

Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Programa de Pós-Graduação em Ciências  
Área de concentração - Física

**SINCRONIZAÇÃO DE CAOS EM UMA REDE  
COM INTERAÇÃO DE LONGO ALCANCE**

MARLI TEREZINHA VAN KAN

PONTA GROSSA

2008

MARLI TEREZINHA VAN KAN

**SINCRONIZAÇÃO DE CAOS EM UMA REDE  
COM INTERAÇÃO DE LONGO ALCANCE**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências, área de concentração Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Marcos Batista

PONTA GROSSA  
2008

Ficha Catalográfica Elaborada pelo Setor de Processos Técnicos BICEN/UEPG

V217s Van Kan, Marli Terezinha  
Sincronização de caos em uma rede com interação de longo alcance. / Marli Terezinha Van Kan. Ponta Grossa, 2008.  
69f.  
Dissertação (Mestrado em Ciências), Universidade Estadual de Ponta Grossa.  
Orientador: Prof. Dr. Antonio Marcos Batista

1. Rede. 2. Mapas. 3. Caos. 4. Sincronização. I. Batista, Antonio Marcos. II. T.

CDD: 502

---

**TERMO DE APROVAÇÃO**

**MARLI TEREZINHA VAN KAN**

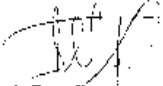
**“Sincronização de Caos em uma Rede com Interação de Longo Alcance”**

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Ciências - Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador:

  
Prof. Dr. Antonio Marcos Batista  
Departamento de Matemática, UEPG/PR

  
Prof. Dr. Diógenes Borges Vasconcelos  
Departamento de Física, UTFPR/PR

  
Prof. Dr. Sandro Ely de Souza Pinto  
Departamento de Física, UEPG/PR

**Ponta Grossa, 28 de janeiro de 2008.**

# Agradecimentos

Ao professor Antonio Marcos Batista, pela orientação competente, tornando possível a realização deste trabalho.

Ao professor José Tadeu Teles Lunardi pelo incentivo e por acreditar em mim.

Ao professor Sandro Ely de Souza Pinto, pelo apoio, pelos esclarecimentos prestados, por sua importante contribuição.

Ao amigo e colaborador, Romeu Miquéias Szmoski, por todo auxílio na parte de programação e pelo conhecimento compartilhado.

A Fabiana Heirich, pela amizade e pela disposição em ajudar.

Aos colegas da pós-graduação, pela amizade e companheirismo nesta etapa de estudos.

A meus pais que sempre acreditaram na importância do estudo.

E por último, mas não menos importante, agradeço a minha família, João Marcos, Fernanda e Rafael Felipe, pelo apoio e compreensão necessários em todas as etapas deste trabalho.

# Resumo

Consideramos redes de mapas acoplados com interações de longo alcance para estudar a sincronização de caos. Redes de mapas acoplados têm sido investigadas intensivamente desde os anos 80 como modelos para entender muitos fenômenos espaço-temporais observados em sistemas espacialmente estendidos, conseqüentemente caos espaço-temporal. Usamos o parâmetro de ordem complexo para quantificar a sincronização de caos em uma rede unidimensional de mapas logísticos acoplados com a intensidade de acoplamento variando conforme uma lei de potência. Dependendo do número de mapas, da intensidade de acoplamento e do alcance das interações, a sincronização de caos completa pode ser obtida. Além disso, também calculamos o espectro de Lyapunov que fornece as informações sobre o grau de caoticidade da rede.

# Abstract

We considered coupled maps lattices with long-range interactions to study chaos synchronization. Coupled map lattices have been intensively investigated since early 80's as models to understand many spatiotemporal phenomena observed in extended spattially system, consequently spatiotemporal chaos. We used the complex order parameter to quantify chaos synchronization for a one-dimensional chain of coupled logistic maps with a coupling strength which varies with the lattice in a power-law fashion. Depending on the range of the interactions, complete chaos synchronization may be attained. Furthermore, we also calculated the Lyapunov spectrum which give us information about the degreeof chaoticity of the lattice.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos Fundamentais</b>	<b>6</b>
2.1	Sistemas dinâmicos . . . . .	6
2.2	Pontos fixos e órbitas periódicas . . . . .	7
2.3	Atratores . . . . .	10
2.4	Expoente de Lyapunov . . . . .	11
2.5	O mapa logístico . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Rede de Mapas Acoplados</b>	<b>21</b>
3.1	Conceitos básicos . . . . .	21
3.2	Formas de acoplamento . . . . .	23
3.3	Acoplamentos usuais . . . . .	25
3.4	Dinâmica local da rede . . . . .	28



3.5	Rede de mapas acoplados com interação de longo alcance . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Sincronização de caos</b>	<b>34</b>
4.1	Sincronização . . . . .	34
4.2	Distribuição de tamanho dos platôs . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Espectro de Lyapunov</b>	<b>51</b>
5.1	Espectro de Lyapunov de uma rede de mapas logísticos acoplados . .	51
5.2	Espectro de Lyapunov para o acoplamento de longo alcance . . . . .	55
5.3	Dimensão de Lyapunov . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>62</b>

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo de sistemas dinâmicos tem recebido grande atenção da comunidade científica recentemente. Entende-se por sistema dinâmico todo o sistema que evolui no tempo, qualquer que seja a sua natureza, a qual pode ser física, biológica, química, social ou econômica. Como exemplos de sistemas dinâmicos pode-se citar um circuito elétrico, o sistema nervoso de um ser vivo ou uma população de neurônios. A teoria dos sistemas dinâmicos permite descrever a evolução temporal de um sistema para entender ou prever o seu comportamento futuro. Os sistemas dinâmicos podem ser classificados quanto a variável temporal, a qual pode ser discreta, representados por mapas, e de tempo contínuo, os quais são representados por equações diferenciais. As equações podem ser lineares ou não-lineares, com parâmetros fixos ou variáveis no tempo. O comportamento dinâmico de um sistema pode ser modificado se seus parâmetros são alterados.

Esta dissertação trata de um sistema dinâmico de tempo discreto e aborda uma equação do tipo não-linear, resolvida pelo uso de recursos computacionais. O interesse em se analisar um sistema dinâmico e seu comportamento surge da curiosidade de saber se eventos existentes na natureza podem ser modelados por equações matemáticas. A análise de modelos matemáticos pode revelar aspectos

importantes de fenômenos biológicos, físicos, químicos e sociais, e requer o uso de técnicas sofisticadas para a interpretação dos resultados obtidos [1].

O número de trabalhos existentes em sistemas dinâmicos não-lineares vem aumentando com o passar do tempo, e o conceito de atrator caótico surgiu de um trabalho meteorológico de Lorenz realizado em 1963 [2]. Enquanto coletava dados e os analisava através de três equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, Lorenz descobriu que determinados sistemas podiam possuir comportamentos diferentes mesmo partindo de condições iniciais muito próximas. A partir deste fato muitos trabalhos surgiram na área de caos [3]. Caos é entendido como um comportamento aperiódico que apresenta sensibilidade às condições iniciais. Isto significa que duas trajetórias que originam-se de condições iniciais ligeiramente diferentes, afastam-se exponencialmente com o passar do tempo, obstruindo a capacidade de prever o estado futuro do sistema.

Para o estudo de um sistema dinâmico pode-se utilizar um modelo espaço-temporal. As redes de mapas acoplados foram introduzidas a partir de 1983 [4, 5] como uma forma de estudar caos espaço temporal. Nessas redes o espaço e o tempo são discretos enquanto que a variável de estado é contínua. As redes de mapas acoplados não necessitam de muito tempo computacional, pois o tempo, neste caso, é discreto, possibilitando uma maior facilidade para a sua implementação computacional, diferentemente de sistemas físicos que são modelados por equações diferenciais acopladas. Do ponto de vista computacional, o tempo de processamento gasto com o estudo numérico deste tipo de rede é muito grande devido à natureza contínua de sua variável temporal, o que torna o estudo da dinâmica do sistema bastante difícil. Certas redes de mapas acoplados exibem fenômenos interessantes como intermitência [6, 56], sincronização e supressão de caos [7, 18].

Alguns trabalhos sobre redes de mapas acoplados abordam redes onde a interação entre os elementos ou sítios é local, ou seja, somente os sítios vizinhos

contribuem para o acoplamento na rede [4]. Em outros trabalhos, as redes em estudo possuem um acoplamento com interação não-local do tipo campo médio, isto é, cada sítio interage com os demais sítios da rede com a mesma intensidade [8]. Nesta dissertação, investiga-se uma rede de mapas acoplados onde a interação entre os sítios é não-local, contudo a intensidade da interação decai segundo uma lei de potência com a distância ao longo da rede. O acoplamento tipo lei de potência apresenta um parâmetro efetivo de alcance, e a criação de uma rede acoplada localmente ou acoplada globalmente pode ser realizada variando-se a intensidade do alcance da interação.

As contribuições para este trabalho concentram-se principalmente nos estudos recentes de Tessone e colaboradores [9], os quais mostraram que duas réplicas acopladas de sistemas espacialmente estendidos sincronizam para um estado caótico espaço temporal comum acima de uma certa amplitude de acoplamento, e passam a apresentar esta dinâmica após o acoplamento. Na referência [9], a transição para a sincronização foi estudada como uma transição de fase de sistemas em não equilíbrio, e propriedades críticas foram analisadas variando-se o alcance da interação. A transição encontrada é do tipo contínua, enquanto que os índices críticos variam continuamente com o expoente da lei de potência que caracteriza a interação. Evidências numéricas fortes indicam que a transição pertence à classe de universalidade da família de Percolação Direcionada Anômala encontrada por espalhamento via vôo de Lèvy de processos epidêmicos. A Percolação Direcionada Anômala aparece em espalhamento epidemiológico, sempre que o agente infeccioso pode executar vôos de Lèvy. Na difusão do tipo Lèvy, vôos longos são intercalados com saltos mais curtos, de modo que uma região muito maior é coberta pelo agente. Tal processo, pode ser modelado assumindo, por exemplo, em uma rede unidimensional, que um sítio já infectado propaga a doença para algum outro sítio obedecendo a uma lei de potência.

