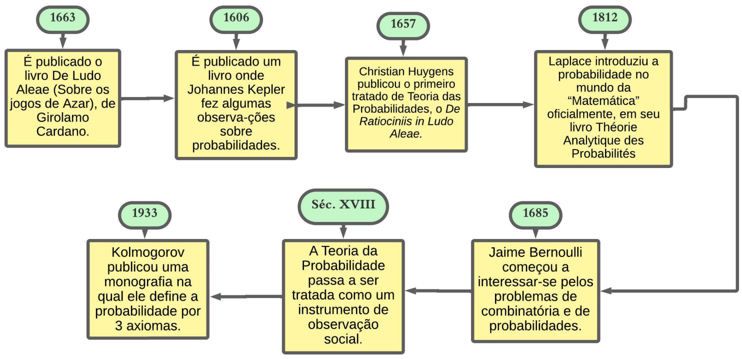
Ao final, é feita uma discussão sobre a atividade e ao mesmo tempo uma motivação para a introdução dos axiomas.

Aula 4 – Consequência dos axiomas – parte 1

Objetivos

- Compreender as consequências dos axiomas;

Figura 5.3: Linha do tempo



Fonte: Elaborado pelo autor

- Resolver problemas envolvendo o cálculo de probabilidades através de uma abordagem axiomática.

Duração: 50 minutos

Recursos: Televisão ou multimídia, slides, material impresso, quadro e giz.

Encaminhamentos metodológicos

1º momento: *Apresentar o problema de Monty Hall*

O problema de Monty Hall foi inspirado em um jogo de um programa de televisão da década de 1970.

O problema (e o jogo) consiste na seguinte situação: existem três portas fechadas, sendo que atrás de uma delas há um carro e atrás das outras duas há bodes, um atrás de cada porta. Pede-se ao competidor que escolha uma das portas para encontrar o carro. Depois disso, o apresentador abre uma das portas não-escolhidas e revela um bode. Então o apresentador dá ao competidor duas opções:

a) manter a porta escolhida;

b) trocar pela outra porta fechada que sobrou.

Com relação as escolhas, existe uma estratégia que maximiza a chance de ganhar o carro?

2º momento: *Definir a probabilidade por meio de uma razão e apresentar alguns exemplos:*

Probabilidade

A probabilidade (P) de um evento acontecer é dada pela razão entre o número de elementos do evento (E) e o número de elementos do espaço amostral (S), ou seja:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}.$$

Onde $n(E)$ representa o número de elementos do evento E e $n(S)$ representa o número de elementos do espaço amostral S.

Exemplo: Ao selecionar um elemento do conjunto $S = \{00, 01, 02, ...98, 99\}$:

a) Qual a probabilidade do primeiro dígito ser igual a zero?

   Seja E_0 o evento "o primeiro dígito ser igual a zero", ou seja, $E_0 = \{00, 01, 02, ..., 09\}$, logo $n(E_0) = 10$. Assim $P(E_0) = \frac{1}{100}$

b) Qual a probabilidade de ser um número menor que 100?

   Seja E_{100} o evento "o número é menor que 100", ou seja, $E_{100} = \{00, 01, 02, ..., 99\}$, logo $n(E_{100}) = 100$. Assim $P(E_{100}) = \frac{100}{100} = 1$

c) Qual a probabilidade de ser um número maior que 40?

   Seja E_{40} o evento "o número é maior que 40", ou seja, $E_{40} = \{41, 42, 43, ..., 99\}$, logo $n(E_{40}) = 59$. Assim $P(E_{40}) = \frac{59}{100}$

d) Qual a probabilidade do primeiro dígito ser igual a zero ou do número ser maior que 40?

   Dos itens anteriores temos $P(E_0) = \frac{1}{100}$ e $P(E_{40}) = \frac{59}{100}$. Como E_{40} e E_0 são mutuamente exclusivos, temos que $P(E_{40} \cup E_0) = P(E_{40}) + P(E_0) = \frac{1}{10} + \frac{59}{100} = \frac{69}{100}$

e) Qual a probabilidade de ser um número maior que 100?

