

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO - FÍSICA

LUCAS STORI DE LARA

EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA QUÂNTICA EM MODOS ACOPLADOS

PONTA GROSSA
2007

LUCAS STORI DE LARA

EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA QUÂNTICA EM MODOS ACOPLADOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação, área de concentração - Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Sérgio M. de Castro

PONTA GROSSA

2007

Ficha Catalográfica Elaborada pelo Setor de Processos Técnicos BICEN/UEPG

L318e Lara, Lucas Stori de
Excitação paramétrica quântica em modos acoplados. / Lucas Stori de Lara. Ponta Grossa, 2007.
105f.

Dissertação (Mestrado em Ciências) - Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Orientadora: Prof. Dr. Antônio Sérgio Magalhães de Castro

1. Excitação paramétrica. 2. Emaranhamento. 3. Compressão. 4. Correlações quânticas. 5. Escalas múltiplas. I. Castro, Antônio Sérgio Magalhães de Castro. II. T.

CDD: 530.12

TERMO DE APROVAÇÃO

LUCAS STORI DE LARA

“EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA QUÂNTICA EM MODOS ACOPLADOS”.

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Ciências - Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.



Orientador:

Prof. Dr. Antonio Sérgio Magalhães de Castro
Departamento de Física, UEPG/PR.



Prof. Dr. Marcelo Emílio
Departamento de Geociências, UEPG/PR.



Prof. Dr. Roberto Menezes Serra
Centro de Ciências da Natureza, UFABC/SP.

Ponta Grossa, 22 de novembro de 2007.

Dedico esse trabalho
a minha amada, Taiza.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao programa de Pós-Graduação em Ciências, área de concentração: Física.

Ao meu Orientador Prof. Dr. Antonio Sérgio, pela paciência, incentivo e principalmente a amizade por todos estes anos de trabalho.

A minha amada noiva Taiza, que sempre esteve ao meu lado, nos momentos de alegria e de dificuldade.

Aos meus familiares.

A todos os professores do departamento de Física.

Aos meus colegas de mestrado

Aos amigos e colegas, em especial, em ordem alfabética, ao Anderson Calistro, Anderson Carneiro, Denis Silva, Flavio Yotoko, Jeferson Matsuda, Roberto Herai, Sylvio Nakano, Wyllyan Leal, pelos grandes momentos vividos

Ao suporte da agência brasileira CAPES e ao Conselho Nacional de desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por haver parcialmente financiado este trabalho sob contrato No. 474690/2004-0.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização do curso e conclusão deste trabalho.

*Imaginação é tudo, é a prévia
das atrações futuras.*
(Albert Einstein)

*Você cria seu próprio universo de
acordo que caminha nele.*
(Winston Churchill)

RESUMO

O problema conhecido como "teletransporte quântico", ou transferência de estados quânticos, tem atraído a atenção de muitos autores. O objetivo de nosso estudo é considerar o efeito da excitação paramétrica quântica na *troca de informação quântica* entre dois modos do campo eletromagnético modelados por osciladores quânticos acoplados, onde um dos osciladores tem uma frequência dependente do tempo, sendo considerada o caso de dois modos acoplados. No caso quântico, os osciladores não trocam somente energias, mas também seus estados quânticos e tal troca pode ser interpretada como uma *transferência de informação*. Vemos que a possibilidade de troca de estados quânticos ou informação quântica pode ser verificadas de muitas maneiras pela análise direta do propagador de Schrödinger na representação das coordenadas. Existem várias maneiras diferentes de calcular o propagador de osciladores acoplados, mas uma maneira simples é baseada na teoria de invariantes quânticos dependentes linearmente do tempo. Considerando que o sistema em estudo é modelado por modos acoplados do campo eletromagnético, a interação ocorre nos domínios das interações fracas; a intensidade das constantes de acoplamentos são pequenas. Então, podemos considerar um sistema de equações diferenciais onde o seu comportamento dinâmico é dado no limite do acoplamento fraco. Iniciando com este argumento, nos reduzimos as equações diferenciais de primeira ordem em um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem para as matrizes λ 's. Com as matrizes λ 's determinadas, nos podemos calcular medidas de emaranhamento, compressão, pureza e outras propriedades de estados quânticos de cada modo em particular no caso de estados Gaussianos iniciais.

Palavras-chave: Emaranhamento, compressão, correlações quânticas, excitação paramétrica, escalas múltiplas.

Abstract

The problem of so-called "quantum teleportation", or a transfer of the state of some quantum system to another quantum system has attracted attention of many authors. The aim of our study is to consider the effect of the quantum parametric excitation on the *quantum information exchange* between two modes of the electromagnetic field modeled by coupled quantum oscillators, where one of the oscillators has a time dependent frequency, as an extension of the case of two coupled modes considered. In the quantum case, the oscillators exchange not only energies, but also their *quantum states* and such an exchange can be interpreted as an ideal *information transfer*. We see that the possibility of quantum state exchange or information transfer can be detected in the most direct way by analyzing the Schrödinger propagator features in the coordinate representation. There are many different schemes of calculating the propagators of coupled oscillators, but the simplest one is that based on the theory of linear time dependent quantum invariants. Considering that the system in study models the coupled modes of the electromagnetic field, the interaction occurs in the domain of the weak interactions; the intensity of the coupling constants are small. Then we can consider the systems of differential equations for the dynamic behavior in the case of weak coupling limit. Starting with this argument, we can reduce the differential equations of first order to the only two groups of second order differential equations for all that λ 's matrices. With the λ 's matrices well determined, we can calculate the measured of entanglement, squeezing, purity and other quantum state properties of each mode in a particular case of Gaussian initial states.

keys-words: Entanglement, squeezing, quantum correlations, parametric excitation, multiple scales.

Sumário

1	Introdução	5
2	Dinâmica de Sistemas Quânticos	8
2.1	Introdução	8
2.2	Integrais de Movimento em Mecânica Quântica	9
2.3	Propagador para Hamiltonianos quadráticos	14
2.4	Osciladores quânticos acoplados	22
2.5	Acoplamento independente do tempo	26
2.5.1	Forma explícita do propagador e condições de troca de estados . . .	28
2.6	Acoplamento dependente do tempo	30
2.6.1	O propagador ressonante e a troca de estados quânticos	31
2.7	Conclusão	40
3	Método das Escalas Múltiplas	41
3.1	Introdução	41
3.2	Aspectos Gerais do Método das Escalas Múltiplas	42
3.3	Aplicação do Método das Escalas Múltiplas	47
3.4	Conclusão	53
4	Efeito da excitação paramétrica quântica nos modos acoplados	54
4.1	Matriz das Covariâncias	56
4.2	Energia, Incerteza e Coeficiente de Compressão	58
4.3	Propriedades dos estados e medidas de correlação quântica	59
4.3.1	Análise qualitativa da medida da pureza e compressão dos modos do sistema sob excitação paramétrica quântica	62
4.3.2	Análise qualitativa da medida de emaranhamento	65
4.4	Alguns Experimentos	67
4.5	Conclusão	69
5	Conclusões Finais	70

A	Hamiltonianos Quadráticos e o Propagador	72
A.1	Hamiltoniano	72
A.2	Comutador	73
A.3	Propagador	74
A.4	Equações Diferenciais de 2 ^a Ordem	80
B	Equação de Duffing e o M.E.M.	83
B.1	Equação de Duffing Clássica	83
B.2	Equação de Duffing Quântica	86
C	Covariância e Emaranhamento	90
C.1	Elementos das Matrizes das Covariâncias	90
C.2	Emaranhamento - estado puro - parametrização	92

Lista de Figuras

2.1	Trocas do primeiro (C) e do segundo (B) tipo entre o estado de vácuo e estado comprimido com $s = 0,36$ e $x_0 = 3,86$. A: densidade de probabilidade inicial. C: densidade de probabilidade no instante $t = 157,08 \approx 50\pi$ ($\tau = \pi/2$) para $\varphi = \mu = 0$ e $\nu = 0,02$. B: densidade de probabilidade $\varphi = \pi/4$ ($\mu = \nu = 0,02$) no instante $t = (35 - 1/4)\pi \approx 109,17$	34
2.2	A evolução da distribuição inicial para $\varphi = 0$ e $\nu = 0,02$. A: o primeiro oscilador no estado comprimido com $s = 0,36$, $x_0 = 3,85$ e o segundo oscilador no estado de Fock com $n = 2$. B: densidade de probabilidade para uma escolha arbitrária de tempo $t = 67,32 \approx 21,43\pi$ ($\tau \approx \pi/5$). C: a troca de estado do primeiro tipo para $t = 157,08 \approx 50\pi$ e $\tau \approx \pi/2$	35
4.1	A curva em azul representa o modo 1 e a curva em magenta o modo 2 para as medidas de energias $\mathcal{E}_k(\tau)$, respectivamente para $\delta = 0,05$ e $\delta = 0$. Utilizamos $\eta_1 = 1,0$ (estado puro), $\eta_2 = 1,5$ (estado misto) com intensidade de acoplamento dos modos $\rho = 0,25$ e coeficientes reais de compressão $\xi_1 = 0,7$ e $\xi_2 = 0,0$	62
4.2	A curva em azul representa o valor da medida de incerteza \mathcal{D} para o modo 1 e a curva em magenta o valor para o modo 2, para $\delta = 0,05$ e $\delta = 0,0$, respectivamente. Consideramos estados iniciais com $\eta_1 = 1,0$ (estado puro) e $\eta_2 = 1,5$ (estado misto), com intensidade de acoplamento entre os modos $\rho = 0,25$, coeficientes reais de compressão $\xi_1 = 0,7$ e $\xi_2 = 0,0$	63
4.3	A curva em azul e magenta, representam respectivamente, as medidas de compressão do modo 1 e do modo 2. Consideramos as duas situações quando $\delta = 0,05$ e $\delta = 0,0$ (ausência de excitação). Consideramos estados Gaussianos iniciais com $\eta_1 = 1,0$ (estado puro), $\eta_2 = 1,5$ (estado misto), coeficientes reais de compressão $\xi_1 = 0,7$, $\xi_2 = 0,0$ e intensidade de acoplamento $\rho = 0,25$	64

4.4	Temos as medidas de pureza do modo 1 e 2 representadas, respectivamente, pelas curvas em azul e em magenta. Consideramos os valores $\delta = 0$ e $\delta = 0,05$ e para os estados iniciais temos $\eta_1 = 1,0$ (estado puro), $\eta_2 = 1,5$ (estado misto), $\xi_1 = 0,7$ e $\xi_2 = 0,0$ e acoplamento $\rho = 0,25$	65
4.5	Medidas de emaranhamento sem a excitação paramétrica quântica e com uma intensidade de excitação paramétrica quântica pequena $\delta = 0,005$. Os estados Gaussianos iniciais são caracterizados pelos valres $\eta_1 = 1,0$, $\eta_2 = 1,5$, $\xi_1 = 0,7$ e $\xi_2 = 0,0$ com intensidade de acoplamento entre os modos $\rho = 0,25$	66
4.6	Medidas de emaranhamento com excitação paramétrica quântica de intensidades $\delta = 0,01$ e $\delta = 0,05$. Os estados Gaussianos iniciais são caracterizados pelos valres $\eta_1 = 1,0$, $\eta_2 = 1,5$, $\xi_1 = 0,7$ e $\xi_2 = 0,0$ com intensidade de acoplamento entre os modos $\rho = 0,25$	67

Capítulo 1

Introdução

No atual contexto científico, os métodos computacionais estão sendo cada vez mais utilizados para o desenvolvimento da pesquisa científica, especialmente em física, nas áreas de ótica quântica e eletrodinâmica de cavidades. Em conexão com esta idéia, poderíamos perguntar se os métodos de aproximação da física matemática podem ser aplicados para se obter soluções analíticas em problemas de ótica quântica. Este trabalho trata basicamente desta questão; revisamos um método específico para o tratamento analítico de um problema particular da ótica quântica com ênfase em aspectos fundamentais da teoria quântica - controle e manipulação da informação quântica. O aspecto mais importante a respeito dos métodos aproximativos é que eles podem fortalecer e estimular nossa intuição, auxiliando na compreensão física da melhor solução do problema em consideração. Em alguns casos, as soluções obtidas através de métodos aproximativos nos dão indicativos do comportamento do sistema físico em certos intervalos de validade, de forma a assegurar boa parte da descrição física relevante do problema.

Neste trabalho, concentramos-nos em dois temas principais, mas não únicos: o método dos invariantes quânticos, aplicado ao cálculo da forma exata do propagador para um sistema descrito por hamiltonianos quadráticos e o método das escalas múltiplas, desenvolvido na mecânica clássica para o tratamento de equações diferenciais não-lineares, aplicado como um método para a descrição de efeitos perturbativos nos domínios da teoria de perturbação.

Além disto, este método não se restringe apenas aos domínios da física clássica, mas pode ser aplicado, considerando-se modificações adequadas, no campo da mecânica quântica, com o propósito de se obter soluções, tanto das equações de Heisenberg como da equação de Schrödinger. Em especial, no desenvolvimento deste trabalho, aplicamos o método das escalas múltiplas na solução de equações diferenciais “lineares” diretamente no problema de evolução temporal das soluções da equação de Schrödinger [1].

É reconhecida a grande eficiência do método das escalas múltiplas. Inicialmente no desenvolvimento do campo das equações diferenciais não-lineares e em problemas impor-

tantes da mecânica clássica não-linear. Os desenvolvimentos principais incluíram oscilações não-lineares, problemas de camadas limites, dinâmica dos fluídos, aerodinâmica e a teoria de movimento de astronave [2].

Em particular, tratamos dois modos acoplados na situação física onde um dos osciladores tem a frequência variando perturbativamente no tempo e o acoplamento entre os modos se processa no limite das interações fracas: as soluções para a descrição dos efeitos nos primeiros instantes da dinâmica do sistema se enquadram no domínio da teoria de perturbação. Isto justifica a utilização de métodos aproximativos como no caso o método das escalas múltiplas.

Neste estudo consideramos aspectos gerais qualitativos no processo de troca de estados quânticos (propriedades de estados quânticos) ou de informação quântica para dois modos do campo eletromagnético, analisando como um sistema de duas partes ("bipartite system") evolue no tempo de maneira similar ao estudado em [3]. A diferença fundamental desse nosso modelo para o anterior está no fato da frequência de um dos modos quantizados variar harmonicamente no tempo, efeito este que podemos denominar de excitação paramétrica quântica, em analogia a excitação paramétrica clássica [2] estudada na equação de Mathieu. Desta forma, o problema se reduz basicamente ao estudo do efeito perturbativo da excitação paramétrica quântica nas propriedades de cada um dos modos, em propriedades de correlação quântica e em especial na caracterização da transferência de informação entre ambos.

No capítulo 2 expomos de maneira resumida a teoria do propagador para o caso particular dos operadores Hamiltonianos quadráticos. Revisamos os conceitos de invariantes quânticos na sistemática operacional desenvolvida por Dodonov [4] e abordamos os pontos centrais necessários à compreensão do problema. Os detalhes dos cálculos referentes a este capítulo estão apresentados no apêndice A, uma vez que esta formulação está perfeitamente definida na literatura e para o problema em estudo é relevante apenas a forma final do propagador e sua aplicabilidade. Ainda no capítulo 2, como exemplo simples, ilustramos o método dos invariantes quânticos aplicado a um problema específico da física quântica: a troca de estados quânticos entre osciladores harmônicos quânticos unidimensionais. Mostramos como a sua solução, via a técnica dos invariantes quânticos, se resume na determinação das matrizes $\Lambda(t)$ e $\Delta(t)$, elementos fundamentais da dinâmica do sistema, obtidas a partir da solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias *para funções escalares do tempo*. Finalizamos este capítulo com os passos necessários para se determinar a forma geral do propagador para operadores Hamiltonianos quadráticos a partir das matrizes $\Lambda(t)$ e $\Delta(t)$.

No capítulo 3 revisamos o método das escalas múltiplas. Consideramos como o método pode ser aplicado e quais resultados importantes podem ser obtidos. Em síntese, mostramos

que o método das escalas múltiplas tem como idéia central a transformação das equações diferenciais do problema a ser abordado, sendo ela linear ou não, em uma série de equações diferenciais *lineares* solúveis de forma *iterativa*. Consideramos o exemplo do oscilador harmônico clássico unidimensional sob a ação de uma força central geral, do qual obtemos a equação de “Duffing” e exemplificamos a aplicabilidade do método das escalas múltiplas. Em seguida desenvolvemos a primeira etapa do problema, que consiste na aplicação do método das escalas múltiplas para o problema dinâmico de dois osciladores quânticos acoplados. Considerando a forma quadrática do operador Hamiltoniano e condições iniciais bem definidas, aplicamos o método das escalas múltiplas para se obter uma forma aproximada para as matrizes $\Lambda(t)$, necessárias à construção do propagador e portanto definindo a evolução dinâmica do sistema.

No capítulo 4 determinamos o efeito perturbativo da excitação paramétrica quântica nas propriedades de cada um dos modos. Revisamos os conceitos de compressão e pureza de cada um dos modos a partir de elementos das matrizes de covariâncias, para o caso especial de estados Gaussianos. Estudamos as medidas de correlação quântica baseadas na formulação das matrizes das covariâncias e comparamos seu comportamento em relação as mesmas em sistemas de dois modos interagentes isolados, nos quais há ausência de excitação paramétrica quântica. Consideramos valores numéricos para os parâmetros de estados dos modos acoplados e para a excitação paramétrica quântica e analisamos qualitativamente o comportamento dinâmico do sistema. A parte original em nosso trabalho refere-se as medidas de compressão, pureza e correlações dos modos acoplados tendo em vista o efeito da excitação paramétrica em nosso sistema, não se esquecendo da utilização do método das escalas múltiplas na construção das matrizes Λ e posterior construção das matrizes das covariâncias.

No capítulo 5 concluímos a importância conceitual e operacional de nosso trabalho. Algumas passagens importantes estão esclarecidas no apêndice deste trabalho, feito com o intuito de esclarecer os aspectos técnicos.

Capítulo 2

Dinâmica de Sistemas Quânticos

2.1 Introdução

Com o surgimento da mecânica analítica, pode-se afirmar que a mecânica clássica se tornou uma ciência muito mais rica em informações e rigor matemático, e não uma mera reformulação da mecânica newtoniana [5, 6]. O grandioso edifício da teoria quântica se deve justamente a base da mecânica analítica, inspirada, particularmente a Hamilton. Não temos a pretensão de expor de forma detalhada a teoria da mecânica analítica e sim falar brevemente sobre alguns aspectos importantes relacionadas a ela.

A partir de estudos referentes a transformações invariantes em mecânica clássica, verifica-se das equações de Lagrange que as coordenadas são invariantes sob uma transformação geral, isto é, sua forma permanece a mesma qualquer que seja a escolha das coordenadas generalizadas. De forma análoga, na formulação hamiltoniana as coordenadas e momentos são variáveis independentes, o que torna possível considerar mudanças de variáveis no espaço de fase que preservem a forma das equações de Hamilton ampliando enormemente a gama de transformações admissíveis.

Estas duas formulações são importantes na análise de qualquer sistema físico, pois transformações canônicas invariantes nos asseguram que propriedades físicas são conservadas. Neste intuito, conhecendo-se tais coordenadas generalizadas, a dinâmica do sistema físico também pode ser determinada. Esta evolução dinâmica, descrita na mecânica clássica, pode ser tratada pelo Teorema de Liouville por exemplo, mostrando-nos que tal evolução preserva as propriedades do sistema em qualquer região do espaço de fase, ou seja a evolução temporal é uma transformação canônica.

Diferentemente do que ocorre na mecânica clássica, o estudo da dinâmica de sistemas quânticos implica em uma abordagem diferente da dinâmica clássica. Na mecânica clássica o estado do sistema está perfeitamente determinado a partir do conhecimento da dependência temporal das coordenadas e momenta conjugados associados ao sistema, que são obtidos

diretamente da integração das equações de Hamilton-Jacobi ou de uma forma alternativa a partir das equações de Euler-Lagrange.

Nos sistemas quânticos, por exemplo, os graus de liberdade do sistema estão associados a operadores definidos no espaço de vetores de estados, Espaço de Hilbert [1]. O conceito determinista de estado cede lugar a uma formulação probabilística, a partir de amplitudes associadas a estes vetores de estado, e as variáveis dinâmicas tem seus valores atribuídos a médias tomadas neste espaço de vetores. A evolução temporal do sistema está agora atribuída a evolução temporal dos vetores de estado, na formulação de Schrödinger, ou aos operadores associados a formulação de Heisenberg. E neste sentido, determinar a evolução temporal do sistema no espaço de vetores implica necessariamente no cálculo do operador evolução temporal $\hat{U}(t; t_0)$ ou propagador do sistema, considerada a representação apropriada. Então o estudo da dinâmica quântica do sistema implica necessariamente na busca de métodos para se determinar uma forma exata ou aproximada daquele operador de evolução temporal.

2.2 Integrais de Movimento em Mecânica Quântica

O conceito de invariante quântico conforme descrito por Lewis e Riesenfeld [7], implica que uma solução da equação de Schrödinger constitui-se de um auto-estado do invariante hermitiano $\hat{I}_\alpha(t)$ multiplicado por um fator de fase dependente do tempo. No que diz respeito ao operador $\hat{I}_\alpha(t)$, Lewis e Riesenfeld asseguram que se este operador admite um conjunto completo de auto-estados $|m, t\rangle$, os correspondentes autovalores $\lambda's$ (que constituem funções reais) são independentes do tempo. Neste caso, a dependência temporal é inteiramente associada aos auto-estados, uma vez que a ação de um operador invariante $\hat{I}_\alpha(t)$ sobre a solução da equação de Schrödinger, $\hat{I}_\alpha(t)|\Psi(t)\rangle$, gera uma nova solução da equação de Schrödinger. No sentido de uma quantidade mensurável, um invariante quântico $\hat{I}(t)$ é um operador atuando no espaço de estados do sistema físico $|\Psi(t)\rangle$ cujo valor esperado não se altera durante a evolução do sistema,

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi(t) | \hat{I}_\alpha(t) | \Psi(t) \rangle = 0. \quad (2.1)$$

Representamos um sistema quântico através de um operador \hat{H} , a partir do qual podemos tirar informação da evolução temporal do estado do sistema. Um propagador está associado diretamente à dinâmica de qualquer sistema físico clássico [8] ou quântico [9]. Ele é definido como sendo o núcleo da representação integral da equação diferencial associado ao sistema dinâmico, contendo todas as informações necessárias e suficientes para determinar o comportamento futuro do sistema. No caso de um sistema quântico, a dinâmica é determinada pelo operador Hamiltoniano \hat{H} , que fornece as equações de evolução temporal do

sistema.

Na representação de Schrödinger, a equação formal para a evolução dos estados quânticos de um dado instante é

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\Psi(t_0)\rangle, \quad (2.2)$$

onde $|\Psi(t)\rangle$ é o vetor de estado em $t > 0$ e $|\Psi(t_0)\rangle$ no instante inicial. O operador de evolução $\hat{U}(t, t_0)$ está expresso em termos do hamiltoniano como

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(t) dt.$$

A estrutura do propagador surge quando escrevemos a equação (2.2) na representação das coordenadas, que com o auxílio da completeza

$$\hat{\mathbf{1}} = \int d^3x' |x'\rangle\langle x'|,$$

aplicada ao lado direito da equação (2.2), conduz à forma

$$\langle x|\Psi(t)\rangle = \int d^3x' \langle x|\hat{U}(t, t_0)|x'\rangle \langle x'|\Psi(t_0)\rangle. \quad (2.3)$$

Definida para espaço das configurações e obtida a partir da função de onda do estado inicial $\langle x'|\Psi(t_0)\rangle$, a função de onda $\langle x|\Psi(t)\rangle$ para um dado estado quântico do sistema está perfeitamente determinada a partir de (2.3). Assim, identificamos o propagador na representação das coordenadas como

$$G(x, x'; t) = \langle x|\hat{U}(t, t_0)|x'\rangle, \quad (2.4)$$

sendo nada mais que o operador evolução temporal $\hat{U}(t, t_0)$ escrito na representação das coordenadas. O operador $\hat{U}(t, t_0)$ é a solução da equação de operadores na representação de Schrödinger. A equação dinâmica para o vetor de estado da solução em (2.2) é dada na forma

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H})|\Psi\rangle = 0, \quad (2.5)$$

e aplicando a propriedade distributiva em (2.5), considerando $|\Psi(t)\rangle$ dado em (2.2), obtemos a equação para o operador $\hat{U}(t, t_0)$ na forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H} \hat{U}(t, t_0), \quad (2.6)$$

sujeita a condição inicial,

$$\hat{U}(t, t_0)_{t=t_0} = \hat{\mathbf{1}}. \quad (2.7)$$

Das propriedades de hermiticidade temos:

1. Os operadores hermitianos possuem autovalores reais.

2. As autofunções de um operador hermitiano são, ou podem ser escolhidas de tal forma que sejam ortogonais.
3. As autofunções de um operador linear hermitiano formam um conjunto completo e ortogonal de funções.
4. Se o operador hamiltoniano é hermitiano, o operador evolução temporal $\hat{U}(t, t_0)$ é unitário, isto é,

$$\hat{U}^\dagger(t, t_0) = \hat{U}^{-1}(t, t_0),$$

que implica na existência de um certo operador evolução $\hat{U}(t, t_0)$ e seu inverso.

Então, se $\hat{U}(t, t_0)$ e seu inverso existem, para um dado sistema quântico com N graus de liberdade, na representação de Schrödinger existem $2N$ operadores explicitamente dependente do tempo na forma

$$\hat{P}_j(t) = \hat{U}(t, t_0)\hat{p}_j\hat{U}^{-1}(t, t_0), \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.8)$$

$$\hat{X}_j(t) = \hat{U}(t, t_0)\hat{x}_j\hat{U}^{-1}(t, t_0), \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.9)$$

onde \hat{x}_j são os operadores coordenadas e \hat{p}_j os operadores momenta dados por $\hat{p}_j = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}$, na representação de coordenadas. Das equações (2.8) e (2.9), observamos que a dependência temporal de $\hat{P}_j(t)$ e $\hat{X}_j(t)$ (os nossos invariantes do sistema), provém da dependência temporal em $\hat{U}(t, t_0)$, pois os operadores \hat{x}_j e \hat{p}_j ($j = 1, \dots, N$) são fixos no tempo, na representação de Schrödinger. Na representação de Heisenberg são os operadores que evoluem no tempo enquanto o vetor de estado do sistema é fixo. Assim como na mecânica clássica, as equações de movimento do sistema físico, surgem naturalmente dos parenteses de Poisson, ou seja

$$\frac{df}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \equiv \{f, H\}.$$

Que processo de quantização canônica os parenteses de Poisson são substituídos por comutadores de acordo com a transformação $\{f, H\} \rightarrow i\hbar [\hat{f}, \hat{H}]$ e as funções reais são substituídas pelos correspondentes operadores. Portanto, considerando o lado esquerdo da equação 2.1, podemos escrevemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \Psi(t) | \hat{I}_\alpha(t) | \Psi(t) \rangle &= \frac{\partial}{\partial t} (\langle \Psi(t) | \hat{I}_\alpha(t) | \Psi(t) \rangle) + \langle \Psi(t) | \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{I}_\alpha(t) \right) | \Psi(t) \rangle \\ &+ \langle \Psi(t) | \hat{I}_\alpha(t) \left(\frac{\partial}{\partial t} | \Psi(t) \rangle \right). \end{aligned}$$

A partir da equação de Schrödinger (2.5) e seu conjugado hermitiano

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \Psi(t) | = \langle \Psi(t) | \hat{H}(t),$$

temos que

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi(t) | \hat{I}_\alpha(t) | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi(t) | \left[\frac{\partial \hat{I}_\alpha(t)}{\partial t} - \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}(t), \hat{I}_\alpha(t)] \right] | \Psi(t) \rangle. \quad (2.10)$$

Nós observamos que esta equação deve ser equivalente a obtida anteriormente em (2.1) para a derivada do valor esperado do operador invariante $\hat{I}_\alpha(t)$. Dessa forma, no espaço de soluções da equação de Schrödinger a integral de movimento escrita pela equação 2.10 é equivalente a forma

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi(t) | \hat{I}_\alpha(t) | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi(t) | \left[\frac{\partial \hat{I}_\alpha(t)}{\partial t} - \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}(t), \hat{I}_\alpha(t)] \right] | \Psi(t) \rangle = 0, \quad (2.11)$$

que implica em

$$\frac{\partial \hat{I}_\alpha(t)}{\partial t} - \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}(t), \hat{I}_\alpha(t)] = 0 \quad (2.12)$$

para qualquer vetor de estado arbitrário $|\Psi(t)\rangle$ que satisfaz a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle. \quad (2.13)$$

Então se $\hat{H}(t)$ é hermitiano, a integral de movimento $\hat{I}_\alpha(t)$, cujo valor esperado no espaço de soluções da equação de Schrödinger é invariante no tempo precisa satisfazer a equação (2.12). Tal análise, generalizada para o caso não hermitiano, implica então que os *operadores* invariantes satisfazem a equação

$$i\hbar \frac{\partial \hat{I}_\alpha(t)}{\partial t} - \hat{H}^\dagger(t) \hat{I}_\alpha(t) + \hat{I}_\alpha(t) \hat{H}(t) = 0. \quad (2.14)$$

Da definição de invariante quântico (2.11) e para um estado arbitrário $|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle$ ($t_0 = 0$) temos

$$\langle \Psi(t) | \hat{I}_\alpha(t) | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi(0) | \hat{U}^{-1}(t, t_0) \hat{I}_\alpha(t) \hat{U}(t, t_0) | \Psi(0) \rangle = \langle \Psi(0) | \hat{I}_\alpha(0) | \Psi(0) \rangle, \quad (2.15)$$

que implica diretamente em

$$\hat{U}^{-1}(t, t_0) \hat{I}_\alpha(t) \hat{U}(t, t_0) = \hat{I}_\alpha(0), \quad \hat{U}^{-1}(t, t_0) = \hat{U}^\dagger(t, t_0). \quad (2.16)$$

Então para o operador invariante $\hat{I}_\alpha(t)$ temos a forma

$$\hat{I}_\alpha(t) = \hat{U}(t, t_0) \hat{I}_\alpha(0) \hat{U}^\dagger(t, t_0), \quad \alpha = 1, \dots, 2N. \quad (2.17)$$

A ação do operador $\hat{I}_\alpha(t)$ nos vetores de estado do sistema é dada por

$$\hat{I}_\alpha(t) |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) \hat{I}_\alpha(0) \hat{U}^{-1}(t, t_0) \hat{U}(t, t_0) |\Psi(0)\rangle = \hat{U}(t, t_0) \hat{I}_\alpha(0) |\Psi(0)\rangle, \quad \alpha = 1, \dots, 2N,$$

que resulta em

$$|\Phi(t)\rangle = \hat{I}_\alpha(t)|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) \left(\hat{I}_\alpha(0)|\Psi(0)\rangle \right) = \hat{U}(t, t_0)|\Phi(0)\rangle, \quad \alpha = 1, \dots, 2N, \quad (2.18)$$

mostrando que a ação do operador invariante sobre o vetor de estado também produz uma solução na equação de Schrödinger $|\Phi(t)\rangle$.

Logo, para mostrar $\hat{P}_j(t)$ e $\hat{X}_j(t)$, são integrais de movimento do sistema quântico, tomamos de início os seus valores esperados. Por exemplo o valor esperado de $\hat{X}_j(t)$ em $|\Psi(t)\rangle$ é dado

$$\langle \hat{X}(t) \rangle = \langle \Psi(t) | \hat{X}(t) | \Psi(t) \rangle, \quad (2.19)$$

onde a dependência temporal está em $\hat{X}(t)$. O operador $\hat{X}(t)$ conforme definido em (2.8) e a evolução temporal dos estados segundo a equação (2.2) implicam para equação (2.19) que

$$\langle \hat{X}(t) \rangle = \langle \Psi(t) | \hat{U}(t, t_0) \hat{x} \hat{U}^{-1}(t, t_0) | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi(t_0) | \hat{x} | \Psi(t_0) \rangle = \langle \hat{x} \rangle_{t=0}, \quad (2.20)$$

demonstrando que o valor esperado da "integral de movimento" $\hat{X}(t)$ nos estados arbitrários $|\Psi(t)\rangle$, para qualquer tempo $t > 0$, depende somente do valor esperado da coordenada no estado inicial do sistema. Então em conformidade com (2.1) temos

$$\frac{d\langle \hat{X}(t) \rangle}{dt} = 0. \quad (2.21)$$

Deste modo $\hat{X}(t)$ é uma integral quântica de movimento e satisfaz a equação (2.14). Da equação

$$i\hbar \frac{\partial \hat{X}(t)}{\partial t} = \hat{X}(t)\hat{H}(t) - \hat{H}^\dagger(t)\hat{X}(t), \quad (2.22)$$

e considerando o hamiltoniano hermitiano, temos

$$\frac{d\hat{X}(t)}{dt} = \frac{\partial \hat{X}(t)}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}(t), \hat{X}(t)] = 0. \quad (2.23)$$

O operador $\hat{X}(t)$ é a "coordenada inicial" no sentido que o seu valor esperado, num estado arbitrário para $t > 0$ qualquer, está unicamente determinado pelo valor médio da *coordenada no instante inicial do sistema*. De forma similar se aplica ao operador $\hat{P}(t)$, onde

$$\frac{d\hat{P}(t)}{dt} = \frac{\partial \hat{P}(t)}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}(t), \hat{P}(t)] = 0. \quad (2.24)$$

Portanto, é visto que $\hat{X}(t)$ e $\hat{P}(t)$, são integrais de movimento, cuja evolução temporal é dada em termos das condições iniciais das coordenadas no estado inicial do sistema. Vamos explorar a importância do método dos invariantes quânticos no problema do cálculo do propagador de um sistema governado por hamiltonianos quadráticos, procurando demonstrar explicitamente a importância deste método.

2.3 Propagador para Hamiltonanos quadráticos

Os invariantes quânticos auxiliam na obtenção de uma descrição geral da dinâmica de sistemas acoplados, tornando possível o cálculo do propagador de forma aproximada ou exata. Vamos mostrar em detalhes os procedimentos pelos quais os invariantes quânticos do sistema, descritos por operadores hamiltonianos quadráticos, são aplicados para tal propósito. Consideremos de início a equação de evolução do vetor de estado na representação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}(t)|\Psi(t)\rangle, \quad (2.25)$$

porém restritos aos casos de operadores hamiltonianos quadráticos, dependentes do tempo na forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2N} \hat{q}_\alpha \mathcal{B}_{\alpha\beta}(t) \hat{q}_\beta + \sum_{\alpha,\beta=1}^{2N} C_\alpha(t) \hat{q}_\alpha. \quad (2.26)$$

Os fatores $\mathcal{B}_{\alpha\beta}(t)$ e $C_\alpha(t)$ são funções complexas e arbitrárias do tempo e $\hat{q}_{\alpha(\beta)}$ são elementos de um *vetor-operador* coluna de $2N$ -dimensional, sendo N o número de graus de liberdade do sistema. Para tornar mais explícito o par de variáveis canonicamente conjugadas, podemos escrever o vetor operador $\hat{\mathbf{q}}$ na forma $\hat{\mathbf{q}} = (\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{x}})$ onde $\hat{\mathbf{p}}$ representam os operadores momenta e $\hat{\mathbf{x}}$ os operadores coordenadas; $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_N)$ e $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$. Nessa formulação, escrevemos as funções $\mathcal{B}_{\alpha\beta}(t)$ como elementos de uma matriz $\mathcal{B}(t)$ simétrica de ordem $2N$ e $C_\alpha(t)$ como elementos de uma matriz $C(t)$ coluna de ordem N . Isto permite escrever (2.26) na forma compacta

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{q}} B \hat{\mathbf{q}} + C \hat{\mathbf{q}}. \quad (2.27)$$

Na equação (2.27) introduzimos as matrizes blocos de $B(t)$ na forma (apêndice A1)

$$B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) & b_2(t) \\ b_3(t) & b_4(t) \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

sujeita a condição de simetria, $b_1 = \tilde{b}_1$, $b_2 = \tilde{b}_3$ e $b_4 = \tilde{b}_4$, ($B_{\alpha\beta}(t) = B_{\beta\alpha}(t)$), e a matriz bloco coluna $C(t)$ na forma

$$C(t) = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Nesta notação, o operador hamiltoniano quadrático, pode ser escrito como

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p} b_1 \hat{p} + \hat{p} b_2 \hat{x} + \hat{x} b_3 \hat{p} + \hat{x} b_4 \hat{x}) + c_1 \hat{p} + c_2 \hat{x}. \quad (2.30)$$

Interessa-nos determinar uma forma exata ou aproximada do propagador para o sistema de hamiltonianos quadráticos. Para tal propósito precisamos determinar as formas dos operadores invariantes $\hat{I}_\alpha(t) = (\hat{P}_j, \hat{X}_j)$, para que o operador de evolução temporal na

representação das coordenadas possa ser determinado explicitamente a partir das equações (2.8)-(2.9). Aplicando o princípio da completeza

$$\hat{1} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi |\xi\rangle \langle \xi|,$$

escrevemos uma forma equivalente das equações (2.8)-(2.9), na representação das coordenadas, como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle x | \hat{P}_j(t) | \xi \rangle \langle \xi | \hat{U}(t, t_0) | x' \rangle d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x | \hat{U}(t, t_0) | \xi \rangle \langle \xi | \hat{p}_\alpha | x' \rangle d\xi, \quad (2.31)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle x | \hat{X}_j(t) | \xi \rangle \langle \xi | \hat{U}(t, t_0) | x' \rangle d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x | \hat{U}(t, t_0) | \xi \rangle \langle \xi | \hat{x}_\alpha | x' \rangle d\xi. \quad (2.32)$$

Considerando os operadores momenta ($\alpha = 1, \dots, N$) e coordenadas ($\alpha = N + 1, \dots, 2N$) separadamente, e escolhida a representação das coordenadas, obtemos das equações (2.31)-(2.32) um sistema de $2N$ equações diferenciais para o propagador nas coordenadas x_j e suas derivadas. Logo

$$\hat{P}_j(x, t) G(x, x'; t, t_0) = i\hbar \frac{\partial}{\partial x'_j} G(x, x'; t, t_0), \quad (2.33)$$

$$\hat{X}_j(x, t) G(x, x'; t, t_0) = x'_j G(x, x'; t, t_0). \quad (2.34)$$

Estas equações são dependentes das formas funcionais $\hat{P}_j(x, t)$ e $\hat{X}_j(x, t)$ a serem determinadas. Uma vez determinadas, o problema de encontrar o propagador se torna simples. A partir de (2.11), estes operadores invariantes $\hat{I}_\alpha(t)$ satisfazem a equação

$$i\hbar \frac{\partial \hat{I}_\alpha(t)}{\partial t} - [\hat{H}, \hat{I}_\alpha(t)] = 0, \quad (2.35)$$

sujeita a condição inicial

$$\hat{I}_\alpha(t_0) = \hat{q}_\alpha, \quad (2.36)$$

com $\hat{I}_\alpha(t)$ escrito formalmente em termos de \hat{q}_α segundo a equação (2.8) conforme em $t = t_0$ temos $U(t, t_0)_{t=t_0} = \hat{1}$.