Neste trabalho, o comportamento de uma rede de mapas acoplados será analisado através da sincronização. A análise de fenômenos de sincronização

na evolução de sistemas dinâmicos, iniciou-se no século XVII com a descoberta de Christian Huygens, de que dois pêndulos de relógio, muito fracamente acoplados, tornavam-se sincronizados em fase. Sistemas de osciladores acoplados podem ser encontrados na natureza, inclusive nos seres vivos. Um exemplo pode ser visto no comportamento coletivo de algumas espécies de vaga-lumes que, na época do acasalamento, apagam e acendem suas luzes de forma sincronizada [10, 11]. Mais recentemente, a busca por sincronização voltou-se para sistemas caóticos. O fenômeno da sincronização caótica pode ser observável em muitos sistemas físicos reais, como por exemplo, sistemas elétricos, sistemas de lasers [12], sistemas biológicos [1], junções de Josephson [13] e também em novas técnicas de comunicação [14].

A caracterização da dinâmica temporal de uma rede de mapas acoplados pode ser feita mediante a determinação e análise do espectro de expoentes de Lyapunov e pela dimensão de Lyapunov. Cada expoente do espectro é uma medida da taxa com que duas trajetórias instáveis se afastam no espaço de fases à medida que o tempo evolui. Se os expoentes de Lyapunov são negativos, as trajetórias convergem e a evolução não é caótica. Se um ou mais expoentes de Lyapunov são positivos, significa que as trajetórias divergem, e a evolução será caótica, e, portanto, sensível às condições iniciais. O espectro de Lyapunov de mapas logísticos com acoplamento local foi estudado por Kaneko [15], Crutchfield [16] e Isola [17]. O espectro de Lyapunov de mapas com acoplamento tipo lei de potência assim como a dimensão de Lyapunov podem ser encontrados em trabalhos de [19, 20, 21, 22].

A rede e suas características são investigadas de modo que a proposta deste trabalho consiste em: 1) estudar o comportamento dinâmico coletivo obtido na rede com acoplamento de longo alcance; 2) utilizar o parâmetro de ordem para o diagnóstico de sincronização caótica; 3) identificar no espaço de parâmetros as regiões de sincronização; 4) caracterizar a dinâmica da rede através da análise do espectro de Lyapunov e da dimensão de Lyapunov.

Esta dissertação de mestrado está organizada da seguinte forma: o capítulo dois contém conceitos fundamentais da teoria de sistemas dinâmicos, pontos fixos e órbitas periódicas, atratores, um método para o cálculo do expoente de Lyapunov para mapas unidimensionais e finalmente apresenta-se um breve estudo sobre o mapa logístico, utilizado como dinâmica da rede. O capítulo três aborda os conceitos básicos de rede de mapas acoplados, formas de acoplamento, acoplamentos usuais e dinâmica local da rede. O capítulo quatro trata da rede de mapas acoplados com interação do tipo lei de potência, cujo maior interesse é o de encontrar a sincronização e, além disso, verificar a presença de platôs de sincronização e intermitência. Isso será feito pela análise do parâmetro de ordem complexo proposto por Kuramoto que possibilita a caracterização destes estados. O capítulo cinco apresenta o estudo do espectro de expoentes de Lyapunov em uma rede de mapas acoplados utilizando-se o acoplamento de alcance variável, o qual permite a transição entre o acoplamento local e global, e ainda, o estudo do espectro de Lyapunov para o acoplamento de longo alcance e a dimensão de Lyapunov com o objetivo de se evidenciar a sincronização caótica. Finalmente, o capítulo seis apresenta as conclusões do trabalho.

## Capítulo 2

# Conceitos Fundamentais

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos de dinâmica não-linear considerados relevantes para uma melhor compreensão dos temas abordados.

### 2.1 Sistemas dinâmicos

Um sistema dinâmico consiste de uma regra determinística e de um conjunto de possíveis estados, os quais representam informações que caracterizam o sistema em um certo instante de tempo. Um sistema dinâmico é descrito por variáveis dependentes e variáveis independentes, que variam no tempo [25, 54]. O seu estado é representado pelos valores do conjunto de variáveis dependentes num certo instante de tempo e o espaço de estados possíveis é denominado espaço de fase. A seqüência de estados ao longo do tempo define uma curva nesse espaço de fase, denominada trajetória. À medida que o tempo aumenta, as trajetórias podem ou não convergir para um conjunto de dimensão inferior, denominado atrator. Um atrator é um estado para o qual o sistema evolui no tempo a partir de certas condições iniciais. A evolução de um sistema é descrita por um conjunto de equações discretas ou contínuas as quais permitem a previsão do futuro, dado o passado do sistema.

Um sistema dinâmico contínuo é caracterizado por um conjunto de equações diferenciais. Um exemplo é o sistema de equações ordinárias de primeira ordem. No tempo,  $\frac{dx(t)}{dt} = F(x, t)$ , na qual  $x(t)$  é um vetor D-dimensional e  $F$  uma função D-dimensional de  $x$  e  $t$ . Se as variáveis dependentes e o tempo forem contínuos, essas regras serão equações diferenciais ordinárias [26, 54].

Um sistema dinâmico discreto é caracterizado pela iteração de uma função. A função que descreve tal sistema é chamada de *mapa* e é representada na forma  $x_{n+1} = f(x_n)$ , onde o tempo  $n$  é um valor discreto inteiro e  $f(x_n)$  é uma função linear ou não-linear. A escolha da lei  $f$ , pode dar origem a diferentes tipos de comportamentos. Se  $f$  for uma função linear em  $x$ , esta dinâmica é simples e depende da escolha de  $f$ . Observa-se que, a maioria dos fenômenos ou leis são não-lineares, o que torna a sua análise mais complexa, exigindo o uso de conhecimentos mais elaborados. Para ilustrar a riqueza de comportamentos gerados por um sistema não-linear, considera-se o mapa logístico.

## 2.2 Pontos fixos e órbitas periódicas

O objetivo básico da teoria de sistemas dinâmicos é compreender o comportamento final ou assintótico de um processo iterativo. Mas no que consiste este processo? Seja uma função  $f$  de  $R$  em  $R$ . Inicialmente, preocupa-se em tomar um ponto  $x_0$  do domínio desta função e conhecer a sua imagem  $f(x_0)$ . Porém,  $f(x_0)$  também pode ser um ponto do domínio de  $f$ , e pode-se saber a sua imagem  $f(f(x_0))$ . Continuando assim pode-se saber quem são os pontos  $x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0)))$ , e assim por diante. Este conjunto de pontos é chamado de órbita ou trajetória do ponto  $x_0$ .

Segundo Lorenz, órbitas são as representações no espaço de fases de uma seqüência cronológica contínua ou discreta de estados [27]. Dado um  $x_0 \in R$ ,



e um sistema dinâmico discreto  $f$ , define-se uma órbita de  $x_0$  sobre  $f$  como uma seqüência de pontos  $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^{(2)}(x_0), \dots, x_n = f^{(n)}(x_0), \dots$ . O ponto  $x_0$  é denominado de semente da órbita [28].

Existem vários tipos de órbitas em sistemas dinâmicos. Uma órbita considerada importante é o *ponto fixo*. Um ponto  $x^*$  é fixo se satisfaz  $f(x^*) = x^*$ . Se  $f^2(x^*) = f(f(x^*)) = f(x^*) = x^*$  e, em geral,  $f^n(x^*) = x^*$ , então a órbita do ponto fixo é a seqüência  $x^*, x^*, \dots$ , ou seja, um ponto fixo “nunca se move”. Os pontos fixos para mapas são encontrados resolvendo a equação  $f(x) = x$  ou geometricamente, examinando-se a interseção do gráfico de  $f$  com a linha diagonal  $y = x$ . Nas equações diferenciais, ao invés de pontos fixos, têm-se os *pontos de equilíbrio* que são determinados pela condição  $\frac{dx(t)}{dt} = 0$ .

Outro tipo de órbita é a periódica, ou cíclica. O ponto  $x^*$  é periódico se  $f^k(x^*) = x^*$  para algum  $k > 0$ . O  $k$  mínimo é denominado de período da órbita. Se  $x_0$  é periódico com período  $k$ , então a órbita de  $x_0$  é uma seqüência repetida de números:  $x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0), x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)$ . Para encontrar pontos de período  $k$ , no caso de sistemas discretos, é necessário resolver  $f^k(x) = x$ . Sabendo-se da simplicidade dos tipos de órbitas, estas podem evoluir de maneira complexa e caótica. Uma das características de sistemas caóticos é a presença de órbitas que não se repetem e ocupam todo o domínio da função, ou seja, passam arbitrariamente perto de qualquer ponto em um dado intervalo de tempo. Essas são as órbitas densas. Além da localização dos pontos fixos que representam os estados estacionários do sistema, pode-se obter informações importantes analisando sua estabilidade, permitindo entender o comportamento dinâmico em sua vizinhança.