   Seja E_{100} o evento "o número é maior que 100", ou seja, $E_{100} = \varnothing$, logo $n(E_{100}) = 0$. Assim $P(E_{100}) = 0$.

3º momento: *Apresentar os axiomas fazendo relação com os exemplos citados anteriormente.*

Axiomas da Probabilidade

Usamos os termos "os axiomas da probabilidade", ou "os axiomas de Kolmogorov" para nos referirmos aos três axiomas apresentados a seguir (axiomas já dispostos no início do deste Capítulo 3):

Sejam S um espaço amostral e $A, B \subset S$ eventos de S. Então, assumimos os seguintes axiomas sobre a probabilidade P.

Axioma K1: $P(A) \geq 0$. A probabilidade é um número não-negativo.

Axioma K2: $P(S) = 1$. O espaço amostral contém todos os possíveis resultados do experimento, assim é um evento certo.

Axioma K3: Se dois eventos A e B são mutuamente exclusivos, então a probabilidade de A ou B ocorrer é igual a probabilidade de A ocorrer somada à probabilidade de B ocorrer. Ou seja:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

O mesmo vale para qualquer número finito de eventos mutuamente exclusivos.

4º momento: *Abordar as consequências dos axiomas e apresentar exemplos.*

Consequências dos axiomas

Dos axiomas decorrem os seguintes teoremas.

- Teorema 1: (Monotonicidade) Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.
- Teorema 2:(Probabilidade do conjunto vazio) $P(\emptyset) = 0$.
- Teorema 3:(Convexidade ou Limite numérico) Se A é um evento, então

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

5º momento: *Propor alguns exercícios de fixação.*

Exercício 1) Em uma jarra com tem 30 balas, 10 delas são de morango, 12 de limão e 8 de laranja. Ao escolher aleatoriamente uma bala, qual é a probabilidade da bala ser de laranja?

Exercício 2) Carlos recebeu um envelope com 6 provas: História, Ciências, Matemática, Inglês, Geografia e Português. Se ele retirar de forma aleatória uma prova desse envelope, qual a probabilidade de ser a prova retirada ser de Inglês?

Exercício 3) Qual a probabilidade de obter um número primo no lançamento imparcial de um dado honesto de 12 faces numeradas de 1 a 12?

Exercício 4) Uma urna contém 8 bolas idênticas, sendo três bolas azuis, quatro vermelhas e uma amarela. Retira-se aleatoriamente uma bola dessa urna. Determine qual a probabilidade de a bola retirada ser azul?

Exercício 5) Se uma moeda honesta for lançada 2 vezes, qual a probabilidade de sair cara em todos os lançamentos?

Exercício 6) Se um dado honesto for lançado 4 vezes, qual a probabilidade de saírem faces pares em todos os lançamentos?

Respostas

Exercício 1) $P = \dfrac{4}{15}$

Exercício 2) $P = \dfrac{1}{5}$

Exercício 3) $P = \dfrac{5}{12}$

Exercício 4) $P = \dfrac{1}{2}$

Exercício 5) $P = \dfrac{1}{4}$

Exercício67) $P = \dfrac{1}{16}$

Aula 5 – Consequências dos axiomas - parte 2

Objetivos

- Compreender as consequências dos axiomas;
- Resolver problemas envolvendo o cálculo de probabilidades através de uma abordagem axiomática.

Duração: 50 minutos.

Recursos: Televisão ou multimídia, slides, material impresso, quadro e giz.

Encaminhamentos metodológicos

1º Momento: *Definir eventos complementares e apresentar alguns exemplos*

Eventos mutuamente exclusivos

Dizemos que dois eventos são mutuamente exclusivos se a ocorrência de um deles implica a não ocorrência do outro.

Eventos complementares

Seja $A \subset S$ um evento e $P(A)$ a probabilidade do evento A ocorrer. Denotamos por A^C o evento complementar de A em S, e por $P(A^C)$ a probabilidade do evento A não ocorrer.

Teorema 4: Se A é um evento, então $P(A^C) = 1 - P(A)$.