Os operadores \hat{x} e \hat{p} , satisfazem as relações de comutação

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{x}_j] = i\hbar \delta_{i,j} \hat{1}, \quad (2.37)$$

equivalentemente escritas na forma compacta

$$[\hat{q}_\alpha, \hat{q}_\beta] = -i\hbar \Sigma_{\alpha\beta}, \quad \Sigma_{\alpha\beta} = -\Sigma_{\beta\alpha}, \quad (2.38)$$

com Σ definida em termos de matrizes blocos

$$\Sigma = \begin{bmatrix} O_N & E_N \\ -E_N & O_N \end{bmatrix},$$

onde E_N é a matriz identidade e O_N é a matriz nula, ambas de ordem N . Além disso temos que $\Sigma^2 = -E_{2N}$. Da equação (2.38), também verificamos a relação de comutação dos operadores $\hat{I}_\alpha(t)$ na forma

$$\begin{aligned} [\hat{I}_\alpha(t), \hat{I}_\beta(t)] &= \hat{I}_\alpha(t)\hat{I}_\beta(t) - \hat{I}_\beta(t)\hat{I}_\alpha(t) \\ &= \hat{I}_\alpha(t)\hat{U}(t, t_0)\hat{U}^{-1}(t, t_0)\hat{I}_\beta(t) - \hat{I}_\beta(t)\hat{U}(t, t_0)\hat{U}^{-1}(t, t_0)\hat{I}_\alpha(t) \\ &= \hat{U}(t, t_0)[\hat{q}_\alpha, \hat{q}_\beta]\hat{U}^{-1}(t, t_0). \end{aligned}$$

Portanto, da equação (2.38) resulta que

$$\begin{aligned} [\hat{I}_\alpha(t), \hat{I}_\beta(t)] &= -i\hbar\hat{U}(t, t_0)\Sigma_{\alpha\beta}\hat{U}^{-1}(t, t_0), \\ [\hat{I}_\alpha(t), \hat{I}_\beta(t)] &= -i\hbar\Sigma_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Deste modo, as quantidades \hat{I}_α e \hat{q}_α estão relacionadas por uma transformação canônica ponto a ponto. Então podemos definir \hat{I}_α em termos de \hat{q}_α segundo a transformação

$$\hat{I}_\mu(t) = \Lambda_{\mu\nu}(t)\hat{q}_\nu + \Delta_\mu(t), \quad (2.40)$$

onde $\Lambda_{\mu\nu}(t)$ é uma matriz de ordem $2N$ e $\Delta_\mu(t)$ matriz coluna de ordem N . Essas matrizes satisfazem as condições iniciais

$$\Lambda(t_0) = E_{2N}, \quad \Delta(t_0) = O_{2N}, \quad (2.41)$$

de acordo com (2.36). Então a relação entre "coordenada e momento iniciais" e os operadores coordenada e momento na representação de Schrödinger estão determinadas pelas matrizes $\Lambda_{\mu\nu}(t)$ e $\Delta_\mu(t)$. No entanto, podemos então determinar estas matrizes encontrando o conjunto de equações que as determine de forma única para o operador Hamiltoniano quadrático (2.26). Para isto partimos da equação (2.40), que substituindo em (2.35), temos para o termo diferencial a equação

$$\frac{\partial \hat{I}_\mu(t)}{\partial t} = \frac{d\Lambda_{\mu\nu}(t)}{dt}\hat{q}_\nu + \frac{d\Delta_\mu(t)}{dt}. \quad (2.42)$$

Calculando-se o comutador do Hamiltoniano quadrático com o operador invariante (Apêndice A2), obtemos

$$[\hat{H}, \hat{I}_\mu] = \left[\frac{1}{2}\hat{q}_\alpha B_{\alpha\beta}(t)\hat{q}_\beta + C_\alpha(t)\hat{q}_\alpha, \Lambda_{\mu\nu}(t)\hat{q}_\nu + \Delta_\mu(t) \right], \quad (2.43)$$

resultando em

$$[\hat{H}, \hat{I}_\mu] = i\hbar(\Lambda_{\mu\nu}(t)\Sigma_{\nu\beta}B_{\beta\alpha}(t)\hat{q}_\alpha + \Lambda_{\mu\nu}(t)\Sigma_{\nu\alpha}C_\alpha). \quad (2.44)$$

Substituindo em (2.35), obtemos para os elementos $\Lambda_{\mu\nu}(t)$ e $\Delta_\mu(t)$ um conjunto de equações diferenciais lineares de primeira ordem, que na forma matricial assume a forma de um

sistema de equações diferenciais ordinárias escritas por

$$\frac{d\Lambda(t)}{dt} = \Lambda(t)\Sigma B(t), \quad (2.45)$$

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} = \Lambda(t)\Sigma C(t). \quad (2.46)$$

Com estas equações diferenciais, juntamente com as condições iniciais dadas por (2.41), é possível então determinar os invariantes $\hat{I}_\alpha(t)$ explicitamente. Assim escrevemos as matrizes $\Lambda(t)$ e $\Delta(t)$ na estrutura de matrizes blocos de ordem N ,

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) & \lambda_4(t) \end{bmatrix}, \quad \Delta(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t) \\ \delta_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

onde a partir das condições iniciais (2.36) temos

$$\Lambda(t_0) = \begin{bmatrix} E_N & O_N \\ O_N & E_N \end{bmatrix}, \quad \Delta(t_0) = \begin{bmatrix} O_N \\ O_N \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

Então as equações diferenciais dadas em (2.45) e (2.46), assumem as formas

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_1 b_3 - \lambda_2 b_1, \quad \dot{\lambda}_2 = \lambda_1 b_4 - \lambda_2 b_2, \quad (2.49)$$

$$\dot{\lambda}_3 = \lambda_3 b_3 - \lambda_4 b_1, \quad \dot{\lambda}_4 = \lambda_3 b_4 - \lambda_4 b_2, \quad (2.50)$$

$$\dot{\delta}_1 = \lambda_1 c_2 - \lambda_4 c_1, \quad \dot{\delta}_2 = \lambda_3 c_2 - \lambda_4 c_1. \quad (2.51)$$

Ainda podemos obter identidades importantes, com o fim de simplificações futuras ao cálculo explícito do propagador, bem como a análise e consistência da solução das matrizes $\Lambda(t)$, portanto

$$\frac{d}{dt}\Lambda\Sigma\tilde{\Lambda} = \frac{d\Lambda}{dt}\Sigma\tilde{\Lambda} + \Lambda\Sigma\frac{d\tilde{\Lambda}}{dt} = \Lambda\Sigma B\Sigma\tilde{\Lambda} - \Lambda\Sigma B\Sigma\tilde{\Lambda} = 0,$$

desta forma a matriz $\Lambda\Sigma\tilde{\Lambda}$ é constante no tempo. Então das condições iniciais (2.41)

$$\Lambda(t_0)\Sigma\tilde{\Lambda}(t_0) = E_{2N}\Sigma E_{2N} = \Sigma. \quad (2.52)$$

Logo

$$\Lambda\Sigma\tilde{\Lambda} = \Sigma, \quad (2.53)$$

identificando em $\Lambda\Sigma\tilde{\Lambda}$ uma integral de movimento. Este resultado implica para o determinante $\det \Lambda$, dois possíveis valores,

$$\begin{aligned} \det(\Lambda\Sigma\tilde{\Lambda}) &= \det \Sigma, \\ \det \Lambda \det \Sigma \det \tilde{\Lambda} &= \det \Sigma, \end{aligned}$$

sendo $\det \Sigma = 1$ e $\det \tilde{\Lambda} = \det \Lambda$. Logo

$$\det \Sigma = [\det \Lambda]^2 = 1, \quad (2.54)$$

de onde concluímos que $\det \Lambda = \pm 1$. No entanto, escolhemos $\det \Lambda = 1$ para manter a continuidade dos elementos da matriz $\Lambda(t)$ no instante $t = 0$, quando $\Lambda(0) = E_{2N}$ e $\det E_{2N} = 1$. A matriz inversa $\Lambda^{-1}(t)$ pode ser determinada de um modo muito simples, a partir de (2.53)

$$\begin{aligned} \Lambda \Sigma \tilde{\Lambda} = \Sigma &\implies \Lambda^{-1} \Lambda \Sigma \tilde{\Lambda} = \Lambda^{-1} \Sigma, \\ \Lambda^{-1} \Lambda \Sigma \tilde{\Lambda} \Sigma = \Lambda^{-1} \Sigma^2 &\implies \Lambda^{-1} = \Sigma \tilde{\Lambda} \Sigma, \end{aligned} \quad (2.55)$$

cuja forma explícita em termos das matrizes blocos N -dimensionais é

$$\Lambda^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_4 & -\lambda_2 \\ -\lambda_3 & \lambda_1 \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

Então a partir das equações (2.52), (2.53) e (2.56) obtemos explicitamente, uma série de identidades para as matrizes λ 's, dadas por:

$$\begin{aligned} \lambda_4 \tilde{\lambda}_1 - \lambda_3 \tilde{\lambda}_2 &= \lambda_1 \tilde{\lambda}_4 - \lambda_2 \tilde{\lambda}_3 = E_N, \\ \lambda_1 \tilde{\lambda}_2 &= \lambda_2 \tilde{\lambda}_1, \quad \lambda_3 \tilde{\lambda}_4 = \lambda_4 \tilde{\lambda}_3, \end{aligned} \quad (2.57)$$

e de forma análoga, partindo da equação (2.56), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_4 \lambda_1 - \tilde{\lambda}_2 \lambda_3 &= \tilde{\lambda}_1 \lambda_4 - \tilde{\lambda}_3 \lambda_2 = E_N \\ \tilde{\lambda}_4 \lambda_2 &= \tilde{\lambda}_2 \lambda_4, \quad \tilde{\lambda}_1 \lambda_3 = \tilde{\lambda}_3 \lambda_1. \end{aligned} \quad (2.58)$$

As equações (2.45-2.58) estabelecem os elementos necessários para se determinar as matrizes $\Lambda(t)$ e $\Delta(t)$. Uma vez determinada as matrizes $\Lambda(t)$ e $\Delta(t)$, a partir de sua estrutura de matrizes blocos, encontramos a forma explícita dos invariantes quânticos em termos dos operadores coordenadas e momentum na representação de Schrödinger:

$$\begin{bmatrix} \hat{P} \\ \hat{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p} \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_N & O_N \\ O_N & E_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}, \quad (2.59)$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \lambda_1(t) \hat{p} + \lambda_2(t) \hat{x} + \delta_1(t) \hat{1}, \\ \hat{X} &= \lambda_3(t) \hat{p} + \lambda_4(t) \hat{x} + \delta_2(t) \hat{1}. \end{aligned}$$

Note que a dependência temporal explícita para \hat{P} e \hat{X} está nas formas funcionais dos elementos de matrizes λ e δ .

Assim temos para os invariantes quânticos na *representação das coordenadas* os seguintes vetores N -dimensionais $P(x, t)$ e $X(x, t)$, dados por

$$P(x, t) = \frac{\hbar}{i} \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 x + \delta_1, \quad (2.60)$$

$$X(x, t) = \frac{\hbar}{i} \lambda_3 \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_4 x + \delta_2. \quad (2.61)$$

Desta forma retornamos às equações (2.33) e (2.34) e realizamos o cálculo do propagador dado na forma $G(x, x'; t, t_0)$. Então temos

$$\left[\frac{\hbar}{i} \lambda_{1,jk} \frac{\partial}{\partial x_k} + \lambda_{2,jk} x_k + \delta_{1,j} \right] G(x, x'; t, t_0) = i\hbar \frac{\partial}{\partial x'_j} G(x, x'; t, t_0), \quad (2.62)$$

$$\left[\frac{\hbar}{i} \lambda_{3,jk} \frac{\partial}{\partial x_k} + \lambda_{4,jk} x_k + \delta_{2,j} \right] G(x, x'; t, t_0) = x'_j G(x, x'; t, t_0), \quad (2.63)$$

onde os índices repetidos indicam uma somatória. Admitindo o propagador na forma $G(x, x'; t, t_0) = G_1(x, x') G_2(x'; t, t_0) G_0(t, t_0)$, as equações em (2.63) tornam-se N equações diferenciais parciais em x com autovalores x' (Apêndice A3), dadas por

$$\left[\frac{\hbar}{i} \lambda_{3,jk} \frac{\partial G_1(x, x')}{\partial x_k} + \lambda_{4,jk} x_k G_1(x, x') + \delta_{2,j} G_1(x, x') \right] = x'_j G_1(x, x').$$

Estas equações diferenciais sugerem para a solução $G_1(x, x')$ a forma exponencial $G_1(x, x') = \exp[g_1(x, x')]$ que por substituição, $g_1(x, x')$ satisfaz então o conjunto de equações ($j = 1, \dots, N$) (índices repetidos subtende-se soma)

$$-i\hbar \frac{\partial g_1(x, x')}{\partial x_j} = \lambda_{3,jl}^{-1} x'_l - \lambda_{3,j}^{-1} \delta_{2,j} - \lambda_{3,s}^{-1} \lambda_{4,sl} x_l.$$

Resolvendo estas equações, obtemos $g_1(x, x')$, em sua forma matricial compacta,

$$g_1(x, x') = -\frac{i}{2\hbar} [x \lambda_3^{-1} \lambda_4 x - 2(x \lambda_3^{-1} x') + 2(x \lambda_3^{-1} \delta_2)]. \quad (2.64)$$

Com o argumento da exponencial em $G_1(x, x')$ determinado, podemos resolver as equações diferenciais para a função $G_2(x'; t, t_0)$

$$\frac{\hbar}{i} \lambda_{1,jk} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_k} + \lambda_{2,jk} x_k + \delta_{1,j} = i\hbar \left(\frac{\partial g_1(x')}{\partial x'_j} + \frac{\partial g_2(x')}{\partial x'_j} \right),$$

que, através da solução (2.64), obtemos a seguinte equação para $g_2(x')$,

$$i\hbar \frac{\partial g_2(x')}{\partial x'_j} = \lambda_{1,jl} \lambda_{3,lk}^{-1} x'_k - \lambda_{1,jl} \lambda_{3,lk}^{-1} \delta_{2,k} + \delta_{1,j}.$$

Resolvendo esta equação, obtemos para $g_2(x')$

$$g_2(x'; t, t_0) = -\frac{i}{2\hbar} [x' \lambda_1 \lambda_3^{-1} x' + 2x' \lambda_1 \lambda_3^{-1} \delta_2 - 2x' \delta_1], \quad (2.65)$$

tal que encontramos a forma espacial do propagador do hamiltoniano. A dependência temporal está contida inteiramente em $G_0(t, t_0)$, temos então a forma geral do propagador dada por:

$$G(x; x'; t) = \mathcal{N}G_0(t, t_0) \exp \left\{ -\frac{i}{2\hbar} [x\lambda_3^{-1}\lambda_4x - 2x\lambda_3^{-1}x' + x'\lambda_1\lambda_3^{-1}x' + 2x\lambda_3^{-1}\delta_2 + 2x'\delta_1] \right\}. \quad (2.66)$$

A forma temporal pode ser obtida diretamente da equação de Schrödinger. Assim, na representação das coordenadas temos

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(x) \right] G(x; x'; t) = 0, \quad (2.67)$$

sujeita a condição inicial

$$G(x; x'; 0) = \delta(x_1 - x'_1) \dots \delta(x_N - x'_N) = \delta^N(x - x'). \quad (2.68)$$

A função $H(x)$ é o operador Hamiltoniano escrito na representação das coordenadas [1], como

$$H(x) = \frac{1}{2} \left[-\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x} b_1 \frac{\partial}{\partial x} - i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} b_2 x + x b_3 \frac{\partial}{\partial x} \right) + x b_4 x \right] - i\hbar c_1 \frac{\partial}{\partial x} + c_2 x. \quad (2.69)$$

A ação desta forma diferencial sobre a solução $G(x; x'; t)$ pode ser determinada com auxílio das identidades

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (x \mathcal{A} x) = -2i\hbar \mathcal{A} x, \quad (2.70)$$

e

$$-\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{A} \frac{\partial}{\partial x} (x \mathcal{B} x) = -2\hbar^2 \text{Tr}(\mathcal{A} \mathcal{B}), \quad (2.71)$$

onde tanto \mathcal{A} quanto \mathcal{B} são supostos simétricos. A equação diferencial para $\varphi(t)$, que nos dá a forma temporal do propagador $G_0(t, t_0) = \exp[\varphi(t, t_0)]$, é determinada por (2.67), considerando o propagador em (2.66). Isso resulta em

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{1}{2} \text{Tr}[\lambda_3^{-1} \lambda_4 b_1 - b_3] + \frac{i}{\hbar} \left(c_1 \lambda_3^{-1} \delta_2 - \frac{1}{2} \delta_2 \lambda_3^{-1} b_1 \lambda_3^{-1} \delta_2 \right), \quad (2.72)$$

o lado direito da equação (2.72) pode ser simplificado se eliminarmos as matrizes b_1 e b_3 , bem como c_1 , com a ajuda das equações (2.45-2.46) e das relações de inversão.

$$B(t) = -\tilde{\Lambda}(t) \Sigma \frac{d\Lambda(t)}{dt}, \quad (2.73)$$

$$C(t) = -\tilde{\Lambda}(t) \Sigma \frac{d\Delta(t)}{dt}. \quad (2.74)$$

A partir destas equações (2.73-2.74) encontramos os elementos das matrizes B e C em termos das matrizes λ' s,

$$b_1 = \tilde{\lambda}_3 \dot{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_1 \dot{\lambda}_3, \quad b_2 = \tilde{\lambda}_3 \dot{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1 \dot{\lambda}_4, \quad (2.75)$$

$$b_3 = \tilde{\lambda}_4 \dot{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2 \dot{\lambda}_3, \quad b_4 = \tilde{\lambda}_4 \dot{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_2 \dot{\lambda}_4, \quad (2.76)$$

$$c_1 = \tilde{\lambda}_3 \dot{\delta}_1 - \tilde{\lambda}_1 \dot{\delta}_2, \quad c_2 = \tilde{\lambda}_4 \dot{\delta}_1 - \tilde{\lambda}_2 \dot{\delta}_2. \quad (2.77)$$

Com estas identidades podemos reescrever a equação (2.72), com algumas simplificações sendo necessárias. Tomemos então o primeiro termo do lado direito de (2.72),

$$\begin{aligned} \lambda_3^{-1} \lambda_4 b_1 - b_3 &= \lambda_3^{-1} \lambda_4 (\tilde{\lambda}_3 \dot{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_1 \dot{\lambda}_3) - \tilde{\lambda}_4 \dot{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 \dot{\lambda}_3 \\ &= \lambda_3^{-1} \lambda_4 \tilde{\lambda}_3 \dot{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_4 \dot{\lambda}_1 - \lambda_3^{-1} \lambda_4 \tilde{\lambda}_1 \dot{\lambda}_3 + \tilde{\lambda}_2 \dot{\lambda}_3 \\ &= -\lambda_3^{-1} \dot{\lambda}_3. \end{aligned}$$

Do mesmo modo, o segundo termo do lado direito de (2.72), pode ser colocado também em uma forma mais simples, tal que a equação diferencial para o fator de fase $\varphi(t)$, assume a forma

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -\frac{1}{2} Tr[\lambda_3^{-1} \dot{\lambda}_3] + \frac{i}{\hbar} \left(\dot{\delta}_1 \delta_2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta_2 \lambda_1 \lambda_3^{-1} \delta_2) \right). \quad (2.78)$$

Aplicando a identidade matricial em (2.78),

$$Tr \left(\lambda_3^{-1} \dot{\lambda}_3 \right) = \frac{d}{dt} \ln(\det \lambda_3),$$

temos

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \ln(\det \lambda_3) + \frac{i}{\hbar} \left(\dot{\delta}_1 \delta_2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta_2 \lambda_1 \lambda_3^{-1} \delta_2) \right), \quad (2.79)$$

cuja solução é

$$\varphi(t) = \ln(\det \lambda_3)^{-1/2} - \frac{i}{2\hbar} \delta_2 \lambda_1 \lambda_3^{-1} \delta_2 + \frac{i}{\hbar} \int_0^t \dot{\delta}_1 \delta_2 dt'. \quad (2.80)$$

Com o resultado em (2.80) a forma da fase temporal do propagador está definida,

$$G_0(t) = \mathcal{N}(\det \lambda_3)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{i}{2\hbar} \left(\delta_2 \lambda_1 \lambda_3^{-1} \delta_2 - 2 \int_0^t \dot{\delta}_1 \delta_2 dt' \right) \right\}, \quad (2.81)$$

com o fator de normalização $\mathcal{N} = (-2i\pi\hbar)^{-N/2}$. Reunindo os resultados obtidos para $G_1(x, x')$, $G_2(x'; t)$ e $G_0(t)$, temos uma expressão final para o propagador.

$$\begin{aligned} G(x; x'; t) &= (-2i\pi\hbar \det \lambda_3)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{i}{2\hbar} [x \lambda_3^{-1} \lambda_4 x - 2x \lambda_3^{-1} x' + x' \lambda_1 \lambda_3^{-1} x' \right. \\ &\quad \left. + 2x \lambda_3^{-1} \delta_2 + 2x' (\delta_1 - \lambda_1 \lambda_3^{-1} \delta_2) + \delta_2 \lambda_1 \lambda_3^{-1} \delta_2 - 2 \int_0^t \dot{\delta}_1 \delta_2 dt'] \right\}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Este propagador depende unicamente do tempo através das soluções das matrizes $\Lambda(t)$ e $\Delta(t)$. Logo, notamos que para se determinar o propagador de um sistema quântico

governado por um Hamiltoniano quadrático é necessário determinar as soluções de sistemas de equações diferenciais ordinárias. Em mecânica quântica, dispomos de duas versões para encarar o problema físico, que seriam a formulação diferencial e a integral. A grosso modo, a versão diferencial, formulada por exemplo pela equação de Schrödinger, nos permite o conhecimento da evolução infinitesimal de um sistema quântico, contanto que saibamos do estado deste sistema em algum instante. A versão integral, cuja figura representativa está dada pela função de Green, nos permite o conhecimento do estado de um sistema quântico em qualquer instante e posição. Contrapondo-se assim uma à outra, pode parecer que as vantagens da versão integral são indiscutíveis, porém, resolver equações diferenciais são mais fáceis comparadas às integrais, e como demonstramos a resolução do cálculo do propagador de nosso sistema físico, se deu unicamente pela resolução de equações diferenciais.

Concluindo, a importância do propagador está no fato de que podemos tirar uma série de informações físicas importantes, dentre uma delas que podemos citar é justamente o problema da troca de informação quântica em modos acoplados, pois através da estrutura deste propagador, extraímos a dinâmica da evolução de cada modo do sistema desde o instante inicial até os processos em que se observa a troca de informação propriamente dita. Este último problema pode ser visto melhor em [3, 4].

2.4 Osciladores quânticos acoplados

Nesta seção revisamos o problema da troca de estados quânticos entre dois subsistemas fracamente acoplados, cada um definido por um oscilador harmônico quântico e consideraremos as modificações de interesse em nosso estudo preliminar dos efeitos do que denominaremos excitação paramétrica quântica. Existem vários esquemas para tratar este problema [10–14], alguns dos quais já estão bem sistematizados [15, 16]. Recentemente o estudo das possibilidades de trocas de estados quânticos entre dois modos acoplados do campo eletromagnético, modelados por osciladores quânticos acoplados foi considerado em [3]. Clássicamente sabe-se bem que dois osciladores harmônicos idênticos fracamente acoplados trocam periodicamente suas energias. Sob o ponto de vista da mecânica quântica as condições sob as quais os osciladores não só trocam suas energias mas também seus *estados quânticos* já foi considerada. Tal troca pode ser também interpretada como uma troca ideal de informação quântica [3]. Neste contexto a troca ou transmissão de informação entre modos do campo eletromagnético foi abordado considerando propriedades específicas de cada um dos modos do sistema; compressão dos modos, pureza, entropia. Medidas de correlação quântica também já foram consideradas em [17, 18] para o caso de estados Gaussianos puros e acoplamento bilinear mais geral dependente do tempo. Neste trabalho há dois aspectos fundamentais a serem considerados. Em primeiro plano, o estudo

de um particular método assintótico para a construção das soluções dinâmicas de sistemas quânticos descrito por operadores Hamiltonianos quadráticos. Em segundo a análise de um sistema quântico sob efeito de uma excitação externa e as consequências no processo de medidas de correlação quântica e propriedades de cada um dos subsistemas envolvidos.

Um sistema de dois osciladores harmônicos massivos quânticos com operador Hamiltoniano quadrático tem a forma geral dada por

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{p}_1^2}{m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{m_2} + m_1 \omega_1^2 \mathbf{x}_1^2 + m_2 \omega_2^2 \mathbf{x}_2^2 \right) + \zeta_1(t) \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 + \zeta_2(t) \mathbf{p}_1 \mathbf{x}_2 + \zeta_3(t) \mathbf{x}_1 \mathbf{p}_2 + \zeta_4(t) \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2, \quad (2.83)$$

em que as constantes de acoplamento $\zeta_k(t)$ podem depender ou não explicitamente do tempo. As massas de ambos os osciladores podem ser feitas iguais a um , mediante a transformação de escala apropriada nas coordenadas, momenta e constantes de acoplamento para as componentes de quadraturas:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i \rightarrow p_i &= \frac{\mathbf{p}_i}{\sqrt{m_i \omega_j}}, & \mathbf{x}_i \rightarrow x_i &= \sqrt{m_i \omega_j} \mathbf{x}_i, & \zeta_1 \rightarrow \gamma_1 &= \sqrt{m_1 m_2 \omega_j} \zeta_1, \\ \zeta_2 \rightarrow \gamma_2 &= \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \omega_j \zeta_2, & \zeta_3 \rightarrow \gamma_3 &= \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \omega_j \zeta_3, & \zeta_4 \rightarrow \gamma_4 &= \frac{\zeta_4}{\sqrt{m_1 m_2 \omega_j}}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

As massas não tem importância para nossa análise, uma vez que as coordenadas x_1, x_2, p_1, p_2 podem ser usadas como representando as componentes de quadratura de dois modos acoplados do campo eletromagnético no problema de transferência de informação entre modos do campo eletromagnético. Existem diferentes técnicas para tratar sistemas do tipo descrito pelo Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + \omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2) + \gamma_1(t) p_1 p_2 + \gamma_2(t) p_1 x_2 + \gamma_3(t) x_1 p_2 + \gamma_4(t) x_1 x_2. \quad (2.85)$$

Por exemplo, em [18] o método das funções características foi utilizado, uma vez que funciona muito bem para estados coerentes e suas superposições. Entretanto, observamos que para casos onde estados mais genéricos são tratados, é mais prático do ponto de vista operacional considerar a estrutura do propagador, na representação das coordenadas (componentes de quadraturas do campo eletromagnético).

Considerando o problema da troca de estados quânticos, como aplicação do modelo dos invariantes quânticos, assumimos que a função de onda inicial do sistema total, dois modos acoplados, está fatorada na forma

$$\psi(x_1, x_2; 0) = \psi_1(x_1; 0) \psi_2(x_2; 0). \quad (2.86)$$

Então a função de onda total do sistema em um instante posterior $t > 0$ está determinada a partir da equação

$$\psi(x_1, x_2; t) = \int G(x_1, x_2; x'_1, x'_2; t) \psi(x'_1, x'_2; 0) dx'_1 dx'_2. \quad (2.87)$$

Em um sentido mais restrito, a troca de estado significa que em algum instante de tempo t_* a função de onda é novamente fatorada em um produto de dois termos, mas com seus *argumentos trocados*. Isso significa para a função de onda em t_* a forma

$$\psi(x_1, x_2; t_*) = \mathcal{N}\psi_1(s_1x_2; 0)\psi_2(s_2x_1; 0). \quad (2.88)$$

Escrevendo a condição de troca na forma (2.88) admitimos a possibilidade de que as variáveis x_1 e x_2 possam ser escalonadas por fatores $s_{2,1}$ e que algum fator de fase \mathcal{N} possa aparecer. Para assegurar a forma (2.88), o propagador no instante t_* precisa assumir a forma de um produto de duas funções delta de Dirac, dado por

$$G(x_1, x_2; x'_1, x'_2; t_*) = \mathcal{N}\delta(s_1x_2 - x'_1)\delta(s_2x_1 - x'_2). \quad (2.89)$$

Uma questão fundamental para a compreensão do significado da troca de identidade quântica entre os subsistemas acoplados é compreender o que realmente significa dizer que dois estados são os “mesmos”. Para isso, considere um autoestado de energia inicial $\psi_E(x; 0)$ que evolui no tempo segundo a equação $\psi_E(x; t) = \exp(-iEt/\hbar)\psi_E(x; 0)$. A forma $\varrho_E(x, t) = |\psi(x, t)|^2$ não se altera no tempo o que significa que a distribuição de probabilidade é um invariante,

$$\frac{d\varrho_E(x, t)}{dt} = 0. \quad (2.90)$$

Assim está claro que as funções $\psi_E(x; 0)$ e $\psi_E(x; t)$ *descrevem o mesmo estado quântico*. Mas se consideramos um estado coerente de um modo do campo eletromagnético ou de um oscilador material com $m = \omega = \hbar = 1$, a sua evolução livre é bem conhecida e dada por $\psi(x; t, \alpha(t)) = \exp(-it/2)\psi(x; 0, \alpha_0 e^{-it})$. Neste caso

$$\varrho_\alpha(x, t) = |\psi(x; t, \alpha(t))|^2 = |\psi(x; 0, \alpha_0 e^{-it})|^2 \neq |\psi(x; 0, \alpha_0)|^2 = \varrho_\alpha(x, 0). \quad (2.91)$$

diferente do que ocorre para o caso anteriormente considerado em (2.90). Ou ainda, se consideramos um estado inicial comprimido $\psi_s(x; t)$ com uma pequena dispersão na coordenada, após um quarto do período esta dispersão atinge seu valor máximo, maior que aquele do estado coerente, enquanto a dispersão do momentum torna-se pequena. Agora, o estado quântico $\psi_s(x; 0)$ é o mesmo estado representado por $\psi_s(x; \pi/2)$? Certamente, as respostas para estas questões dependem do problema físico concreto em questão; em particular, no significado da coordenada generalizada x . Para uma partícula material, a variável x significa uma coordenada espacial real e $|\psi(x)|^2$ tem um significado físico real como sendo a densidade de probabilidade no espaço de coordenada a qual pode ser medida. Em tal caso, os estados comprimidos com respeito a coordenada x parecem ser bastante diferentes dos estados comprimidos com respeito a p . No caso de uma partícula livre, o estado inicial gaussiano bem localizado parece bastante diferente do também Gaussiano, estado com grande dispersão na coordenada e com correlação não nula entre a coordenada

e momentum, que surgem no processo da evolução livre. Neste casos, a única definição razoável de troca de estados parece ser (2.88). Nós denominamos troca de estados num *sentido restrito* ou troca de estados do *primeiro tipo*. Uma interpretação mais flexível pode ser usada para os modos do campo eletromagnético, quando x e p não tem um significado físico direto, sendo usado apenas como “componentes de quadraturas” do campo, que podem sempre ser rotacionadas no plano de fase (x, p) . Neste caso, os estados $|\alpha_0\rangle$ e $|\alpha_0 e^{-it}\rangle$ diferem somente nas posições do centro das distribuições no plano de fase, de tal modo que um deles não é nada mais que o outro tomado num instante de tempo deslocado. O mesmo pode ser dito a respeito dos estados comprimidos: durante a evolução livre, a distribuição simplesmente sofre rotações nos planos de fase de tal modo que suas variâncias e valores médios periodicamente mudam no tempo, mas o parâmetro de *compressão* permanece o mesmo [19,20]. Portanto, em certas situações, acreditamos que todos os vetores no espaço de Hilbert do sistema de um único modo que possuam a forma $\hat{U}_f(t)|\psi; 0\rangle$, $\hat{U}_f(t)$ um operador unitário descrevendo evoluções livres dos modos do campo, pertençam ao mesmo estado quântico. Esta é uma generalização evidente dos conjunto de autoestados de energia equivalentes a $\exp(-iEt/\hbar)\psi_E(x; 0)$. Considerando este ponto de vista, então a seguinte condição de troca de estado quântico num *sentido amplo* ou troca de estado do *segundo tipo* está estabelecida e representada por

$$\psi(x_1, x_2; t_*) = \mathcal{N} \psi_1(s_1 x_2; t_1) \psi_2(s_2 x_1, t_2). \quad (2.92)$$

Os parâmetros temporais t_1 e t_2 podem ser diferentes e na linguagem do propagador, a equação (2.92) torna-se equivalente a

$$G(x_1, x_2; x'_1, x'_2; t_*) = \mathcal{N} G_1^{(f)}(s_1 x_2; x'_1; t_1) G_2^{(f)}(s_2 x_1; x'_2; t_2), \quad (2.93)$$

no qual $G_k^{(f)}(x; x'; t)$ é o propagador livre do k -ésimo modo do campo eletromagnético. Uma vez que nós definimos os dois tipos de troca de estados, estamos aptos a identificá-los no modelo proposto para dois modos fracamente acoplados, modelados pelos osciladores quânticos. Vamos mostrar que a troca de estados entre os modos acoplados no sentido amplo é sempre possível, para quaisquer valores dos coeficientes de acoplamento, considerando *estados iniciais arbitrários*. Contrário a este fato, a troca de estados do *primeiro tipo* pode acontecer somente para escolhas específicas dos valores das constantes de acoplamento. Portanto na descrição física dos modos acoplados podemos identificar alguns tipos de acoplamentos onde a estrutura do propagador é definida e as trocas de estados são identificadas conforme as descrições anteriores.