Para estudar a estabilidade de um ponto fixo  $x^*$  de  $x_{n+1} = f(x_n)$  deve-se verificar o que ocorre com as sucessivas iterações a partir de um ponto  $x_n$  próximo de  $x^*$ . Seja o ponto  $x_n$  próximo de  $x^*$ , isto é,  $x_n = x^* + \delta_n$ . A distância

entre estes pontos é dada por

$$\delta_n = |x_n - x^*|. \quad (2.1)$$

A distância evolui para

$$\delta_{n+1} = |x_{n+1} - x^*| = |f(x_n) - x^*| = |f(x^* + \delta_n) - x^*|, \quad (2.2)$$

expandindo o mapa  $f(x)$  em série de Taylor em torno de  $x^*$  tem-se:

$$f(x^* + \delta_n) = f(x^*) + \delta_n \left( \frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x^*} + \frac{1}{2} \delta_n^2 \left( \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right)_{x=x^*} + \dots, \quad (2.3)$$

onde os termos da expansão que contenham potências de  $\delta_n$  de ordem igual ou superior a dois serão desprezados. Para que esta linearização seja válida,  $\delta_n$  deve ser tomado suficientemente pequeno. De (2.2) e (2.3), admitindo-se  $\delta_n$  pequeno a ponto de se desprezar os termos de ordem superior a dois em  $\delta_n$  levam à seguinte expressão para  $\delta_{n+1}$

$$f(x^* + \delta_n) - f(x^*) = \delta_n \left( \frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x^*}, \quad \delta_{n+1} = \left| \delta_n \left( \frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x^*} \right|. \quad (2.4)$$

Se  $\delta_{n+1} < \delta_n$  as iterações convergem para o ponto fixo  $x^*$  e este é estável (atrator). A condição necessária e suficiente para isso é

$$\left| \left( \frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x^*} \right| < 1. \quad (2.5)$$

Se  $\delta_{n+1} > \delta_n$  as iterações divergem do ponto fixo  $x^*$  e este é instável (repulsor), e é caracterizado pela condição

$$\left| \left( \frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x^*} \right| > 1. \quad (2.6)$$

Pode-se ainda observar o caso em que a derivada do sistema seja igual a 1. Nesse caso, a linearização efetuada não é suficiente para afirmar se o ponto fixo é ou não estável. O caso em que a derivada seja igual a 0 onde o ponto mais estável é equidistante dos extremos, sendo denominado de super-estável.

Conclui-se então, que os estados seguintes  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , gerados a partir de  $x_0$  tomado próximo de  $x^*$ , podem se aproximar ou se afastar do ponto fixo  $x^*$ . O número de pontos fixos em um dado sistema depende do grau da função  $f$  que descreve o sistema. Por exemplo, se a função for do segundo grau, podem haver no máximo dois pontos fixos. No caso de todos os pontos serem instáveis, o estado do sistema nunca converge para um ponto, sua evolução temporal irá oscilar entre alguns valores (órbita periódica), ou nunca passará por um mesmo estado.

## 2.3 Atratores

Um atrator é um conjunto invariante para o qual as órbitas convergem depois de um tempo suficientemente longo [29]. Atrator é a figura construída no espaço de fases quando vários estados iniciais evoluem por um tempo longo e elimina-se o tempo transiente. Entende-se por tempo transiente o tempo necessário para que o sistema evolua para um comportamento assintótico. Por exemplo, o ponto fixo é um atrator: dada uma condição inicial na vizinhança do ponto, o estado irá evoluir para o ponto fixo e permanecerá neste ponto. Sistemas com dinâmica periódica, apresentam atratores periódicos. Mesmo os sistemas caóticos, que não apresentam convergência de órbitas, podem apresentar uma espécie de *atrator* denominado *atrator estranho*, o qual apresenta estrutura fractal. O conjunto de todos os pontos no espaço de estados que convergem para um determinado atrator, denomina-se bacia de atração desse atrator.

Sistemas dinâmicos que possuem atratores são denominados sistemas dissipativos, porque o comportamento destes levam à perda de energia para o meio ambiente. Geometricamente, esses sistemas sofrem contrações em volumes do espaço de estados, isto é, se for escolhida uma região desse espaço cujos pontos são usados como condições iniciais do sistema, percebe-se que conforme o estado evolui, as

órbitas geradas convergem ou tendem para regiões menores, em termos de volume, do que a região que inicialmente as geraram. Outra categoria de sistemas são os conservativos que, diferentemente dos dissipativos, preservam volumes do espaço de estados. O que caracteriza este tipo de sistema, é que não há convergência nem divergência das órbitas, como se o sistema sempre conservasse sua energia.

Um sistema com dinâmica caótica apresenta um atrator caótico. Um atrator caótico é um conjunto que possui dependência sensível às condições iniciais. Esse fato é resultado de duas órbitas muito próximas do sistema que divergem completamente, conforme o sistema evolui no tempo. Um sistema caótico é resultado de uma lei determinística de evolução, isto é, sempre o mesmo comportamento é gerado, sob as mesmas condições. A aperiodicidade é o que impossibilita previsões a longo prazo a respeito do estado do sistema. É interessante observar que uma órbita caótica visita sempre um ponto distinto do espaço de estados, nunca passando pelo mesmo ponto mais do que uma vez, em qualquer instante de tempo.

O comportamento caótico é comum e pode existir em modelos simples, como é o caso do mapa logístico. O estudo e a previsão do comportamento caótico pode ser feito por meio de medidas. Uma das maneiras de se investigar o comportamento caótico de um sistema é através do cálculo dos expoentes de Lyapunov do mesmo.

## 2.4 Expoente de Lyapunov

O expoente de Lyapunov expressa a taxa média de expansão ou de contração da distância entre duas trajetórias caracterizadas por condições iniciais muito próximas. Medir o expoente de Lyapunov entre duas trajetórias é equivalente a medir o expoente em um conjunto de trajetórias. Para cada dimensão do espaço de fases existe um expoente associado que determina o comportamento do conjunto

ocupado pelas condições iniciais ao longo do tempo.

Na seqüência, apresenta-se um método para calcular o expoente de Lyapunov para mapas unidimensionais.

Dado o mapa unidimensional

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2.7)$$

sejam dois pontos iniciais próximos  $x_0$  e  $y_0$  e a distância entre eles  $\delta_0 = |y_0 - x_0|$ . Admite-se que depois de uma iteração a nova distância seja  $\delta_1 = |y_1 - x_1|$ . Pode-se relacionar  $\delta_0$  e  $\delta_1$  e as sucessivas distâncias a partir de uma variação exponencial,

$$\begin{aligned} \delta_1 &= e^{\lambda_1} \delta_0, \\ \delta_2 &= e^{\lambda_2} \delta_1 = e^{\lambda_1 + \lambda_2} \delta_0, \\ &\vdots \\ \delta_n &= e^{\lambda_n} \delta_{n-1} = e^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} \delta_0 = e^{n\lambda} \delta_0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde  $\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{n}$  mede a taxa exponencial média de expansão das trajetórias vizinhas. Se  $\lambda > 0$ , há uma expansão do conjunto, se  $\lambda = 0$ , o conjunto se mantém e se  $\lambda < 0$ , há uma contração. A relação (2.8) permite escrever

$$\begin{aligned} |f^n(y_0) - f^n(x_0)| &= e^{n\lambda} \delta_0 \\ \lambda &= \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)}{\delta_0} \right|, \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde  $f^n(x_0)$  indica a n-ésima iteração de  $f(x_0)$ . Deve-se considerar uma distância inicial infinitesimal ( $\delta_0 \rightarrow 0$ ) e um número infinito de iterações ( $n \rightarrow \infty$ )

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)}{\delta_0} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right|, \end{aligned} \quad (2.10)$$

logo  $\lambda$  é por definição o expoente de Lyapunov do mapa e constitui uma medida de divergência exponencial ( $\lambda > 0$ ) ou de contração ( $\lambda < 0$ ), não dependendo da

trajetória vizinha, mas podendo depender do ponto inicial  $x_0$ . Pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx_0} f^n(x_0) = \frac{d}{dx_{n-1}} f(x_{n-1}) \frac{d}{dx_{n-2}} f(x_{n-2}) \cdots \frac{d}{dx_0} f(x_0), \quad (2.11)$$

onde  $x_i = f^i(x_0)$  é o resultado da  $i$ -ésima iteração do mapa a partir da condição inicial  $x_0$ . Substituindo (2.11) em (2.10) obtém-se

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right|. \quad (2.12)$$

Pode-se separar o logaritmo do produtório em somas, e o logaritmo natural do número de Lyapunov, *expoente de Lyapunov*, pode ser escrito como

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \quad (2.13)$$

onde  $n$  indica o número de iterações em que o sistema é observado,  $f'$  é a derivada da lei de evolução do sistema, que é calculada em cada ponto  $x_i$  de uma órbita gerada sob uma condição inicial. Valores positivos para os expoentes de Lyapunov (ao menos um deles sendo positivo) indicam caos. Valores negativos indicam comportamentos convergentes, como periódico ou de ponto fixo. Valores nulos indicam quase-periodicidade ou mudança de comportamento (pontos de bifurcação).

A teoria da bifurcação está sendo muito estudada em sistemas dinâmicos e tenta-se encontrar mecanismos pelos quais sistemas mudam de um comportamento simples para um comportamento complexo [30]. O aparecimento de caos em sistemas dinâmicos está ligado à ocorrência de bifurcações [29]. O processo de bifurcação pode ser considerado como sendo a passagem de um estado de equilíbrio para um estado de comportamento periódico e, a seguir, para um estado de comportamento caótico. Este processo depende da existência de um certo número de variáveis, acopladas entre si, e com mudanças.

Para um mapa em  $R^m$ , cada órbita tem  $m$  números de Lyapunov, que medem as taxas da separação do ponto atual da órbita ao longo das direções ortogonais no espaço de fases, direções estas determinadas pela dinâmica do mapa. Um

mapa de  $m$  dimensões, pode ser escrito como  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ , com  $x$  e  $f$  pertencentes a  $R^m$ . O espectro de expoentes de Lyapunov é definido por

$$(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_m}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{módulo dos autovalores de } \prod_{i=0}^{n-1} J(x_i))^{\frac{1}{n}}, \quad (2.14)$$

e pode-se escrever o expoente  $\lambda$  da forma

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left[ \text{módulo dos autovalores de } \prod_{i=0}^{n-1} J(x_i) \right], \quad (2.15)$$

onde  $J(x_i)$  é a matriz Jacobiana do mapa calculada em  $x_i = f^i(x_0)$ , isto é

$$J(x_i) = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \quad (2.16)$$

Os expoentes de Lyapunov são calculados para cada uma das  $m$  dimensões ou variáveis de estado do sistema considerado. A seção seguinte apresenta o mapa logístico que é um mapa não-linear, de tempo discreto, de dimensão unitária e usualmente utilizado para ilustrar muitas das características de sistemas dinâmicos.