Exemplo 1: Ao selecionar um elemento do conjunto $S = \{00, 01, 02, ...98, 99\}$, qual a probabilidade de observarmos um número não múltiplo de 5?

Exemplo 2: Ao selecionar um elemento do conjunto $S = \{00, 01, 02, ...98, 99\}$, qual a probabilidade de os dois dígitos serem diferentes?

2º momento: *Propor alguns exercícios de fixação.*

Exercício 1) Em uma urna, há 10 bolas numeradas de 1 a 10. Ao sortear aleatoriamente uma bola, qual a probabilidade de que o número sorteado não seja um número primo ímpar?

Exercício 2) Dentro de uma caixa, são colocadas bolas numeradas de 1 a 50 para que uma delas seja sorteada em uma promoção. João escolheu todos os múltiplos de cinco. Qual a probabilidade de João não ganhar o sorteio?

Exercício 3) Em uma urna, há 8 bolas azuis, 6 bolas verdes e 5 bolas brancas. Ao retirar-se aleatoriamente uma bola dessa urna, qual a probabilidade da bola retirada não ser da cor branca?

a) 1/15

b) 1/4

c) 1/3

d) 3/4

Exercício 4) Ao escolher ao acaso, um número inteiro de 1 a 1000, qual é a probabilidade de que o número escolhido:
a) não seja múltiplo de 3?
b) não seja múltiplo de 4?
c) não seja múltiplo de 5?

Respostas
Exercício 1) $P = \frac{3}{10}$
Exercício 2) $P = \frac{4}{5}$
Exercício 3) $P = \frac{3}{4}$
Exercício 4)
a) $P = \frac{667}{1000}$
b) $P = \frac{3}{4}$
c) $P = \frac{4}{5}$

Aula 6 – Exercícios envolvendo probabilidade

Objetivos

- Construir espaço amostral de um experimento aleatório utilizando o princípio multiplicativo;
- Calcular a probabilidade de um evento acontecer bem como a probabilidade do evento complementar acontecer;
- Compreender que a soma de todos os elementos do espaço amostral é igual a um.

Duração: 50 minutos

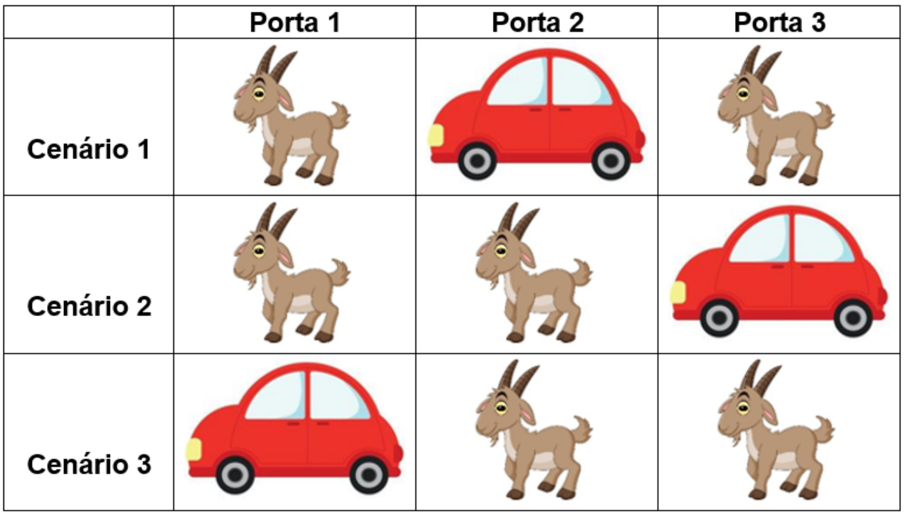
Recursos: Televisão ou multimídia, slides, material impresso, quadro e giz.

Encaminhamentos metodológicos

1º Momento: *Como motivação para o ensino retomar o problema de Monty Hall.*

Retornando ao problema de Monty Hall, existem inicialmente 3 cenários possíveis. O carro pode estar na porta 1 ou na porta 2 ou na porta 3. A Figura 3.3 apresenta esses cenários:

Figura 5.4: Cenários possíveis do Problema de Monty Hall



Fonte: elaborado pelo autor (2023)

Vamos analisar duas situações:

1ª) A porta 1 foi escolhida e houve troca;

2ª) A porta 1 foi escolhida e não houve troca.