2.5 Acoplamento independente do tempo

O cálculo da forma explícita do propagador na representação das coordenadas para Hamiltonianos quadráticos como em (2.85) segue o mesmo procedimento aplicado ao problema da “força quântica”. Para o Hamiltoniano (2.85) as matrizes b_j tem suas formas dadas por

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_4 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \gamma_4 \\ \gamma_4 & \omega_2^2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \tilde{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 0 \end{bmatrix},$$

que podem depender do tempo através das frequências $\omega_j = \omega_j(t)$, como é o caso de osciladores sob efeito de excitações paramétricas ou das constante de acoplamento $\gamma(t)$. Do ponto de vista técnico, o problema da dinâmica quântica do sistema fica reduzido a busca da solução explícita das matrizes λ para as matrizes b acima. É um resultado quase evidente que a troca de estados pode ocorrer somente sob condições de ressonância quando $\omega_1 = \omega_2$, assumindo para efeito de simplicidade que $\omega_1 = \omega_2 = 1$ no Hamiltoniano (2.85). Além disso não há perda de generalidade alguma para o problema se consideramos um sistema de unidades onde $\hbar = 1$. Assim, o problema de se determinar a forma do propagador para este modelo consiste basicamente em buscar a solução do sistema de equações diferenciais (2.49)-(2.50). A solução do sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem fornece a *solução exata* para o propagador, o que permitiria uma análise mais geral do acoplamento dos osciladores, levando em consideração valores arbitrários das constantes de acoplamento. Estamos sempre interessados somente na situação de modos fracamente acoplados de maneira que consideramos a solução de matriz λ na *condição de acoplamento fraco*, $|\gamma_k| \ll 1$; isso implica que termos do tipo $\gamma_i \gamma_j$ podem ser desprezados em todas as nossas equações. A partir do sistema de equações (2.49)-(2.50) podemos construir equações diferenciais de segunda ordem, para cada uma das matrizes λ , na forma

$$\frac{d^2 \lambda_i}{dt^2} - \frac{d\lambda_i}{dt} \mathcal{J}_3 + \lambda_i \mathcal{J}_4 = 0, \quad i = 1, 3, \quad (2.94)$$

$$\frac{d^2 \lambda_i}{dt^2} + \frac{d\lambda_i}{dt} \mathcal{J}_1 + \lambda_i \mathcal{J}_2 = 0, \quad i = 2, 4, \quad (2.95)$$

onde as matrizes \mathcal{J} são expressas em termos das matrizes b de acordo com a equações

$$\mathcal{J}_1 = b_2 - b_4^{-1} b_3 b_4, \quad \mathcal{J}_2 = b_1 b_4 - b_2 b_4^{-1} b_3 b_4, \quad (2.96)$$

$$\mathcal{J}_3 = b_3 - b_1^{-1} b_2 b_1, \quad \mathcal{J}_4 = b_4 b_1 - b_3 b_1^{-1} b_2 b_1. \quad (2.97)$$

Suprimindo os termos quadráticos nas constantes de acoplamento (limite do acoplamento fraco), as matrizes \mathcal{J} são dadas explicitamente na forma

$$\mathcal{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \nu \\ -\nu & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\gamma^2), \quad \mathcal{J}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\gamma^2), \quad (2.98)$$

$$\mathcal{J}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\gamma^2), \quad \mathcal{J}_4 = \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\gamma^2), \quad (2.99)$$

onde definimos as constantes μ e ν em termos das constantes γ como

$$\mu = \gamma_1 + \gamma_4, \quad \nu = \gamma_2 - \gamma_3. \quad (2.100)$$

A matriz λ_3 está presente no prefator da exponencial do propagador (2.82) e satisfaz a equação

$$\ddot{\lambda}_3 + \dot{\lambda}_3 \begin{bmatrix} 0 & \nu \\ -\nu & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\gamma^2) = 0, \quad (2.101)$$

com as condições iniciais para a equação (2.101) são dadas de acordo com

$$\lambda_3(0) = 0, \quad \dot{\lambda}_3(0) = -b_1. \quad (2.102)$$

A equação (2.101) possui coeficientes constantes no tempo. Isto implica que ela pode ser facilmente resolvida por métodos elementares de equações diferenciais ordinárias. O polinômio característico associado a equação (2.101) é dado por

$$P(\xi) = \xi^4 + (2 + \nu^2)\xi^2 + (1 - \mu^2) + \mathcal{O}(\gamma^2)$$

cujas raízes são dadas por $\xi_k = \pm i(1 \pm \kappa) + \mathcal{O}(\gamma^2)$ onde

$$\kappa = \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2 + \nu^2} + \mathcal{O}(\gamma^2). \quad (2.103)$$

Nesta solução temos negligenciado termos de ordem igual e superior a κ , em concordância com a aproximação estabelecida no regime de acoplamento fraco. Isso implica, obviamente, que estamos considerando soluções válidas até tempos t da ordem de κ^{-1} , sendo este um aspecto importante a ser sempre observado em problemas nos quais se aplicam quaisquer métodos perturbativos. No cálculo dos elementos da matriz λ_3 todos os termos de ordem μ , ν e κ nas amplitudes dos elementos das matrizes λ são desconsiderados. A partir da solução geral da equação (2.101) e das condições iniciais (2.102) a matriz λ_3 assume a forma

$$\lambda_3 = \begin{bmatrix} -\text{sen } t \cos \tau & \text{sen } \tau \text{sen}(t - \varphi) \\ -\text{sen } \tau \text{sen}(t + \varphi) & -\text{sen } t \cos \tau \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\gamma), \quad (2.104)$$

no qual $\tau \equiv \kappa t$ denominamos *tempo lento* e a fase φ está definida através das relações

$$\mu = 2\kappa \text{sen } \varphi, \quad \nu = 2\kappa \cos \varphi. \quad (2.105)$$

Com a mesma precisão considerada acima, temos $\lambda_4 = -\dot{\lambda}_3$, onde o pontilhado significa diferenciação com respeito ao *tempo rápido* t , tomando o *tempo lento* τ como um parâmetro fixo. Assim a matriz λ_4 é dada por

$$\lambda_4 = \begin{bmatrix} \cos t \cos \tau & -\text{sen } \tau \cos(t - \varphi) \\ \text{sen } \tau \cos(t + \varphi) & \cos t \cos \tau \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\gamma). \quad (2.106)$$

Observamos que não há necessidade de se calcular a matriz λ_1 de forma independente, pois para qualquer operador Hamiltoniano quadrático cujos coeficientes são funções independentes do tempo as identidades $\lambda_1(t) \equiv \tilde{\lambda}_4(-t)$ e $(\lambda_1\lambda_3^{-1})(t) \equiv -(\lambda_3^{-1}\lambda_4)(-t)$ são verificadas. Neste caso, em particular, temos $\lambda_4(t) = \lambda_1(t)$ devido a forma específica da matriz (2.106). A matriz inversa λ_3^{-1} pode ser facilmente determinada

$$\lambda_3^{-1} = \Delta^{-1} \begin{bmatrix} -\text{sen } t \cos \tau & -\text{sen } \tau \text{sen } (t - \varphi) \\ \text{sen } \tau \text{sen } (t + \varphi) & -\text{sen } t \cos \tau \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\gamma),$$

com o determinante de λ_3 escrito na forma

$$\Delta \equiv \det \lambda_3 = \text{sen }^2 t - \text{sen }^2 \varphi \text{sen }^2 \tau. \quad (2.107)$$

Com as matrizes λ determinadas o propagador fica perfeitamente determinado a partir da sua forma geral (2.82) e a evolução dinâmica do sistema para quaisquer estados iniciais arbitrários pode ser obtida em qualquer instante de tempo $t > 0$.

2.5.1 Forma explícita do propagador e condições de troca de estados

Portanto, a partir dos resultados anteriores é possível escrever o propagador para o caso em que o acoplamento é independente do tempo porém não apresentamos os passos matemáticos de modo detalhado, isto para não tornar a leitura um tanto tediosa. Atemo-nos às idéias fundamentais e aos resultados importantes obtidos. Assim sendo, substituindo as expressões para as matrizes λ em (2.82) que na forma ressonante dos modos temos para o propagador

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, x'_1, x'_2; \tau, t) = & \frac{i\mathcal{M}}{2\pi\sqrt{\Delta}} \exp \left\{ \frac{i}{4\Delta} \left[(x_1^2 + x_2'^2) (\text{sen } 2t - \text{sen }^2 \tau \text{sen } 2\varphi) + (x_2^2 + x_1'^2) \right. \right. \\ & \times (\text{sen } 2t + \text{sen }^2 \tau \text{sen } 2\varphi) - 2\text{sen } 2\tau \text{sen } \varphi (x_1 x_2 + x'_1 x'_2) - 4\text{sen } t \cos \tau \\ & \left. \left. \times (x_1 x'_1 + x_2 x'_2) + 4\text{sen } \tau [x_2 x'_1 \text{sen } (t + \varphi) - x_1 x'_2 \text{sen } (t - \varphi)] \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.108)$$

onde $\mathcal{M} = \pm 1$ é denominado índice de *Maslov*, que depende dos detalhes da evolução dinâmica. É necessário que determinemos o sinal da raiz quadrada no prefator da exponencial, especialmente quando o argumento desta raiz for negativo. Entretanto, como o valor real de \mathcal{M} não é importante para nosso objetivo, não necessitamos obter seu valor preciso.

Para valores de $\kappa \ll 1$, t e τ podem ser consideradas efetivamente como variáveis independentes, uma vez que um acréscimo em t por um fator de $\pi/2$, por exemplo, que altera

completamente os valores das funções $\sin t$ e $\cos t$, não produz uma alteração substancial nas funções $\sin \tau$ e $\cos \tau$. Dessa forma, podemos considerar τ nas expressões para as matrizes λ e propagador como um parâmetro que varia lentamente comparado ao tempo t .

Para valores arbitrários de t , τ e φ a forma quadrática no argumento do propagador (2.108) contém todos os possíveis produtos de argumentos, de modo que a fatoração do propagador na forma (2.93) é impossível. Entretanto, ocorre dois casos especiais. O primeiro é quando temos $\sin \tau = 0$. Mas é o caso trivial, uma vez que a função (2.108) fatora-se em um produto de dois propagadores independentes para cada um dos osciladores do sistema, sem que haja qualquer interação entre eles e esta situação nada nos oferece. No entanto, uma situação não trivial acontece se $\cos \tau = 0$, ou seja, quando os valores de τ são dados por $\tau_n = \pi(n + 1/2)$ com $n = 0, 1, \dots$. Então, nesta situação, todas as matrizes λ tornam-se anti-diagonais e para *tempos rápidos* arbitrários, resulta em um propagador na forma

$$G(x_1, x_2, x'_1, x'_2; \tau_n, t) = \frac{i\mathcal{M}}{2\pi\sqrt{\sin(t-\varphi)\sin(t+\varphi)}} \exp \left\{ \frac{i}{2\sin(t+\varphi)} [\cos(t+\varphi) \times (x_1^2 + x_2'^2) - 2v_n x_1 x_2'] + \frac{i}{2\sin(t-\varphi)} [\cos(t-\varphi) (x_2^2 + x_1'^2) + 2v_n x'_1 x_2] \right\}, \quad (2.109)$$

no qual definimos $v_n = \sin \tau_n = (-1)^n$.

Podemos reconhecer imediatamente na expressão (2.109) um produto de duas funções bem conhecidas [21, 22]; os propagadores dos osciladores harmônicos quânticos livres. Consequentemente, o propagador de dois modos acoplados (2.109) na verdade possui a forma (2.93) com $t_1 = t - \varphi$, $t_2 = t + \varphi$, $s_2 = -s_1 = v_n$, significando que ocorre uma troca de estados do *segundo tipo* em $\tau = \tau_n$. Isto é um resultado verdadeiro para quaisquer estados iniciais e valores arbitrariamente pequenos das constantes de acoplamento. Como para uma troca de estados do primeiro tipo, ela pode ocorrer somente quando a diferença $t_2 - t_1 = 2\varphi$ for zero ou um múltiplo de π devido a periodicidade do movimento do oscilador harmônico quântico.

Detalhes mais gerais podem ser vistos em [17], onde as condições de troca de estados quânticos são verificadas de forma mais criteriosa. Uma análise mais geral do hamiltoniano pode ser verificada, ou seja, introduzindo os operadores de aniquilação bosônicos

$$\hat{a}_1 = \frac{\hat{x}_1 + i\hat{p}_1}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}_2 = \frac{\hat{x}_2 + i\hat{p}_2}{\sqrt{2}}$$

a parte de interação do Hamiltoniano (2.85) fica escrita na forma

$$2H_{int} = (\gamma_1 + \gamma_4 + i\gamma_2 - i\gamma_3) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + (\gamma_1 + \gamma_4 - i\gamma_2 + i\gamma_3) \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 + (\gamma_4 - \gamma_1 - i\gamma_2 - i\gamma_3) \hat{a}_2 \hat{a}_1 + (\gamma_4 - \gamma_1 + i\gamma_2 + i\gamma_3) \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1^\dagger.$$

Os primeiros dois termos podem ser escritos na forma $(\mu+i\nu)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \text{h.c.}$, correspondendo à *aproximação de onda girante (AOG)* (ou do termo em inglês “rotating wave approximation”). Desde que, usualmente, estes termos descrevem efeitos de *espalhamento*, não nos surpreende serem eles os responsáveis pela troca de estados quânticos. São os coeficientes dos termos da aproximação de onda girante

$$\gamma_1 + \gamma_4 + i\gamma_2 - i\gamma_3 \quad \text{e} \quad \gamma_1 + \gamma_4 - i\gamma_2 + i\gamma_3,$$

assumindo valores reais ou imaginários puros, que permitem a troca do *primeiro tipo* para quaisquer estados iniciais arbitrários. Além disso, as propriedades de troca de estados são diferentes quando $\mu = 0$ ou $\nu = 0$. Observemos, também, que a contribuição da parte relativa a aproximação de onda *contra-girante*, que diz respeito as oscilações rápidas e estão dadas pelos fatores a_1a_2 e $a_1^\dagger a_2^\dagger$, não é essencial à nossa análise no *limite de acoplamento fraco*.

2.6 Acoplamento dependente do tempo

Se as frequências ω_1 e ω_2 são diferentes, o processo de ressonância pode ocorrer somente quando as constantes de acoplamento γ_j são funções periódicas do tempo, com frequência $\eta = \omega_1 - \omega_2$. Para analisar o efeito desta ressonância na troca da identidade quântica entre os modos acoplados do sistema, consideramos o Hamiltoniano dependente do tempo na forma

$$H = \frac{1}{2} (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \omega_1^2 \hat{x}_1^2 + \omega_2^2 \hat{x}_2^2) + \Gamma(t) (\gamma_1 \hat{p}_1 \hat{p}_2 + \gamma_2 \hat{p}_1 \hat{x}_2 + \gamma_3 \hat{x}_1 \hat{p}_2 + \gamma_4 \hat{x}_1 \hat{x}_2),$$

no qual definimos $\Gamma(t) \equiv \cos(\eta t)$, de forma que podemos construir também as matrizes b . Com estes argumentos, nas equações diferenciais (2.94)-(2.95) as matrizes \mathcal{J} dependentes do tempo estão determinadas a partir das matrizes b segundo as equações

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= b_2 - b_4^{-1} b_3 b_4 - b_4^{-1} \frac{db_4}{dt}, & \mathcal{J}_2 &= b_1 b_4 - b_2 b_4^{-1} b_3 b_4 - b_2 b_4^{-1} \frac{db_4}{dt} + \frac{db_2}{dt}, \\ \mathcal{J}_3 &= b_3 - b_1^{-1} b_2 b_1 + b_1^{-1} \frac{db_1}{dt}, & \mathcal{J}_4 &= b_4 b_1 - b_3 b_1^{-1} b_2 b_1 + b_3 b_1^{-1} \frac{db_1}{dt} - \frac{db_3}{dt}. \end{aligned}$$

No limite de acoplamento fraco, as matrizes \mathcal{J} podem ser determinadas conforme as equações (2.98)-(2.99). Temos, por exemplo, que cada linha da matriz λ_3 (ou λ_1) pode ser considerada como um vetor linha $\mathbf{v} = (\lambda_{l1}, \lambda_{l2}) \equiv (v_1, v_2)$, com $l = 1, 2$. Portanto, a equação diferencial para λ_3 é equivalente a equação vetorial

$$\ddot{\mathbf{v}} + \mathcal{F}\mathbf{v} = \mathcal{N}(t)\dot{\mathbf{v}} + \mathcal{Q}(t)\mathbf{v}, \quad (2.110)$$

com a matriz diagonal $\mathcal{F} = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2)$ no lado esquerdo, e as matrizes não-diagonais

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} 0 & h_1 \\ h_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -h_2 \\ -h_4 & 0 \end{bmatrix},$$

no lado direito. Temos ainda $\dot{\Gamma}(t) \equiv -\eta \text{sen}(\eta t)$ e os elementos h dados por

$$\begin{aligned} h_1 &= (\gamma_2 - \gamma_3) \Gamma(t) + \gamma_1 \dot{\Gamma}(t), \\ h_2 &= (\gamma_4 + \omega_2^2 \gamma_1) \Gamma(t) - \gamma_2 \dot{\Gamma}(t), \\ h_3 &= (\gamma_3 - \gamma_2) \Gamma(t) + \gamma_1 \dot{\Gamma}(t), \\ h_4 &= (\gamma_4 + \omega_1^2 \gamma_1) \Gamma(t) - \gamma_3 \dot{\Gamma}(t). \end{aligned}$$

Neste caso, as equações diferenciais de segunda ordem para as matrizes λ diferem do caso anterior pelo fato de seus *coeficientes dependerem explicitamente do tempo*. Temos que considerar os métodos apropriados para obter as soluções destas equações. Uma vez que as amplitudes dos coeficientes γ_j são consideradas pequenas (limite de acoplamento fraco), temos a opção de aplicar métodos assintóticos como, por exemplo, o esquema de Bogoliubov-Mitropolsky ou o método das escalas múltiplas [2]. Portanto, em problemas cuja frequência ou acoplamento são dependente do tempo, há uma necessidade de se utilizar métodos assintóticos na resolução destas equações diferenciais, desde que considerados nos *limites da teoria de perturbação*. Não vamos expor explicitamente os resultados, pois podem ser visto em [17], e sim entender os tipos de métodos envolvidos para a solução futura de nosso problema proposto.

2.6.1 O propagador ressonante e a troca de estados quânticos

Apenas por uma questão de simplificação, introduzimos as novas coordenadas y_i segundo a transformação de escala

$$y_i = \sqrt{\omega_i} x_i. \quad (2.111)$$

Substituindo as soluções encontradas para a matriz λ_j acima e considerando as transformações de escala (2.111), o propagador para os modos ressonantes fracamente acoplados pode ser expresso na forma

$$\begin{aligned} G(y_1, y_2, y'_1, y'_2; \tau, t) &= \frac{i\mathcal{M}}{2\pi\sqrt{\Delta_\eta}} \exp \left\{ \frac{i}{2\Delta_\eta} \left[S_2(t)C_1(t) (y_1^2 + y_1'^2) + S_1(t)C_2(t) (y_2^2 + y_2'^2) \right. \right. \\ &+ \text{sen}^2 \tilde{\tau} \left[\text{sen} \varphi \cos \varphi_\eta (y_2^2 - y_1^2) + \cos \varphi \text{sen} \varphi_\eta (y_1'^2 - y_2'^2) \right] + 2\text{sen} \tau [y_2 y_1' \text{sen}(\omega_1 t + \varphi) \\ &\left. \left. - y_1 y_2' \text{sen}(\omega_2 t - \varphi)] - \text{sen} 2\tau (\text{sen} \varphi y_1 y_2 + \text{sen} \varphi_\eta y_1' y_2') - 2 \cos \tau [S_2(t) y_1 y_1' + S_1(t) y_2 y_2'] \right] \right\}, \end{aligned}$$

no qual escrevemos o determinante Δ_η da matriz λ_3 como

$$\Delta_\eta = \omega_1 \omega_2 \det \lambda_3 = S_1 S_2 - \text{sen}^2 \tau \text{sen} \varphi \text{sen} \varphi_\eta, \quad (2.112)$$

com as funções trigonométricas $S_j(t)$, $C_j(t)$ e a fase φ_η dados por

$$S_j = \text{sen } \omega_j t, \quad C_j = \text{cos } \omega_j t \quad (j = 1, 2), \quad \varphi_n = \varphi + n\tau.$$

Como no caso das frequências idênticas, a troca de estados do *segundo tipo* pode ocorrer para quaisquer estados iniciais arbitrários desde que $\cos \tau = 0$, ou seja, para valores $\tau = \tau_n = \pi(n + 1/2)$ com $n = 0, 1, \dots$. Considerando as definições de \mathcal{M} e v_n como na seção anterior, para esses valores τ_n o propagador fica escrito como

$$G(y_1, y_2; y'_1, y'_2; \tilde{\tau}_n, t) = \frac{\mathcal{M}}{2\pi i \sqrt{\text{sen}(\omega_2 t - \varphi) \text{sen}(\omega_1 t + \varphi)}} \exp \left\{ - \frac{\text{cos}(\omega_1 t + \varphi) (y_1^2 + y_2'^2)}{2i \text{sen}(\omega_1 t + \varphi)} + \frac{2v_n y_1 y_2'}{2i \text{sen}(\omega_1 t + \varphi)} - \frac{\text{cos}(\omega_2 t - \varphi) (y_2^2 + y_1'^2) + 2v_n y_1' y_2}{2i \text{sen}(\omega_2 t - \varphi)} \right\}, \quad (2.113)$$

o qual pode ser fatorado na forma (2.93) com os fatores de escala $s_2 = -s_1 = v_n$ e tempos efetivos

$$t_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1} t - \frac{\varphi}{\omega_1}, \quad t_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} t + \frac{\varphi}{\omega_2}.$$

De forma análoga ao caso da troca de estados do *primeiro tipo*, o mesmo pode acontecer desde que a razão entre as frequências ω_1 e ω_2 seja convenientemente ajustada com os valores dos coeficientes de acoplamento. Analisando a forma do propagador (2.113) é fácil notar que ele será fatorado em um produto de duas funções delta de Dirac nos instantes de tempo t_* se

$$\omega_1 t_* = (q - \chi)\pi \quad \text{e} \quad \omega_2 t_* = (p + \chi)\pi,$$

em que p, q são inteiros e $\chi \equiv \varphi/\pi$ com $-1 \leq \chi \leq 1$. Combinando os resultados acima, obtemos as equações definindo precisamente o instante t_* a partir das frequências distintas ω_j e dos inteiros p, q , configurando assim as condições de troca de identidade do primeiro tipo:

$$t_* = \frac{p + q}{\omega_1 + \omega_2} \pi, \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{q - \chi}{p + \chi}. \quad (2.114)$$

Em particular, quando temos $\chi = 0$, equivalente a escolha $\mu_0 = 0$, a razão ω_1/ω_2 pode ser qualquer número racional na forma q/p . Entretanto, para $\chi = \pm 1/2$, equivalente a $\nu_0 = 0$, obtemos a relação

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = (2q - 1)/(2p + 1). \quad (2.115)$$

Embora a razão precise ser um número racional, observamos que não pode assumir um valor arbitrário. Por exemplo, o caso em que ω_1/ω_2 assume valores pares $2, 4, 6, \dots$ está naturalmente excluído.

Por outro lado, podemos obter a troca de estados quânticos do *primeiro tipo* quando ambos os coeficientes μ e ν são diferentes de zero, escolhendo para tanto valores apropriados para as frequências. Por exemplo, para $\mu = \nu > 0$, quando $\chi = 1/4$, a frequência precisa satisfazer a relação $\omega_1/\omega_2 = (4q - 1)/(4p + 1)$. Além disso, os números naturais p e q

precisam ter valores grandes, da ordem de $[\omega_1\omega_2/(\mu_0^2 + \nu_0^2)]^{1/2}$. Contudo, é fácil mostrar que se algum par de inteiros p_0 e q_0 for encontrado, então existe um número infinito de outros pares, *desde que* χ seja um *número racional*: $\chi = a/b$ com inteiros a e b . A fórmula geral descrevendo tais pares é

$$p = n(bp_0 + a) + p_0, \quad q = n(bq_0 - a) + q_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Para valores irracionais de χ e da razão ω_1/ω_2 , somente um par de inteiros p, q pode ser encontrado, a menos que χ seja aproximadamente um número racional. Ainda, para χ sendo um número racional, uma troca de estados do primeiro tipo pode ocorrer, somente de forma aproximada, sendo exata com algumas exceções. Isto ocorre porque o *tempo lento* τ não é completamente independente para o tempo t real; as condições $\tau = (n + 1/2)\pi$ e $t = t_*$ podem ser exatamente satisfeitas somente sob certas circunstâncias (descrita pelos valores apropriados dos parâmetros do sistema).

Conforme exemplificado por Castro et al em [3] a representação gráfica da troca de identidade quântica para os osciladores fracamente acoplados está definida pela equação (2.87), onde para as trocas de *primeiro* e *segundo* tipo podem ser verificadas fazendo as escolhas devidas para os parâmetros do sistema: estados iniciais do sistema, valores da intensidade das constantes de acoplamento e fase do sistema. Assim através dos gráficos na figura (2.1)-(2.2) observamos exemplos dos diferentes tipos de trocas de estados quânticos. Em todos os gráficos a superfície **A** representa o estado inicial, enquanto a superfície **C** corresponde aos instantes de tempo quando a troca de estado do *primeiro tipo* acontece. Em todos os casos considerados, fizemos escolhas adequadas para os valores dos parâmetros do sistema em unidades adimensionais, fixando $m = \omega = \hbar = 1$. Os valores não nulos de μ e ν são escolhidos iguais a 0,02 de tal modo que $\kappa = 0,010$ e $\tau = 0,010t$ no caso de $\varphi = 0$, enquanto $\kappa = 0,014$ no caso de $\varphi = \pi/4$. Nos procedimentos de simulação, ao contrário das considerações anteriores, *não* podemos assumir que t e τ sejam variáveis independentes. Com relação aos estados iniciais, para o primeiro oscilador indexado com a coordenada x_1 , escolhemos o estado comprimido deslocado

$$\psi_{x_{10}}^s(x_1; 0) = (\pi s)^{-1/4} \exp \left[- (x_1 - x_{10})^2 / (2s) \right], \quad (2.116)$$

com $s = 0,36$ e $x_{10} = 3,86$. O gráfico 2.1 descreve o caso quando o segundo oscilador, indexado pela coordenada x_2 , encontra-se inicialmente no estado de vácuo

$$\psi_0(x_2; 0) = \pi^{-1/4} \exp \left(-x_2^2/2 \right). \quad (2.117)$$

Para $\varphi = \mu = 0$, uma troca de estados quânticos do *primeiro tipo* ocorre no instante $t = 157,08 \approx 50\pi$ quando $\tau = \pi/2$. A densidade de probabilidade neste instante está dada pela superfície **C**, que é obviamente a superfície **A** rodada de 90 graus. A superfície **B**

mostra uma troca de estados do segundo tipo, para o valor de $\varphi = \pi/4$ com $\mu = \nu > 0$: no instante $t = (35 - 1/4)\pi \approx 109,17$ e $\tau \approx 1,54$, o primeiro oscilador encontra-se no estado de vácuo, enquanto o segundo oscilador assume a identidade do estado comprimido, com um valor alterado de coeficiente de compressão $s' = 1/s$ e o centro do pacote deslocado para a origem do sistema de coordenadas. Esta troca corresponde perfeitamente ao estado inicial comprimido deslocado no tempo por um quarto do período. Todas estas simulações foram efetuadas para os estados gaussianos do oscilador harmônico. Para melhor caracterizar a arbitrariedade dos estados, podemos escolher como um estado inicial um estado não gaussiano. Deste modo, na figura 2.2 observamos a situação em que o segundo oscilador está em um estado de Fock

$$\Psi_n(x_2; 0) = (2^n n!)^{-1/2} \psi_0(x_2) H_n(x_2), \quad (2.118)$$

com $n = 2$, $H_n(x)$ um polinômio de Hermite e $\psi_0(x_2)$ a função de onda do vácuo do oscilador. Diminuindo os valores das constantes de acoplamento do sistema, podemos

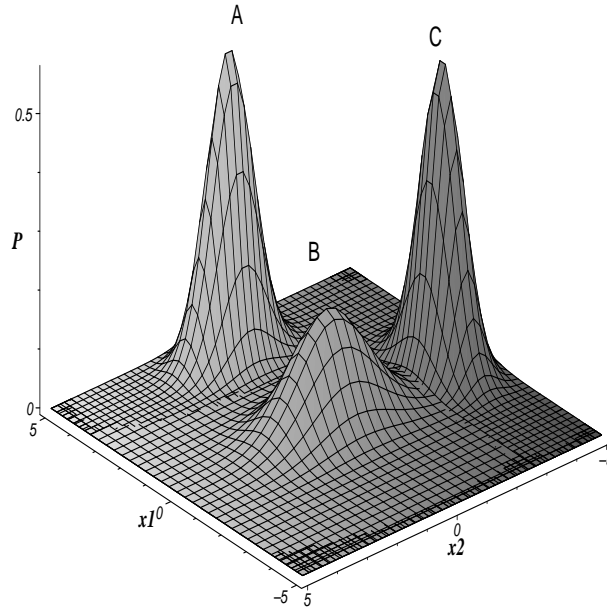


Figura 2.1: Trocas do primeiro (C) e do segundo (B) tipo entre o estado de vácuo e estado comprimido com $s = 0,36$ e $x_0 = 3,86$. A: densidade de probabilidade inicial. C: densidade de probabilidade no instante $t = 157,08 \approx 50\pi$ ($\tau = \pi/2$) para $\varphi = \mu = 0$ e $\nu = 0,02$. B: densidade de probabilidade $\varphi = \pi/4$ ($\mu = \nu = 0,02$) no instante $t = (35 - 1/4)\pi \approx 109,17$.

obter melhores condições para a troca dos estados quânticos. Porém, o tempo de troca aumenta inversamente proporcional aos valores da constante de acoplamento.

Assim, para osciladores de frequências distintas e fracamente acoplados, estudamos os diferentes tipos de trocas de estados quânticos para condições arbitrárias, além das

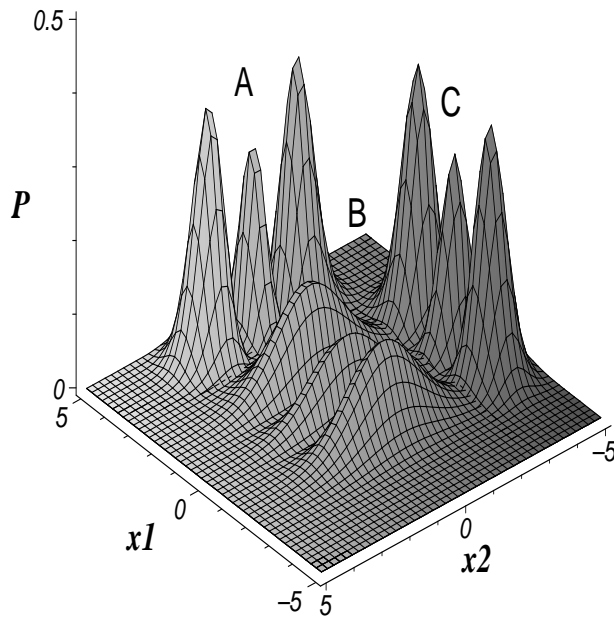


Figura 2.2: A evolução da distribuição inicial para $\varphi = 0$ e $\nu = 0,02$. A: o primeiro oscilador no estado comprimido com $s = 0,36$, $x_0 = 3,85$ e o segundo oscilador no estado de Fock com $n = 2$. B: densidade de probabilidade para uma escolha arbitrária de tempo $t = 67,32 \approx 21,43\pi$ ($\tau \approx \pi/5$). C: a troca de estado do primeiro tipo para $t = 157,08 \approx 50\pi$ e $\tau \approx \pi/2$.

condições sob as quais elas podem ocorrer. A condição de ressonância, quando $\omega_1 = \omega_2$, é necessária para haver troca de identidade quântica entre os diferentes subsistemas, na condição em que o acoplamento é independente do tempo. A partir destas argumentações nos inspiramos em um modelo de dois osciladores acoplados cuja estrutura de acoplamento não é dependente do tempo, mas no qual um dos osciladores está sob o efeito de uma excitação paramétrica quântica: sua frequência ω_1 depende explicitamente do tempo através de uma função periódica. Neste caso é importante ter em mente que a condição de ressonância $\omega_1(t) = \omega_2$ ocorrerá somente em alguns instantes de tempo bem definidos ao longo da evolução dinâmica do sistema. Nestas condições, para caso de acoplamento fraco independente do tempo, surge a questão: *é possível haver troca de propriedades dos estados quânticos iniciais entre os diferentes osciladores acoplados?* Isto é essencialmente um dos pontos centrais a ser abordado neste trabalho.

A modificação na estrutura geral do hamiltoniano se dá apenas por uma transformação nas componentes de quadraturas, através das equações (2.84), de forma que introduzimos o fato de frequência paramétrica como,

$$\omega_j = \sqrt{1 + \varepsilon r_j(t)} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon r_j(t) + O(\varepsilon^2),$$

quando $\varepsilon = 0$ retornamos ao caso de frequência constantes, assim verificamos que na ex-

citação paramétrica o efeito da correção de ordem zero para o parâmetro ε é o mesmo nas componentes de coordenadas e componentes de quadraturas. O problema de dois osciladores acoplados, considerando apenas um dos modos com frequência variante no tempo, tem como operador Hamiltoniano na forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2}[\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \omega_1^2(t)\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2] + \varepsilon\zeta_0(\hat{x}_1\hat{x}_2 + \hat{p}_1\hat{p}_2) + \varepsilon\zeta_1(\hat{x}_1\hat{p}_2 - \hat{p}_1\hat{x}_2), \quad (2.119)$$

onde $\omega_1^2(t) = 1 + 8\xi\varepsilon r(t)$, $r_1(t) = 8\xi r(t)$, $r(t) = \cos \eta t$ e o acoplamento entre os dois é do tipo aproximação de onda girante [3] também já discutido anteriormente. Da mesma forma que encontramos os elementos das matrizes λ 's para o operador hamiltoniano mais geral, vamos aqui encontrar tais elementos destas matrizes para o hamiltoniano em (2.119).

Podemos supor uma condição inicial para a função de onda na sua forma fatorada dada por,

$$\psi(x_1, x_2; 0) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2), \quad (2.120)$$

isto é, os modos estão desacoplados no instante inicial. A função de onda para tempos futuros $t > 0$ pode ser escrita por

$$\psi(x_1, x_2; t) = \int G(x_1, x_2; x'_1, x'_2; t) \psi(x'_1, x'_2; 0) dx'_1 dx'_2, \quad (2.121)$$

onde $G(x_1, x_2; x'_1, x'_2; t)$ é o propagador da equação de Schrödinger com Hamiltoniano (2.119). Neste caso, a forma explícita do propagador está dada por [4]

$$G(\mathbf{x}_2; \mathbf{x}_1; t) = [\det(-2\pi i \lambda_3)]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{i}{2} [\mathbf{x}_2 \lambda_3^{-1} \lambda_4 \mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_2 \lambda_3^{-1} \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1 \lambda_1 \lambda_3^{-1} \mathbf{x}_1] \right\}, \quad (2.122)$$

uma vez que $\mathcal{C} = 0$ e conseqüentemente $\delta_k = 0$. As matrizes $\lambda_j(t)$ de ordem 2 satisfazem o sistema de equações diferenciais lineares dada pelas equações (2.49)-(2.51), sujeito as condições (2.41) (E_2 é uma matriz identidade de ordem 2)

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para o Hamiltoniano (2.119) temos as matrizes blocos \mathbf{b}_j , $j = 1, 2, 3, 4$, e \mathbf{c}_j , $j = 1, 2$ dadas por

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon\zeta_0 \\ \varepsilon\zeta_0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon\zeta_1 \\ \varepsilon\zeta_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon\zeta_1 \\ -\varepsilon\zeta_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.123)$$

$$\mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} \omega_1^2(t) & \varepsilon\zeta_0 \\ \varepsilon\zeta_0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.124)$$

Com os elementos das matrizes blocos (2.123)-(2.124), determinamos o conjunto de equações diferenciais para as matrizes $\Lambda(t)$ conforme (2.45) e os seus resultados em (2.49-2.51). Escrevendo as matrizes λ 's mais explicitamente obtemos a forma

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}, \quad (2.125)$$

$$\lambda_3 = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 & \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 & \tilde{u}_4 \end{bmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 & \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 & \tilde{v}_4 \end{bmatrix}, \quad (2.126)$$

que substituídos nas equações (2.49-2.51), obtemos a forma geral do sistema de equações diferenciais que determina as matrizes λ 's. Para as matrizes λ_1 e λ_2 as equações estão dadas na forma compacta por

$$\frac{du_i}{dt} = -\varepsilon u_j \zeta_1 - v_i - \varepsilon v_j \zeta_0, \quad \frac{dv_i}{dt} = \omega_1^2(t) u_i + \varepsilon u_j \zeta_0 - \varepsilon v_j \zeta_1, \quad (2.127)$$

$$\frac{du_j}{dt} = -\varepsilon u_i \zeta_1 - \varepsilon v_i \zeta_0 - v_j, \quad \frac{dv_j}{dt} = \varepsilon u_i \zeta_0 + u_j + \varepsilon v_i \zeta_1, \quad (2.128)$$

onde $i = 1, j = 2$ e $i = 3, j = 4$, enquanto que para as matrizes λ_3 e λ_4 temos a mesma configuração de soluções mediante troca de símbolos de u_i, v_i para \tilde{u}_i, \tilde{v}_i . Estas equações diferenciais estão sujeitas as condições iniciais

$$\begin{bmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_3(0) & u_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_1(0) & v_2(0) \\ v_3(0) & v_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.129)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_1(0) & \tilde{u}_2(0) \\ \tilde{u}_3(0) & \tilde{u}_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{v}_1(0) & \tilde{v}_2(0) \\ \tilde{v}_3(0) & \tilde{v}_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.130)$$

conforme as equações (2.48).