## 2.5 O mapa logístico

No final do século XVIII o número de pobres na sociedade inglesa era considerável e para entender tal fato, em 1798, Thomas Malthus publicou seu “*Ensaio sobre o princípio da população*” [31]. Ele relacionou a população  $P_{n+1}$  de uma geração  $n + 1$  com a população  $P_n$  da geração  $n$ , supondo que a população aumentava progressivamente na dependência de um fator de crescimento. Pode-se escrever o modelo de Malthus como

$$P_{n+1} = CP_n, \quad (2.17)$$

onde  $n = 0, 1, 2, \dots$ , indicam as sucessivas gerações populacionais e  $C$  o fator de crescimento por geração relacionado com a taxa de crescimento (taxa de natalidade menos a taxa de mortalidade). Este modelo também descreve um crescimento exponencial

ilimitado para  $C > 1$  e um decaimento até a extinção para  $C < 1$  [32]. Thomas Malthus afirmava que a população crescia em uma progressão geométrica, enquanto que os meios de subsistência aumentavam em uma progressão aritmética, portanto, de forma mais lenta, justificando a escassez de alimento da época. Inspirado no trabalho de Malthus, o matemático Pierre-Fraçois Verhulst (1804-1849) questionou o crescimento indefinido das populações e sugeriu que haveriam fatores de inibição do crescimento. As populações chegariam a um valor máximo  $P_{max}$ , a uma taxa que seria proporcional a diferença entre o número máximo e o número atual de indivíduos ( $P_{max} - P_n$ ). De acordo com o modelo apresentado na equação (2.17),  $C$  não seria mais uma constante, mas uma função de  $P_n$

$$C = k(P_{max} - P_n), \quad (2.18)$$

de forma que

$$P_{n+1} = k(P_{max} - P_n)P_n, \quad (2.19)$$

dividindo os dois membros da equação (2.19) pelo número máximo de indivíduos dessa população e denotando  $x_n = P_n/P_{max}$  e  $r = k/P_{max}$ , pode-se escrever a equação (2.19) na forma conhecida como *mapa logístico*:

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n), \quad (2.20)$$

sendo  $r > 0$ ,  $x_{n+1}$  é uma parábola de concavidade voltada para baixo com o seu valor máximo em  $x = \frac{1}{2}$ . Uma vez que não faz sentido populações negativas, este modelo exige que  $0 \leq x_0 \leq 1$  e  $0 \leq r \leq 4$ . Dado um valor inicial  $x_0$  obtém-se um valor  $x_1$ , para este valor, calcula-se  $x_2$ , e assim por diante. Os valores de  $x$  sempre estarão no intervalo entre 0 e 1. Dependendo do valor do parâmetro de controle  $r$  pode-se evidenciar vários tipos de comportamento dinâmico: o valor de  $x$  pode convergir para um ponto fixo; ou oscilar entre 2, 4, 8, ... valores diferentes; ou ainda pode varrer infinitos valores de forma a nunca retornar a um mesmo ponto. Por possuir esta riqueza de comportamentos o mapa logístico ficou muito conhecido [30].

O mapa logístico apresenta comportamentos diferentes quando o seu parâmetro de controle  $r$  for variado. A figura (2.1) mostra quatro comportamentos



da dinâmica do mapa logístico para diferentes valores de  $r$  partindo todos de uma condição inicial igual  $x_0 = 0,1$ . No mapa logístico, em que  $r = 2,8$ , a condição inicial evolui para o ponto fixo  $x^* = 0,642891$ . Com parâmetro de controle  $r = 3,3$ , o sistema evolui para uma órbita de período 2, apresentando os  $x = 0,476158$  e  $x = 0,822753$  para a variável de estado. Com parâmetro de controle  $r = 3,5$ , o sistema evolui para uma órbita de período 4 com os seguintes valores para a variável de estado  $x = 0,385327$ ,  $x = 0,827013$ ,  $x = 0,493294$  e  $x = 0,872818$ . Com  $r = 3,9$ , o mapa logístico apresenta sensibilidade às condições iniciais ou comportamento caótico.

Para entender melhor estes comportamentos, é necessário um estudo sobre a estabilidade de pontos fixos nos mapas analisados. Assumindo  $f(x^*) = x^*$  na equação (2.20), chega-se aos pontos fixos  $x_1^* = 0$  e  $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$ . Como  $\frac{df(x)}{dx} = r(1-2x)$ , os valores associados a  $x_1^*$  e  $x_2^*$  pela equação  $\gamma = \frac{df(x)}{dx}$  são  $\gamma_1 = r$  e  $\gamma_2 = 2 - r$ . Estes pontos serão estáveis quando  $|\gamma| < 1$ , e instáveis quando  $|\gamma| > 1$ . Para  $0 < r < 1$ ,  $x_1^* = 0$  é assintoticamente estável, logo  $x_n$  converge assintoticamente para  $x_1^* = 0$ . Em  $r = 1$ , ocorre uma bifurcação e os pontos de equilíbrio trocam suas estabilidades. No intervalo  $1 < r < 3$ ,  $x_1^* = 0$  é instável, enquanto que  $x_2^*$  é assintoticamente estável e  $x_n$  converge para  $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$ . Para  $r = 3$  tem-se uma bifurcação de duplicação de período, surgindo uma órbita estável de período 2, ou seja, a órbita estável deixa de ser o ponto fixo e passa a oscilar periodicamente entre dois valores, que chama-se órbita de período 2.

A identificação dos pontos de período 2 se dá assumindo que  $f^2(x^*) = x^*$ , sendo que  $f^2(x_n) = f(f(x_n))$ . Para  $r = 3,45$  a órbita de período 2 fica instável e sofre uma bifurcação de período, gerando uma órbita estável de período 4. A medida que o valor de  $r$  aumenta, as bifurcações passam a ocorrer indefinidamente. Para visualizar as bifurcações, constrói-se um diagrama de órbitas, onde são salvas as soluções atratoras (os transientes são eliminados). Tempo transiente corresponde aos primeiros pontos da órbita que são normalmente desprezados pois o que interessa na

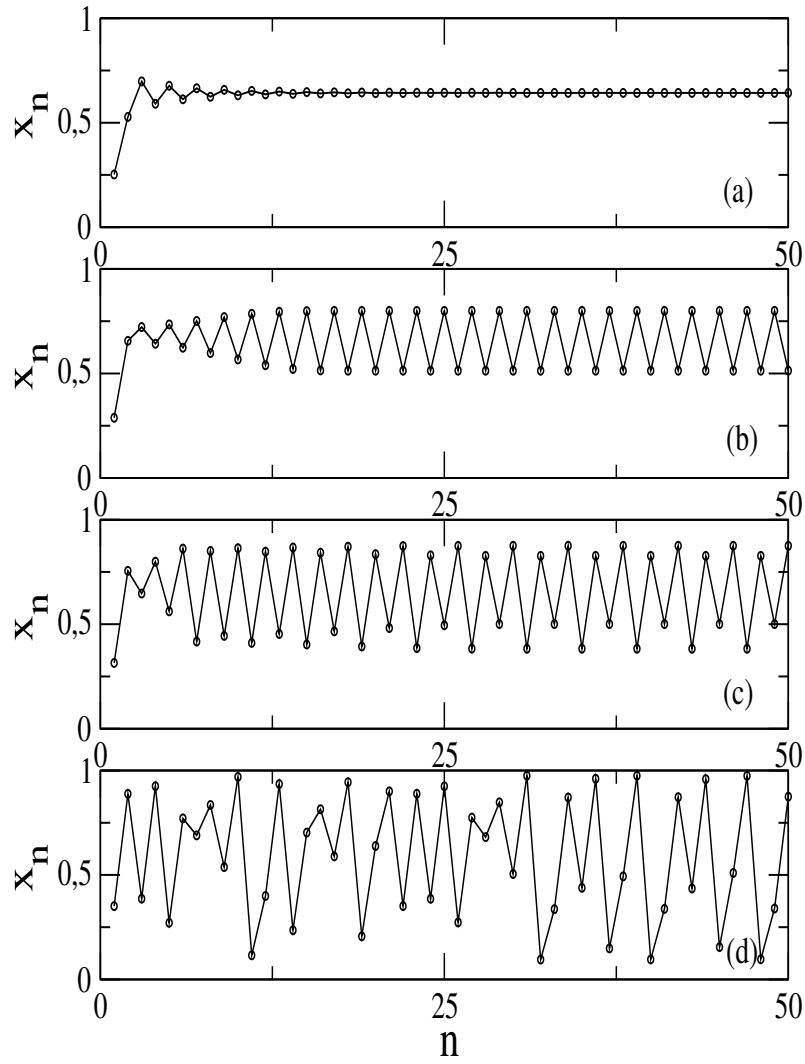


Figura 2.1: Comportamentos da dinâmica do mapa logístico  $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$  para diferentes valores de  $r$  e condição inicial  $x_0 = 0, 1$ . (a)  $r = 2, 8$ , o mapa logístico exibe um ponto fixo atrator; (b)  $r = 3, 3$ , órbita de período 2; (c)  $r = 3, 5$ , órbita de período 4; (d)  $r = 3, 9$ , comportamento caótico.

dinâmica é o comportamento final. A figura (2.2) apresenta o diagrama de órbitas, onde pode-se observar a cascata de bifurcações e janelas de periodicidade.

Sabe-se que para o valor do parâmetro  $r = 4$ , o mapa apresenta comportamento completamente caótico. Para qualquer valor de  $r < 3$ , não existem órbitas periódicas com períodos maiores do que um. Para o intervalo  $1 < r < 3$ , qualquer condição inicial que satisfaça  $0 < x < 1$  faz com que o atrator se aproxime de  $x = 1 - \frac{1}{r}$ . Para  $r = 3$  ocorre uma duplicação de período, ou seja, aumentando o valor de  $r$  aparecem órbitas de período 2, 4, 8,... até um período infinito próximo de  $r = 3,56994$ , devido à órbita ficar instável. No intervalo de  $3,56994 \leq r \leq 4$  o mapa apresenta um comportamento que varia entre caótico e janelas periódicas.