Para a 1ª situação, os cenários 1 (C_1) e 2 (C_2) são favoráveis, logo a probabilidade de ganhar o carro $P(G)$ é dada por $P(G) = P(C_1) + P(C_2) = 1/3 + 1/3 = 2/3$.

Para a 2ª situação, somente o cenário 3 (C_3) é favorável, logo a probabilidade de ganhar o carro $P(G)$ é dada por $P(G) = P(C_3) = 1/3$.

Portanto a melhor estratégia para ganhar o jogo é trocar a porta escolhida na segunda rodada, após o apresentador abrir uma porta não premiada.

2º Momento: *Entregar aos alunos a seguinte lista de exercícios.*

Exercício 1) Uma urna contém 30 bolinhas numeradas de 1 a 30. Uma bolinha retirada aleatoriamente e é observado seu número. Descreva os seguintes eventos:

a) o número obtido é par

b) o número obtido é ímpar

c) o número obtido é primo

d) o número obtido é maior que 16

e) o número é múltiplo de 2 e de 5

Exercício 2) Um número é escolhido aleatoriamente ao acaso entre os 20 inteiros, de 1 a 20. Qual a probabilidade de o número escolhido:

a) ser par?

b) ser primo?

c) ser ímpar?

d) ser quadrado perfeito?

Exercício 3) Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 são formados números de 4 algarismos distintos.

a) Determine quantos elementos possui o espaço amostral desse experimento:

b) Determine quantos elementos possui o evento: "o número formado é par":

c) Ao escolher um desses números, qual a probabilidade desse número ser par?

d) Ao escolher um desses números, qual a probabilidade desse número ser ímpar?

Exercício 4) Considere o evento "de 10 pessoas, 4 são brasileiras". Qual frase descreveria o evento complementar?

Exercício 5) Carlos conferiu a previsão de tempo para a cidade onde mora e viu que há 30% de chances de chover amanhã (o que equivale a 30/100). É possível Carlos saber a probabilidade de não chover amanhã?

Exercício 6) Marcos mora em um condomínio onde as vagas do estacionamento são sorteadas entre os moradores anualmente. A garagem tem 80 vagas e ocupa três subsolos, sendo 20 vagas no primeiro subsolo. Qual a probabilidade de Marcos conseguir uma vaga no primeiro subsolo?

Exercício 7) João tem 4 camisas (azul, vermelha, amarela e preta) e 3 calças (azul, verde e preta). Qual a probabilidade de que ele escolha uma camisa vermelha e uma calça azul?

Exercício 8) Dois dados são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de sair a face 2 em ambos os dados?

Respostas

Exercício 1)
a) $A = \{2, 4, 6, 8, ..., 28, 30\}$
b) $B = \{1, 3, 5, 7, ..., 27, 29\}$
c) $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$
d) $D = \{17, 18, 19, ..., 29, 30\}$
e) $E = \{10, 20, 30\}$

Exercício 2)
a) $P = \frac{1}{2}$
b) $P = \frac{2}{5}$
c) $P = \frac{1}{2}$
d) $P = \frac{1}{5}$

Exercício 3)
a) 120
b) 48
c) $P = \frac{2}{5}$
d) $P = \frac{3}{5}$

Exercício 4) "De 10 pessoas, 6 não são brasileiras."

Exercício 5) Sim, 70%

Exercício 6) $P = \dfrac{1}{4}$

Exercício 7) $P = \dfrac{1}{12}$

Exercício 8) $P = \dfrac{1}{36}$

APÊNDICE B

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS SUGERIDOS ENVOLVENDO PROBABILIDADE

Neste Apêndice, apresentamos enunciados de exercícios e problemas de probabilidade, adequados ao $8^{\underline{o}}$ ano do ensino fundamental. O objetivo é facilitar a aplicação da proposta de ensino axiomática, que sugerimos no Capítulo 3, por quem se proponha a utilizá-la.