Determinadas as equações diferenciais (2.127)-(2.128) com as suas respectivas condições iniciais (2.129)-(2.130), as soluções de matrizes λ 's e o correspondente propagador pode ser determinado. No entanto, dado o grau de acoplamento das equações nos sistemas, isto é, oito equações acopladas, somos induzidos a considerar o sistema em alguma condição que introduza uma simplificação razoável do ponto de vista operacional e aceitável do ponto de vista físico. Considerando que o sistema em estudo está modelando modos acoplados do campo eletromagnético, as interações se processam nos domínios das interações fracas; a intensidade do acoplamento é tomada. Isto implica para as constantes de acoplamento no Hamiltoniano de interação,

$$\hat{H}_I = \varepsilon \zeta_0 (\hat{x}_1 \hat{x}_2 + \hat{p}_1 \hat{p}_2) + \varepsilon \zeta_1 (\hat{x}_1 \hat{p}_2 - \hat{p}_1 \hat{x}_2), \quad (2.131)$$

um valor pequeno. Dessa maneira podemos considerar os sistemas de equações diferenciais no limite de acoplamento fraco, sujeita a condição $\varepsilon^2 \zeta_i \zeta_k \ll 1$.

Nos domínios de uma teoria de perturbação consideramos as equações até correções de primeira ordem no parâmetro ε . Conforme discutido em [3] as correções de ordem zero são suficientes para considerar de forma aproximada os efeitos do acoplamento no sistema, pelo menos nos primeiros instantes da evolução dinâmica. A partir desta argumentação, reduzimos as equações diferenciais de primeira ordem para as matrizes λ 's, um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem, isto pode ser visto em maiores detalhes no apêndice A4.

Então, determinamos primeiramente as matrizes inversas das matrizes blocos b_j , dadas por

$$\mathbf{b}_1^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{-1+\varepsilon^2\zeta_0^2} & \frac{\varepsilon\zeta_0}{-1+\varepsilon^2\zeta_0^2} \\ \frac{\varepsilon\zeta_0}{-1+\varepsilon^2\zeta_0^2} & -\frac{1}{-1+\varepsilon^2\zeta_0^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon\zeta_1} \\ -\frac{1}{\varepsilon\zeta_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.132)$$

$$\mathbf{b}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\varepsilon\zeta_1} \\ \frac{1}{\varepsilon\zeta_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_4^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{-\omega_1^2(t)+\varepsilon^2\zeta_0^2} & \frac{\varepsilon\zeta_0}{-\omega_1^2(t)+\varepsilon^2\zeta_0^2} \\ \frac{\varepsilon\zeta_0}{-\omega_1^2(t)+\varepsilon^2\zeta_0^2} & -\frac{\omega_1^2(t)}{-\omega_1^2(t)+\varepsilon^2\zeta_0^2} \end{bmatrix}, \quad (2.133)$$

e definimos as matrizes \mathcal{E}_j , em termos das matrizes b_j , segundo as equações:

$$\mathcal{E}_1 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_4^{-1}\mathbf{b}_3\mathbf{b}_4 - b_4^{-1}\frac{db_4}{dt}, \quad \mathcal{E}_2 = \mathbf{b}_1\mathbf{b}_4 - \mathbf{b}_2\mathbf{b}_4^{-1}\mathbf{b}_3\mathbf{b}_4 - \mathbf{b}_2\mathbf{b}_4^{-1}\frac{d\mathbf{b}_4}{dt} + \frac{d\mathbf{b}_2}{dt}, \quad (2.134)$$

$$\mathcal{E}_3 = \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_1^{-1}\mathbf{b}_2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_1^{-1}\frac{d\mathbf{b}_1}{dt}, \quad \mathcal{E}_4 = \mathbf{b}_4\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3\mathbf{b}_1^{-1}\mathbf{b}_2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3\mathbf{b}_1^{-1}\frac{d\mathbf{b}_1}{dt} - \frac{d\mathbf{b}_3}{dt}. \quad (2.135)$$

Tais matrizes podem ser identificadas com a forma geral do sistema de equações de primeira ordem (2.127)-(2.128) (de acordo com o desenvolvimento no apêndice A4). Assim, no limite do acoplamento fraco, simplificamos consideravelmente os cálculos para a solução do problema dinâmico correspondente ao operador. As equações diferenciais suficientes para a descrição física do sistema assumem a forma

$$\frac{d^2\lambda_j}{dt^2} - \frac{d\lambda_j}{dt}\mathcal{E}_3 + \lambda_j\mathcal{E}_4 = 0, \quad j = 1, 3, \quad (2.136)$$

$$\frac{d^2\lambda_j}{dt^2} - \frac{d\lambda_j}{dt}\mathcal{E}_1 + \lambda_j\mathcal{E}_2 = 0, \quad j = 2, 4, \quad (2.137)$$

onde negligenciamos os termos da ordem de ε^2 . Deste modo obtivemos equações diferenciais de segunda ordem acopladas para os elementos da linha das matrizes λ 's, que podem ser divididas em dois grupos distintos. Temos o primeiro grupo para as matrizes $\lambda_1(t)$ e $\lambda_3(t)$ na forma

$$S_1 : \begin{cases} \ddot{u}_1 + \omega_1^2(t)u_1 + 2\varepsilon(\zeta_1\dot{u}_2 + \zeta_0u_2) = 0, \\ \ddot{u}_2 + u_2 - 2\varepsilon(\zeta_1\dot{u}_1 - \zeta_0u_1) = 0. \end{cases} \quad (2.138)$$

De modo similar, para o segundo grupo para as matrizes $\lambda^{(2)}(t)$ e $\lambda^{(4)}(t)$ temos

$$S_2 : \begin{cases} \ddot{v}_1 + \omega_1^2(t)v_1 - \xi\varepsilon\dot{v}_1\dot{r} + 2\varepsilon(\zeta_1\dot{v}_2 + \zeta_0v_2) = 0, \\ \ddot{v}_2 + v_2 - 2\varepsilon(\zeta_1\dot{v}_1 - \zeta_0v_1) = 0. \end{cases} \quad (2.139)$$

Observe que os termos de acoplamento das equações em S_1 e S_2 ocorrem em correções de primeira ordem no parâmetro ε , isto porque, já na própria estrutura do hamiltoniano dada pela equação (2.119), o acoplamento do sistema é considerado fraco.

Além das correções dadas pelo parâmetro ε , o sistema de equações (2.138-2.139), nos mostra equações diferenciais do tipo

$$\ddot{u} + \omega^2(t)u = 0, \quad (2.140)$$

conhecidas na literatura como *equação de Mathieu*. Tal equação é utilizada em mecânica clássica nos problemas de vibrações não lineares, analisando a estabilidade das soluções da sua dinâmica classificando-as em soluções estáveis e instáveis (teoria de perturbação). Outra utilização é em sistemas onde uma força periódica é aplicada, similar ao problema de uma excitação paramétrica atuando no sistema. Uma forma de tratar a equação de Mathieu é aplicação da *teoria de Floquet*, onde sua equação diferencial é dita linear com coeficientes periódicos.

Em contraste aos sistemas sob ação de uma excitação externa, em geral descrito por equações diferenciais com coeficientes constantes ou que variam lentamente no tempo, as excitações paramétricas conduzem-nos a equações diferenciais com coeficientes variando rapidamente no tempo, usualmente de forma periódica. Além disso, uma pequena excitação paramétrica pode produzir uma resposta eficaz mesmo quando a frequência da excitação for distante da frequência natural do sistema. Neste aspecto, é visto uma grande aplicação da equação de Mathieu também em mecânica quântica [23], juntamente com os métodos de solução da sua equação diferencial.

Após esta análise das equações em (2.138-2.139), observando o aspecto dos acoplamentos e também o papel central da equação de Mathieu, podemos tratar em uma primeira aproximação, o acoplamento como um fator perturbativo nas equações diferenciais, sugerindo dessa forma a aplicação de algum método assintótico para a solução geral destas equações. Vários são os métodos utilizados em problemas assintóticos, dentre eles temos o método das escalas múltiplas, o método por via direta, o método de Lindsted's [2] etc. Aqui vamos utilizar o método das escalas múltiplas, cujo detalhes deixaremos para o próximo capítulo.

Assim, os sistemas de equações diferenciais de segunda ordem acopladas podem ser resolvidos para um caso especial do limite do acoplamento fraco ($\varepsilon^2 \zeta_j \zeta_k \ll 1$), onde a frequência do oscilador paramétrico varia de uma quantidade pequena em torno de uma unidade de frequência (a frequência do segundo oscilador); $\omega_1^2(t) = 1 + 8\xi\varepsilon r(t)$ e $\xi\varepsilon \ll 1$ ainda $r(t) = \cos \eta t$. O primeiro passo para a análise da dinâmica do sistema está dado com a determinação das equações (2.138)-(2.139). Vamos agora apresentar uma breve revisão do método das escalas múltiplas nos contextos da física clássica e quântica.

2.7 Conclusão

Neste capítulo expomos de maneira resumida a teoria do propagador para o caso particular dos operadores Hamiltonianos quadráticos. Revisamos os conceitos de invariantes quânticos na sistemática operacional desenvolvido por Dodonov [4] e abordamos os pontos centrais necessários à compreensão do problema. Uma vez que esta formulação está perfeitamente definida na literatura e para o problema em estudo são relevantes apenas a forma final do propagador e sua aplicabilidade, neste capítulo ilustrando como se determinar a forma do propagador para operadores Hamiltonianos quadráticos a partir das matrizes $\Lambda(t)$ e $\Delta(t)$. Além disso, consideramos a sua aplicabilidade no estudo de troca de estados quânticos em osciladores acoplados, mostrando como a partir do propagador ou das matrizes λ 's podemos caracterizar as condições de troca de estados quânticos. Mostramos também que nosso modelo de trabalho, surge das transformações de coordenadas de um hamiltoniano mais geral, onde o efeito paramétrico em uma das frequências dos modos acoplados nos sugerem buscar soluções perturbativas. Isto nos motivou a aplicação do método das escalas múltiplas para se determinar a solução de matrizes λ 's, observando neste trabalho a importância do estudo da equação de Mathieu tanto nos domínios da física clássica quanto da física quântica a que veremos à seguir.

Capítulo 3

Método das Escalas Múltiplas

3.1 Introdução

Convencionalmente o acoplamento-fraco de Rayleigh-Schrödinger [24, 25] é um dos problemas tratados em teorias de perturbação onde os acoplamentos podem ser vistos como ordens sucessivas dentro de uma série de acoplamentos ressonantes. O método das escalas múltiplas (MEM) é um poderoso método perturbativo pois analisa quantitativamente os comportamentos físicos característicos em diferentes escalas de tempo associadas a um dado sistema dinâmico. A idéia principal do MEM consiste no fato de sistemas dinâmicos poderem exibir comportamentos físicos distintos em diferentes escalas de comprimento ou de tempo. Se uma série perturbativa em um parâmetro convenientemente estabelecido for usada para resolver um dado problema então há frequentemente um acoplamento ressonante entre as distintas ordens sucessivas do parâmetro da série perturbativa. Estes acoplamentos gerais, os chamados termos seculares da série (os termos que crescem rapidamente como funções nas diferentes escalas definidas). Termos seculares impõem um crescimento rápido para os valores das soluções para pequenas variações de suas variáveis e a exigência física de soluções regulares ou finitas para sistemas dinâmicos nos domínios da teoria de perturbação implica em certas restrições sobre os termos seculares. O MEM reorganiza os termos da série de forma a eliminar o crescimento rápido, permitindo uma descrição quantitativa dos comportamentos característicos que ocorrem nas diferentes escalas, definindo soluções regulares para o sistema em estudo.

Este método é aplicado em vários problemas relacionados a efeitos não lineares de equações diferenciais tanto em mecânica clássica (i.e equação de duffing) quanto em mecânica quântica (i.e equação de movimento de Heisenberg, equação de Schrödinger) [23, 26–29]. Em problemas relacionados à ótica quântica, por exemplo, o método das escalas múltiplas permite estudar de forma analítica o efeito da modulação da amplitude em um feixe monocromático, produzido pela excitação de um modelo de átomos acoplados através de

dois lasers com frequências diferentes [30]. Também em problemas relacionados com a interação e quantização em cavidades quânticas com paredes oscilantes [23]. Este último motivou a nossa proposta de estudo etc. Portanto, neste capítulo vamos considerar uma breve revisão dos aspectos gerais do método das escalas múltiplas em problemas de física clássica e quântica.

3.2 Aspectos Gerais do Método das Escalas Múltiplas

Estamos interessados em como obtemos soluções assintóticas de equações diferenciais, que nem sempre podem ser resolvidas de forma exata. Em geral, para as equações diferenciais de sistemas não lineares, utilizam-se métodos assintóticos para se obter suas soluções aproximadas [2, 24, 25, 31]. Um exemplo interessante é o do movimento oscilatório unidimensional sob ação de uma força central. Para este sistema consideramos equação para a posição u do oscilador, dada na forma geral:

$$\ddot{u} + f(u) = 0, \quad (3.1)$$

onde $f(u)$ é uma função não-linear, onde a partir dela podemos assumir equações do tipo oscilador harmônico, equação de duffing etc. Portanto $f(u)$ é um caso geral onde podemos identificar o tipo de linearidade que a equação diferencial pode assumir em um determinado sistema físico. Assim várias técnicas para obter soluções aproximadas podem ser utilizadas.

Prosseguindo, reescrevemos (3.1) em um sistema de coordenadas conveniente, tal que $x = u - u_0$, com u_0 a posição de equilíbrio do oscilador. Assim temos a equação diferencial reescrita na forma

$$\ddot{u} + f(x + u_0) = 0. \quad (3.2)$$

Verifica-se que f pode ser expandindo em série de Taylor em torno do ponto u_0 . Com este procedimento, estamos em busca de soluções aproximadas para nossa equação. Logo

$$f(x + u_0) = \sum_{n=1}^N \alpha_n x^n, \quad (3.3)$$

com

$$\alpha_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(u_0), \quad (3.4)$$

e $f^{(n)}$ denotando as n -ésimas derivadas no ponto u_0 . As condições iniciais são dadas pela posição inicial $u(0)$ e a sua velocidade inicial $\dot{u}(0)$. A partir das condições iniciais determina-se as soluções de maneira única.

No método das escalas múltiplas, a idéia principal é aplicar uma *transformação na equação diferencial* em estudo, sendo ela linear ou não, gerando uma série de *equações*

diferenciais lineares acopladas. Para tornar mais explícito esta definição o método define n variáveis T_n de tempo, dadas por

$$T_n = \varepsilon^n t, \quad (3.5)$$

onde estas variáveis são interpretadas como *diferentes escalas de tempo* (múltiplas escalas) e tomadas como *independentes*, desde que o parâmetro ε assuma um valor pequeno, $\varepsilon \ll 1$.

Para estas diferentes escalas de tempo, observamos que as derivadas na variável t também devem ser reescritas em termos das derivadas de T_n na forma

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (3.6)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2\varepsilon D_0 D_2) + \dots, \quad (3.7)$$

$$D_n = \frac{d^n}{dT_n}. \quad (3.8)$$

As derivadas são separáveis, pela expansão dos termos, de acordo com diferentes ordens de potências de ε . Deste modo, pode-se assumir então, uma solução para a equação (3.2), levando-se em conta a expansão dada pela equação (3.3), na forma

$$x(t; \varepsilon) = x_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2, \dots) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (3.9)$$

substituindo primeiramente (3.3) e em seguida, (3.6), (3.9) e (3.10) na equação (3.2), obtemos, para cada ordem n em ε uma equação diferencial linear para a componente x_n na série (3.9):

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 & D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = 0, \\ \varepsilon^1 & D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - \alpha_2 x_0^2, \\ \varepsilon^2 & D_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_2 = -2D_0 D_1 x_0 - (D_1^2 + 2\varepsilon D_0 D_2) x_0 - 2\alpha_2 x_0 x_1 - \alpha_3 x_0^3, \\ & \vdots \\ \varepsilon^n & D_0^2 x_n + \omega_0^2 x_n = \mathcal{F}_n(x_1, \dots, x_{n-1}), \dots \\ & \vdots \end{aligned}$$

Note que as soluções das equações de ordens menores aparecem como os termos não homogêneos, $\mathcal{F}_n(x_1, \dots, x_{n-1})$, nas equações das ordens maiores. Portanto, este é um método iterativo; por exemplo, a solução da ordem zero influi na solução da primeira ordem, enquanto a solução da segunda ordem está definida pelos efeitos das soluções das ordens zero e um, e assim por diante. A solução para ε^0 é bastante simples, basta-nos lembrar do problema do oscilador harmônico onde assumiamos uma solução do tipo exponencial com constantes a serem definidas, então na correção de ordem zero temos

$$x_0(T_0, T_1, T_2, \dots) = A(T_1, T_2, \dots) \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A}(T_1, T_2, \dots) \exp(-i\omega_0 T_0), \quad (3.10)$$

onde \bar{A} é o complexo conjugado de A . Observa-se que as constantes estão em função das outras variáveis de tempo T_1, T_2, \dots , pois a dependência da diferencial na correção de ordem zero se dá apenas no parâmetro T_0 . Fazendo a substituição de (3.10) na equação de ordem ε resulta em

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -2i\omega_0 D_1 A \exp(i\omega_0 T_0) - \alpha_2 [A^2 \exp(2i\omega_0 T_0) + A\bar{A}] + cc \quad (3.11)$$

onde cc significa complexo conjugado dos três primeiros termos do lado direito da equação (3.11). Um aspecto importante do método está na identificação dos termos seculares que aparecem nas equações diferenciais. No entanto, queremos saber o que são estes termos seculares?

Uma resposta plausível é verificada quando primeiramente estamos buscando soluções que não diverjam para tempos $t > 0$, pois interessa-nos soluções regulares para o nosso problema o que é importante no estudo da equação de Mathieu descrito anteriormente. Estes termos podem ser identificados e entendidos fazendo-se uma analogia ao problema da ressonância em um oscilador harmônico de frequência ω sujeito a ação de uma força externa $g \cos \varphi t$, cuja frequência da força aplicada φ iguala-se à frequência natural do oscilador. Para este sistema temos a equação do movimento para a posição y dada por

$$\ddot{y} + \omega^2 y = g \cos \varphi t. \quad (3.12)$$

A solução da equação homogênea é igual a

$$y_h(t) = a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t,$$

onde a_1 e a_2 são constantes arbitrárias. A solução particular y_p é uma função do tipo $at \sin \varphi t$ e t , onde a independência linear é respeitada. Então a solução particular da equação diferencial (3.12) tem a forma

$$y_p = \frac{g}{2\varphi} t \sin \varphi t. \quad (3.13)$$

Da solução (3.13), observamos no decorrer do tempo que a amplitude do oscilador aumenta no tempo, até chegar a uma amplitude limite na qual o sistema colapsa antes da oscilação se tornar infinita [32]. É justamente este tipo de comportamento que deveremos eliminar na aplicação do método das escalas múltiplas, pois são os termos seculares que levam a uma solução não regulares. Por exemplo na equação (3.11) o termo secular é dado por $-2i\omega_0 D_1 A \exp(i\omega_0 T_0)$, (onde a frequência de oscilação é a mesma daquela na correspondente equação homogênea para x_1). Assim, no sentido de eliminarmos soluções divergentes impoem-se a condição

$$D_1 A(T_1, T_2) = 0, \quad (3.14)$$

eliminando o termo secular, ao mesmo tempo identificando equação para a amplitude $A(T_1, T_2)$.

A equação (3.14) implica para $A(T_1, T_2)$ ser independente de T_1 , ao mesmo tempo em que implica para (3.11), a equação

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -\alpha_2 [A(T_2)^2 \exp(2i\omega_0 T_0) + A(T_2)\bar{A}(T_2)] + cc, \quad (3.15)$$

cuja solução obtida por métodos usuais de equações diferenciais é dada na forma

$$x_1(T_0, T_2) = \frac{\alpha_2 A(T_2)^2}{3\omega_0^2} \exp(2i\omega_0 T_0) - \frac{\alpha_2}{\omega_0^2} A(T_2)\bar{A}(T_2) + cc. \quad (3.16)$$

Determinadas as soluções x_0 e x_1 , substituímos na equação diferencial de correção no parâmetro ε^2 , e considerando a condição (3.14), obtemos a seguinte equação diferencial

$$\begin{aligned} D_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_2 = & -[2i\omega_0 D_2 A - \frac{10\alpha_2^2 - 9\alpha_3\omega_0^2}{3\omega_0^2} A^2 \bar{A}] \exp(i\omega_0 T_0) \\ & - \frac{2\alpha_2^2 + 3\alpha_3\omega_0^2}{3\omega_0^2} A^3 \exp(3i\omega_0 T_0) + cc. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Novamente, identificando o termo secular em (3.17), como sendo o primeiro termo do lado direito da equação, impomos a condição

$$2i\omega_0 D_2 A(T_2) - \frac{10\alpha_2^2 - 9\alpha_3\omega_0^2}{3\omega_0^2} A^2(T_2)\bar{A}(T_2) = 0. \quad (3.18)$$

Temos agora uma equação para determinar a amplitude $A(T_2)$ do sistema conforme as relações (3.11)-(3.18). Para isto podemos supor uma solução complexa na forma polar como

$$A(T_2) = \frac{1}{2} a \exp(ib), \quad (3.19)$$

com a e b funções de T_2 . Substituindo a equação (3.19) em (3.18), separando o resultado em parte real e imaginária, obtemos uma solução do tipo

$$A = \frac{1}{2} a_0 \exp\left(i \frac{9\alpha_3\omega_0^2 - 10\alpha_2^2}{24\omega_0^2} a^2 T_2 + ib_0\right). \quad (3.20)$$

Usando o fato que $T_2 = \varepsilon^2 t$, e das relações (3.10) e (3.16), a solução aproximada para (3.2) é da forma

$$x = a_0 \cos(\omega t + b_0) - \frac{\varepsilon a^2 \alpha_2}{2\alpha_1} \left[1 - \frac{1}{3} \cos(2\omega t + 2b_0)\right] + O(\varepsilon^2), \quad (3.21)$$

com

$$\omega = \omega_0 \left[1 + \frac{9\alpha_3\omega_0^2 - 10\alpha_2^2}{24\omega_0^2} \varepsilon^2 a_0^2\right] + O(\varepsilon^2), \quad (3.22)$$

para a e b determinados a partir de um problema de valor inicial. Nesta seção fizemos um estudo abordando o método das escalas múltiplas como um procedimento para a solução de um modelo não linear genérico definido pela função $f(u)$.

Um outro exemplo importante para nosso estudo, que a partir da expansão em Taylor da função $f(u)$, é a equação de Duffing. Esta equação diferencial apresentou-se como a primeira opção de um modelo físico concreto para a aplicação do método das escalas múltiplas. É uma equação importante no problema de oscilações não lineares [33], como por exemplo no estudo do oscilador anarmônico de massa unitária ($p = \dot{x}$), cuja hamiltoniana está dada por

$$H(x, p) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \varepsilon \frac{x^4}{4}, \quad (3.23)$$

sujeito a condição $\varepsilon \ll 1$. Vamos aplicar o método das escalas múltiplas para um determinado problema de valor inicial. As equações do movimento deste sistema estão dadas por

$$\frac{dx}{dt} = \{x, H(x, p)\} = p, \quad (3.24)$$

$$\frac{dp}{dt} = \{p, H(x, p)\} = -x - 4\varepsilon x^3, \quad (3.25)$$

$$\{K, H\} = \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial K}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial x}.$$

O sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem (3.24)-(3.25) pode ser reduzido a uma equação diferencial de segunda ordem, conhecida por equação de Duffing. Temos, então, para o sistema (3.23) a equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + 4\varepsilon x^3 = 0, \quad (3.26)$$

onde $x(t)$ é a variável clássica para a posição. Para nosso problema vamos considerar, por exemplo, as condições iniciais

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (3.27)$$

Tentamos então uma solução do tipo:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n(t). \quad (3.28)$$

Substituindo a série dada por (3.28) em (3.26) obtemos as equações de ordem *zero* e *um* para o parâmetro ε :

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + x_0 = 0, \quad (3.29)$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 = -4x_0^3. \quad (3.30)$$

Observe que a solução de correção de ordem zero será útil na solução da correção de primeira ordem (3.30) de forma que para simplificar o termo não homogêneo da equação diferencial resultante na correção de primeira ordem é verificado facilmente que a solução

de (3.30) possui um termo secular dado por $t \text{sen } t$, que no limite $t \rightarrow \infty$ a solução particular é divergente, contrariando a condição física de que o sistema (3.26) tem uma energia finita: o sistema não está acoplado com nenhum potencial externo e portanto, pode ser tratado como um sistema isolado com energia constante E_0 ,

$$H(x, p) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \varepsilon \frac{x^4}{4} = E_0.$$

Justificada a condição física para eliminarmos termos seculares, nós podemos considerar a expansão (3.28) sob o ponto de vista das escalas múltiplas. A partir daí, podemos utilizar os mesmos procedimentos já utilizados para resolver o problema do movimento oscilatório unidimensional sob ação de uma força central, expressa pela equação (3.2). Os detalhes matemáticos para a solução da equação de Duffing podem ser visto no apêndice B, tanto a solução clássica, quanto o seu análogo quântico.

De forma resumida, temos que o objetivo principal do método das escalas múltiplas é realizar a transformação de equações diferenciais lineares ou não em um conjunto de equações diferenciais lineares acopladas verificando um modelo físico adequado para o tipo de correção de ordem nos parâmetros ε . Agora podemos aplicar o método em nosso modelo, resolvendo o conjunto de equações diferenciais (2.138)-(2.139), determinando os elementos das matrizes λ' s.

3.3 Aplicação do Método das Escalas Múltiplas

Utilizamos agora o método das escalas múltiplas para a construção de soluções aproximadas do sistema descrito pelo Hamiltoniano em (2.119). A presença do parâmetro $\varepsilon \ll 1$, motivando-nos a buscar soluções em série de potências em ε , conforme explicações dadas na seção anterior. Seja então considerado o método das escalas múltiplas de modo que as matrizes λ 's possam ser escrito na forma

$$\lambda_k(t) = \lambda_k^{(0)}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon \lambda_k^{(1)}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 \lambda_k^{(2)}(T_0, T_1, T_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (3.31)$$

onde temos $T_n = \varepsilon^n t$. Definimos as derivadas em relação a t em termos das novas variáveis temporais D_n de acordo com a equações

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (3.32)$$

e

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_1 \partial T_0} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial T_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (3.33)$$

Este procedimento é similar ao já realizado para a equação de Duffing e para o modelo geral do oscilador unidimensional sob ação de uma força central, onde estabelecemos para

cada ordem de ε uma equação diferencial. Nós agora concentramos nossa atenção para o sistema de equações diferenciais (2.138)-(2.139). Para a aplicação do método das escalas múltiplas escrevemos explicitamente os elementos das matrizes λ_k na forma

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} u_{10}(T_0, T_1) + \varepsilon u_{11}(T_0, T_1) & u_{20}(T_0, T_1) + \varepsilon u_{21}(T_0, T_1) \\ u_{30}(T_0, T_1) + \varepsilon u_{31}(T_0, T_1) & u_{40}(T_0, T_1) + \varepsilon u_{41}(T_0, T_1) \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.34)$$

$$\lambda_2 = \begin{bmatrix} v_{10}(T_0, T_1) + \varepsilon v_{11}(T_0, T_1) & v_{20}(T_0, T_1) + \varepsilon v_{21}(T_0, T_1) \\ v_{30}(T_0, T_1) + \varepsilon v_{31}(T_0, T_1) & v_{40}(T_0, T_1) + \varepsilon v_{41}(T_0, T_1) \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.35)$$

até correções de primeira ordem, isto porque estamos considerando a condição de acoplamento fraco entre as cavidades acopladas, ou seja, $\varepsilon^2 \zeta_i \zeta_k \ll 1$.

Tanto para o primeiro quanto para o segundo grupo de equações diferenciais, o procedimento de resolução é o mesmo. Assim, por exemplo, podemos tomar para as soluções $u_1(t)$ e $u_2(t)$ as expansões

$$u_1(T_0, T_1, T_2) = u_{10}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_{11}(T_0, T_1, T_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.36)$$

$$u_2(T_0, T_1, T_2) = u_{20}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_{21}(T_0, T_1, T_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (3.37)$$

Substituindo as soluções em série nas equações diferenciais do primeiro grupo, obtemos, para cada ordem em ε , um conjunto de equações diferenciais. Para a solução $u_1(T_0, T_1, T_2)$ temos, até primeira ordem em ε , as equações

$$\varepsilon^0 \quad D_0^2 u_{10} + u_{10} = 0, \quad (3.38)$$

$$\varepsilon^1 \quad D_0^2 u_{11} + u_{11} = -[\xi r(T_0) + 2D_0 D_1] u_{10} - 2[\zeta_1 D_0 + \zeta_0] u_{20}, \quad (3.39)$$

enquanto para a solução $u_2(T_0, T_1, T_2)$ segue as equações diferenciais

$$\varepsilon^0 \quad D_0^2 u_{20} + u_{20} = 0, \quad (3.40)$$

$$\varepsilon^1 \quad D_0^2 u_{21} + u_{21} = -2D_0 D_1 u_{20} + 2[\zeta_1 D_0 + \zeta_0] u_{10}. \quad (3.41)$$

observando que o mesmo é verdade para cada par de elementos de linha das matrizes λ_1 e λ_3 . O mesmo podemos fazer para as equações diferenciais do segundo grupo (2.139), isto é, dado

$$v_1(T_0, T_1, T_2) = v_{10}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon v_{11}(T_0, T_1, T_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.42)$$

$$v_2(T_0, T_1, T_2) = v_{20}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon v_{21}(T_0, T_1, T_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.43)$$

temos as equações, para cada uma das ordens de ε , escritas na forma

$$\varepsilon^0 \quad D_0^2 v_{10} + v_{10} = 0, \quad (3.44)$$

$$\varepsilon^1 \quad D_0^2 v_{11} + v_{11} = -[\xi r(T_0) - \xi D_0 r(T_0) D_0 + 2D_0 D_1] v_{10} - 2[\zeta_1 D_0 + \zeta_0] v_{20}, \quad (3.45)$$

para $v_1(T_0, T_1, T_2)$ e

$$\varepsilon^0 \quad D_0^2 v_{20} + v_{20} = 0, \quad (3.46)$$

$$\varepsilon^1 \quad D_0^2 v_{21} + v_{21} = -2D_0 D_1 v_{20} + 2[\zeta_1 D_0 + \zeta_0] v_{10}, \quad (3.47)$$

para $v_2(T_0, T_1, T_2)$. O mesmo procedimento se aplica para cada par de elementos de linha das matrizes λ_2 e λ_4 . Observemos que as modificações relevantes para os grupos de equações ocorrem na primeira ordem do parâmetro ε , de modo que as soluções gerais, para cada um dos grupos acima, possuem formas funcionais diferentes para as amplitudes dependentes no parâmetro T_1 , já que possuem termos seculares distintos.

Tendo estabelecido as equações diferenciais acima, podemos determinar as soluções da dinâmica quântica para o nosso sistema de osciladores acoplados. Identificamos três situações de interesse físico a serem consideradas, definidas para os valores de $\eta = 1/2, 1, 2$ em (2.119). Para os valores de $\eta = 1/2, 1$ obtemos a solução trivial do problema, recaíndo na solução exata, sem os efeitos da correção de ordem ε o que nos mostrou que os termos seculares são todos nulos, por este motivo omitimos estes valores. Somente no caso em que $\eta = 2$, observamos os efeitos da ressonância paramétrica em correções de primeira ordem no parâmetro ε . As condições iniciais para as matrizes λ 's estão estabelecidas pelas equações (2.129) e (2.130). Dessa forma, considerando já as diferentes escalas de tempo T_n , as condições iniciais estão dadas por

$$\lambda_1(0, 0, 0) = \lambda_4(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2(0, 0, 0) = \lambda_3(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de modo que para as diferentes ordens no parâmetro ε , as mesmas manifestam-se como

$$\lambda_1^{(0)}(0, 0, 0) = \lambda_4^{(0)}(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1^{(k)}(0, 0, 0) = \lambda_4^{(k)}(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k \geq 1,$$

$$\lambda_2^{(k)}(0, 0, 0) = \lambda_3^{(k)}(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k \geq 0.$$

A partir das equações (2.127)-(2.128) podemos fixar os valores dos $\dot{\lambda}$'s no instante $t = 0$:

$$\dot{\lambda}_1(0, 0, 0) = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & \zeta_1 \\ -\zeta_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\lambda}_2(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} \omega_1^2(0) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & \zeta_0 \\ \zeta_0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\lambda}_3(0, 0, 0) = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & \zeta_0 \\ \zeta_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\lambda}_4(0, 0, 0) = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & \zeta_1 \\ -\zeta_1 & 0 \end{bmatrix},$$

onde está explícito os elementos $\dot{\lambda}_k^{(l)}(0, 0, 0)$, diferentes da matriz nula, para as correspondentes ordens l do parâmetro ε . Não temos o interesse de explicitar todos os detalhes

operacionais efetuados para obtermos as soluções desejadas. Vamos apenas indicar os passos fundamentais realizados para obter as soluções das matrizes (3.34)-(3.35). Seguindo o mesmo esquema da equação de Duffing, temos para a correção de ordem zero $\lambda_k^{(0)}$ as formas:

$$\lambda_i^{(0)} = A_{ij} \exp(iT_0) + B_{ij} \exp(-iT_0),$$

onde os coeficientes A_{ij} e B_{ij} são funções da variável T_1 apenas. Para as derivadas primeiras $\dot{\lambda}_k^{(0)}$ temos

$$\dot{\lambda}_i^{(0)} = iA_{ij} \exp(iT_0) - iB_{ij} \exp(-iT_0),$$

As condições iniciais para a correção de ordem zero de cada uma das matrizes λ 's implicam para os coeficientes A_{ik} e B_{ik} um conjunto de condições apropriadas. Para o sistema λ_1 e λ_3 :

$$\begin{aligned} A_{i1}(0) &= \frac{1}{2}, & A_{i2}(0) &= 0, & B_{i1}(0) &= \frac{1}{2}, & B_{i2}(0) &= 0, \\ A_{i4}(0) &= \frac{1}{2}, & A_{i3}(0) &= 0, & B_{i4}(0) &= \frac{1}{2}, & B_{i3}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Para o sistema λ_2 e λ_4 :

$$\begin{aligned} A_{i1}(0) &= -\frac{1}{2}i, & A_{i2}(0) &= 0, & B_{i1}(0) &= -\frac{1}{2}i, & B_{i2}(0) &= 0, \\ A_{i4}(0) &= -\frac{1}{2}i, & A_{i3}(0) &= 0, & B_{i4}(0) &= -\frac{1}{2}i, & B_{i3}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Agora, para o caso de interesse $\eta = 2$ com $r(t) = \cos 2t$ precisamos determinar as equações diferenciais para os coeficientes A_{ik} e B_{ik} . De modo análoga ao procedimento desenvolvido para a equação de Duffing [23, 24], estas equações aparecem quando eliminamos os termos seculares presentes no lado direito das equações (3.39) e (3.45).