Conforme foi visto na seção anterior, os expoentes de Lyapunov são utilizados para calcular a taxa de divergência de trajetórias, quantificando a sensibilidade às condições iniciais. A função que define o mapa logístico depende do parâmetro de controle  $r$ . Então, o valor de  $\lambda$  também dependerá desse parâmetro. Ao se construir o gráfico de  $r$  em função de  $\lambda$  pode-se identificar para quais valores de  $r$  tem-se dependência em relação às condições iniciais ( $\lambda > 0$ ) e, portanto, sob quais condições o sistema apresenta comportamento caótico. Na figura (2.3) apresenta-se a variação do expoente de Lyapunov com o parâmetro de controle para o mapa logístico. Observa-se que nos pontos de bifurcação o expoente de Lyapunov é nulo, nas regiões periódicas é negativo e nas regiões caóticas é positivo.

Para observar com detalhes, estabelece-se uma relação entre os diagramas de bifurcação, figura (2.3 a e c) e do expoente de Lyapunov, figura (2.3 b e d). Um expoente de Lyapunov negativo caracteriza um ponto atrator, pela figura percebe-se que isto ocorre para valores iniciais de  $r$ , onde o valor do expoente está abaixo de zero, sendo apenas igual a zero nos pontos onde ocorrem as bifurcações. Por outro lado, para  $r$  aproximadamente igual a 3,5 o expoente torna-se positivo, e é a partir daí que surgem as primeiras órbitas caóticas. Pode-se perceber através

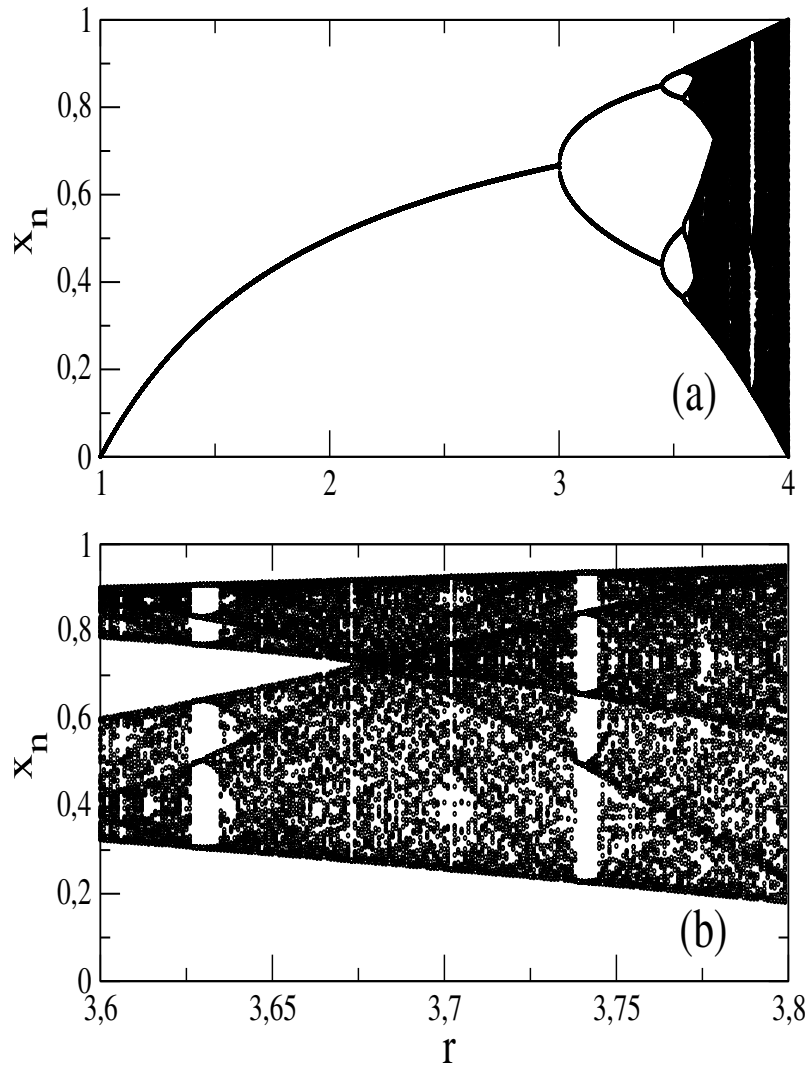


Figura 2.2: Diagrama de bifurcações para o mapa logístico, com uma condição inicial igual a 0, 1 e 1000 iterações sendo 900 desprezadas. (a) panorama geral; (b) ampliação do intervalo  $3,6 \leq r \leq 3,8$  para visualização de janelas de periodicidade.

da ampliação do intervalo  $3,6 \leq r \leq 3,8$ , que na região clara (janelas), o expoente torna-se negativo novamente, voltando logo depois a ser positivo.

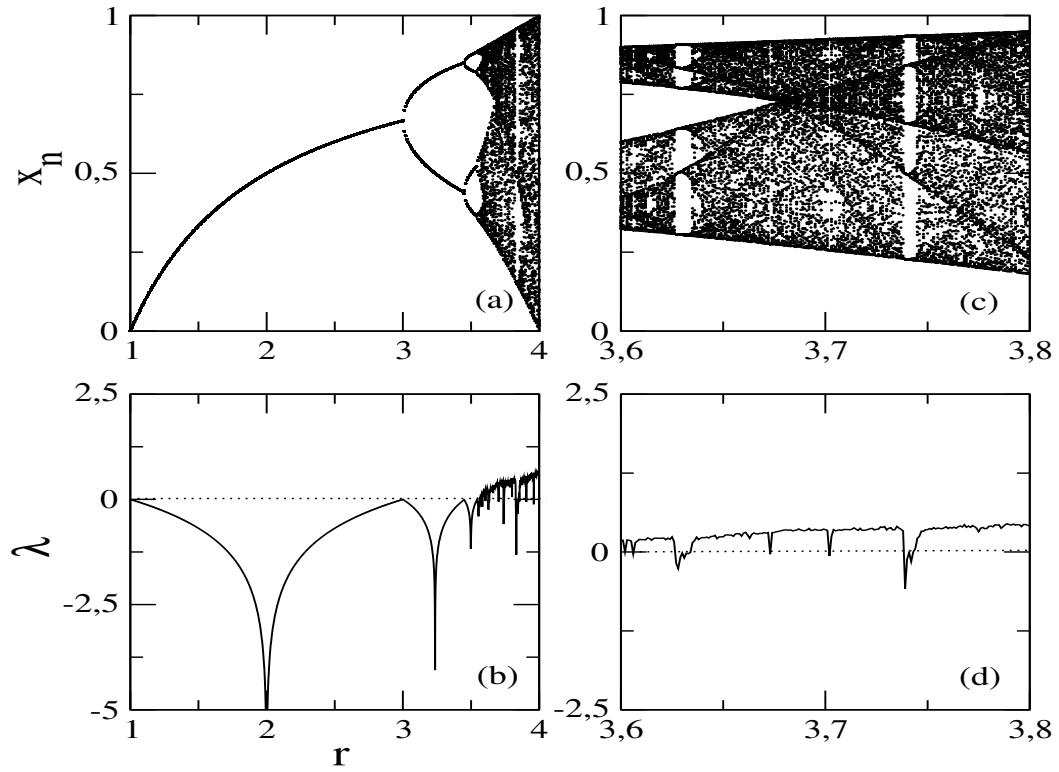


Figura 2.3: (a) Diagrama de bifurcação do mapa logístico; (b) variação do expoente de Lyapunov; (c) ampliação do intervalo  $3,6 \leq r \leq 3,8$ ; (d) variação do expoente de Lyapunov.

## Capítulo 3

# Rede de Mapas Acoplados

Neste capítulo serão estabelecidas definições para a rede de mapas acoplados com ligações locais e não-locais e para a rede de mapas acoplados onde a interação entre os sítios decai segundo uma lei de potência que será objeto de estudo neste trabalho.

### 3.1 Conceitos básicos

Redes de mapas acoplados foram introduzidos em Dinâmica não-linear a partir de 1983 [4, 5, 8, 15, 34, 35]. Desde então este tópico vem sendo objeto de estudos por parte de vários grupos de pesquisa. As redes de mapas acoplados representam sistemas nos quais o espaço e o tempo são discretos e a variável de estado é contínua. Elas têm sido escolhidas com certa frequência para o estudo da dinâmica espaço-temporal, isto porque sua implementação é mais simples em relação a sistemas de variáveis contínuas.

A maior motivação para o estudo das redes de mapas acoplados tem sido a investigação de caos espaço-temporal. Caos espaço-temporal é uma dinâmica

irregular, em um sistema determinístico espacialmente extenso, que ocorre no espaço-tempo e cujo grau de liberdade diverge quando o sistema aumenta [35]. Redes de mapas acoplados são sistemas que apresentam um número finito de graus de liberdade espacial. A cada grau de liberdade espacial pode-se atribuir uma variável de estado que caracteriza alguma propriedade física do sistema que varia com o espaço e o tempo [25].

Uma rede de mapas acoplados pode consistir em um conjunto de  $N$  sítios distribuídos espacialmente sobre uma reta (rede unidimensional), como mostra a figura (3.1).

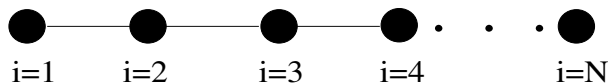


Figura 3.1: Rede N-dimensional.

A cada sítio da rede é atribuída uma variável de estado contínua  $x_n^{(i)}$ , onde  $i = 1, 2, \dots, N$  é o índice que identifica o  $i$ -ésimo sítio numa rede unidimensional com  $N$  sítios. O tempo é discretizado na forma usual  $n = 0, 1, 2, \dots$ , tal que  $x_n^{(i)}$  seja a variável de estado do sítio  $i$  no tempo  $n$ . A evolução de uma variável de estado é governada pela dinâmica local, regida por um mapa  $x \rightarrow f(x)$  que avança discretamente no tempo e pelo acoplamento a outros sítios por meio de uma certa prescrição [25].