Exercício 1) Qual a probabilidade de obter uma cara e uma coroa no lançamento simultâneo de duas moedas honestas?

Exercício 2) Em uma sala com 30 alunos, 18 deles têm cabelos castanhos, 7 têm cabelos loiros e 5 têm cabelos pretos. Qual é a probabilidade de escolher aleatoriamente um aluno e este possuir cabelos loiros?

Exercício 3) Num avião viajam 15 brasileiros, 12 japoneses, 10 italianos e 8 espanhóis. Escolhendo aleatoriamente um passageiro, determine a probabilidade do passageiro:

a) Ser brasileiro

b) Ser japonês

c) Não ser italiano

d) Não ser espanhol

Exercício 4) Numa turma de $8^{\underline{o}}$ ano, de 32 estudantes, a probabilidade de escolher aleatoriamente uma menina é é 3/8. Quantos meninos estudam nessa turma?

Exercício 5) Uma urna contém 100 bolas numeradas de 1 a 100. Uma bolinha é escolhida aleatoriamente. Qual a probabilidade de o número escolhido não ser múltiplo de 6?

Exercício 6) Ao lançar uma moeda honesta 4 vezes consecutivas, qual a probabilidade de obter coroa nos 4 lançamentos?

Exercício 7) Em uma sorveteria são oferecidos sorvetes na casquinha com 6 opções de sabores: morango, limão, abacaxi, creme, flocos e chocolate. Qual é a probabilidade de um cliente pedir um sorvete com 2 bolas de 2 sabores diferentes, sendo que umas das bolas deve ser de chocolate?

Exercício 8) Um alvo circular é formado por três discos concêntricos, com raios iguais a 20 cm, 10cm e 5 cm, conforme a imagem a abaixo. Qual a probabilidade de, ao lançar um dardo, acertar o disco menor?

Exercício 9) Em uma urna há 4 bolas verdes, 4 azuis, 4 vermelhas e 4 brancas. Se tirarmos de forma aleatória uma bola dessa urna, qual é a probabilidade de tirarmos não ser da cor verde?

Exercício 10) De uma sacola contendo 15 bolas numeradas de 1 a 15 retira-se de forma aleatória uma bola. Qual é a probabilidade do número da bola retirada ser divisível por 3?

Exercício 11) Em uma urna foram colocadas fichas numeradas de 1 a 50. Qual é a probabilidade de se retirar de forma aleatória dessa urna uma ficha com um número não divisível por 3?

Exercício 12) Joaquim conferiu a previsão de tempo para a cidade onde mora e viu que há 73% de chances de chover no dia seguinte (o que equivale a 73/100). Qual é a probabilidade de não chover o dia seguinte?

Exercício 13) A senha de um cofre é composta por três algarismos entre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ao tentar abrir o cofre, qual é a probabilidade de que uma pessoa acerte a senha na primeira tentativa, sabendo que a senha é formada por um número com todos os algarismos iguais?

Exercício 14) Maria selecionou algumas músicas em seu computador. Foram selecionadas 32 músicas de pop rock, 24 músicas sertanejas e 44 músicas eletrônicas, que serão reproduzidas de forma aleatória e sem repetições. Qual é a probabilidade de que a primeira música tocada:

a) seja pop rock?

b) não seja uma música eletrônica?

Respostas

Exercício 1) $\frac{1}{2}$

Exercício 2) $\frac{7}{30}$

Exercício 3)

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{4}{15}$

c) $\frac{7}{9}$

d) $\frac{37}{48}$

Exercício 4) 20 meninos

Exercício 5) $\frac{21}{25}$

Exercício 6) $\frac{1}{16}$

Exercício 7) $\frac{1}{6}$

Exercício 8) $\frac{1}{16}$

Exercício 9) $\frac{3}{4}$

Exercício 10) $\frac{1}{3}$

Exercício 11) $\frac{17}{25}$

Exercício 12) $\frac{27}{100}$

Exercício 13) $\frac{1}{100}$

Exercício 14)

a) $\frac{8}{25}$

b) $\frac{11}{20}$