Para as matrizes $\lambda_1(t)$ e $\lambda_3(t)$, do primeiro grupo de equações, os termos seculares implicam em equações diferenciais lineares para os coeficientes A_{ik} e B_{ik} . Para os elementos de matrizes de $\lambda_1(t)$ temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\xi B_{11} + 2i\zeta_1 A_{12} + 2i\frac{dA_{11}}{dT_1} + 2\zeta_0 A_{12} &= 0, \\ \frac{1}{2}\xi A_{11} - 2i\zeta_1 B_{12} + 2i\frac{dB_{11}}{dT_1} + 2\zeta_0 B_{12} &= 0, \\ -2i\zeta_1 A_{11} + 2i\frac{dA_{12}}{dT_1} + 2\zeta_0 A_{11} &= 0, \\ -2i\zeta_1 B_{11} - 2i\frac{dB_{12}}{dT_1} + 2\zeta_0 B_{11} &= 0, \end{aligned} \tag{3.48}$$

enquanto para os elementos de matrizes de $\lambda_3(t)$ verificamos um conjunto de equações

similares

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\xi B_{31} + 2i\zeta_1 A_{32} + 2i\frac{dA_{31}}{dT_1} + 2\zeta_0 A_{32} &= 0, \\
 \frac{1}{2}\xi A_{31} - 2i\zeta_1 B_{32} + 2i\frac{dB_{31}}{dT_1} + 2\zeta_0 B_{32} &= 0, \\
 -2i\zeta_1 A_{31} + 2i\frac{dA_{32}}{dT_1} + 2\zeta_0 A_{31} &= 0, \\
 -2i\zeta_1 B_{31} - 2i\frac{dB_{32}}{dT_1} + 2\zeta_0 B_{31} &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Um procedimento similar se aplica para o segundo grupo, definindo um conjunto de equações diferenciais para os coeficientes A_{ik} e B_{ik} das matrizes $\lambda_2(t)$ e $\lambda_4(t)$. O importante é notar que para cada elemento de matriz λ as diferenças nos coeficientes A_{ik} e B_{ik} devem-se as diferentes condições iniciais.

Resolvendo estas equações dos termos seculares acopladas, juntamente com as condições iniciais para os elementos A_{ik} e B_{ik} encontramos o efeito de frequência paramétrica nos argumentos da solução exponencial destas equações. Assim a frequência paramétrica para o caso em que $\eta = 2$ é dada por

$$\omega_1^2(t) = 1 + 8\delta\varepsilon \cos \eta t, \tag{3.50}$$

com a fase de acoplamento ϕ e intensidade de acoplamento ρ definidas por

$$\zeta_0 = \alpha \sin \phi, \quad \zeta_1 = -\alpha \cos \phi, \quad \rho^2 = \zeta_0^2 + \zeta_1^2 \tag{3.51}$$

onde $\alpha = \sqrt{\rho^2 - \delta^2}$. Introduzimos os coeficientes β e σ através dos quocientes

$$\beta = \frac{\delta}{\alpha}, \quad \sigma = \frac{\rho}{\alpha}$$

e as definimos as diferentes escalas de tempos τ e τ_β segundo

$$\tau = \varepsilon\alpha t, \quad \tau_\beta = \beta\tau.$$

Neste trabalho consideramos o caso em que a intensidade da excitação paramétrica δ assume um valor pequeno comparado com a intensidade do acoplamento entre os modos. Neste caso temos, então, $\delta^2 < \rho^2 \ll 1$, implicando em uma condição de solução periódica (trigonométrica) na escala de tempo lento τ , onde se processa a transferência de informação entre os modos. Na escala de tempo τ_β podemos identificar o efeito da excitação paramétrica quântica em nosso sistema através do coeficiente β ($\beta = 0$, implica em $\tau_\beta = 0$, que significa $\delta = 0$). Desta forma as matrizes λ 's com $\eta = 2$ tem as soluções aproximadas dadas por:

Para λ_1 ,

$$\begin{aligned} u_1 &= \cos \tau [\cos t \cosh \tau_\beta - \sin t \sinh \tau_\beta] + \beta \sin \tau [\cos t \sinh \tau_\beta - \sin t \cosh \tau_\beta], \\ u_2 &= -\sigma \sin \tau [\cos(t - \phi) \cosh \tau_\beta - \sin(t - \phi) \sinh \tau_\beta], \\ u_3 &= \sigma \sin \tau [\cos(t + \phi) \cosh \tau_\beta - \sin(t - \phi) \sinh \tau_\beta], \\ u_4 &= \cos \tau [\cos t \cosh \tau_\beta - \sin(t - 2\phi) \sinh \tau_\beta] + \beta \sin \tau [\cos t \sinh \tau_\beta - \sin(t - 2\phi) \cosh \tau_\beta]. \end{aligned}$$

Para λ_2 ,

$$\begin{aligned} v_1 &= \cos \tau [\cos t \sinh \tau_\beta + \sin t \cosh \tau_\beta] + \beta \sin \tau [\cos t \cosh \tau_\beta + \sin t \sinh \tau_\beta], \\ v_2 &= -\sigma \sin \tau [\cos(t - \phi) \sinh \tau_\beta + \sin(t - \phi) \cosh \tau_\beta], \\ v_3 &= \sigma \sin \tau [\cos(t - \phi) \sinh \tau_\beta + \sin(t + \phi) \cosh \tau_\beta], \\ v_4 &= \cos \tau [\sin t \cosh \tau_\beta + \cos(t - 2\phi) \sinh \tau_\beta] - \beta \sin \tau [\sin t \sinh \tau_\beta + \cos(t - 2\phi) \cosh \tau_\beta]. \end{aligned}$$

Para λ_3 ,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= \cos \tau [\cos t \sinh \tau_\beta - \sin t \cosh \tau_\beta] + \beta \sin \tau [\cos t \cosh \tau_\beta - \sin t \sinh \tau_\beta], \\ \tilde{u}_2 &= -\sigma \sin \tau [\cos(t - \phi) \sinh \tau_\beta - \sin(t - \phi) \cosh \tau_\beta], \\ \tilde{u}_3 &= \sigma \sin \tau [\cos(t + \phi) \sinh \tau_\beta - \sin(t - \phi) \cosh \tau_\beta], \\ \tilde{u}_4 &= \cos \tau [\cos(t - 2\phi) \sinh \tau_\beta - \sin t \cosh \tau_\beta] + \beta \sin \tau [\cos(t - 2\phi) \cosh \tau_\beta - \sin t \sinh \tau_\beta]. \end{aligned}$$

Para λ_4 ,

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= \cos \tau [\cos t \cosh \tau_\beta + \sin t \sinh \tau_\beta] + \beta \sin \tau [\cos t \sinh \tau_\beta + \sin t \cosh \tau_\beta], \\ \tilde{v}_2 &= -\sigma \sin \tau [\cos(t - \phi) \sinh \tau_\beta - \sin(t - \phi) \cosh \tau_\beta], \\ \tilde{v}_3 &= \sigma \sin \tau [\cos(t - \phi) \sinh \tau_\beta - \sin(t + \phi) \cosh \tau_\beta], \\ \tilde{v}_4 &= \cos \tau [\cot t \cosh \tau_\beta + \sin(t - 2\phi) \sinh \tau_\beta] - \beta \sin \tau [\cot t \sinh \tau_\beta + \sin(t - 2\phi) \cosh \tau_\beta]. \end{aligned}$$

Com a solução dos elementos de matrizes λ 's obtemos todas as propriedades referentes a dinâmica de dois modos acoplados sob efeito da excitação paramétrica. Os elementos de matrizes acima permitem determinar explicitamente os invariantes quânticos P_j e X_j , cuja forma explícita está dada por

$$\hat{P}_1 = [r_{11} \cos(\tau) + r_{12} \sin(\tau)] \cosh(\tau_\beta) + [s_{11} \cos(\tau) + s_{12} \sin(\tau)] \sinh(\tau_\beta) \quad (3.52)$$

$$\hat{P}_2 = [r_{21} \cos(\tau) + r_{22} \sin(\tau)] \cosh(\tau_\beta) + [s_{21} \cos(\tau) + s_{22} \sin(\tau)] \sinh(\tau_\beta) \quad (3.53)$$

$$\hat{X}_1 = [l_{11} \cos(\tau) + l_{12} \sin(\tau)] \cosh(\tau_\beta) + [k_{11} \cos(\tau) + k_{12} \sin(\tau)] \sinh(\tau_\beta) \quad (3.54)$$

$$\hat{X}_2 = [l_{21} \cos(\tau) + l_{22} \sin(\tau)] \cosh(\tau_\beta) + [k_{21} \cos(\tau) + k_{22} \sin(\tau)] \sinh(\tau_\beta) \quad (3.55)$$

onde

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= k_{11} = \hat{x}_1 \sen t + \hat{p}_1 \cos t, & s_{11} &= l_{11} = \hat{x}_1 \cos t - \hat{p}_1 \sen t \\
 r_{12} &= k_{12} = -[\hat{x}_2 \sen(t - \phi) + \hat{p}_2 \cos(t - \phi)]\sigma + (\hat{x}_1 \cos t - \hat{p}_1 \sen t)\beta \\
 s_{12} &= l_{12} = [\hat{p}_2 \sen(t - \phi) - \hat{x}_2 \cos(t - \phi)]\sigma + (\hat{x}_1 \sen t + \hat{p}_1 \cos t)\beta \\
 r_{21} &= \hat{x}_2 \sen t + \hat{p}_2 \cos t \\
 r_{22} &= [\hat{p}_1 \cos(t + \phi) + \hat{x}_1 \sen(t + \phi)]\sigma + [\hat{p}_2 \sen(t - 2\phi) - \hat{x}_2 \cos(t - 2\phi)]\beta \\
 s_{21} &= \hat{x}_2 \cos(t - 2\phi) - \hat{p}_2 \sen(t - 2\phi) \\
 s_{22} &= [\hat{x}_1 \cos(t - \phi) - \hat{p}_1 \sen(t - \phi)]\sigma - (\hat{p}_2 \cos t + \hat{x}_2 \sen t)\beta \\
 l_{21} &= \hat{x}_2 \cos t - \hat{p}_2 \sen t \\
 l_{22} &= [(\hat{x}_1 \cos(t + \phi) - \hat{p}_1 \sen(t + \phi))\sigma + [\hat{p}_2 \cos(t - 2\phi) + \hat{x}_2 \sen(t - 2\phi)]\beta \\
 k_{21} &= \hat{p}_2 \cos(t - 2\phi) + \hat{x}_2 \sen(t - 2\phi) \\
 k_{22} &= [(\hat{p}_1 \cos(t - \phi) + \hat{x}_1 \sen(t - \phi))\sigma + (\hat{p}_2 \sen t - \hat{x}_2 \cos t)\beta
 \end{aligned}$$

Desta forma, obtidas as soluções para as matrizes λ 's concentramos nossa atenção na questão relativa as informações físicas relevantes deste sistema: qual o efeito da excitação paramétrica nas medidas de emaranhamento, nas propriedades referentes a cada um dos modos e quais as modificações observadas nos padrões de troca de propriedades quânticas ou estados quânticos entre os modos acoplados?

3.4 Conclusão

Neste capítulo utilizamos o método das escalas múltiplas no que se refere ao problema envolvendo a troca de estados quânticos de dois modos do campo eletromagnético, modelados por osciladores quânticos acoplados, onde em especial, um dos osciladores possui uma frequência que varia perturbativamente no tempo, e o acoplamento destes osciladores se processa no limite de interações fracas. Tal método nos levou a uma simplificação das equações diferenciais para as matrizes λ 's, que são fundamentais para o cálculo do propagador e portanto para a análise do problema da troca de informação quântica em modos acoplados. Dada a complexidade do problema proposto, uma compreensão básica do método das escalas múltiplas foi necessária de forma que exemplificamos sua utilização tanto no contexto clássico como no contexto quântico. Em síntese, mostramos que o método das escalas múltiplas tem como idéia central a transformação das equações diferenciais do problema a ser abordado, sendo ela linear ou não, em uma série de equações diferenciais *lineares* solúveis de forma *iterativa*. Com a solução das equações diferenciais para as matrizes λ 's obtidas, as medidas de correlação, pureza e compressão dos modos considerando estados iniciais Gaussianos também podem ser determinadas.

Capítulo 4

Efeito da excitação paramétrica quântica nos modos acoplados

Após o final da década de 1920 a maioria dos princípios fundamentais, ou postulados, que colocavam a prova a mecânica quântica já estavam bem conhecidos. Dentre todos estes princípios existe um que chamou a atenção de alguns dos maiores pensadores da época, o postulado do *espaço de Hilbert*. Um espaço de Hilbert é definido matematicamente como um espaço vetorial complexo, completo e provido de uma métrica (distância entre vetores), a qual é obtida por meio de um produto escalar [1]. Devido a sua extrema importância na física, essa propriedade recebeu o status de princípio. Ela é conhecida como princípio da superposição ou da linearidade da Mecânica Quântica. As consequências experimentais e até mesmo filosóficas oriundas deste princípio são impressionantes. Ainda hoje especialistas se espantam com estes resultados e "disputas" sobre sua interpretação física não são difíceis de ocorrerem de tempos em tempos.

A situação se torna mais fantástica quando aplicamos o princípio da superposição a um sistema físico composto por mais de uma parte. Em 1935, Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen apresentaram num belíssimo artigo [34] as implicações lógicas do princípio da superposição quando aplicado na descrição de um sistema composto. Fazendo uso desse princípio, de uma definição muito razoável de realidade física e da impossibilidade de transmissão de sinais superluminais (hipótese de localidade [35]), Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) demonstraram, de acordo com seus ideais, uma certa incompletude da Mecânica Quântica. Apesar da clareza da análise de EPR, Niels Bohr, num artigo muito hermético [36], tentou refutar os argumentos expostos por EPR.

Também em 1935, e motivado pelas idéias de EPR, Erwin Schrödinger apresentou de maneira eloqüente as consequências do princípio da superposição quando aplicado a um sistema de duas partes. Fazendo-se uso de um experimento imaginário, Schrödinger realçou que poderíamos ter situações bizarras num mundo macroscópico descrito pela Mecânica

Quântica. Tal experimento é conhecido como gato de Schrödinger no qual, a partir do princípio da superposição, temos uma superposição de dois estados macroscópicos distintos do gato: gato vivo e gato morto.

Para realçar a ligação íntima entre os dois subsistemas que compõem um certo estado $|\psi\rangle$, Schrödinger usou o termo *Verschränkung*. Este termo foi traduzido do alemão para o inglês como *entanglement* e para o português como emaranhamento. Porém o que seria este emaranhamento? Conforme exposto nesta resumida visão histórica, o emaranhamento surge naturalmente ao aplicarmos o princípio da superposição a sistemas físicos compostos. Assim como um sistema composto pode ter dois ou mais constituintes, costuma-se também classificar o emaranhamento de um sistema pelo número de subsistemas que estão emaranhados.

Atualmente, apesar da existência de algumas discussões [37] sobre a real importância do emaranhamento na implementação de algoritmos quânticos, como o da fatoração de números primos (algoritmo de Shor [38]) ou o de busca (algoritmo de Grover [39]), é cada vez mais consensual que o emaranhamento é um ingrediente indispensável na construção de um computador quântico.

Em muitos problemas relacionados a estados quânticos, o emaranhamento foi objeto de numerosos estudos na última década [40–43]. Uma forma bastante utilizada no estudo do emaranhamento é a condição de separabilidade de estados quânticos mistos de dois subsistemas por exemplo. Dessa forma, torna-se natural perguntar quais estados quânticos estão emaranhados. Isto é, dada um operador densidade $\hat{\rho}$ queremos saber se ela representa um estado quântico emaranhado. Numa forma geral representamos este operador-densidade $\hat{\rho}$, de cada subsistemas, através da soma de produtos diretos de operadores estatísticos agindo sobre cada componente separadamente:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_{i1} \otimes \hat{\rho}_{i2}, \quad p_i \geq 0 \quad \sum_i p_i = 1. \quad (4.1)$$

Em últimos trabalhos publicados esse problema foi resolvido para estados Gaussianos de sistemas de duas partes em variáveis contínuas [43–50]. Na forma mais explícita, o critério de separabilidade foi proposto por *Simon* [45].

É importante ressaltar que o critério de Simon está relacionado de perto ao conceito de *invariantes quânticos* introduzidos em [51, 52] (e também verificada no capítulo 2). Com isto ao invés de calcularmos determinantes e traços de várias matrizes e seus produtos de acordo com a formulação inicial [45], é suficiente calcular o determinante de uma única matriz composta pelas covariâncias cruzadas entre as componentes de quadraturas dos dois modos. Embora não consideremos o critério de separabilidade propriamente, vemos a importância da determinação das covariâncias no que se refere as medidas de emaranhamento, compressão e pureza dos modos acoplados para o caso de estados iniciais Gaussianos.

4.1 Matriz das Covariâncias

Através do sistema hamiltoniano de dois osciladores harmônicos quânticos de frequências $\omega_1(t)$ e ω_2 verificamos como através da formulação dos invariantes quânticos é possível determinar a evolução dinâmica do sistema considerado, em se tratando de um sistema descrito por um operador Hamiltoniano quadrático, cuja forma geral do propagador está a princípio determinada de maneira única. Este Hamiltoniano de dois osciladores harmônicos quânticos modelando dois modos do campo eletromagnético de frequências $\omega_1(t)$ e ω_2 e interagindo via um acoplamento bilinear é dado por

$$H = \frac{1}{2}[\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \omega_1^2(t)\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2] + \varepsilon\zeta_0(\hat{x}_1\hat{x}_2 + \hat{p}_1\hat{p}_2) + \varepsilon\zeta_1(\hat{x}_1\hat{p}_2 - \hat{p}_1\hat{x}_2), \quad (4.2)$$

no qual os operadores \hat{p}_i e \hat{x}_i são “variáveis” adimensionais das componentes de quadraturas, que obedecem as relações de comutação usuais para o par conjugado $[\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\delta_{jk}\hat{1}$. As constantes de acoplamento adimensionais ζ_k são independentes do tempo. Este nosso modelo é um caso particular do sistema de duas partes mais geral, descrito pelo operador Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}[p_1^2 + p_2^2 + \omega_1^2(t)x_1^2 + \omega_2^2(t)x_2^2] + [\gamma_1(t)p_1p_2 + \gamma_2(t)p_1x_2 + \gamma_3(t)x_1p_2 + \gamma_4(t)x_1x_2], \quad (4.3)$$

em que as constantes de acoplamento adimensionais $\zeta_i(t) = \zeta_i \cos(\varrho t - \phi_i)$ variam periodicamente no tempo com a mesma frequência ϱ , mas com fases arbitrárias. Este é um caso mais geral, visto como o sistema no qual podemos analisar diferentes efeitos na dinâmica de modos acoplados, devido a excitações paramétricas distintas e acoplamentos dependentes do tempo. Deixaremos isto em aberto a ser considerado em trabalhos futuros. De agora em diante consideramos um sistema de unidades onde $\hbar = 1$.

Seguindo o desenvolvimento dos capítulos anteriores, aplicamos a formulação dos invariantes quânticos para determinar a evolução dinâmica do sistema em consideração. Conforme considerado anteriormente, o Hamiltoniano (4.2) é um caso especial do Hamiltoniano quadrático genérico, escrito em termos das matrizes \mathcal{B} na forma

$$H = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{q}}\mathcal{B}\hat{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{q} \equiv (\mathbf{p}, \mathbf{x}). \quad (4.4)$$

A matriz $\mathcal{B}(t)$ é a matriz de ordem $2N$ simétrica dada na forma geral

$$\mathcal{B}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) & b_2(t) \\ b_3(t) & b_4(t) \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

sujeitas as condições $b_1(t) = \tilde{b}_1(t)$, $b_4(t) = \tilde{b}_4(t)$, $b_2(t) = \tilde{b}_3(t)$. Para os Hamiltonianos quadráticos (4.4) temos uma dependência linear entre os *operadores de Heisenberg* nos instantes inicial e posterior, expressa por

$$\hat{q}_\mu(t) = \mathcal{L}_{\mu\alpha}(t)\hat{q}_\alpha(0), \quad (4.6)$$

sendo os coeficientes $\mathcal{L}_{\mu\alpha}$ os elementos da matriz simplética. Introduzindo a matriz inversa $\Lambda = \mathcal{L}^{-1}$ escrevemos a equação (4.6) na forma

$$\hat{q}_0(t) = \Lambda(t)\hat{q}. \quad (4.7)$$

Então, conforme já sabemos, $\hat{q}_0(t)$ é o operador integral de movimento na representação de Schrödinger [4, 53]. A equação (4.6) implica diretamente sobre os valores médios das componentes de quadraturas em uma relação linear similar àquela sobre os operadores \hat{q} .

$$\langle \hat{q}_\mu \rangle(t) = \mathcal{L}_{\mu\alpha}(t)\langle \hat{q}_\alpha \rangle(0). \quad (4.8)$$

Esta relação sobre os primeiros momentos do sistema é independente da representação. De modo análogo, os segundos momentos evoluem no tempo segundo a equação

$$\langle \hat{q}_\mu \hat{q}_\nu \rangle(t) = \mathcal{L}_{\mu\alpha}(t)\langle \hat{q}_\alpha \hat{q}_\beta \rangle(0)\tilde{\mathcal{L}}_{\beta\nu}(t). \quad (4.9)$$

Para sistemas com Hamiltonianos quadráticos (4.4) a matriz das covariâncias $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mu\nu}$ tem seus elementos, definidos segundo a notação para os momentos estatísticos centrados de segunda ordem, na forma

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\langle \hat{q}_\mu \hat{q}_\nu + \hat{q}_\nu \hat{q}_\mu \rangle - \langle \hat{q}_\mu \rangle \langle \hat{q}_\nu \rangle, \quad \sigma_a = \langle \hat{a}^2 \rangle - \langle \hat{a} \rangle^2, \quad \sigma_{ab} = \frac{1}{2}\langle \hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a} \rangle - \langle \hat{a} \rangle \langle \hat{b} \rangle. \quad (4.10)$$

A evolução temporal de seus elementos segue, então, diretamente de (4.9) como

$$\mathcal{M}(t) = \mathcal{L}(t)\mathcal{M}(0)\tilde{\mathcal{L}}(t). \quad (4.11)$$

A matriz $\mathcal{L}(t)$ pode ser obtida, diretamente da relação de inversão da matriz $\Lambda(t)$, com auxílio da identidade simplética $\Lambda\Sigma\tilde{\Lambda} \equiv \Sigma$, ou seja,

$$\Lambda^{-1} = \Sigma\tilde{\Lambda}\Sigma^{-1} = -\Sigma\tilde{\Lambda}\Sigma = \mathcal{L}, \quad (4.12)$$

sendo uma consequência imediata da equação (2.45) e das propriedades $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}$ e $\Sigma = -\tilde{\Sigma}$. Temos para $\mathcal{L}(t)$ a forma matricial

$$\mathcal{L}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_4 & -\tilde{\lambda}_2 \\ -\tilde{\lambda}_3 & \tilde{\lambda}_1 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

O passo seguinte a ser seguido consiste em determinar a forma da matriz das covariâncias (4.11). Antes, porém, vamos dar um significado preciso às medidas de compressão dos estados para os modos do campo eletromagnético e introduzir medidas de emaranhamento em termos do elementos da matriz $\mathcal{M}(t)$.

4.2 Energia, Incerteza e Coeficiente de Compressão

Os valores instantâneos das variâncias $\sigma_x(t)$ e $\sigma_p(t)$ não servem como verdadeiras medidas de compressão em todos os casos, como tratado em diversos trabalhos. Conforme [54] uma característica de compressão mais geral, escrita em termos da energia de flutuação do vácuo e da incerteza de Schrödinger-Robertson [4, 55–57]. Temos então um valor de máximo ou mínimo das variâncias escrita na forma,

$$\sigma_{\pm} = \mathcal{E} \pm \sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathcal{D}} = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{E} \mp \sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathcal{D}}}, \quad (4.14)$$

sendo os valores da energia das flutuações do vácuo \mathcal{E} e do invariante de incerteza dados em termos σ_x e σ_p pelas equações

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_p), \quad \mathcal{D} = \sigma_x \sigma_p - \sigma_{xp}^2. \quad (4.15)$$

Portanto, o coeficiente invariante de compressão \mathcal{S} é definido como a razão entre o valor mínimo σ_- e o valor da variância adimensional do vácuo $1/2$. Em termos dos elementos da matriz das covariâncias \mathcal{M} , cuja evolução dinâmica está perfeitamente determinada através da matriz $\Lambda(t)$, o coeficiente de compressão assume a forma

$$\mathcal{S}_k = 2 \left[\mathcal{E}_k - \sqrt{\mathcal{E}_k^2 - \mathcal{D}_k} \right] = 2\mathcal{D}_k \left[\mathcal{E}_k + \sqrt{\mathcal{E}_k^2 - \mathcal{D}_k} \right], \quad (4.16)$$

no qual

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}(\mathcal{M}_{pp}^k + \mathcal{M}_{xx}^k), \quad \mathcal{D}_k = \mathcal{M}_{xx}^k \mathcal{M}_{pp}^k - [\mathcal{M}_{xp}^k]^2, \quad (4.17)$$

onde este último é conhecido como produto invariante de incerteza, e precisa satisfazer a incerteza de Schrödinger-Robertson

$$\mathcal{D}_k = \mathcal{M}_{xx}^k \mathcal{M}_{pp}^k - [\mathcal{M}_{xp}^k]^2 \geq \frac{1}{4}. \quad (4.18)$$

Particularmente, os estados com *grande energia de flutuações* estão sempre *fortemente comprimidos* se o produto invariante de incerteza for bem menor que esta energia. Ou seja, temos sempre $\mathcal{S} \approx \mathcal{D}/\mathcal{E} \ll 1$ se $\mathcal{E} \gg \mathcal{D}$, o que acontece para estados gaussianos puros para os quais $\mathcal{D} \equiv 1/4$ [55]. No instante inicial $t = 0$, a matriz das covariâncias pode ser escrita na forma

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 & 0 & \mathcal{R}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_2 & 0 & \mathcal{R}_2 \\ \mathcal{R}_1 & 0 & \mathcal{X}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2 & 0 & \mathcal{X}_2 \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

com os seus elementos satisfazendo as relações de incerteza de Schrödinger-Robertson

$$\mathcal{P}_k \mathcal{X}_k - \mathcal{R}_k^2 \equiv 4\mathcal{D}_k^{(0)} \geq 1, \quad (4.20)$$

para cada um dos modos $k = 1, 2$. Sem perdas de generalidade podemos introduzir a parametrização para os elementos da matrix \mathcal{M} na forma

$$\mathcal{P}_k = 2\vartheta_k [\cosh(2\xi_k) + \sinh(2\xi_k) \cos(v_k)], \quad (4.21)$$

$$\mathcal{X}_k = 2\vartheta_k [\cosh(2\xi_k) - \sinh(2\xi_k) \cos(v_k)], \quad (4.22)$$

$$\mathcal{R}_k = -2\vartheta_k \sinh(2\xi_k) \sin(v_k), \quad \mathcal{U}_k = \mathcal{P}_k - \mathcal{X}_k, \quad (4.23)$$

com $\vartheta_k = \sqrt{\mathcal{D}_k^{(0)}} = \eta/2 \geq 1/2$, $v_k \leq 2\pi$ e $\xi_k \geq 0$. Considerando esta parametrização, o coeficiente invariante de compressão para o k -ésimo modo no instante inicial é dado por

$$\mathcal{S}_k^{(0)} = 2\vartheta_k \exp(-2|\xi_k|) \equiv \eta_k \exp(-2|\xi_k|), \quad (4.24)$$

e a energia de flutuação do vácuo no instante *inicial* expressa como

$$\mathcal{E}_k^{(0)} = \frac{1}{4} (\mathcal{P}_k + \mathcal{X}_k) = \vartheta_k \cosh(2\xi_k). \quad (4.25)$$

Notemos que tanto $\mathcal{S}_k^{(0)}$ quanto $\mathcal{E}_k^{(0)}$ estão parametrizados em termos da incerteza inicial de Schrödinger-Robertson $\mathcal{D}_k^{(0)}$ por meio do parâmetro ϑ_k (ou η_k) e quando consideramos estados iniciais puros temos $\mathcal{D}_k^{(0)} = 1/4$, equivalente a $\vartheta_k = 1/2$. Além disso, ambos os valores destas quantidades iniciais independem da fase v_k . Na nossa parametrização dos estados iniciais estamos assumindo os ξ_k reais não negativos, de maneira que a fase v_k é a única responsável por mudanças de sinais nas equações (4.21, 4.22 e 4.23). Em particular podemos supor que não haja qualquer correlação, não só entre os modos, como também entre as componentes de quadraturas de cada modo. Isto pode ser conseguido facilmente aplicando rotações no espaço de fase de cada um dos modos de maneira que a matriz das covariâncias (4.19) assume a forma diagonal com $\mathcal{R}_k = 0$. A seguir fazemos uma análise preliminar das propriedades referentes a cada um dos modos e a respeito de suas medidas de correlação, nas condições onde o efeito da excitação paramétrica está presente e ausente.

4.3 Propriedades dos estados e medidas de correlação quântica

O emaranhamento quântico é um fenômeno da mecânica quântica no qual o estado quântico de dois ou mais objetos tem que ser descrito com referência, um ao outro, embora os objetos, individualmente, possam estar espacialmente separados. Isso leva a correlações entre as propriedades físicas observáveis dos sistemas e são elas que queremos definir. Conforme em muitos trabalhos em que utilizou-se o método dos invariantes quânticos, definiu-se uma forma de determinar medida de emaranhamento [58]. Aqui iremos expor mais diretamente a medida de correlação quântica omitindo alguns cálculos que são extremamente

tediosos e suas demonstrações explícitas estão, em um primeiro momento, fora dos objetivos desta dissertação.

É bastante conhecido que os estados Gaussianos são caracterizados completamente tanto pelos valores médios quanto pelos valores das variâncias dos operadores bosônicos de "aniquilação e criação" [4, 43, 59, 60].

$$\hat{a}_k = (\hat{x}_k + i\hat{p}_k)/\sqrt{2}, \quad k = 1, 2. \quad (4.26)$$

ou dos operadores das componentes de quadraturas $(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Temos as covariâncias simétricas reais na forma

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \langle \hat{q}_\mu \hat{q}_\nu + \hat{q}_\nu \hat{q}_\mu \rangle - \langle \hat{q}_\mu \rangle \langle \hat{q}_\nu \rangle \quad (4.27)$$

onde \hat{q}_α são componentes do vetor $\hat{\mathbf{q}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Assim, é possível escrever as covariâncias cruzadas na matriz simétrica em termos de matrizes blocos. Porém podemos ainda expressar a forma geral da matriz das covariâncias numa forma matricial elegante em uma forma conveniente rearranjando as componentes do vetor $\hat{\mathbf{q}}$ definido na equação (4.4), introduzindo o vetor $q = (\hat{x}_1, \hat{p}_1, \hat{x}_2, \hat{p}_2)$. Este rearranjo não implica em problemas adicionais do ponto de vista operacional porque se trata simplesmente de uma transformação de similaridade aplicada a representação de Schrödinger e utilizada para escrever os operadores na forma matricial de forma conveniente. Assim sendo, a matriz das covariâncias

$$\mathcal{Q}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \langle \hat{q}_\alpha \hat{q}_\beta + \hat{q}_\beta \hat{q}_\alpha \rangle - \langle \hat{q}_\alpha \rangle \langle \hat{q}_\beta \rangle = \overline{\hat{q}_\alpha \hat{q}_\beta},$$

rearranjadas assume a seguinte estrutura de blocos de matrizes

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Estes blocos possuem a propriedade $Q_{jk} = \tilde{Q}_{kj}$, onde til significa transposição da matriz. Os valores $\overline{\hat{x}_1 \hat{x}_2}$, $\overline{\hat{p}_1 \hat{p}_2}$, $\overline{\hat{x}_1 \hat{p}_2}$ e $\overline{\hat{x}_2 \hat{p}_1}$ são as covariâncias cruzadas que sob evolução temporal assumem valores diferentes de zero, significando que há uma correlação quântica entre os modos. Considerando nosso modelo de osciladores acoplados sob efeito de uma excitação paramétrica quântica com as soluções de matrizes λ 's bem definidas, pudemos observar, por exemplo, o efeito da excitação paramétrica no primeiro oscilador $\omega_1(t)$ nas energias de flutuação do vácuo de cada um dos modos, $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} (\mathcal{M}_{pp}^k + \mathcal{M}_{xx}^k)$. Será verificado que a excitação paramétrica quântica descrita por soluções regulares dos elementos das matrizes λ 's, como uma perturbação de natureza externa, altera significativamente o valor das energias de flutuação para cada um dos modos do nosso sistema. Este resultado preliminar também está claramente observado e discutido em [61,62]. Porém, o mérito de nosso estudo está na aplicação do método das escalas múltiplas na construção das soluções regulares das

matrizes λ' s, utilizadas na construção das matrizes das covariâncias, cuja forma explícita pode ser vista no apêndice C.1. Para as nossas soluções de matrizes λ' s, as energias de flutuação do vácuo de cada um dos modo são dadas por

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1(\tau) &= \frac{1}{2} \left\{ [\eta_1 C_1(\tau_\beta) \delta^2 + \rho^2 \eta_2 C_2(\tau_\beta)] \frac{\text{sen}^2(\tau)}{\alpha^2} + \delta \eta_1 C_3(\tau_\beta) \frac{\text{sen}(2\tau)}{\alpha} + \eta_1 C_1(\tau_\beta) \cos^2(\tau) \right\}, \\ \mathcal{E}_2(\tau) &= \frac{1}{2} \left\{ [\eta_1 C_2(\tau_\beta) \delta^2 + \rho^2 \eta_2 C_1(\tau_\beta)] \frac{\text{sen}^2(\tau)}{\alpha^2} - \delta \eta_2 C_4(\tau_\beta) \frac{\text{sen}(2\tau)}{\alpha} + \eta_2 C_2(\tau_\beta) \cos^2(\tau) \right\},\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}C_i(\tau_\beta) &= \text{sen } v_i \sinh(2\xi_i) \sinh(2\tau_\beta) + \cosh(2\xi_i) \cosh(2\tau_\beta), \\ C_j(\tau_\beta) &= \text{sen } v_j \sinh(2\xi_j) \cosh(2\tau_\beta) + \cosh(2\xi_j) \sinh(2\tau_\beta).\end{aligned}$$

onde $i = 1, 2$, $j = 3, 4$, $\tau_\beta = \epsilon\beta\tau$ e $\beta = \delta/\alpha$, dado em termos dos valores de acoplamento. É importante esclarecer que consideramos apenas o valor de $\phi = 0$ simplesmente para facilitar as expressões dos cálculos para as medidas de compressão, pureza e medidas de emaranhamento. Os resultados para o caso onde ϕ assume um valor arbitrário podem ser obtidos diretamente das soluções dos elementos das matrizes λ' s, a partir de cálculos um pouco mais elaborados. Da mesma forma, fizemos para as produtos invariantes de incertezas de Schrödinger, referentes a cada um dos modos. As incertezas são dadas então por

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_1(\tau) &= \frac{\text{sen}^2(\tau)}{4\alpha^2} \left\{ (\delta^4 \eta_1^2 + \rho^4 \eta_2^2 + 2\delta^2 \rho^2 B_{1+} \eta_2 \eta_1) \frac{\text{sen}^2(\tau)}{\alpha^2} + 2\delta \rho^2 B_2 \eta_1 \eta_2 \frac{\text{sen}(2\tau)}{\alpha} \right. \\ &\quad \left. - \cos^2(\tau) ((2\delta^2 + \alpha^2) \eta_1^2 + 2\eta_1 \eta_2 \rho^2 B_{1-}) \right\} + \frac{1}{4} \eta_1^2 \cos^2(\tau), \\ \mathcal{D}_2(\tau) &= \frac{\text{sen}^2(\tau)}{4\alpha^2} \left\{ (\delta^4 \eta_2^2 + \rho^4 \eta_1^2 + 2\delta^2 \rho^2 B_{1+} \eta_2 \eta_1) \frac{\text{sen}^2 \tau}{\alpha^2} + 2\delta \rho^2 B_2 \eta_1 \eta_2 \frac{\text{sen}(2\tau)}{\alpha} \right. \\ &\quad \left. - \cos^2(\tau) ((2\delta^2 + \alpha^2) \eta_2^2 + 2\eta_1 \eta_2 \rho^2 B_{1-}) \right\} + \frac{1}{4} \eta_2^2 \cos^2(\tau),\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}B_{1\pm} &= \cos(v_1 \pm v_2) \sinh(2\xi_1) \sinh(2\xi_2) \pm \cosh(2\xi_2) \cosh(2\xi_1), \\ B_2 &= \text{sen } v_1 \cosh(2\xi_2) \sinh(2\xi_1) - \text{sen } v_2 \cosh(2\xi_1) \sinh(2\xi_2).\end{aligned}$$

A partir das formas analíticas dos coeficientes $\mathcal{E}_k(\tau)$ e $\mathcal{D}_k(\tau)$ para cada um dos modos ($k = 1, 2$), pudemos fazer uma análise preliminar de alguns aspectos qualitativos do efeito da excitação paramétrica quântica no comportamento dinâmico do sistema. Qualitativamente, temos para as energias de flutuação do vácuo \mathcal{E}_k os gráficos na figura (4.1) comparando as situações com a presença e ausência da excitação paramétrica quântica. Pela figura (4.1) observamos claramente que o efeito excitação paramétrica para $\delta = 0,05$. Há um aumento quase exponencial do valor da energia de flutuação do vácuo para cada um dos

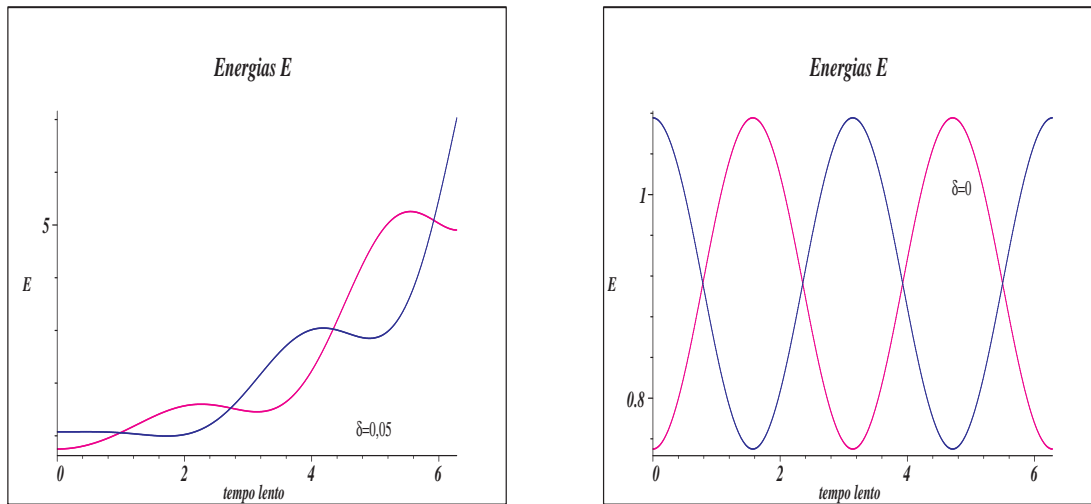


Figura 4.1: A curva em azul representa o modo 1 e a curva em magenta o modo 2 para as medidas de energias $\mathcal{E}_k(\tau)$, respectivamente para $\delta = 0,05$ e $\delta = 0$. Utilizamos $\eta_1 = 1,0$ (estado puro), $\eta_2 = 1,5$ (estado misto) com intensidade de acoplamento dos modos $\rho = 0,25$ e coeficientes reais de compressão $\xi_1 = 0,7$ e $\xi_2 = 0,0$.

modos acoplados. Por outro lado, na ausência da excitação paramétrica, quando $\delta = 0$, observamos um padrão bem definido de troca de valores de \mathcal{E}_k entre os modos acoplados, ao longo do tempo lento τ . Nesta situação o sistema está na condição de ressonância, $\omega_1 = \omega_2 = 1$; a energia de cada um dos modos varia de forma periódica no tempo, limitadas aos valores dos estados iniciais. Isto sugere que sob efeito da excitação paramétrica a informação pertinente a energia de cada um dos modos sofre considerável modificação em relação ao valor inicialmente presente nos estados Gaussianos em $t = 0$. Consideramos também o efeito da excitação paramétrica quântica nos produtos invariantes de incertezas \mathcal{D}_k . A excitação paramétrica quântica destrói o padrão de troca dos valores iniciais de incertezas, porém permite a recorrência de valores em instante bem definidos do tempo, conforme ilustrado na figura (4.2). No entanto, diferentemente das energias de flutuação do vácuo, os produtos invariantes de incerteza permanecem com seus valores *limitados* no decorrer da evolução dinâmica do sistema.