O conjunto das condições iniciais para os sítios da rede pode ser um conjunto aleatoriamente distribuído, por ser esta uma situação interessante quando se estuda comportamentos mais gerais da rede. Quanto às condições de contorno impostas sobre a rede de mapas acoplados, várias formas podem ser usadas: fixas, livres, periódicas, mistas. Nesta dissertação será tratado apenas o caso em que a rede é unidimensional com condições iniciais aleatórias e condições de contorno periódicas,

de modo que o último sítio da rede será considerado vizinho do primeiro. A figura (3.2) mostra uma rede com condição de contorno periódica constituída por cinco sítios.

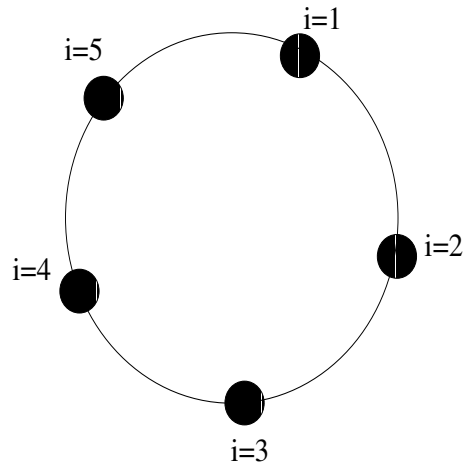


Figura 3.2: Rede com condição de contorno periódica. Representação para  $N = 5$

A evolução dinâmica da variável de estado de um sítio é dirigida pelo tipo de mapeamento efetuado no sítio e pela intensidade e forma do acoplamento do mesmo com os demais sítios da rede. Estas duas variáveis são responsáveis por todo e qualquer tipo de comportamento coletivo exibido pela rede. O acoplamento é responsável por fazer com que um grande número de sítios interajam enquanto evoluem no tempo, gerando através de suas variáveis de estado, estruturas espaciais que contribuem para influenciar a dinâmica temporal [36].

## 3.2 Formas de acoplamento

Existem na literatura diversas formas de se fazer o acoplamento em uma rede, e podem ser citados acoplamentos locais, não-locais, lineares e futuros. Nos acoplamentos locais a dinâmica de cada sítio depende apenas dos vizinhos, en-



quanto que acoplamentos não-locais possuem sítios que são influenciados por sítios distantes. Dentre os acoplamentos locais, os de maior interesse e mais encontrados na literatura são: acoplamento aditivo, acoplamento total ou bidirecional, acoplamento unidirecional e acoplamento Laplaciano ou difusivo. Um tipo genérico de acoplamento local é dado pelo termo de acoplamento

$$C_{j=i,i\pm 1}^{(i)}(x_n^{(i)}) = \varepsilon_0 g(x_n^{(i)}) + \varepsilon_R g(x_n^{(i+1)}) + \varepsilon_L g(x_n^{(i-1)}) \quad (3.1)$$

onde o vetor  $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \varepsilon_R, \varepsilon_L)$  é chamado de *núcleo* do acoplamento. Podem-se destacar quatro casos interessantes: acoplamento aditivo:  $\varepsilon_0 = 0, \varepsilon_R = \varepsilon_L$ ; acoplamento Laplaciano ou difusivo:  $-\frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_R = \varepsilon_L$ ; acoplamento totalístico:  $\varepsilon_0 = -\frac{2}{3}, \varepsilon_R = \varepsilon_L = \frac{1}{3}$ ; acoplamento unidirecional:  $-\varepsilon_0 = \varepsilon_L, \varepsilon_R = 0$ . Para o caso unidirecional o sistema possui difusão assimétrica, enquanto que os outros possuem difusão simétrica. O acoplamento Laplaciano é o mais utilizado nos estudos de redes de mapas acoplados localmente

$$x_{n+1}^{(i)} = g(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} [g(x_n^{(i-1)}) - 2g(x_n^{(i)}) + g(x_n^{(i+1)})], \quad (3.2)$$

onde  $\varepsilon$  é a intensidade do acoplamento. O nome é decorrente do fato que o termo de acoplamento pode ser considerado como a discretização de uma derivada segunda espacial

$$\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} \rightarrow \frac{1}{2} [g(x^{(i-1)}) - 2g(x^{(i)}) + g(x^{(i+1)})], \quad (3.3)$$

onde o parâmetro de rede espacial é igual a um:  $\Delta x = (i+1) - i = 1$ . Estas derivadas ocorrem em termos difusivos de equações de reação e difusão [25]. A função  $g(x)$  define a dinâmica de acoplamento e existem dois casos de interesse, o acoplamento linear,  $g(x) = x$  e o acoplamento futuro,  $g(x) = f(x)$ . O acoplamento futuro tem como vantagem o fato da variável de estado em cada sítio permanecer dentro do mesmo domínio que teria o mapa isolado. Como exemplo, o acoplamento laplaciano futuro é dado por

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(i)} &= f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} [f(x_n^{(i-1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i+1)})] \\ x_{n+1}^{(i)} &= (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} [f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)})]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

O acoplamento global é um caso extremo de acoplamento não-local, onde todos os sítios interagem entre si. Um acoplamento global justifica-se, por exemplo, numa simulação computacional de uma rede neural, onde cada unidade (neurônio) interage com uma grande quantidade de outras unidades. Existem, ainda, acoplamentos não-locais de alcance variado, isto é, o acoplamento leva em conta a distância de um sítio ao outro. Este é o caso do acoplamento do tipo lei de potência, que será utilizado em uma rede de mapas acoplados e também será o tipo de acoplamento estudado, sendo de grande interesse e discutido com mais detalhes [19, 22, 23]. O acoplamento do tipo lei de potência foi estudado por Rogers e Wile [38] para uma cadeia de osciladores e, estendido por Viana e Batista para redes de mapas acoplados [39].

De forma geral, a equação que define uma rede unidimensional de mapas acoplados é

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + C^{(i)}(x_n^{(j)}), \quad (3.5)$$

onde  $C^{(i)}$  é um termo genérico de acoplamento, que pode depender de todos os sítios, inclusive o próprio sítio  $i$  e  $j = 1, 2, 3, \dots, N - 1$ .

Na literatura sobre rede de mapas acoplados, qualquer rede em suas  $N$  componentes pode ser escrita na forma de um mapa  $N$ -dimensional, ou seja,  $x_{n+1} = C(x_n)$  onde  $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(N)})$  representa um vetor  $N$ -dimensional ( $x_n \in R^N$ ) que evolui a tempo discreto. O conjunto das componentes deste vetor em um instante de tempo é denominado de perfil da rede ou distribuição espacial dos  $x_n$ .

### 3.3 Acoplamentos usuais

O acoplamento entre os sítios pode ser resumido em dois tipos: local e não-local. No acoplamento local, cada sítio  $i$  está acoplado somente com os sítios

vizinhos mais próximos  $i - 1$  e  $i + 1$ . Como exemplos deste caso, pode-se citar a rede descrita pela equação

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2}[f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)})], \quad (3.6)$$

que é um exemplo particular chamado de rede difusiva de mapas acoplados, a rede com acoplamento aditivo

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \varepsilon[f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)})], \quad (3.7)$$

e a rede com acoplamento unidirecional

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \varepsilon f(x_n^{(i-1)}), \quad (3.8)$$

sendo que nesta rede a interação ocorre de maneira assimétrica.

No acoplamento não-local cada sítio  $i$  pode estar acoplado com um número de sítios mais distantes. Um exemplo deste caso, e que será utilizado neste trabalho, é o acoplamento cujo alcance da interação é variável. Em particular, considere que a interação entre os sítios vizinhos decai com a distância na rede segundo uma lei de potência [19, 20, 22, 23]. Pode-se afirmar que quanto mais afastados os sítios estiverem, menor a sua influência com o sítio  $i$  considerado.

O acoplamento do tipo lei de potência é dado por

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\sigma} [f(x_n^{(i-j)}) + f(x_n^{(i+j)})], \quad (3.9)$$

onde os parâmetros  $\sigma$  ( $\sigma \geq 0$ ) e  $\varepsilon$  ( $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ) controlam o alcance da interação entre os sítios da rede e a intensidade do acoplamento. O somatório expressa a contribuição dos sítios à esquerda e à direita de um sítio  $i$  considerado e  $\eta$  representa um fator de normalização

$$\eta(\sigma) = 2 \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\sigma} = 2 \left( \frac{1}{1^\sigma} + \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} + \dots + \frac{1}{N'^\sigma} \right), \quad (3.10)$$

onde  $N' = \frac{N-1}{2}$  para  $N =$  tamanho da rede com  $N$  um número ímpar. A equação (3.9) exhibe dois limites interessantes, cada um caracterizando um tipo especial de

interação dentro da rede. O acoplamento tipo lei de potência pode ser considerado como uma forma de interpolação entre os casos limites, que são o global e o local.

Se  $\sigma = 0$  então

$$\eta(\sigma) = 2 \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\sigma} = 2 \left( \frac{1}{1^\sigma} + \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} + \dots + \frac{1}{N'^\sigma} \right) = 2N' = 2 \left( \frac{N-1}{2} \right) = N-1, \quad (3.11)$$

a equação (3.9) torna-se:

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{N-1} [f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)}) + f(x_n^{(i-2)}) + f(x_n^{(i+2)}) + \dots + f(x_n^{(i-N')}) + f(x_n^{(i+N')})]. \quad (3.12)$$

Considerando que  $N' = \frac{N-1}{2}$  e que as condições de contorno são periódicas a soma entre colchetes, representa a soma sobre todos os sítios da rede com exceção do sítio  $i$ . Assim, a equação (3.12) pode ser escrita como

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{N-1} \sum_{j=1, j \neq i}^N f(x_n^{(j)}). \quad (3.13)$$

Este resultado, conhecido como acoplamento do tipo campo médio, representa um caso extremo de acoplamento não-local pois cada sítio  $i$  interage com o valor médio de todos os sítios da rede. A intensidade de acoplamento  $\varepsilon$  pode assumir um valor no intervalo  $[0, 1]$ ,  $N$  é o tamanho da rede e  $i$  é a posição de cada sítio na rede, sendo  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ,  $x_n^{(i)}$  são as variáveis de estado calculadas no tempo discreto, e  $f : R \rightarrow R$  é um mapa em geral com dinâmica caótica.

Se  $\sigma \rightarrow \infty$ , então

$$\eta(\sigma) = 2 \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\sigma} = 2 \left( \frac{1}{1^\sigma} + \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} + \dots + \frac{1}{N'^\sigma} \right) = 2 \quad (3.14)$$

e somente o termo  $j = 1$  permanece no somatório no termo de acoplamento da equação (3.9). Considerando que  $\eta \rightarrow 2$ , obtém-se a equação para uma rede de mapas acoplados com interação simétrica

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \frac{1}{1^\sigma} [f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)})] \right\} +$$

$$\frac{1}{2^\sigma} [f(x_n^{(i-2)}) + f(x_n^{(i+2)})] + \dots + \frac{1}{N'^\sigma} [f(x_n^{(i-N')}) + f(x_n^{(i+N')})], \quad (3.15)$$

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} [f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)})], \quad (3.16)$$

onde somente os primeiros vizinhos  $i - 1$  e  $i + 1$  contribuem para o termo de acoplamento. A intensidade de acoplamento  $\varepsilon$  pode assumir um valor no intervalo  $[0, 1]$ . O fator 2 que divide o parâmetro de acoplamento normaliza a equação e  $i$  é a posição de cada sítio na rede, sendo  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ . Este resultado representa o caso de acoplamento local.

O acoplamento do tipo lei de potência é interessante porque considera os tipos de ligações mais prováveis de ocorrerem em sistemas reais como redes neurológicas [43] ou em sistemas com de comportamentos ferromagnéticos [44]. Este tipo de acoplamento também foi estendido por Viana e Batista para uma rede de mapas acoplados [42].

Acoplamentos não-locais são importantes para o estudo e compreensão da arquitetura de redes neurais com produção local de informação [42], também podem ser estudadas na discretização de algumas equações íntegro-diferenciais parciais modelando reações físico-químicas [43]. De forma geral, modelos de redes de mapas acoplados têm servido para observar fenômenos ocorridos em fluidos e plasma, como, por exemplo, propagação de sólitons, turbulência, entre outros [44].

### 3.4 Dinâmica local da rede

Quanto a escolha da dinâmica local, existem diversos mapas que podem representar a função  $f(x)$ . A dinâmica local tem sido investigada por meio de mapas de baixa dimensionalidade bem conhecidos. O exemplo mais estudado é o mapa logístico expresso por  $f(x) = rx(1 - x)$  [30] onde  $x \in [0, 1]$  é a variável de

estado,  $r \in [0, 4]$  é o parâmetro de controle do mapa. Outro exemplo de dinâmica local seria o mapa do seno-círculo  $f(x) = x + \omega + \frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi x) \pmod{1}$  [45], onde  $x \in [0, 1]$  é uma variável angular (fase),  $0 \leq \omega \leq 1$  uma frequência natural, e  $K > 0$  um parâmetro de não-linearidade. Mapas lineares por partes, como o mapa de Bernoulli  $f(x) = 2x \pmod{1}$ , o mapa da tenda  $f(x) = a|\frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}||$ , também merecem destaque. O módulo 1 na equação do mapa de Bernoulli significa que a cada iterada do mapa, subtrai-se o valor obtido da unidade até que o próximo valor a ser iterado seja menor que 1.

Quanto a mapas bidimensionais, as investigações tem se concentrado no mapa de Hénon  $f(x, y) = (a - x^2 + by, x)$  e no mapa padrão de Chirikov-Taylor  $p_{n+1} = p_n + K \text{sen}(\theta_{n+1})$ ,  $\theta_{n+1} = \theta_n + p_n$  [25]. Pode-se classificar o tipo de dinâmica local em relação aos mapas como homogêneas, quando os mapas são idênticos em todos os sítios e não-homogêneas, quando ocorrem mudanças nos parâmetros dos mapas ou ocorrem mapas diferentes.

### 3.5 Rede de mapas acoplados com interação de longo alcance

A rede estudada nesta dissertação é dado pela equação

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)} \sum_{m=1}^M \frac{1}{[j_m(q)]^\sigma} [f(x_n^{(i-j_m(q))}) + f(x_n^{(i+j_m(q))})], \quad (3.17)$$

onde  $\sigma$  ( $\sigma \geq 0$ ) e  $\varepsilon$  ( $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ) são os parâmetros que controlam o alcance da interação entre os sítios da rede e a intensidade do acoplamento respectivamente,  $n$  e  $i$  são índices de tempo e espaço discretos [9]. O modelo tem sido estudado no caso totalmente acoplado, isto é, para  $j_m(q) = m$  com  $M = \frac{N-1}{2}$  e  $\eta(\sigma) = 2 \sum_{m=1}^M \frac{1}{m^\sigma}$ . A variável  $m$  corresponde a variável  $j$  e o valor de  $M$  corresponde a  $N'$ .  $M$  indica

o tamanho da rede, um número sempre ímpar, para que se observe a simetria na rede. Fazendo as substituições adequadamente percebe-se que a expressão para o acoplamento do tipo lei de potência é a mesma representada em (3.9)

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)} \sum_{m=1}^M \frac{1}{m^\sigma} [f(x_n^{(i-m)}) + f(x_n^{(i+m)})]. \quad (3.18)$$

Escrita desta forma tem-se novamente a expressão para o acoplamento tipo lei de potência usual, bem conhecido na literatura [19], o qual foi estudado tanto numérica quanto analiticamente através da sua dinâmica de sincronização. Dos trabalhos existentes na literatura, sabe-se que para este sistema, quando  $\sigma = 0$  existe um comportamento de acoplamento global, ou seja, todos os sítios interagem entre si e quando  $\sigma \rightarrow \infty$  o acoplamento é local, ou seja, onde apenas os primeiros vizinhos interagem no acoplamento da rede.

Nesta dissertação, considera-se uma versão de (3.17), onde  $j_m(q) = q^m - 1$ , com  $q$  valores escolhidos tais como  $q = 2$ ,  $q = 4$  e  $q = 8$  [9]. A soma na equação (3.17) estende-se para  $M = \log_q \frac{N}{2}$  e  $\eta(\sigma) = 2 \sum_{m=1}^M \frac{1}{[j_m(q)]^\sigma}$  é o fator de normalização. A razão para a escolha de  $j_m(q) = q^m - 1$  tem a vantagem de ser conveniente do ponto de vista computacional, pelo fato de existir uma quantidade menor de ligações do sítio considerado com os demais sítios da rede.

A rede aqui estudada é representada como em (3.9), uma rede de acoplamento de longo alcance, onde cada sítio é governado por um mapa logístico dado por

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)} \sum_{m=1}^M \frac{1}{(q^m - 1)^\sigma} [f(x_n^{(i-q^m+1)}) + f(x_n^{(i+q^m-1)})], \quad (3.19)$$

onde adota-se a condição de contorno periódica  $x^{(i)} = x^{(N+i)}$ , de modo que o último sítio da rede é considerado vizinho do primeiro. O tamanho  $N$  da rede dado pela expressão  $N = 2q^M$  depende da escolha de  $q$  e de  $M$ . Pode-se observar que o número de sítios da rede é um número par. A equação (3.19) representando o sistema em

estudo, é mostrada através de um esquema gráfico na figura (3.3), onde foi utilizado  $q = 2$  e  $M = 2$  para obter uma rede de oito sítios ou  $N = 8$ . Decidiu-se inicialmente, estudar uma rede de tamanho menor e esta, por sua vez, foi a escolhida. Nesta rede cada sítio deve ser acoplado diretamente a outros quatro, sendo dois destes acoplamentos com os vizinhos da esquerda e dois com os vizinhos da direita, e isto fica atribuído ao valor dado para  $M$ . O valor de  $q^m$  indica a posição de cada sítio em relação ao sítio considerado. As ligações foram representadas para um único sítio para que a figura não ficasse com muitas linhas. Cada ligação corresponde a um acoplamento de menor intensidade quanto mais afastados os sítios acoplados se situarem.

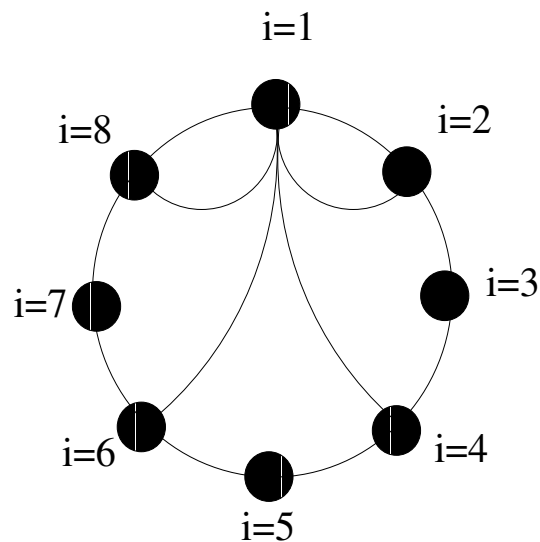


Figura 3.3: Ilustração para uma rede do tipo (3.17), com  $j_m(q) = q^m - 1$  e condição de contorno periódica,  $q = 2$ ,  $M = 2$  e  $N = 8$  sítios.

Num primeiro momento, procurou-se deixar fixo o valor para  $q$  sendo este igual a 2 e variar o valor para  $M$ , utilizando 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 e obter a representação gráfica da variável  $x_n^{(i)}$  pelo sítio  $i$ . Utilizou-se somente o valor 2 para  $q$  porque para valores maiores que 2 a rede cresce rapidamente.