4.3.1 Análise qualitativa da medida da pureza e compressão dos modos do sistema sob excitação paramétrica quântica

Para uma análise qualitativa dos resultados envolvendo as medidas de pureza e compressão, definimos primeiro os procedimentos necessários para determiná-las. A medida de compressão \mathcal{S}_k está precisamente determinadas pela equação (4.16), onde as energias de flutuação do vácuo e as produtos de invariantes de incerteza também estão bem definidos

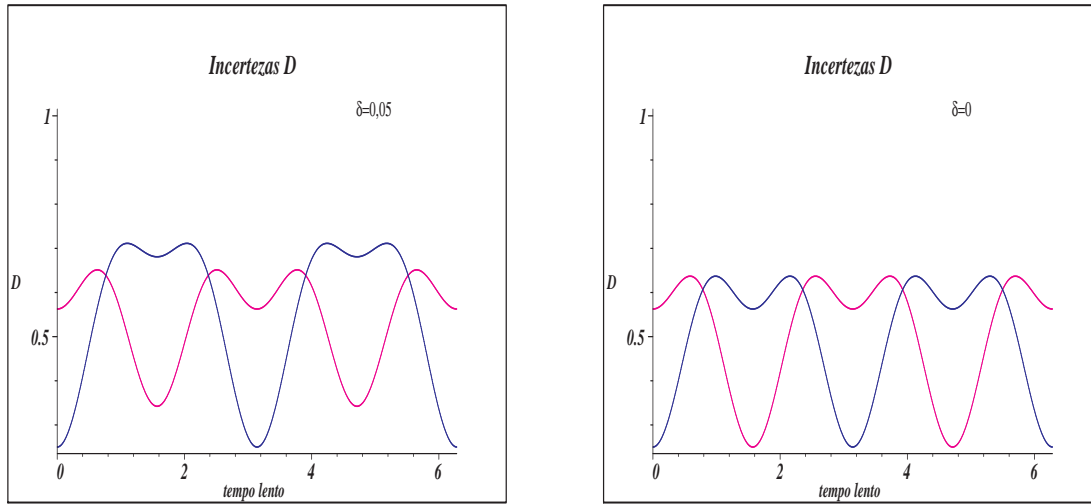


Figura 4.2: A curva em azul representa o valor da medida de incerteza \mathcal{D} para o modo 1 e a curva em magenta o valor para o modo 2, para $\delta = 0,05$ e $\delta = 0,0$, respectivamente. Consideramos estados iniciais com $\eta_1 = 1,0$ (estado puro) e $\eta_2 = 1,5$ (estado misto), com intensidade de acoplamento entre os modos $\rho = 0,25$, coeficientes reais de compressão $\xi_1 = 0,7$ e $\xi_2 = 0,0$.

conforme a equação (4.17). De acordo com a ilustração da figura 4.3 temos duas situações bem distintas: uma quando há a influência da excitação paramétrica quântica e outra quando as frequências dos modos são constantes na condição de ressonância. O efeito da excitação paramétrica quântica é diminuir o valor do coeficiente de compressão para cada um dos modos. Isto está associado ao fato das energias de flutuações do vácuo de ambos os modos terem seus valores acrescido no tempo τ enquanto os valores dos produtos de incertezas apresentarem seus valores limitados no decorrer da evolução dinâmica do sistema. Isto difere de forma drástica do que ocorre na ausência da excitação paramétrica quântica. Quando temos $\delta = 0$ e a condição de ressonância $\omega_1 = \omega_2 = 1$ se verificando, observamos claramente um padrão de troca de valores de compressão dos estados Gaussianos iniciais. Isto obviamente se deve ao fato do sistema estar isolado. Porém, uma análise de caráter analítico (quantitativa) mais detalhada se faz necessária, para a compreensão exata dos processos envolvidos na dinâmica da compressão em cada um dos modos, levando em conta diferentes valores de parâmetros de estados iniciais, diferentes valores de constantes de acoplamento entre os modos e valores distintos de intensidade de excitação paramétrica quântica. Este balanço mais detalhado está sendo considerado no momento e os resultados obtidos estarão sendo apresentados em breve. A evolução temporal do valor dos coeficientes de pureza para cada um dos modos é determinada a partir da evolução temporal dos seus

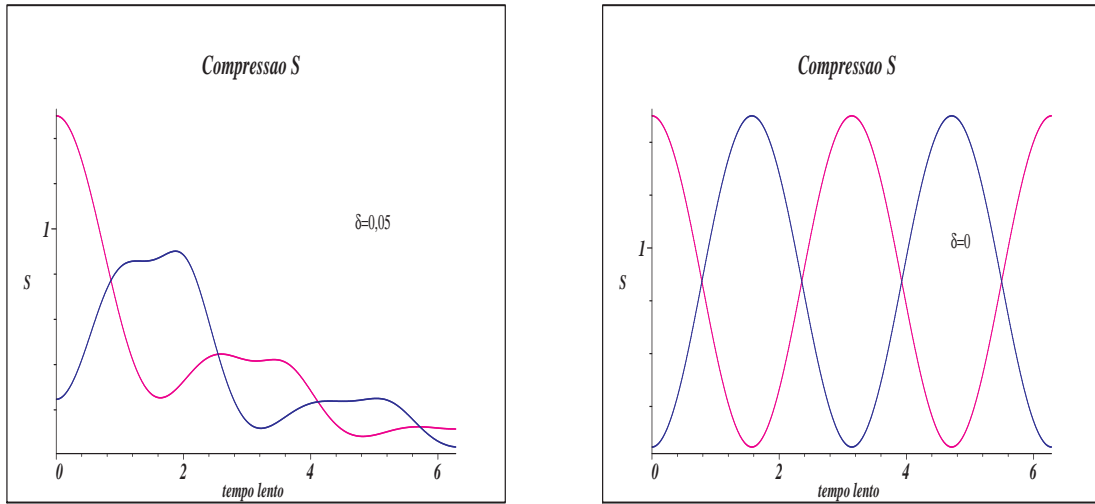


Figura 4.3: A curva em azul e magenta, representam respectivamente, as medidas de compressão do modo 1 e do modo 2. Consideramos as duas situações quando $\delta = 0,05$ e $\delta = 0,0$ (ausência de excitação). Consideramos estados Gaussianos iniciais com $\eta_1 = 1,0$ (estado puro), $\eta_2 = 1,5$ (estado misto), coeficientes reais de compressão $\xi_1 = 0,7$, $\xi_2 = 0,0$ e intensidade de acoplamento $\rho = 0,25$.

respectivos produtos invariantes de incerteza conforme a equação

$$\mathcal{P}_k(\tau, \tau_\beta) = \frac{1}{\sqrt{4\mathcal{D}_k(\tau, \tau_\beta)}}.$$

De acordo com a figura (4.4), primeiramente observamos que a pureza tem seu valor limitado no decorrer do tempo, em perfeito acordo com condição

$$0 < \mathbf{Tr}\rho_k^2 \leq 1, \quad (4.29)$$

para os operadores densidades reduzidos de cada um dos modos. Na ausência de excitação paramétrica quântica observamos claramente um padrão de troca de valores de pureza dos estados iniciais Gaussianos em instantes bem definidos

$$\tau = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.30)$$

e recorrência de valores iniciais nos instantes τ dados por

$$\tau = n\pi \quad (4.31)$$

No entanto quando temos $\delta \neq 0$ observamos a ausência da troca de valores de pureza dos estados Gaussianos iniciais embora os valores sejam recorrentes. Isto é, cada um dos modos retorna ao seu valor inicial de pureza em instantes bem definidos. A excitação paramétrica

quântica parece inibir a troca de valores de pureza dos estados Gaussianos iniciais. No entanto nesta análise numérica preliminar não consideramos de forma detalhada os aspectos analíticos para valores arbitrários de parâmetros de estados iniciais, diferentes valores de acoplamento e intensidade de excitação paramétrica quântica. Isto está sendo considerado neste momento para obtermos resultados gerais e conclusivos para nosso modelo.

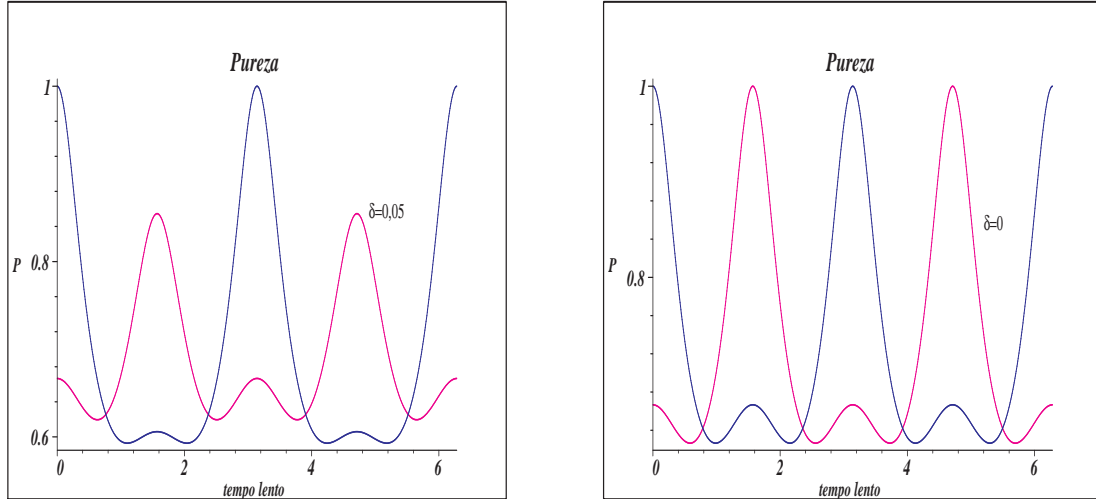


Figura 4.4: Temos as medidas de pureza do modo 1 e 2 representadas, respectivamente, pelas curvas em azul e em magenta. Consideramos os valores $\delta = 0$ e $\delta = 0,05$ e para os estados iniciais temos $\eta_1 = 1,0$ (estado puro), $\eta_2 = 1,5$ (estado misto), $\xi_1 = 0,7$ e $\xi_2 = 0,0$ e acoplamento $\rho = 0,25$.

4.3.2 Análise qualitativa da medida de emaranhamento

Notemos, obviamente, que a informação referente ao emaranhamento dos modos do sistema está contida nos blocos das covariâncias cruzadas Q_{12} e Q_{21} , que são os elementos que expressam a natureza e intensidade da correlação entre os modos. Em estudos recentes foi demonstrado que o determinante destes blocos assume um papel fundamental no problema da separabilidade em mecânica quântica [61, 63–67]. Conforme definido por Castro e Dodonov ([54]) a medida de emaranhamento \mathcal{Y} dos modos a ser considerada em nossa análise é definida em termos dos blocos das covariâncias cruzadas Q_{12} de acordo com a equação

$$\mathcal{Y} = \left[\frac{\text{Tr}(Q_{12}Q_{21})}{\text{Tr}(Q_{11})\text{Tr}(Q_{22})} \right]^{1/2}, \quad (4.32)$$

onde temos para a energia de flutuação do vácuo a forma $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}\text{Tr}(Q_{kk})$. É importante ter em mente a existência de muitas outras definições de medidas de emaranhamento, todas baseadas em diferentes tipos de entropias, mas principalmente na definição de von

Neumann e suas variantes [68–73]. Portanto, uma vez conhecida uma proposta de medida de emaranhamento dos modos do sistema, focalizada na medida entrópica e estabelecida na relação com a matriz das covariâncias, cuja evolução temporal está determinada a partir da matriz $\Lambda(t)$, resta-nos para a completa análise da dinâmica quântica dos modos acoplados considerar o efeito da excitação paramétrica quântica no emaranhamento. Utilizando então os resultados obtidos na seção 4.1 e 4.2 conjuntamente com as soluções das matrizes λ' s, construímos os elementos das matrizes das covariâncias $\mathcal{M}(t)$, e a partir destes elementos de matriz, analisamos a evolução na escala de tempo τ da medida de emaranhamento (4.32) dos modos acoplados. Desta forma, considerando apenas aspectos qualitativos de nossa medida, temos para o caso sem excitação paramétrica $\delta = 0$ e com excitação paramétrica $\delta \neq 0$ os gráficos descritos nas figuras (4.5)-(4.6). Na figura (4.5) comparamos o caso de excitação paramétrica *muito fraca* com o caso $\delta = 0$. O sistema deveria se desemaranhar nos instantes $\tau_n = (n + 1/2)\pi$, mas isso não está ocorrendo devido a pequena perturbação $\delta = 0,005$. Isto verifica-se somente com $\delta = 0$ quando $\mathcal{Y}(\tau_n) = 0$. Desta forma podemos dizer que a excitação paramétrica tende a manter o sistema correlacionado de forma a inibir a troca de compressão e pureza entre os modos. Além disso, a medida que a intensidade

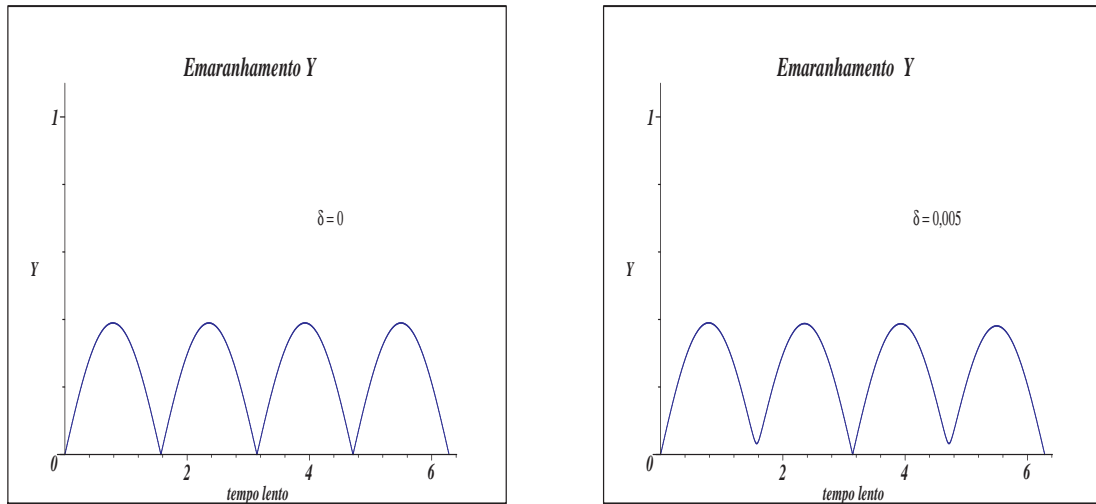


Figura 4.5: Medidas de emaranhamento sem a excitação paramétrica quântica e com uma intensidade de excitação paramétrica quântica pequena $\delta = 0,005$. Os estados Gaussianos iniciais são caracterizados pelos valores $\eta_1 = 1,0$, $\eta_2 = 1,5$, $\xi_1 = 0,7$ e $\xi_2 = 0,0$ com intensidade de acoplamento entre os modos $\rho = 0,25$.

da excitação paramétrica quântica aumenta, tomando-se os valores $\delta = 0,01$ e $\delta = 0,05$, a intensidade da medida de correlação (4.32) tende a manter um valor mais elevado entres os instantes inicial e de recorrenência, quando a configuração inicial do sistema é recuperada. Isto está ilustrado na figura (4.6). Este resultados são preliminares e apenas descrevem de forma qualitativa os efeitos da excitação paramétrica quântica no problema da troca

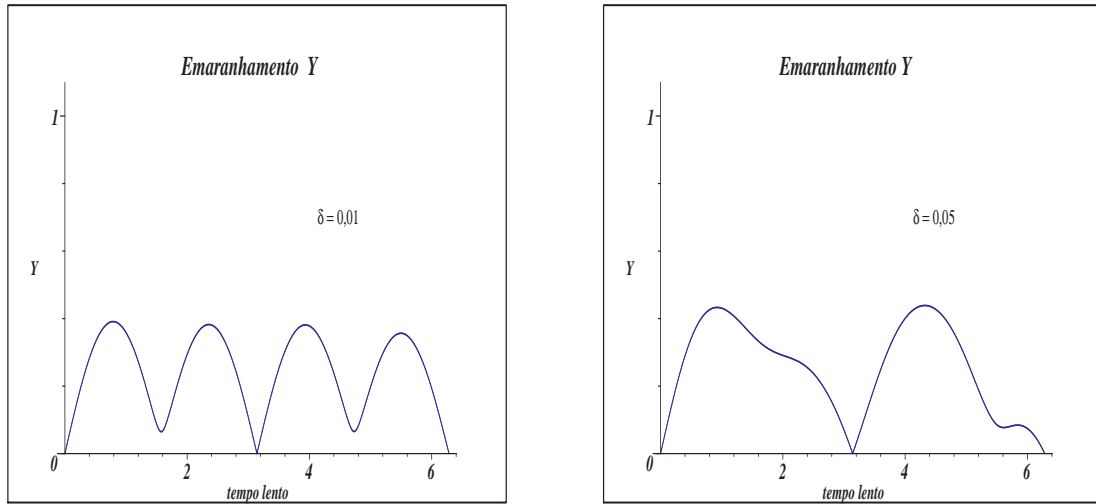


Figura 4.6: Medidas de emaranhamento com excitação paramétrica quântica de intensidades $\delta = 0,01$ e $\delta = 0,05$. Os estados Gaussianos iniciais são caracterizados pelos valores $\eta_1 = 1,0$, $\eta_2 = 1,5$, $\xi_1 = 0,7$ e $\xi_2 = 0,0$ com intensidade de acoplamento entre os modos $\rho = 0,25$.

de informação entre os modos acoplados. Uma análise mais criteriosa é necessária para a compreensão exata do emaranhamento (sob efeito de excitação paramétrica) buscando uma descrição não só qualitativa mas como quantitativa do mesmo. Neste sentido, o estudo do comportamento dinâmico do critério de separabilidade de Simon, bem como da negatividade logarítmica (medida apropriada para o nosso sistema de variáveis contínuas) são essenciais para se chegar a conclusões definitivas, relacionadas aos efeitos da excitação paramétrica quântica no emaranhamento do sistema. Esta é uma tarefa que estamos considerando no momento, cujos resultados serão apresentados em breve, porém fora desta dissertação.

4.4 Alguns Experimentos

O principal instrumento na descrição quântica da radiação eletromagnética é a sua distribuição de probabilidades de fótons, ou mais, o seu operador-densidade. Medições de graus de coerência quânticos por experimentos de interferometria [74] fornecem uma parte de informação a respeito dos elementos da matriz do operador estatístico ou densidade. Informações adicionais são obtidas através de experimentos de contagem de fótons, ou fotocontagem. Experimentos de fotocontagem fornecem uma medida bastante direta da distribuição de probabilidades de fótons para todos os tipos de luz descritos pela teoria quântica. Tais experimentos formam a base observacional de ótica quântica e têm um papel fundamental no estudo de fenômenos quânticos nos feixes de luz. O arranjo experimental

básico que poderemos expor sem muito rigor, é o seguinte. Um feixe de luz sob investigação é manipulado de modo a incidir sobre um detector, um fototubo conectado por um meio eletrônico a um instrumento contador, que registra o número de fótons ao produzir emissões fotoelétricas no fototubo [75–77]. Desde que o experimentador seja capaz de reproduzir repetidamente um campo nas mesmas condições, este experimento é repetido um grande número de vezes e o resultado pode ser expresso como distribuição de probabilidades $P_n(T)$ para n contagens durante o tempo de observação T . A distribuição medida $P_n(T)$ contém a informação sobre propriedades estatísticas de radiação.

Existem duas abordagens diferentes para a teoria de fotodeteção verificadas na literatura. A primeira delas foi iniciada por Mandel [78] e seguida por Kelley e Kleiner [79], Glauber [80] e outros. Ela descreve experimentos em que um feixe propaga-se em espaço aberto, incide sobre o detector, e cada fóton não absorvido é perdido. Tal descrição foi classificada por Mandel [81] como modelo de sistema aberto. A segunda abordagem foi iniciada por Mollow [82] e seguida por Scully e Lamb [83], Shepherd [84], Selloni et al. [85], Srinivas e Davies [86] e outros. Nesta abordagem, considera-se que a radiação e o fotodetector encontram-se em uma cavidade fechada, e cada fóton não absorvido pelo detector em um dado tempo está disponível para detecção em um tempo posterior. Por motivos óbvios Mandel chamou este modelo de modelo de sistema fechado [81]. A diferença entre as duas abordagens acima é bastante clara quando consideramos os resultados de fotodeteção para tempos de detecção grandes: no caso de sistema fechado, o número de fótons detectados tende a um limite, dado pelo número de fótons presentes inicialmente na cavidade. Já no caso do modelo de sistema aberto, o número de fótons detectados cresce ilimitadamente, pois a radiação atinge continuamente a superfície do detector. Na prática, o arranjo experimental correspondente ao modelo de sistema aberto tem sido predominante nos experimentos de contagem de fótons até agora, devido a sua simplicidade, pois ele exige apenas a presença de um detector e de uma fonte de radiação. No entanto, com o desenvolvimento científico e tecnológico, o modelo de sistema fechado vem se tornando fundamental no estudo de processos em que são contados poucos fótons, como ocorre em várias áreas atuais de ótica quântica [87–89]. No entanto, tais experimentos esbarram em dificuldades técnicas, já que nesses experimentos são necessárias cavidades óticas com alto fator de qualidade [90], que sejam capazes de armazenar os fótons por um tempo suficientemente grande a ponto de serem detectados. Por intermédio da fotocontagem um grande número de experimentos pode ser realizado, determinando características como a energia de um campo de luz, suas propriedades estatísticas, tais como estados de campo e a determinação de quadraturas através de mecanismos de detecção homódina [75]- [91,92].

Efeitos Paramétricos em tais experimentos podem ser descritos resumidamente em considerar um material piezoelétrico que constitui a cavidade de modo que um feixe de luz é

incidente. Desta forma com a passagem de uma certa corrente elétrica sobre o material cria oscilações nas paredes desta cavidade conseqüentemente o campo eletromagnético no interior da cavidade sofre pequenas perturbações que podem ser tanto nas frequências dos modos como na intensidade de acoplamento.

4.5 Conclusão

Neste capítulo analisamos qualitativamente o comportamento de medidas de correlação, energia, incerteza, compressão e pureza de sistemas quânticos abertos bipartites, cuja evolução é governada por Hamiltonianos quadráticos arbitrários (mesmo dependentes do tempo), mostrando que a dinâmica física de tais sistemas é completamente determinada pela dependência temporal do determinante da matriz de covariâncias cruzadas. Nós analisamos a evolução temporal para Hamiltonianos dependentes de tempo, descrevendo a conversão e a amplificação paramétricas e o processo misto de amplificação-conversão, que corresponde ao caso de uma cavidade específica (por exemplo cúbica), já vista na literatura, com uma extremidade oscilando ressonantemente. Por outro lado, é bem conhecido que os problemas dependentes do tempo são isomórficos aos problemas de transformações de estados quânticos por algum mecanismo de multiportas óptico, tais como divisor de feixes, interferômetro ou misturador multi-ondas. Recentemente, tais equipamentos foram estudados de ponto de vista de geração de estados emaranhados. Portanto a análise do problema dependente de tempo pode ser facilmente reformulada em termos de mecanismos ópticos multiportas após pequenas modificações na terminologia e redefinição do significado de alguns parâmetros. Em particular, um resultado bem conhecido é que dois modos podem ser emaranhados com a adição de um divisor de feixes (que é equivalente a algum conversor paramétrico), se pelo menos um deles estiver em um estado não clássico (comprimido), com coeficiente de compressão bastante grande.

Capítulo 5

Conclusões Finais

Neste trabalho abordamos de maneira resumida a teoria do propagador para o caso particular dos operadores Hamiltonianos quadráticos. Revisamos os conceitos de invariantes quânticos e abordamos os pontos centrais necessários à compreensão do problema, uma vez que esta formulação está perfeitamente definida na literatura e para o problema em estudo é relevante apenas a forma final do propagador e sua aplicabilidade. Como exemplo simples, ilustramos o método dos invariantes quânticos aplicado a um dos problemas fundamentais da física quântica teórica: o oscilador harmônico quântico unidimensional.

Mostramos como a sua solução se resume na determinação das matrizes $\Lambda(t)$ e $\Delta(t)$, elementos fundamentais da dinâmica do sistema, obtidas a partir da solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias *para funções escalares do tempo*.

Mostramos também que nosso modelo de trabalho, surge das transformações de coordenadas de um hamiltoniano mais geral. Onde o efeito paramétrico em uma das frequências dos modos acoplados, nos sugerem buscar soluções perturbativas, como o método das escalas múltiplas, para a solução de matrizes λ 's, onde o papel da equação de Mathieu é fundamental, tanto na versão clássica como quântica.

Utilizamos o método das escalas múltiplas no que se refere ao problema envolvendo a troca de estados quânticos de dois modos do campo eletromagnético, modelados por osciladores quânticos acoplados, onde em especial, um dos osciladores possui uma frequência que varia perturbativamente no tempo, e o acoplamento destes osciladores se processa no limite de interações fracas.

Tal método nos levou a uma simplificação das equações diferenciais para as matrizes λ 's, que são fundamentais para o cálculo do propagador e portanto para a análise do problema da troca de informação quântica em modos acoplados. Dada a complexidade do problema proposto, uma compreensão básica do método das escalas múltiplas foi necessária de forma que exemplificamos sua utilização tanto no contexto clássico como no contexto quântico.

Em síntese, mostramos que o método das escalas múltiplas tem como idéia central a

transformação das equações diferenciais do problema a ser abordado, sendo ela linear ou não, em uma série de equações diferenciais *lineares* solúveis de forma *iterativa*.

Com a solução das equações diferenciais para as matrizes λ 's obtidas, as medidas de correlação, pureza e compressão dos modos também podem ser determinadas. Comparamos as situações na condição de ressonância dos modos sob excitação paramétrica e sem excitação para as medidas de compressão, pureza e emaranhamento observando que o fato de termos uma das frequência variando no tempo, a troca de informação quântica é “destruída”.

A análise teve um caráter mais qualitativo do que quantitativo, pois nosso interesse principal era verificar qualitativamente as implicações físicas dos efeitos da excitação paramétrica quântica no problema da troca de informação quântica. Um caso quantitativo poderá ser tratado em trabalhos futuros bem como outras medidas de troca de informação, especificamente no que se refere as medidas de emaranhamento através dos cálculos da negatividade logarítmica. Cálculos que estão em fase final de elaboração.

Apêndice A

Hamiltonianos Quadráticos e o Propagador

Nesta seção dos apêndices descrevemos com um pouco mais de detalhes o formalismo aplicado para se determinar a forma geral do propagador para sistemas quânticos de N graus de liberdade descritos por hamiltonianos quadráticos. Esta descrição detalhada permite o leitor a compreensão exata dos procedimentos necessários para o entendimento dos resultados apresentados no capítulo 2 desta dissertação.

A.1 Hamiltoniano

Um operador hamiltoniano na forma quadrática para um sistema de dois graus de liberdade pode ser escrito na forma

$$H = \begin{bmatrix} \hat{p}_1 & \hat{p}_2 & \hat{x}_1 & \hat{x}_2 \end{bmatrix} [B_{ij}(t)]_{4 \times 4} \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + [C_{ij}(t)]_{1 \times 4} \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

onde os elementos da matriz $B_{ij}(t)$ são os elementos das matrizes blocos $b_i(t)$, portanto, tomando-se os produtos matriciais, as matrizes blocos ficam definidas por:

$$B_{ij}(t) = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix}, \quad C_{ij}(t) = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{31} \\ C_{41} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

logo identificamos as matrizes blocos num espaço N -dimensional

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} B_{13} & B_{14} \\ B_{23} & B_{24} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} B_{31} & B_{32} \\ B_{41} & B_{42} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} B_{33} & B_{34} \\ B_{43} & B_{44} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

então tomando-se o produto em (A.1), temos

$$\begin{aligned}
H = \frac{1}{2} & [\hat{p}_1 B_{11} \hat{p}_1 + \hat{p}_1 B_{21} \hat{p}_2 + \hat{p}_1 B_{31} \hat{x}_1 + \hat{p}_1 B_{41} \hat{x}_2 \\
& + \hat{p}_2 B_{12} \hat{p}_1 + \hat{p}_2 B_{22} \hat{p}_2 + \hat{p}_2 B_{32} \hat{x}_1 + \hat{p}_2 B_{42} \hat{x}_2 \\
& + \hat{x}_1 B_{13} \hat{p}_1 + \hat{x}_1 B_{23} \hat{p}_2 + \hat{x}_1 B_{33} \hat{x}_1 + \hat{x}_1 B_{34} \hat{x}_2 \\
& + \hat{x}_2 B_{14} \hat{p}_1 + \hat{x}_2 B_{24} \hat{p}_2 + \hat{x}_2 B_{34} \hat{x}_1 + \hat{x}_2 B_{44} \hat{x}_2],
\end{aligned} \tag{A.4}$$

logo a forma geral compacta é obtida diretamente de (A.4)

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p} b_1 \hat{p} + \hat{p} b_2 \hat{x} + \hat{x} b_3 \hat{p} + \hat{x} b_4 \hat{x}) + c_1 \hat{p} + c_2 \hat{x}. \tag{A.5}$$

com a condição $b_1 = \tilde{b}_1$, $b_2 = \tilde{b}_3$ e $b_4 = \tilde{b}_4$, onde $B_{ij}(t) = B_{ji}(t)$

A.2 Comutador

Calculando-se o comutador do Hamiltoniano quadrático com o operador invariante, temos que

$$[\hat{H}, \hat{I}_\mu] = \left[\frac{1}{2} \hat{q}_\alpha B_{\alpha\beta}(t) \hat{q}_\beta + C_\alpha(t) \hat{q}_\alpha, \Lambda_{\mu\nu}(t) \hat{q}_\nu + \Delta_\mu(t) \right], \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{H}, \hat{I}_\mu] &= \left[\frac{1}{2} \hat{q}_\alpha B_{\alpha\beta}(t) \hat{q}_\beta + C_\alpha(t) \hat{q}_\alpha, \Lambda_{\mu\nu}(t) \hat{q}_\nu \right] + \left[\frac{1}{2} \hat{q}_\alpha B_{\alpha\beta}(t) \hat{q}_\beta + C_\alpha(t) \hat{q}_\alpha, \Delta_\mu(t) \right] \\
&= \left[\frac{1}{2} \hat{q}_\alpha B_{\alpha\beta}(t) \hat{q}_\beta + C_\alpha(t) \hat{q}_\alpha, \Lambda_{\mu\nu}(t) \hat{q}_\nu \right] \\
&= \left[\frac{1}{2} \hat{q}_\alpha B_{\alpha\beta}(t) \hat{q}_\beta, \Lambda_{\mu\nu}(t) \hat{q}_\nu \right] + [C_\alpha(t) \hat{q}_\alpha, \Lambda_{\mu\nu}(t) \hat{q}_\nu],
\end{aligned} \tag{A.7}$$

resolvendo primeiramente em (A.7)

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{2} \hat{q}_\alpha B_{\alpha\beta}(t) \hat{q}_\beta, \Lambda_{\mu\nu}(t) \hat{q}_\nu \right] &= \frac{1}{2} \Lambda_{\mu\nu}(t) [\hat{q}_\alpha B_{\alpha\beta}(t) \hat{q}_\beta, \hat{q}_\nu] \\
&= \frac{1}{2} \Lambda_{\mu\nu}(t) (B_{\alpha\beta}(t) \hat{q}_\beta [\hat{q}_\alpha, \hat{q}_\nu] + [B_{\alpha\beta}(t) \hat{q}_\beta, \hat{q}_\nu] \hat{q}_\alpha) \\
&= \frac{1}{2} \Lambda_{\mu\nu}(t) (-i\hbar B_{\alpha\beta}(t) \hat{q}_\beta \Sigma_{\alpha\nu} - i\hbar B_{\alpha\beta}(t) \Sigma_{\beta\nu} \hat{q}_\alpha) \\
&= i\hbar \frac{1}{2} (\Lambda_{\mu\nu}(t) \Sigma_{\nu\alpha} B_{\alpha\beta}(t) \hat{q}_\beta + \Lambda_{\mu\nu}(t) \Sigma_{\nu\beta} B_{\beta\alpha}(t) \hat{q}_\alpha) \\
&= i\hbar (\Lambda_{\mu\nu}(t) \Sigma_{\nu\beta} B_{\beta\alpha}(t) \hat{q}_\alpha)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[C_\alpha(t) \hat{q}_\alpha, \Lambda_{\mu\nu}(t) \hat{q}_\nu] &= \Lambda_{\mu\nu}(t) [C_\alpha(t) \hat{q}_\alpha, \hat{q}_\nu] \\
&= \Lambda_{\mu\nu}(t) ([\hat{q}_\alpha, \hat{q}_\nu] C_\alpha + \hat{q}_\alpha [C_\alpha, \hat{q}_\nu]) \\
&= i\hbar \Lambda_{\mu\nu}(t) \Sigma_{\nu\alpha} C_\alpha.
\end{aligned}$$

retornado à (A.7) temos que

$$[\hat{H}, \hat{I}_\mu] = i\hbar (\Lambda_{\mu\nu}(t)\Sigma_{\nu\beta}B_{\beta\alpha}(t)\hat{q}_\alpha + \Lambda_{\mu\nu}(t)\Sigma_{\nu\alpha}C_\alpha), \quad (\text{A.8})$$

A.3 Propagador

O cálculo do propagador dado na forma $G(x, x'; t, t_0)$ pode ser verificado aqui mais explicitamente. As equações diferenciais escritas nas formas dos operadores invariantes são colocadas desta maneira,

$$\left[\frac{\hbar}{i}\lambda_{1,jk}\frac{\partial}{\partial x_k} + \lambda_{2,jk}x_k + \delta_{1,j} \right] G(x, x'; t, t_0) = i\hbar\frac{\partial}{\partial x'_j}G(x, x'; t, t_0), \quad (\text{A.9})$$

$$\left[\frac{\hbar}{i}\lambda_{3,jk}\frac{\partial}{\partial x_k} + \lambda_{4,jk}x_k + \delta_{2,j} \right] G(x, x'; t, t_0) = x'_jG(x, x'; t, t_0). \quad (\text{A.10})$$

Admitindo o propagador na forma $G(x, x'; t, t_0) = G_1(x, x')G_2(x'; t, t_0)G_0(t, t_0)$ as equações em (A.10) tornam-se N equações diferenciais parciais em x com autovalores x' dadas por

$$\begin{aligned} G_2(x'; t, t_0)G_0(t, t_0) \left[\frac{\hbar}{i}\lambda_{3,jk}\frac{\partial G_1(x, x')}{\partial x_k} + \lambda_{4,jk}x_kG_1(x, x') + \delta_{2,j}G_1(x, x') \right] \\ = x'_jG_1(x, x')G_2(x'; t, t_0)G_0(t, t_0) \end{aligned}$$

$$\left[\frac{\hbar}{i}\lambda_{3,jk}\frac{\partial G_1(x, x')}{\partial x_k} + \lambda_{4,jk}x_kG_1(x, x') + \delta_{2,j}G_1(x, x') \right] = x'_jG_1(x, x'). \quad (\text{A.11})$$

Estas equações diferenciais sugerem para a solução $G_1(x, x')$ a forma exponencial $G_1(x, x') = \exp[g_1(x, x')]$.

$$\begin{aligned} -i\hbar\lambda_{3,jk}\frac{\partial g_1(x, x')}{\partial x_k} + \lambda_{4,jk}x_k + \delta_{2,j} &= x'_j \\ -i\hbar\frac{\partial g_1(x, x')}{\partial x_j} &= \frac{1}{\lambda_{3,j}}(x'_j - \delta_{2,j} - \lambda_{4,sl}x_l) \\ -i\hbar\frac{\partial g_1(x, x')}{\partial x_j} &= \lambda_{3,jl}^{-1}x'_l - \lambda_{3,j}^{-1}\delta_{2,j} - \lambda_{3,s}^{-1}\lambda_{4,sl}x_l. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Tomemos primeiramente a seguinte simplificação,

$$\lambda_{3,s}^{-1}\lambda_{4,sl}x_l = \frac{1}{2}(\lambda_{3,s}^{-1}\lambda_{4,sl}x_l) + \frac{1}{2}(\lambda_{3,s}^{-1}\lambda_{4,sl}x_l)$$

utilizando-se algumas identidades já demonstradas em (2.57) e (2.58),

$$\begin{aligned} \lambda_3\tilde{\lambda}_4 &= \lambda_4\tilde{\lambda}_3 & \lambda_3\tilde{\lambda}_4\tilde{\lambda}_3^{-1} &= \lambda_4\tilde{\lambda}_3\tilde{\lambda}_3^{-1} \\ \tilde{\lambda}_3^{-1}\lambda_3\tilde{\lambda}_4\tilde{\lambda}_3^{-1} &= \tilde{\lambda}_3^{-1}\lambda_4 & \tilde{\lambda}_4\tilde{\lambda}_3^{-1} &= \tilde{\lambda}_3^{-1}\lambda_4 \end{aligned}$$

temos,

$$\lambda_{3,s}^{-1} \lambda_{4,sl} x_l = \frac{1}{2} \left(x_l \tilde{\lambda}_{4,ls} \tilde{\lambda}_{3,s}^{-1} \right) + \frac{1}{2} \left(\lambda_{3,s}^{-1} \lambda_{4,sl} x_l \right)$$

e derivando em relação a x_j ,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda_{3,s}^{-1} \lambda_{4,sl} x_l \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(x_k \tilde{\lambda}_{3,ks}^{-1} \lambda_{4,sl} x_l \right).$$

Finalmente, em (A.12), optamos em simplificar a equação ao processo de diferenciação ao invés do integração, desta forma temos a solução para $g_1(x, x')$ escrita como

$$g_1(x, x') = -\frac{i}{2\hbar} \left[x \lambda_3^{-1} \lambda_4 x - 2(x \lambda_3^{-1} x') + 2(x \lambda_3^{-1} \delta_2) \right]. \quad (\text{A.13})$$

Desta forma, com o argumento da exponencial em $G_1(x, x')$ determinado, podemos resolver as equações diferenciais para a função $G_2(x'; t, t_0)$, tal que

$$\left[\frac{\hbar}{i} \lambda_{1,jk} \frac{\partial}{\partial x_k} + \lambda_{2,jk} x_k + \delta_{1,j} \right] G_1(x, x') G_2(x'; t, t_0) = i\hbar \frac{\partial}{\partial x'_j} G_1(x, x') G_2(x'; t, t_0)$$

$$\frac{\hbar}{i} \lambda_{1,jk} \frac{\partial G_1}{\partial x_k} G_2 + \lambda_{2,jk} x_k G_1 G_2 + \delta_{1,j} G_1 G_2 = i\hbar \left(\frac{\partial G_1}{\partial x'_j} G_2 + G_1 \frac{\partial G_2}{\partial x'_j} \right),$$

considerando, $G_1(x, x') = \exp [g_1(x, x')]$ e $G_2(x'; t, t_0) = \exp [g_2(x'; t, t_0)]$

$$\frac{\hbar}{i} G_1 G_2 \lambda_{1,jk} \frac{\partial g_1}{\partial x_k} + \lambda_{2,jk} x_k G_1 G_2 + \delta_{1,j} G_1 G_2 = i\hbar \left(G_1 G_2 \frac{\partial g_1}{\partial x'_j} + G_1 G_2 \frac{\partial g_2}{\partial x'_j} \right),$$

$$\frac{\hbar}{i} \lambda_{1,jk} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_k} + \lambda_{2,jk} x_k + \delta_{1,j} = i\hbar \left(\frac{\partial g_1(x')}{\partial x'_j} + \frac{\partial g_2(x')}{\partial x'_j} \right), \quad (\text{A.14})$$

então, através da solução para $g_1(x, x')$, verificamos a seguinte simplificação,

$$\begin{aligned} \lambda_1 \left[-\lambda_3^{-1} \lambda_4 x + \lambda_3^{-1} x' - \lambda_3^{-1} \delta_2 \right] + \lambda_2 x + \delta_1 &= i\hbar \left(\frac{\partial g_2(x')}{\partial x'_j} \right) + x \lambda_3^{-1} \\ i\hbar \frac{\partial g_2(x')}{\partial x'_j} &= \lambda_1 \left[-\lambda_3^{-1} \lambda_4 x + \lambda_3^{-1} x' - \lambda_3^{-1} \delta_2 \right] + \lambda_2 x + \delta_1 - x \lambda_3^{-1} \\ i\hbar \frac{\partial g_2(x')}{\partial x'_j} &= \lambda_1 \lambda_3^{-1} x' - \lambda_1 \lambda_3^{-1} \delta_2 + \delta_1 - (\lambda_1 \lambda_3^{-1} \lambda_4 x - \lambda_2 x + x \lambda_3^{-1}) \end{aligned}$$

logo temos

$$i\hbar \frac{\partial g_2(x')}{\partial x'_j} = \lambda_{1,jl} \lambda_{3,lk}^{-1} x'_k - \lambda_{1,jl} \lambda_{3,lk}^{-1} \delta_{2,k} + \delta_{1,j}. \quad (\text{A.15})$$

Conforme o resolvido em (A.12), faremos a seguinte simplificação

$$\lambda_1 \lambda_3^{-1} x' = \frac{1}{2} (\lambda_1 \lambda_3^{-1} x') + \frac{1}{2} (\lambda_1 \lambda_3^{-1} x')$$

onde

$$\tilde{\lambda}_1 \lambda_3 = \tilde{\lambda}_3 \lambda_1 \quad \tilde{\lambda}_3^{-1} \tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 \lambda_3^{-1}$$

e derivando em relação a x'_j ,

$$\frac{\partial}{\partial x'_j} (\lambda_1 \lambda_3^{-1} x') = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x'_j} (x' \lambda_1 \lambda_3^{-1} x').$$

substituindo em (A.15), verificamos que a solução para $g_2(x'; t, t_0)$ possui a forma

$$g_2(x'; t, t_0) = -\frac{i}{2\hbar} [x' \lambda_1 \lambda_3^{-1} x' + 2x' \lambda_1 \lambda_3^{-1} \delta_2 - 2x' \delta_1], \quad (\text{A.16})$$

assim obtemos a forma espacial do propagador para o hamiltoniano. Sendo a dependência temporal contida inteiramente em $G_0(t, t_0)$, temos então a forma geral do propagador dada por:

$$G(x; x'; t) = \mathcal{N} G_0(t, t_0) \exp \left\{ -\frac{i}{2\hbar} [x \lambda_3^{-1} \lambda_4 x - 2x \lambda_3^{-1} x' + x' \lambda_1 \lambda_3^{-1} x' + 2x \lambda_3^{-1} \delta_2 + 2x' \delta_1] \right\}. \quad (\text{A.17})$$

A forma temporal pode ser obtida diretamente da equação de Schrödinger, tal que

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(x) \right] G(x; x'; t) = 0, \quad (\text{A.18})$$

sujeita a condição inicial

$$G(x; x'; 0) = \delta(x_1 - x'_1) \dots \delta(x_N - x'_N) = \delta^N(x - x'). \quad (\text{A.19})$$

A função $H(x)$ é o operador Hamiltoniano que pode ser escrito na representação de Schrödinger nas coordenadas [1], como

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p} b_1 \hat{p} + \hat{p} b_2 \hat{x} + \hat{x} b_3 \hat{p} + \hat{x} b_4 \hat{x}) + c_1 \hat{p} + c_2 \hat{x}. \quad (\text{A.20})$$

$$H(x) = \frac{1}{2} \left[-\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x} b_1 \frac{\partial}{\partial x} - i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} b_2 x + x b_3 \frac{\partial}{\partial x} \right) + x b_4 x \right] - i\hbar c_1 \frac{\partial}{\partial x} + c_2 x.$$

A ação desta forma diferencial sobre a solução $G(x; x'; t)$ pode ser facilmente determinada a partir das identidades

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (x A x) &= -i\hbar \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_k} A x_j + x_j A \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \right) \\ &= -i\hbar (\delta_{jk} A x_j + x_j A \delta_{kj}) \end{aligned}$$

se A é simétrica ou seja $A = \tilde{A}$,

$$\begin{aligned}
 -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}(xAx) &= -i\hbar \left(\delta_{jk}Ax_j + \delta_{jk}\tilde{A}x_j \right) \\
 &= -i\hbar \delta_{jk}(Ax_j + Ax_j) \\
 &= -2i\hbar \delta_{jk}(Ax)_{kj} \\
 &= -2i\hbar Ax \quad (k = j),
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

e a segunda identidade, pode ser demonstrada com o auxílio de (A.21)

$$\begin{aligned}
 -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial}{\partial x}(xBx) &= -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x} A(2Bx) \\
 &= -2\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x}(ABx) \\
 &= -2\hbar^2 Tr(AB),
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

de forma que B também é simétrico. A equação diferencial para $\varphi(t)$, é determinada por (A.18), considerando o propagador em (A.17)

$$\left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(x) \right] \mathcal{N}G_0(t)G(x, x') = 0, \tag{A.23}$$

onde

$$G(x, x') = \exp \left\{ -\frac{i}{2\hbar} [x\lambda_3^{-1}\lambda_4x - 2x\lambda_3^{-1}x' + x'\lambda_1\lambda_3^{-1}x' + 2x\lambda_3^{-1}\delta_2 + 2x'\delta_1] \right\}$$

logo

$$\begin{aligned}
 -i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{N}G_0(t)G(x, x')) - H(x)\mathcal{N}G_0(t)G(x, x') &= 0 \\
 -i\hbar \mathcal{N}G(x, x') \frac{\partial}{\partial t}(G_0(t)) - \mathcal{N}G_0(t)H(x)G(x, x') &= 0
 \end{aligned}$$

supondo uma solução do tipo $G_0(t) = \exp(\varphi(t))$, temos

$$-i\hbar \mathcal{N}G(x, x')G_0(t) \frac{d\varphi(t)}{dt} - \mathcal{N}G_0(t)H(x)G(x, x') = 0, \tag{A.24}$$

aqui resolvemos separadamente $H(x)G(x, x')$,

$$\begin{aligned}
 H(x)G(x, x') &= \left(\frac{1}{2} \left[-\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x} b_1 \frac{\partial}{\partial x} - i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} b_2 x + x b_3 \frac{\partial}{\partial x} \right) + x b_4 x \right] \right. \\
 &\quad \left. - i\hbar c_1 \frac{\partial}{\partial x} + c_2 x \right) G(x, x') \\
 &= \frac{1}{2} \left[-\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x} b_1 \frac{\partial}{\partial x} G(x, x') - i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} b_2 x + x b_3 \frac{\partial}{\partial x} \right) G(x, x') \right. \\
 &\quad \left. + x b_4 x G(x, x') \right] - i\hbar c_1 \frac{\partial}{\partial x} G(x, x') + c_2 x G(x, x')
 \end{aligned}$$

tomando-se $G(x, x') = \exp(-\frac{i}{2\hbar}g(x, x'))$ e as identidades obtidas em (A.21) e (A.22), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{N}G(x, x')G_0(t)\frac{d\varphi(t)}{dt} &= -\frac{i}{\hbar}\mathcal{N}G_0(t)H(x)G(x, x') \\ &= \mathcal{N}G(x, x')G_0(t)\left(\frac{1}{2}\text{Tr}[\lambda_3^{-1}\lambda_4b_1 - b_3] \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{\hbar}\left(c_1\lambda_3^{-1}\delta_2 - \frac{1}{2}\delta_2\lambda_3^{-1}b_1\lambda_3^{-1}\delta_2\right)\right) \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} &= \frac{1}{2}\text{Tr}[\lambda_3^{-1}\lambda_4b_1 - b_3] + \frac{i}{\hbar}\left(c_1\lambda_3^{-1}\delta_2 - \frac{1}{2}\delta_2\lambda_3^{-1}b_1\lambda_3^{-1}\delta_2\right), \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

o lado direito da equação (A.25) pode ser simplificado se eliminarmos as matrizes b_1 e b_3 , bem como c_1 , com a ajuda das equações (2.45-2.46) e das relações de inversão.

$$\frac{d\Lambda(t)}{dt} = \Lambda(t)\Sigma B(t), \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} = \Lambda(t)\Sigma C(t). \quad (\text{A.27})$$

e

$$\Lambda^{-1} = \Sigma\tilde{\Lambda}\Sigma,$$

multiplicando ambos os lados por $\tilde{\Lambda}(t)\Sigma$ as equações (A.26 e A.27)

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}(t)\Sigma\frac{d\Lambda(t)}{dt} &= \tilde{\Lambda}(t)\Sigma\Lambda(t)\Sigma B(t), \\ \tilde{\Lambda}(t)\Sigma\frac{d\Delta(t)}{dt} &= \tilde{\Lambda}(t)\Sigma\Lambda(t)\Sigma C(t) \end{aligned}$$

que é o mesmo que

$$\begin{aligned} -\tilde{\Lambda}(t)\Sigma\frac{d\Lambda(t)}{dt} &= B(t)\Sigma\tilde{\Lambda}(t)\Sigma\Lambda(t), \\ -\tilde{\Lambda}(t)\Sigma\frac{d\Delta(t)}{dt} &= C(t)\Sigma\tilde{\Lambda}(t)\Sigma\Lambda(t) \end{aligned}$$

e

$$B(t) = -\tilde{\Lambda}(t)\Sigma\frac{d\Lambda(t)}{dt}, \quad (\text{A.28})$$

$$C(t) = -\tilde{\Lambda}(t)\Sigma\frac{d\Delta(t)}{dt}, \quad (\text{A.29})$$

que a partir destas equações encontramos elementos das matrizes B e C em termos das matrizes λ' s,

$$b_1 = \tilde{\lambda}_3\dot{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_1\dot{\lambda}_3, \quad b_2 = \tilde{\lambda}_3\dot{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1\dot{\lambda}_4, \quad (\text{A.30})$$

$$b_3 = \tilde{\lambda}_4\dot{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2\dot{\lambda}_3, \quad b_4 = \tilde{\lambda}_4\dot{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_2\dot{\lambda}_4, \quad (\text{A.31})$$

$$c_1 = \tilde{\lambda}_3\dot{\delta}_1 - \tilde{\lambda}_1\dot{\delta}_2, \quad c_2 = \tilde{\lambda}_4\dot{\delta}_1 - \tilde{\lambda}_2\dot{\delta}_2, \quad (\text{A.32})$$

então, com estas identidades podemos reescrever a equação (A.25), porém mais algumas simplificações são necessárias e assim obtermos a dependência temporal do propagador. Tomemos uma delas então,

$$\begin{aligned}
\lambda_3^{-1}\lambda_4 b_1 - b_3 &= \lambda_3^{-1}\lambda_4(\tilde{\lambda}_3\dot{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_1\dot{\lambda}_3) - \tilde{\lambda}_4\dot{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2\dot{\lambda}_3 \\
&= \lambda_3^{-1}\lambda_4\tilde{\lambda}_3\dot{\lambda}_1 - \lambda_3^{-1}\lambda_4\tilde{\lambda}_1\dot{\lambda}_3 - \tilde{\lambda}_4\dot{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2\dot{\lambda}_3 \\
&= \lambda_3^{-1}\lambda_4\tilde{\lambda}_3\dot{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_4\dot{\lambda}_1 - \lambda_3^{-1}\lambda_4\tilde{\lambda}_1\dot{\lambda}_3 + \tilde{\lambda}_2\dot{\lambda}_3 \\
&= \lambda_3^{-1}\lambda_4\tilde{\lambda}_3\dot{\lambda}_1 - (\lambda_3^{-1}\lambda_3)\tilde{\lambda}_4\dot{\lambda}_1 - \lambda_3^{-1}\lambda_4\tilde{\lambda}_1\dot{\lambda}_3 + (\lambda_3^{-1}\lambda_3)\tilde{\lambda}_2\dot{\lambda}_3 \\
&= \lambda_3^{-1}(\lambda_4\tilde{\lambda}_3 - \lambda_3\tilde{\lambda}_4)\dot{\lambda}_1 - \lambda_3^{-1}(\lambda_4\tilde{\lambda}_1 + \lambda_3\tilde{\lambda}_2)\dot{\lambda}_3 \\
&= -\lambda_3^{-1}\dot{\lambda}_3
\end{aligned}$$

e a outra simplificação,

$$\begin{aligned}
c_1\lambda_3^{-1}\delta_2 - \frac{1}{2}\delta_2\lambda_3^{-1}b_1\lambda_3^{-1}\delta_2 &= (\tilde{\lambda}_3\dot{\delta}_1 - \tilde{\lambda}_1\dot{\delta}_2)\lambda_3^{-1}\delta_2 - \frac{1}{2}\delta_2\lambda_3^{-1}(\tilde{\lambda}_3\dot{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_1\dot{\lambda}_3)\lambda_3^{-1}\delta_2 \\
&= (\tilde{\lambda}_3\dot{\delta}_1 - \tilde{\lambda}_1\dot{\delta}_2)\lambda_3^{-1}\delta_2 - \frac{1}{2}\delta_2(\dot{\lambda}_1 - \lambda_3^{-1}\tilde{\lambda}_1\dot{\lambda}_3)\lambda_3^{-1}\delta_2 \\
&= \tilde{\lambda}_3\dot{\delta}_1\lambda_3^{-1}\delta_2 - \tilde{\lambda}_1\dot{\delta}_2\lambda_3^{-1}\delta_2 - \frac{1}{2}\delta_2(\dot{\lambda}_1 - \lambda_3^{-1}\tilde{\lambda}_1\dot{\lambda}_3)\lambda_3^{-1}\delta_2 \\
&= \dot{\delta}_1\delta_2 - \dot{\delta}_2\lambda_1\lambda_3^{-1}\delta_2 - \frac{1}{2}\delta_2(\dot{\lambda}_1 - \lambda_3^{-1}\tilde{\lambda}_1\dot{\lambda}_3)\lambda_3^{-1}\delta_2 \\
&= \dot{\delta}_1\delta_2 - \dot{\delta}_2\lambda_1\lambda_3^{-1}\delta_2 - \frac{1}{2}\delta_2(\dot{\lambda}_1 - \lambda_3^{-1}\tilde{\lambda}_1\dot{\lambda}_3)\lambda_3^{-1}\delta_2 \\
&= \dot{\delta}_1\delta_2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\delta_2\lambda_1\lambda_3^{-1}\delta_2).
\end{aligned}$$

E com estas simplificações retornamos a equação (A.25) e às utilizamos

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -\frac{1}{2}Tr[\lambda_3^{-1}\dot{\lambda}_3] + \frac{i}{\hbar} \left(\dot{\delta}_1\delta_2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\delta_2\lambda_1\lambda_3^{-1}\delta_2) \right), \quad (\text{A.33})$$

cuja identidade matricial pode ser também utilizada,

$$Tr \left(\lambda_3^{-1} \frac{d\lambda_3}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \ln(\det \lambda_3),$$

finalmente,

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \ln(\det \lambda_3) + \frac{i}{\hbar} \left(\dot{\delta}_1\delta_2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\delta_2\lambda_1\lambda_3^{-1}\delta_2) \right), \quad (\text{A.34})$$

cuja solução,

$$\varphi(t) = \ln(\det \lambda_3)^{-1/2} - \frac{i}{2\hbar}\delta_2\lambda_1\lambda_3^{-1}\delta_2 + \frac{i}{\hbar} \int_0^t \dot{\delta}_1\delta_2 dt'. \quad (\text{A.35})$$

Com o resultado em (A.35) a forma da fase temporal do propagador está definida,

$$G_0(t) = \mathcal{N}(\det \lambda_3)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{i}{2\hbar} \left(\delta_2\lambda_1\lambda_3^{-1}\delta_2 - 2 \int_0^t \dot{\delta}_1\delta_2 dt' \right) \right\}, \quad (\text{A.36})$$

com o fator de normalização $\mathcal{N} = (-2i\pi\hbar)^{-N/2}$. Reunindo os resultados obtidos para $G_1(x, x'), G_2(x'; t)$ e $G_0(t)$, temos uma expressão final para o propagador.

$$G(x, x'; t) = (-2i\pi\hbar \det \lambda_3)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{i}{2\hbar} [x\lambda_3^{-1}\lambda_4x - 2x\lambda_3^{-1}x' + x'\lambda_1\lambda_3^{-1}x' + 2x\lambda_3^{-1}\delta_2 + 2x'(\delta_1 - \lambda_1\lambda_3^{-1}\delta_2) + \delta_2\lambda_1\lambda_3^{-1}\delta_2 - 2 \int_0^t \dot{\delta}_1\delta_2 dt'] \right\}. \quad (\text{A.37})$$

A.4 Equações Diferenciais de 2^a Ordem

De acordo com os cálculos expostas na equação (2.136), encontramos a dedução para as matrizes \mathcal{E} conforme os cálculos abaixo:

Tem-se das equações para as matrizes λ 's, expostas em (2.48) e (2.49) as seguintes relações,

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_1 b_3 - \lambda_2 b_1, \quad \dot{\lambda}_2 = \lambda_1 b_4 - \lambda_2 b_2, \quad (\text{A.38})$$

$$\dot{\lambda}_3 = \lambda_3 b_3 - \lambda_4 b_1, \quad \dot{\lambda}_4 = \lambda_3 b_4 - \lambda_4 b_2, \quad (\text{A.39})$$

onde podemos tomar o caso para $\dot{\lambda}_1$. Derivamos novamente, obtemos

$$\ddot{\lambda}_1 = \dot{\lambda}_1 b_3 + \lambda_1 \dot{b}_3 - \dot{\lambda}_2 b_1 - \lambda_2 \dot{b}_1. \quad (\text{A.40})$$

Como temos $\dot{\lambda}_1$ e $\dot{\lambda}_2$, substituímos na equação (A.40):

$$\ddot{\lambda}_1 = (\lambda_1 b_3 - \lambda_2 b_1) b_3 + \lambda_1 \dot{b}_3 - (\lambda_1 b_4 - \lambda_2 b_2) b_1 - \lambda_2 \dot{b}_1, \quad (\text{A.41})$$

onde podemos eliminar os termos em λ_2 através de

$$\lambda_2 b_1 = \lambda_1 b_3 - \dot{\lambda}_1. \quad (\text{A.42})$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima pela matriz inversa b_1^{-1} ,

$$\lambda_2 b_1 b_1^{-1} = (\lambda_1 b_3 - \dot{\lambda}_1) b_1^{-1}, \quad (\text{A.43})$$

e observando que o produto de matrizes $b_1 b_1^{-1}$ é a matriz identidade, temos para λ_2

$$\lambda_2 = \lambda_1 b_3 b_1^{-1} - \dot{\lambda}_1 b_1^{-1}. \quad (\text{A.44})$$

Substituindo (A.44) em (A.41),

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda}_1 &= [\lambda_1 b_3 - (\lambda_1 b_3 b_1^{-1} - \dot{\lambda}_1 b_1^{-1}) b_1] b_3 + \lambda_1 \dot{b}_3 \\ &\quad - [\lambda_1 b_4 - (\lambda_1 b_3 b_1^{-1} - \dot{\lambda}_1 b_1^{-1}) b_2] b_1 - (\lambda_1 b_3 b_1^{-1} - \dot{\lambda}_1 b_1^{-1}) \dot{b}_1, \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda}_1 &= \lambda_1 b_3 b_3 - \lambda_1 b_3 b_1^{-1} b_1 b_3 + \dot{\lambda}_1 b_1^{-1} b_1 b_3 + \lambda_1 \dot{b}_3 - \lambda_1 b_4 b_1 \\ &\quad + \lambda_1 b_3 b_1^{-1} b_2 b_1 - \dot{\lambda}_1 b_1^{-1} b_2 b_1 - \lambda_1 b_3 b_1^{-1} \dot{b}_1 + \dot{\lambda}_1 b_1^{-1} \dot{b}_1, \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

$$\ddot{\lambda}_1 = \dot{\lambda}_1 (b_3 - b_1^{-1} b_2 b_1 + b_1^{-1} \dot{b}_1) - \lambda_1 (b_4 b_1 - b_3 b_1^{-1} b_2 b_1 - b_3 b_1^{-1} \dot{b}_1 - \dot{b}_3). \quad (\text{A.47})$$

Portanto verificamos que a equação diferencial para λ_1 possui a seguinte forma

$$\frac{d^2\lambda_1}{dt^2} - \frac{d\lambda_1}{dt}\mathcal{E}_3 + \lambda_1\mathcal{E}_4 = 0 \quad (\text{A.48})$$

com \mathcal{E}_3 e \mathcal{E}_4 dadas pela equações (2.136). Da mesma forma fazemos para λ_2 . Utilizando a relação (2.48) temos

$$\dot{\lambda}_2 = \lambda_1 b_4 - \lambda_2 b_2,$$

e derivando novamente em relação a t , temos

$$\ddot{\lambda}_2 = \dot{\lambda}_1 b_4 + \lambda_1 \dot{b}_4 - \dot{\lambda}_2 b_2 - \lambda_2 \dot{b}_2. \quad (\text{A.49})$$

Deixando a equação em função apenas de parâmetros matriciais λ_2 , encontramos

$$\lambda_1 = \lambda_2 b_2 b_4^{-1} - \dot{\lambda}_2 b_1^{-4}, \quad (\text{A.50})$$

e após uma manipulação elementar,

$$\ddot{\lambda}_2 = -\dot{\lambda}_2(b_2 - b_4^{-1}b_3b_4 + b_4^{-1}\dot{b}_4) - \lambda_2(b_1b_4 - b_2b_4^{-1}b_3b_4 - b_2b_4^{-1}\dot{b}_4 + \dot{b}_2), \quad (\text{A.51})$$

obtemos a equação diferencial

$$\frac{d^2\lambda_2}{dt^2} + \frac{d\lambda_2}{dt}\mathcal{E}_1 + \lambda_2\mathcal{E}_2 = 0, \quad (\text{A.52})$$

com \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 dadas pelas equações (2.135).

Os cálculos referentes as matrizes λ_3 e λ_4 seguem o mesmo procedimento, obtendo com isto a relação geral para as equações diferenciais de segunda ordem para as matrizes λ 's conforme (2.136) e (2.137). A forma completa das matrizes \mathcal{E}_j estão dadas a seguir. Assumindo que $\omega_1 = \omega_1^2(t)$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon^2\zeta_0\zeta_1\omega_1}{-\omega_1+\varepsilon^2\zeta_0^2} + \frac{\varepsilon^2\zeta_0\zeta_1}{-\omega_1+\varepsilon^2\zeta_0^2} + \frac{\frac{d\omega_1}{dt}}{-\omega_1+\varepsilon^2\zeta_0^2} & -\varepsilon\zeta_1 + \frac{\varepsilon^2\zeta_0^2\zeta_1}{-\omega_1+\varepsilon^2\zeta_0^2} + \frac{\varepsilon\zeta_1}{-\omega_1+\varepsilon^2\zeta_0^2} \\ -\varepsilon\zeta_1 - \frac{[\omega_1]^2\varepsilon\zeta_1}{-\omega_1+\varepsilon^2\zeta_0^2} - \frac{\varepsilon^2\zeta_0^2\zeta_1}{-\omega_1+\varepsilon^2\zeta_0^2} - \frac{\varepsilon\zeta_1\frac{d\omega_1}{dt}}{-\omega_1+\varepsilon^2\zeta_0^2} & \frac{\varepsilon^2\zeta_0\zeta_1\omega_1}{-\omega_1+\varepsilon^2\zeta_0^2} - \frac{\varepsilon^2\zeta_0\zeta_1}{-\omega_1+\varepsilon^2\zeta_0^2} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{E}_2 &= \begin{bmatrix} \omega_1 + \varepsilon^2\zeta_0^2 + \frac{[\omega_1]^2\varepsilon^2\zeta_1^2}{-\omega_1+\varepsilon^2\zeta_0^2} + \frac{\varepsilon^4\zeta_0^2\zeta_1\zeta_1}{-\omega_1+\varepsilon^2\zeta_0^2} + \frac{\varepsilon^2\zeta_0\zeta_1\frac{d\omega_1}{dt}}{-\omega_1+\varepsilon^2\zeta_0^2} & 2\varepsilon\zeta_0 + \frac{\omega_1\varepsilon^3\zeta_1^2\zeta_0}{-\omega_1+\varepsilon^2\zeta_0^2} - \frac{\varepsilon^3\zeta_0^2\zeta_1\zeta_1}{-\omega_1+\varepsilon^2\zeta_0^2} \\ \varepsilon\zeta_0\omega_1 + \varepsilon\zeta_0 - \frac{\varepsilon^3\zeta_0^2\zeta_1\zeta_1}{-\omega_1+\varepsilon^2\zeta_0^2} + \frac{\varepsilon^3\zeta_0\zeta_1^2}{-\omega_1+\varepsilon^2\zeta_0^2} - \frac{\varepsilon\zeta_0\frac{d\omega_1}{dt}}{-\omega_1+\varepsilon^2\zeta_0^2} & \varepsilon^2\zeta_0^2 + 1 - \frac{\varepsilon^4\zeta_0^2\zeta_1\zeta_1}{-\omega_1+\varepsilon^2\zeta_0^2} + \frac{\varepsilon^3\zeta_1^2}{-\omega_1+\varepsilon^2\zeta_0^2} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{E}_3 &= \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon^2\zeta_0\zeta_1}{-1+\varepsilon^2\zeta_0^2} - \frac{\varepsilon^2\zeta_0\zeta_1}{-1+\varepsilon^2\zeta_0^2} & -\varepsilon\zeta_1 + \frac{\varepsilon^3\zeta_0^2\zeta_1}{-1+\varepsilon^2\zeta_0^2} - \frac{\varepsilon\zeta_1}{-1+\varepsilon^2\zeta_0^2} \\ -\varepsilon\zeta_1 - \frac{\varepsilon\zeta_1}{-1+\varepsilon^2\zeta_0^2} - \frac{\varepsilon^3\zeta_0^2\zeta_1}{-1+\varepsilon^2\zeta_0^2} & -\frac{\varepsilon^2\zeta_0\zeta_1}{-1+\varepsilon^2\zeta_0^2} + \frac{\varepsilon^2\zeta_0\zeta_1}{-1+\varepsilon^2\zeta_0^2} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{E}_4 &= \begin{bmatrix} \omega_1 + \varepsilon^2\zeta_0^2 + \frac{\varepsilon^2\zeta_1^2}{-1+\varepsilon^2\zeta_0^2} - \frac{\varepsilon^4\zeta_0^2\zeta_1\zeta_1}{-1+\varepsilon^2\zeta_0^2} & -\varepsilon\zeta_1\omega_1 + \varepsilon\zeta_0 + \frac{\varepsilon^3\zeta_0\zeta_1^2}{-1+\varepsilon^2\zeta_0^2} - \frac{\varepsilon^3\zeta_0^2\zeta_1\zeta_1}{-1+\varepsilon^2\zeta_0^2} \\ 2\varepsilon\zeta_0 - \frac{\varepsilon^3\zeta_0^2\zeta_1\zeta_1}{-1+\varepsilon^2\zeta_0^2} + \frac{\varepsilon^3\zeta_0\zeta_1^2}{-1+\varepsilon^2\zeta_0^2} & \varepsilon^2\zeta_0^2 + 1 - \frac{\varepsilon^4\zeta_0^2\zeta_1\zeta_1}{-1+\varepsilon^2\zeta_0^2} + \frac{\varepsilon^2\zeta_1^2}{-1+\varepsilon^2\zeta_0^2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Para o nosso problema em questão estamos interessados na solução com correção até a primeira ordem para ε tendo em vista que $\varepsilon^2\zeta_i\zeta_k \ll 1$, por isto podemos desprezar os

termos de ordens superiores a ε^2 . Isso implica em uma enorme simplificação para as matrizes \mathcal{E}_j , que ficam reescritas na forma:

$$\mathcal{E}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\omega_1^2(t)} \frac{d\omega_1^2(t)}{dt} & -\varepsilon\zeta_1 - \frac{\varepsilon\zeta_1}{\omega_1^2(t)} \\ -\varepsilon\zeta_1 - \omega_1^2(t)\varepsilon\zeta_1 - \frac{\varepsilon\zeta_0}{\omega_1^2(t)} \frac{d\omega_1^2(t)}{dt} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.53})$$

$$\mathcal{E}_2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2(t) & 2\varepsilon\zeta_0 \\ \varepsilon\zeta_0\omega_1^2(t) + \varepsilon\zeta_0 - \frac{\varepsilon\zeta_1}{\omega_1^2(t)} \frac{d\omega_1^2(t)}{dt} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.54})$$

$$\mathcal{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2\varepsilon\zeta_1 \\ -2\varepsilon\zeta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.55})$$

$$\mathcal{E}_4 = \begin{bmatrix} \omega_1^2(t) & \varepsilon\zeta_0\omega_1^2(t) + \varepsilon\zeta_0 \\ 2\varepsilon\zeta_0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.56})$$

Com tais resultados substituímos nas relações (2.136) e (2.137) encontramos os dois grupos de equações diferenciais para as matrizes λ_j relevantes para a análise do nosso sistema.

Apêndice B

Equação de Duffing e o M.E.M.

B.1 Equação de Duffing Clássica

Como exemplo importante e de um modo mais detalhado para nosso estudo, a equação de Duffing apresentou-se como a primeira opção de um modelo físico concreto para a aplicação do método das escalas múltiplas. É uma equação importante no problema de oscilações não lineares [33], como por exemplo no estudo do oscilador anarmônico de massa unitária ($p = \dot{x}$), cuja hamiltoniana está dada por

$$H(x, p) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \varepsilon \frac{x^4}{4} \quad (\text{B.1})$$

sujeito a condição $\varepsilon \ll 1$. Vamos aplicar o método das escalas múltiplas para um determinado problema de valor inicial. As equações do movimento deste sistema estão dadas por

$$\frac{dx}{dt} = \{x, H(x, p)\} = p, \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{dp}{dt} = \{p, H(x, p)\} = -x - 4\varepsilon x^3, \quad (\text{B.3})$$

$$\{K, H\} = \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial K}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial x}.$$

O sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem (B.2)-(B.3) pode ser reduzido a uma equação diferencial de segunda ordem, conhecida por equação de Duffing. Temos, então, para o sistema (B.1) a equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + 4\varepsilon x^3 = 0, \quad (\text{B.4})$$

onde $x(t)$ é a variável clássica para a posição. Para nosso problema vamos considerar, por exemplo, as condições iniciais

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (\text{B.5})$$

Tentamos então uma solução do tipo:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n(t). \quad (\text{B.6})$$

Substituindo a série dada por (B.6) em (B.4) obtemos as equações de ordem *zero* e *um* para o parâmetro ε :

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} + x_0 = 0, \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = -4x_0^3, \quad (\text{B.8})$$

A solução geral para (B.7) é da forma:

$$x_0 = A \cos t + B \sin t, \quad (\text{B.9})$$

e com as condições iniciais obtemos a solução

$$x_0(t) = \cos t. \quad (\text{B.10})$$

Logo substituindo (B.10) em (B.8) obtemos a equação

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -4 \cos^3 t, \quad (\text{B.11})$$

onde em (B.11) podemos utilizar propriedades das identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{aligned}$$

para simplificar o termo não homogêneo da equação diferencial. Dessa forma temos

$$-4 \cos^3 t = -\cos 3t - 3 \cos t,$$

que substituído em (B.11) resulta na equação diferencial não homogênea na forma

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\cos 3t - 3 \cos t. \quad (\text{B.12})$$

Mediante as condições iniciais (B.5) obtemos uma solução particular de (B.12):

$$x_{1p} = -\frac{1}{8} \cos t + \frac{1}{2} \cos^3 t - \frac{3}{2} t \sin t, \quad (\text{B.13})$$

Facilmente verificamos que a solução (B.13) possui um termo secular dado por $t \sin t$. Observamos que no limite $t \rightarrow \infty$ a solução particular é divergente, contrariando a condição física de que o sistema (B.4) tem uma energia finita: o sistema não está acoplado com nenhum potencial externo e portanto pode ser tratado como um sistema isolado com energia constante E_0 :

$$H(x, p) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \varepsilon \frac{x^4}{4} = E_0.$$

Justificada a condição física para eliminarmos termos seculares, nós podemos considerar a expansão (B.6) sob o ponto de vista das escalas múltiplas. Procurando uma solução aproximada para o problema até correções de primeira ordem no parâmetro ε , tomemos $x(t, \varepsilon)$ como uma função das variáveis independentes T_0 e T_1 , onde $T_1 = \varepsilon t$, na forma:

$$x(t, \varepsilon) = X_0(T_0, T_1) + \varepsilon X_1(T_0, T_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (\text{B.14})$$

Substituindo a solução (B.14) na equação (B.4), tomamos para cada uma das ordens em ε as correspondentes equações diferenciais

$$\frac{\partial^2 X_0}{\partial T_0^2} + X_0 = 0, \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial T_0^2} + X_1 = -4X_0^3 - 2\frac{\partial^2 X_0}{\partial T_0 \partial T_1}. \quad (\text{B.16})$$

A resolução de (B.15) é bastante simples e sua solução é dada na forma:

$$X_0(T_0, T_1) = A(T_1) \cos T_0 + B(T_1) \sin T_0, \quad (\text{B.17})$$

substituímos (B.17) na equação (B.16), considerando as amplitudes $A(T_1)$ e $B(T_1)$ como termos dependentes apenas de T_1 (as soluções estão sendo consideradas até primeira ordem). Resolvendo de forma explícita a equação (B.16) temos que

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial T_0^2} + X_1 = -4[A(T_1) \cos T_0 + B(T_1) \sin T_0]^3 - 2\frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1}[A(T_1) \cos T_0 + B(T_1) \sin T_0],$$

que pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 X_1}{\partial T_0^2} + X_1 - A^3(T_1) \cos 3T_0 - 3A^3(T_1) \cos T_0 - 3A^2(T_1)B(T_1) \sin 3T_0 \\ & - 3A^2(T_1)B(T_1) \sin T_0 + 3A(T_1)B^2(T_1) \cos 3T_0 - 3A(T_1)B^2(T_1) \cot T_0 \\ & + B^3(T_1) \sin 3T_0 - 3B^3(T_1) \sin T_0 + 2\frac{\partial A(T_1)}{\partial T_1} \sin T_0 - 2\frac{\partial B(T_1)}{\partial T_1} \cos T_0. \end{aligned}$$

Para determinarmos então as amplitudes $A(T_1)$ e $B(T_1)$, é necessário agora identificar os termos seculares. O que não é muito difícil pois são os termos que envolvem $\sin T_0$ e $\cos T_0$, que são parte da solução da equação homogênea associada. Com isto chegamos as seguintes equações para $A(T_1)$ e $B(T_1)$:

$$\frac{dB(T_1)}{dT_1} = -\frac{3}{2}A^3(T_1) - \frac{3}{2}A(T_1)B^2(T_1), \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{dA(T_1)}{dT_1} = \frac{3}{2}B^3(T_1) + \frac{3}{2}B(T_1)A^2(T_1). \quad (\text{B.19})$$

Multiplicando (B.18) por $B(T_1)$ e (B.19) por $A(T_1)$ estas equações podem ser reescritas na forma

$$\frac{1}{2} \frac{dB^2(T_1)}{dT_1} = -\frac{3}{2}[A^3(T_1)B(T_1) + A(T_1)B^3(T_1)],$$

$$\frac{1}{2} \frac{dA^2(T_1)}{dT_1} = \frac{3}{2} [B^3(T_1)A(T_1) + B(T_1)A^3(T_1)],$$

e somando-se estas duas equações, encontramos que

$$\frac{1}{2} \frac{dB^2(T_1)}{dT_1} + \frac{1}{2} \frac{dA^2(T_1)}{dT_1} = 0,$$

ou

$$\frac{dC(T_1)}{dT_1} = 0, \tag{B.20}$$

onde $C(T_1)$ está definido como

$$C(T_1) = \frac{1}{2} [A^2(T_1) + B^2(T_1)],$$

Verificamos um tipo de lei de conservação na equações (B.20), de forma que atua como um invariante do sistema em relação a escala de tempo T_1 . Podemos desta forma, reescrever (B.18) e (B.19) em termos de $C(T_1)$ de tal modo que:

$$\frac{dB(T_1)}{dT_1} = -3C(0)A(T_1) \tag{B.21}$$

$$\frac{dA(T_1)}{dT_1} = 3C(0)B(T_1). \tag{B.22}$$

Determinando $C(0)$ a partir das condições (B.5) e resolvendo as equações diferenciais lineares acopladas (B.21)-(B.22) obtemos as soluções para as amplitudes $A(T_1)$ e $B(T_1)$ que conduz a solução em primeira ordem:

$$X_0(T_0, T_1) = \cos[(T_0 + \frac{3}{2}T_1)] + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{B.23}$$

Podemos verificar que a solução (B.23) é coerente com a solução direta em (B.13) a menos do um fator secular. Podemos prosseguir então a nossa análise para a equação de Duffing, agora para o caso quântico onde as coordenadas escalares dão lugar aos operadores posição \hat{x} e momenta \hat{p} , conforme os princípios da quantização canônica.

B.2 Equação de Duffing Quântica

O sistema quântico correspondente ao sistema clássico abordado na seção anterior está definida pela equação de Duffing quântica na forma

$$\frac{d^2\hat{q}}{dt} + \hat{x} + 4\varepsilon\hat{x}^3 = 0, \tag{B.24}$$

e da mesma forma que no caso clássico é necessário estabelecer as condições iniciais para o problema. A equação (B.24) pode ser deduzida a partir do operador Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\hat{x}^2 + \varepsilon\hat{x}^4, \tag{B.25}$$

na representação de Heisenberg e eliminando o operador momento \hat{p} de modo similar ao procedimento realizado no caso clássico. Além disso, temos que $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$ e $\hat{p}(0) = \hat{p}_0$ com a relação de comutação canônica:

$$[\hat{x}_0, \hat{p}_0] = i\hbar. \quad (\text{B.26})$$

Aplicamos então o método das escalas múltiplas para a solução de operador $\hat{x}(T_0, T_1)$, ou seja,

$$\hat{x}(T_0, T_1) = \hat{X}_0(T_0, T_1) + \varepsilon \hat{X}_1(T_0, T_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (\text{B.27})$$

de forma que o operador posição do oscilador agora depende explicitamente de duas escalas de tempo *independentes*. Substituindo (B.27) em (B.24) e separando os termos das diferentes ordens de ε , resulta

$$\frac{\partial^2 \hat{X}_0}{\partial T_0^2} + \hat{X}_0 = 0, \quad (\text{B.28})$$

e

$$\frac{\partial^2 \hat{X}_1}{\partial T_0^2} + \hat{X}_1 = -4\hat{X}_0^3 - 2\frac{\partial^2 \hat{X}_0}{\partial T_0 \partial T_1}. \quad (\text{B.29})$$

A solução de (B.28) é bastante simples e de modo similar ao caso clássico está dada na forma

$$\hat{X}_0(T_0, T_1) = \hat{A}(T_1) \cos T_0 + \hat{B}(T_1) \sin T_0, \quad (\text{B.30})$$

e de acordo com (B.30) escrevemos também o operador momento em função de T_0 e T_1 como

$$\hat{P}_0(T_0, T_1) = \hat{B}(T_1) \cos T_0 - \hat{A}(T_1) \sin T_0. \quad (\text{B.31})$$

A diferença fundamental entre o sistema clássico e quântico é que os termos independentes de T_0 são agora operadores e satisfazem a relação de comutação canônica.

$$[\hat{A}(T_1), \hat{B}(T_1)] = i\hbar. \quad (\text{B.32})$$

De acordo com as equações (B.30) e (B.31) devemos ter para os operadores $\hat{A}(T_1)$ e $\hat{B}(T_1)$ as condições iniciais

$$\hat{A}(0) = \hat{x}_0, \quad \hat{B}(0) = \hat{p}_0.$$

Substituindo a solução (B.30), na equação (B.29) temos para o operador \hat{X}_1 , a equação

$$\frac{\partial^2 \hat{X}_1}{\partial T_0^2} + \hat{X}_1 = -4[\hat{A}(T_1) \cos T_0 + \hat{B}(T_1) \sin T_0]^3 - 2\frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} [\hat{A}(T_1) \cos T_0 + \hat{B}(T_1) \sin T_0],$$

que com a ajuda da relação de comutação (B.32) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 \hat{X}_1}{\partial T_0^2} + \hat{X}_1 - \hat{A}^3(T_1) \cos 3T_0 - 3\hat{A}^3(T_1) \cos T_0 \\
 & - [\hat{A}(T_1)\hat{B}(T_1)\hat{A}(T_1) + \hat{A}(T_1)\hat{A}(T_1)\hat{B}(T_1) + \hat{B}(T_1)\hat{A}(T_1)\hat{A}(T_1)] \text{sen } 3T_0 \\
 & - [\hat{A}(T_1)\hat{B}(T_1)\hat{A}(T_1) + \hat{A}(T_1)\hat{A}(T_1)\hat{B}(T_1) + \hat{B}(T_1)\hat{A}(T_1)\hat{A}(T_1)] \text{sen } T_0 \\
 & + [\hat{B}(T_1)\hat{A}(T_1)\hat{B}(T_1) + \hat{B}(T_1)\hat{B}(T_1)\hat{A}(T_1) + \hat{A}(T_1)\hat{B}(T_1)\hat{B}(T_1)] \cos 3T_0 \\
 & - [\hat{B}(T_1)\hat{A}(T_1)\hat{B}(T_1) + \hat{B}(T_1)\hat{B}(T_1)\hat{A}(T_1) + \hat{A}(T_1)\hat{B}(T_1)\hat{B}(T_1)] \cot T_0 \\
 & + \hat{B}^3(T_1) \text{sen } 3T_0 - 3\hat{B}^3(T_1) \text{sen } T_0 + 2\frac{\partial}{\partial T_1}\hat{A}(T_1) \text{sen } T_0 - 2\frac{\partial}{\partial T_1}\hat{B}(T_1) \cos T_0.
 \end{aligned}$$

Para determinarmos então os operadores amplitudes $\hat{A}(T_1)$ e $\hat{B}(T_1)$, é necessário identificar os termos seculares. O que não é muito difícil pois como no caso clássico também recaímos nos termos que envolvem $\text{sen } T_0$ e $\cos T_0$. Com isto chegamos a uma relação do tipo:

$$\frac{d\hat{B}(T_1)}{dT_1} = \frac{1}{2}[-3\hat{A}^3(T_1) - \hat{B}(T_1)\hat{A}(T_1)\hat{B}(T_1) - \hat{B}(T_1)\hat{B}(T_1)\hat{A}(T_1) - \hat{A}(T_1)\hat{B}(T_1)\hat{B}(T_1)], \quad (\text{B.33})$$

$$\frac{d\hat{A}(T_1)}{dT_1} = \frac{1}{2}[3\hat{B}^3(T_1) + \hat{A}(T_1)\hat{B}(T_1)\hat{A}(T_1) + \hat{A}(T_1)\hat{A}(T_1)\hat{B}(T_1) + \hat{B}(T_1)\hat{A}(T_1)\hat{A}(T_1)]. \quad (\text{B.34})$$

As equações acima, como no caso clássico, implicam em uma lei de conservação para o operador

$$\hat{C}(T_1) = \frac{1}{2}[\hat{A}^2(T_1) + \hat{B}^2(T_1)], \quad (\text{B.35})$$

pois se aplicarmos $\hat{B}(T_1)$ em (B.33) e $\hat{A}(T_1)$ em (B.34), somando-as mutuamente obtemos uma equação para o operador $\hat{C}(T_1)$ na forma

$$\frac{d\hat{C}(T_1)}{dT_1} = 0. \quad (\text{B.36})$$

Assim utilizando as relações de comutação canônica expostas pelas condições iniciais e pela equação de comutação em (B.32), podemos reescrever as equações (B.33) e (B.34) de um modo mais simplificado, utilizando a forma (B.35) para o operador $\hat{C}(T_1)$. Ainda observamos que ele é uma constante tal qual $\hat{C}(T_1) = \hat{C}$. Logo

$$\frac{d\hat{B}(T_1)}{dT_1} = -\frac{3}{2}[\hat{C}, \hat{A}(T_1)]_+ \quad (\text{B.37})$$

e

$$\frac{d\hat{A}(T_1)}{dT_1} = -\frac{3}{2}[\hat{C}, \hat{B}(T_1)]_+ \quad (\text{B.38})$$

onde $[\hat{C}(T_1), \hat{A}(T_1)]_+$ e $[\hat{C}(T_1), \hat{B}(T_1)]_+$ são conhecidos como anticomutadores e a partir das suas propriedades gerais temos que são hermitianos, possuindo apenas solução real e, não imaginária como em (B.32). Resolvendo então as equações diferenciais obtemos,

$$\hat{A}(T_1) = \hat{A}(0) \cos 3\hat{C}T_1 + \hat{B}(0) \text{sen } 3\hat{C}T_1, \quad (\text{B.39})$$

$$\hat{B}(T_1) = \hat{B}(0) \cos 3\hat{C}T_1 - \hat{A}(0) \sin 3\hat{C}T_1, \quad (\text{B.40})$$

e de acordo com as condições iniciais temos para termos até a ordem $\mathcal{O}(\varepsilon)$ a solução (sem os termos seculares) na forma,

$$\hat{X}_0(T_1, T_0) = [\hat{A}(0) \cos 3\hat{C}T_1 + \hat{B}(0) \sin 3\hat{C}T_1] \cos T_0 + [\hat{B}(0) \cos 3\hat{C}T_1 - \hat{A}(0) \sin 3\hat{C}T_1] \sin T_0,$$

Uma vez que $T_1 = \varepsilon T_0$, podemos reescrever a solução na forma

$$\begin{aligned} \hat{X}_0(T_1, T_0) = & \frac{\hat{x}_0 \cos(T_0 + 3\varepsilon\hat{C}T_0) + \cos(T_0 + 3\varepsilon\hat{C}T_0)\hat{x}_0}{2 \cos(3\varepsilon T_0 \frac{\hbar}{2})} \\ & + \frac{\hat{p}_0 \sin(T_0 + 3\varepsilon\hat{C}T_0) + \sin(T_0 + 3\varepsilon\hat{C}T_0)\hat{p}_0}{2 \cos(3\varepsilon T_0 \frac{\hbar}{2})} + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

O método pode então ser aplicado a qualquer sistema dinâmico e fornece-nos uma solução aproximada para descrever o comportamento dinâmico dos mesmos pelo menos nos primeiros instantes do movimento.

Apêndice C

Covariância e Emaranhamento

C.1 Elementos das Matrizes das Covariâncias

Seja a matriz das covariâncias dada pelas matrizes blocos Q_{ij} como,

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

onde explicitamente os elementos deste blocos são dados por:

$$Q_{11} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, \quad Q_{12} = \begin{bmatrix} M_{13} & M_{14} \\ M_{23} & M_{24} \end{bmatrix}$$

$$Q_{21} = \begin{bmatrix} M_{31} & M_{32} \\ M_{41} & M_{42} \end{bmatrix}, \quad Q_{22} = \begin{bmatrix} M_{33} & M_{34} \\ M_{43} & M_{44} \end{bmatrix}.$$

Em termos da parametrização:

- Para Q_{11} :

$$\mathcal{M}_{11} = \frac{1}{2} \left\{ (\eta_1 Y_{2-} \delta^2 - \eta_2 \rho^2 Y_{1+}) \frac{\text{sen}^2 \tau}{\alpha^2} - \eta_1 Y_{1-} \cos^2 \tau - \delta \eta_1 Y_{3-} \cosh(2\xi_1) \frac{\text{sen}(2\tau)}{\alpha} \right\}$$

$$\mathcal{M}_{12} = -\frac{1}{2} \left\{ (\eta_2 Z_1 \rho^2 + \eta_1 Y_{4+} \delta^2) \frac{\text{sen}^2 \tau}{\alpha^2} + \eta_1 Y_{4-} \cos^2 \tau - \delta \eta_1 Z_2 \frac{\text{sen}(2\tau)}{\alpha} \right\}$$

$$\mathcal{M}_{21} = -\frac{1}{2} \left\{ (\eta_2 Z_1 \rho^2 + \eta_1 Y_{4+} \delta^2) \frac{\text{sen}^2 \tau}{\alpha^2} + \eta_1 Y_{4-} \cos^2 \tau - \delta \eta_1 Z_2 \frac{\text{sen}(2\tau)}{\alpha} \right\}$$

$$\mathcal{M}_{22} = \frac{1}{2} \left\{ (\eta_1 Y_{5-} \delta^2 + \eta_2 \rho^2 Y_{2+}) \frac{\text{sen}^2 \tau}{\alpha^2} + \eta_1 Y_{5+} \cos^2 \tau + \delta \eta_1 Y_{3+} \cosh(2\xi_1) \frac{\text{sen}(2\tau)}{\alpha} \right\}$$

- Para Q_{12} :

$$\mathcal{M}_{13} = \frac{1}{4} \left\{ (Y_{1-}\eta_1 - \eta_2 Y_{2-}) \frac{\rho \operatorname{sen}(2\tau)}{\alpha} + 2 [(\cosh(2\xi_1)\eta_1 + \cosh(2\xi_2)\eta_2) Y_{3-}] \frac{\rho\delta \operatorname{sen}^2 \tau}{\alpha^2} \right\}$$

$$\mathcal{M}_{14} = \frac{1}{4} \left\{ (Y_{4-}\eta_1 - \eta_2 Z_1) \frac{\rho \operatorname{sen}(2\tau)}{\alpha} + 2(\eta_1 Y_{6+} - \eta_2 Y_{7-}) \frac{\rho\delta \operatorname{sen}^2 \tau}{\alpha^2} \right\}$$

$$\mathcal{M}_{23} = \frac{1}{4} \left\{ (Y_{4-}\eta_1 - \eta_2 Z_1) \frac{\rho \operatorname{sen}(2\tau)}{\alpha} + 2(\eta_1 Y_{6-} - \eta_2 Y_{7+}) \frac{\rho\delta \operatorname{sen}^2 \tau}{\alpha^2} \right\}$$

$$\mathcal{M}_{24} = \frac{1}{4} \left\{ (Y_{5+}\eta_1 - \eta_2 Y_{2+}) \frac{\rho \operatorname{sen}(2\tau)}{\alpha} + 2 [(\cosh(2\xi_1)\eta_1 + \cosh(2\xi_2)\eta_2) Y_{3+}] \frac{\rho\delta \operatorname{sen}^2 \tau}{\alpha^2} \right\}$$

- Para Q_{21} temos a igualdade, $Q_{21} = \tilde{Q}_{12}$

- Para Q_{22}

$$\mathcal{M}_{33} = \frac{1}{2} \left\{ (\eta_1 T_3 \delta^2 - \eta_2 \rho^2 T_4) \frac{\operatorname{sen}^2 \tau}{\alpha^2} - \eta_1 T_1 \cos^2 \tau - \delta \eta_1 T_2 \cosh(2\xi_1) \frac{\operatorname{sen}(2\tau)}{\alpha} \right\}$$

$$\mathcal{M}_{34} = -\frac{1}{2} \left\{ (\eta_2 T_7 \rho^2 + \eta_1 T_6 \delta^2) \frac{\operatorname{sen}^2 \tau}{\alpha^2} + \eta_1 T_5 \cos^2 \tau - \delta \eta_1 T_{12} \frac{\operatorname{sen}(2\tau)}{\alpha} \right\}$$

$$\mathcal{M}_{43} = -\frac{1}{2} \left\{ (\eta_2 T_7 \rho^2 + \eta_1 T_6 \delta^2) \frac{\operatorname{sen}^2 \tau}{\alpha^2} + \eta_1 T_5 \cos^2 \tau - \delta \eta_1 T_{12} \frac{\operatorname{sen}(2\tau)}{\alpha} \right\}$$

$$\mathcal{M}_{44} = \frac{1}{2} \left\{ (\eta_1 T_8 \delta^2 + \eta_2 \rho^2 T_9) \frac{\operatorname{sen}^2 \tau}{\alpha^2} + \eta_1 T_{11} \cos^2 \tau + \delta \eta_1 T_{10} \cosh(2\xi_1) \frac{\operatorname{sen}(2\tau)}{\alpha} \right\}$$

de forma que,

$$Z_1 = \cos(2t) \operatorname{senh}(2\mu) \cosh(2\xi_2) - \operatorname{senh}(2\xi_2) \operatorname{sen}(2t),$$

$$Z_2 = \cos(2t) \cosh(2\xi_1) \cosh(2\mu),$$

$$Y_{1\mp} = \operatorname{senh}(2\xi_1) \cos(2t) \mp \cosh(2\xi_1) [\cosh(2\mu) - \operatorname{sen}(2t) \operatorname{senh}(2\mu)],$$

$$Y_{2\mp} = \operatorname{senh}(2\xi_2) \cos(2t) + \cosh(2\xi_2) [\operatorname{sen}(2t) \operatorname{senh}(2\mu) \mp \cosh(2\mu)],$$

$$Y_{3\mp} = \operatorname{sen}(2t) \cosh(2\mu) \mp \operatorname{senh}(2\mu),$$

$$Y_{4\mp} = \cos(2t) \operatorname{senh}(2\mu) \cosh(2\xi_1) \mp \operatorname{senh}(2\xi_1) \operatorname{sen}(2t),$$

$$Y_{5\pm} = \operatorname{senh}(2\xi_1) \cos(2t) \pm (\operatorname{sen}(2t) \operatorname{senh}(2\mu) + \cosh(2\mu)) \cosh(2\xi_1),$$

$$Y_{6\pm} = \operatorname{senh}(2\xi_1) \pm \cosh(2\mu) \cosh(2\xi_1) \cos(2t),$$

$$Y_{7\pm} = \operatorname{senh}(2\xi_2) \pm \cosh(2\mu) \cosh(2\xi_2) \cos(2t)$$

C.2 Emaranhamento - estado puro - parametrização

No processo de simplificação das equações utilizando os elementos das covariâncias, e ainda para uma fase $\phi = 0$, temos a uma medida de correlação quântica dada na forma

$$\mathcal{Y}_p(\tau) = \frac{\rho |\sin \tau|}{2} \sqrt{\frac{\Upsilon_{1+} \delta^2 \sin^2 \tau - \Upsilon_2 \alpha \delta \sin(2\tau) + \Upsilon_{1-} \alpha^2 \cos^2 \tau}{\mathcal{F}(\tau)}}$$

onde

$$\mathcal{F}(\tau) = (\Upsilon_5 \sin^2 \tau + \Upsilon_{3,1} \sin(2\tau) + \Upsilon_{4,1} \cos^2 \tau)(\Upsilon_6 \sin^2 \tau - \Upsilon_{3,2} \sin(2\tau) + \Upsilon_{4,2} \cos^2 \tau)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{1\pm} &= 2 \cosh^2(2\tau_\beta) (\cosh(4\xi_2) + \cosh(4\xi_1) \pm 2 \cosh(2\xi_2 \mp 2\xi_1)) \\ &\quad + 4 \sinh^2(2\tau_\beta) (1 \pm \cosh(2\xi_2 \pm 2\xi_1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_2 &= \sinh(4\tau_\beta) (\cosh(4\xi_2) - \cosh(4\xi_1)), \quad \Upsilon_{3,i} = \alpha \delta \sinh(2\tau_\beta) \cosh(2\xi_i), \\ \Upsilon_{4,i} &= \alpha^2 \cosh(2\tau_\beta) \cosh(2\xi_i), \quad \Upsilon_5 = \frac{\delta^2 \Upsilon_{4,1} + \rho^2 \Upsilon_{4,2}}{\alpha^2} \quad \Upsilon_6 = \frac{\delta^2 \Upsilon_{4,2} + \rho^2 \Upsilon_{4,1}}{\alpha^2} \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] Sakurai J.J., *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley 1994; Cohen-Tannoudji C., Diu B. e Laloce F., *Quantum Mechanics, Vol I*, John Wiley e Sons, 1977; Bjorken J. D. e Drell S. D., *Relativistic Quantum Fields*, MacGraw-Hill, New York, 1965.
- [2] Nayfeh A. H., *Perturbation Methods* (Wiley, New York, 1973).
- [3] Castro A.S.M., Dodonov V.V., Mizrahi S.S., *J. Opt. B* **4**, S191 (2002).
- [4] Dodonov V.V. e Man'ko V.I., em: *Invariants and the Evolution of Nonstationary Quantum Systems*, Proc. Lebedev Physics Institute, Vol. 183, Nova Science, New York, p. 103, (1989).
- [5] Goldstein H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, MA, (1980).
- [6] Nivaldo A. L., *Mecânica Analítica*, Editora livraria da física, São Paulo, (2004).
- [7] Lewis H.R. e Riesenfeld W.B., *J. Math. Phys.* **10**, p.1458 (1969).
- [8] Arfken G., *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, (1970).
- [9] Feynman R P and Hibbs A R 1965 *Quantum Mechanics and Path Integrals* (MacGraw-Hill New York).
- [10] C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Perez, and W.K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).
- [11] Davidovich L., Zagury N., Brune M., Raimond M., and Haroche S., *Phys. Rev. A* **50**, R895 (1994).
- [12] Moussa M.H.Y., *Phys. Rev. A* **55**, R3287 (1997).
- [13] Zubairy M.S., *Phys. Rev. A* **58**, 4368 (1998).
- [14] Milburn G.J., Braunstein S.L., *Phys. Rev. A* **60**, 937 (1999).
- [15] Bouwmeester D., Pan J.W., Mattle K., Eibl M., Weinfurter H., Zeilinger A., *Nature* **390**, 575 (1997).

- [16] Furusawa A., Sorensen J.L., Braunstein S.L., Fuchs C.A., Kimble H.J., Polzik E.S., *Science* **282**, 706 (1998).
- [17] Castro A.S.M., Dodonov V.V., *J. Opt. B* **5**, S593 (2003).
- [18] Oliveira M.C., Mizrahi S.S., Dodonov V.V., *J. Opt. B* **1**, 610 (1999).
- [19] Luks A., Perinova V. e Hradil Z., *Acta Phys. Polon. A* **74**, 713 (1988).
- [20] Dodonov V.V., Man'ko V.I. e Polynkin P.G., *Phys. Lett. A* **188**, 232 (1994).
- [21] Kennard E.H., *Z. Phys.* **44**, 326 (1927).
- [22] Ji J-Y. e Peak D., *J. Phys. A: Math. Gen* **34**, 3429 (2001).
- [23] Janowicz M, *Phys. Reports*, **375**, 327, (2003).
- [24] Bender C.M. e Bettencourt L.M.A., *Phys. Rev. Lett*, **77**, 20,(1996).
- [25] Bender C.M. e Bettencourt L.M.A., *Phys. Rev. D*, **54**, 12,(1996).
- [26] Sneyd A.D., *European Journal of Mechanics B*, **21**, 247, (2002).
- [27] Allahverdi R., Shaw D.R.H.A, Campbell B., *Phys. Lett. B*, **473**, 246, (2000).
- [28] Newman W.I., Rand R.H., Newman A.L., *Chaos*, **9**, 1, (1999).
- [29] El-Dib Y.O., *Chaos, solitons and Fractals*, **12**, 705, (2001).
- [30] Martinelli M., Alzar C.L.G, Ribeiro P.H.S., Nussenzveig P., Classical and quantum properties of optical parametric oscillators, *Braz. J. Phys.* **31**, 597 (2001).
- [31] Nayfeh A.H., *Introduction to Perturbation Techniques* (Wiley, New York, 1981).
- [32] Machado K.D., *Equações diferenciais aplicadas à Física*, editora UEPG, 2ª edição, **162-164** (2000).
- [33] Kevorkian J and Cole J D 1981 “ *Perturbation Methods in Applied Mathematics*” vol 34 Spring-verlag.
- [34] Einstein A., Podolsky B. e Rosen N., *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [35] Bohr N., *Phys. Rev.* **48**, 696 (1935).
- [36] Schrödinger E., *Proc. Camb. Phil. Soc.* **31**, 555 (1935).
- [37] Nilsen M.A., Tese de doutoramento, University of New Mexico, (1998). (quant-ph/0011036)

- [38] Shor P.W., SIAM J. Sci. Statist. Comput. **26**, 1484 (1997).
- [39] Grover L. K., *Proceedings, 28 th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC)*, Maio 1996, p. 212 (quant-ph/9605043).
- [40] Brandt H.E., Prog. Quant. Electron. **22**, 257 (1998).
- [41] Vedral V., Rev. Mod. Phys. **74**, 197 (2002).
- [42] Fortschr P.L., Phys. **50**, 1177 (2002).
- [43] Keyl M., Phys. Rep. **369**, 431 (2002).
- [44] Duan L.M., Giedke G., Cirac J.I. e Zoller P., Phys. Rev. Lett. **84**, 2722 (2000).
- [45] Simon R., Phys. Rev. Lett. **84**, 2726 (2000).
- [46] Werner R.F. e Wolf M.M., Phys. Rev. Lett. **86**, 3658 (2001).
- [47] Marian P., Marian T.A. e Scutaru H., J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 6969 (2001).
- [48] Giedke G., Kraus B., Lewenstein M. e Cirac J.I., Phys. Rev. Lett. **87**, 167904 (2001).
- [49] B-G Englert and K. Wódkiewicz Phys. Rev. A **65**, 054303 (2002).
- [50] V. Giovannetti, S. Mancini, D. Vitali and P. Tombesi Phys. Rev. A **67**, 022320 (2003).
- [51] Dodonov V.V. e Man'ko V.I., Group Theoretical Methods in Physics (Proceedings of the Second International Seminar, Zvenigorod, 1982) eds Markov M.A., Man'ko V.I. e Shabad A.E. (Chur-London-Paris-New York: Harwood Academic Publ.) vol 1, p 591 (1985).
- [52] Dodonov V.V., J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 7721 (2000); Dodonov V.V. e Man'ko O.V., J. Opt. Soc. Am. A **17**, 2403 (2000).
- [53] Dodonov V.V., Malkin I.A. e Man'ko V.I., J. Phys. A: Math. Gen. **8**, L19 (1975).
- [54] Castro A.S.M., Dodonov V.V., J. of Russ Laser Reser., **23**, 2 (2002).
- [55] Dodonov V.V., Kurmyshev E.V. e Man'ko V.I., Phys. Lett. A, **79**, 150 (1980).
- [56] Schrödinger E., Ber. Kgl. Akad. Wiss. Berlin **24** , 296 (1930).
- [57] Robertson H.P., Phys.Rev. **35**, 667 (1930).
- [58] Castro A.S.M., Tese de doutoramento, Universidade Federal de São Carlos, (2002).
- [59] Agarwal G.S., J. Mod. Opt. **34**, 909 (1987).

- [60] Englert B.G. and Wódkiewicz K., *Int. J. Quant. Inform.* **1**, 153 (2003).
- [61] Dodonov A.V., Dodonov V.V. e Mizrahi S.S., *J. Phys. A: Math. Gen.* **738**,683 (2005).
- [62] Andreato M.A, Dodonov A.V. e Dodonov V.V., *J. of Russian Laser Research*, **23**, 6, (2002).
- [63] Duan L-M., Giedke G., Cirac J.I. e Zoller P., *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2722 (2000).
- [64] Simon R., *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2726 (2000).
- [65] Werner R.F. e Wolf M.M., *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3658 (2001).
- [66] Marian P., Marian T. A., e Scutaru H., *J. Phys. A*, **34**, 6969 (2001).
- [67] Scheel S. e Welsch D-G., *Phys. Rev. A* **64**, 063811 (2001).
- [68] Barnett S.M. e Phoenix S.J.D., *Phys. Rev. A* 40, 2404 (1989); Barnett S. M. e Phoenix S.J.D., *Phys. Rev. A* **44**, 535 (1991).
- [69] Mann A., Sanders B.C. e Munro W.J., *Phys. Rev. A* **51**, 989 (1995).
- [70] Bennett C.H., Herbert H.J., Popescu S. e Schumacher B., *Phys. Rev. A* **53**, 2046 (1996).
- [71] Braunstein S.L., *Phys. Lett. A* **219**, 169 (1996).
- [72] Vedral V. e Plenio M.B., *Phys. Rev. A* **57**, 1619 (1998).
- [73] Wootters W.K., *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245 (1998).
- [74] Loudon R., *The Quantum Theory of Light*, 2nd edition, (Oxford Science Publications, 1983).
- [75] Oliveira M.C., tutorial “Teoria de processos contínuos de fotocontagem e de detecção homódina de quadratura de campos quânticos”, 2003.
- [76] Neumann J., *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Berlin: Springer, 1932); *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, 1954).
- [77] Pauli W., *Die Allgemeine Prinzipien der Wellenmechanik*, *Enciclopedia of Physics* Vol. 5 (Berlin: Springer-Verlag, 1958).
- [78] Mandel L., *Proc. Phys. Soc.* **72**, 1037 (1958).
- [79] Kelley P.L. e Kleiner W.H., *Phys. Rev. A* **136**, 316 (1964).

- [80] Glauber R.J., Quantum Optics and Electronics, edited by C. De Witt, A. Blandin and C. Cohen-Tannoudji (New York: Gordon e Breach), p.63.
- [81] Mandel L., Opt. Acta **28**, 1447 (1981).
- [82] Mollow B.R., Phys. Rev. **168**, 1896 (1968).
- [83] Scully M.O. e Lamb W.E., Phys. Rev. **179**, 368 (1969).
- [84] Shepherd T.J., Opt. Acta **28**, 567 (1981); **31**, 1399 (1984).
- [85] Selloni A., Schweindimann P., Quattropiani A. e Baltés H.P., J. Phys. A **11**, 1427 (1978).
- [86] Srinivas M.D. e Davies E.B., Opt. Acta **28**, 981 (1981); **29**, 235 (1982).
- [87] Oliveira M.C., Silva L.F. e Mizrahi S.S., Phys. Rev. A **65**, 062314 (2002).
- [88] Prataçviera G.A e Oliveira M.C., Phys. Rev. A **70**, 011602(R) (2004).
- [89] Saito H. e Ueda M., Phys. Rev. A **68**, 043820 (2003).
- [90] Li K.H., Phys. Rep. **134**, 1 (1986).
- [91] Walls D.F. e Milburn G.J., Quantum Optics, (Springer-Verlag, Berlin, 1995).
- [92] Scully M.O. e Zubairy M.S., Quantum Optics, (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).