Um dos objetivos deste trabalho é o de identificar no espaço de parâmetros as regiões onde existe sincronização e as regiões onde não existe sincronização. A sincronização é um processo de comportamento coletivo. Em uma rede de mapas acoplados, a sincronização acontece quando todos os sítios possuem o mesmo valor para a variável de estado em um instante de tempo  $n$ . Considerando uma rede de 8 sítios com  $q = 2$ ,  $M = 2$  e  $r = 4$  para o parâmetro de controle do mapa logístico, porque para  $r = 4$  o mapa possui comportamento completamente caótico, esta rede pode apresentar comportamento não sincronizado ou sincronizado, dependendo dos parâmetros  $\sigma$  e  $\varepsilon$ . Estudou-se inicialmente o caso da rede ter o parâmetro  $\sigma = 0,0$  e o parâmetro  $\varepsilon$  variável. A figura (3.4 a), na qual foi utilizada  $\varepsilon = 0,1$ , mostra o perfil de uma rede de mapas acoplados onde não ocorre sincronização, isto é, as variáveis de estado não possuem o mesmo valor. Para  $\varepsilon = 0,7$ , pode-se observar na figura (3.4 b) que se verifica a sincronização de caos  $x_n^{(1)} = x_n^{(2)} = x_n^{(3)} = \dots = x_n^{(N)}$ . A sincronização de caos será abordada mais detalhadamente nas próximas seções.

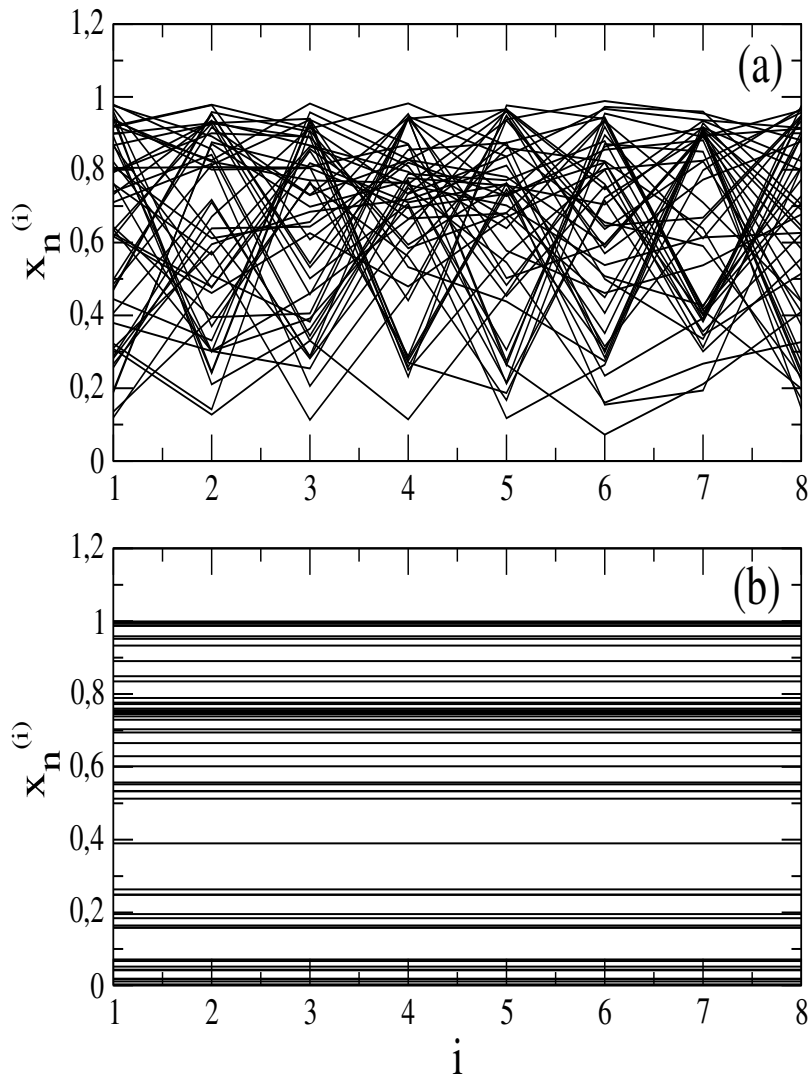


Figura 3.4: Perfil de uma rede de mapas acoplados de tamanho  $N = 8$  sendo  $q = 2$  e  $M = 2$ , considerando 40050 iterações e 40000 desprezadas. (a) comportamento não sincronizado para  $r = 4,0$ ,  $\sigma = 0,0$  e  $\varepsilon = 0,1$ . (b) comportamento sincronizado para  $r = 4,0$ ,  $\sigma = 0,0$  e  $\varepsilon = 0,7$ .

## Capítulo 4

# Sincronização de caos

Neste capítulo será abordado o estudo espaço-temporal de uma rede de mapas acoplados com interação de longo alcance, verificando as condições para a existência da intermitência e da sincronização de caos através de seu parâmetro de acoplamento.

### 4.1 Sincronização

Acoplamentos não-locais em sistemas espacialmente estendidos permitem que a interação se estenda a vários sítios, favorecendo a ocorrência de um fenômeno coletivo bastante estudado, a sincronização. A sincronização pode ser entendida como o início do estudo da complexidade espaço-temporal, uma vez que considera redes que são compostas de vários sítios. A sincronização de caos se refere a processos de ajuste entre dois ou mais sistemas caóticos para um comportamento comum devido ao acoplamento entre eles [18]. O estudo de ritmos sincronizados é importante devido à sua aplicabilidade em estudos fisiológicos, biológicos, tecnológicos, entre outros. Células nervosas, por exemplo, geram locomoções sincronizadas com fases definidas dependendo da relação entre suas espécies e seus deslocamentos. Em

geral, o estudo de oscilações sincronizadas é importante para analisar os efeitos dos estímulos em ritmos fisiopatológicos intrínsecos [47]. A sincronização caótica tem se tornado um campo de pesquisa importante, especialmente por suas aplicações em controle e comunicações seguras e tem sido observada em vários arranjos experimentais desde laser até reações químicas [9].

Em uma rede de mapas acoplados, pode-se observar a sincronização parcial que é caracterizada pela existência de platôs possuindo sítios com o mesmo valor da variável de estado em um dado instante de tempo  $n$ , ou seja,  $x_n^{(i)} = x_n^{(i+1)} = x_n^{(i+2)} = \dots = x_n^{(i+k)}$ , sendo  $k$  a extensão do platô e  $k \in \mathbb{Z}$ . Do ponto de vista experimental, esta igualdade deve ser observada a menos de uma certa tolerância. Se  $i = 1$  e  $k = N - 1$ , então a rede estará sincronizada em amplitude, fenômeno conhecido como sincronização completa de amplitudes. Nesta situação, o perfil da rede é uniforme. Se a sincronização persiste enquanto o tempo evolui, toda a dinâmica da rede que está contida em um espaço de fase de dimensão  $N$ , passa a residir em um subespaço de dimensão um (variedade de sincronização  $S$ ), portanto, de dimensão inferior.

Para que um sistema possua sincronização completa, é necessário a presença de uma variedade de sincronização. Variedade é um conjunto que localmente tem a estrutura do Espaço Euclidiano e é freqüentemente encontrada como uma superfície  $N$ -dimensional imersa no espaço real de ordem  $N$  [48]. A variedade é um hiperplano onde se verifica a estabilidade do estado sincronizado caso ocorra um pequeno deslocamento transversal, decaindo com o tempo, para esta variedade [49]. Como um outro exemplo, pode-se supor dois sistemas acoplados cujas variáveis de estado sejam  $x_1$  e  $x_2$ , existindo sincronização entre eles, haverá uma variedade de sincronização representada por uma reta de  $45^\circ$  no plano, ou seja,  $x_1 = x_2$ .

Quando a rede está completamente sincronizada o valor da variável

de estado é comum a todos os sítios, ou seja,

$$x_n^{(1)} = x_n^{(2)} = x_n^{(3)} = \dots = x_n^{(N)} = s_n, \quad (4.1)$$

e como este estado é uma possível solução para uma rede com acoplamento de longo alcance e substituindo na equação (3.9), resulta em

$$s_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(s_n) + \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\sigma} [2f(s_n)] = f(s_n). \quad (4.2)$$

Assim, tomando  $r = 4, 0$ ,  $s_n$  evolui caoticamente à medida que  $n$  varia. Esta situação é conhecida na literatura como *sincronização de caos*. Por outro lado, se  $s_n$  evolui de forma periódica no tempo ocorre a sincronização periódica [46]. O resultado anterior mostra que, independente do valor de  $r$ , a variedade de sincronização  $S$  é invariante sob a aplicação do mapa  $f(s_n)$ . Qualquer condição inicial  $x_0^{(i)}$  para a rede que pertença a  $S$  gerará padrões espaço-temporais  $x_n^{(i)}$  que residem em  $S$  para todos os tempos  $n$  [20]. O processo de formação e aumento no número de platôs sincronizados é observado quando se aumenta a interação na rede entre os mapas acoplados, o que é conseguido através do decréscimo de  $\sigma$  e do aumento no parâmetro de acoplamento  $\varepsilon$ . Neste processo, pode-se chegar na sincronização completa e, desta forma verificar como isso acontece.

A sincronização em uma rede de mapas acoplados pode ser verificada através de diagnósticos numéricos [19, 20]. Para uma rede de mapas acoplados pode-se usar como diagnóstico de sincronização a dispersão das amplitudes do perfil da rede, em relação a sua média espacial  $\langle x \rangle_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_n^{(i)}$ , em um certo instante de tempo  $n$ ,

$$(\delta_x)_n = \left[ \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_n^{(i)} - \langle x \rangle_n)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.3)$$

Neste caso, o estado sincronizado é reconhecido quando a dispersão em torno da média espacial é nula [18].

Um outro diagnóstico para a sincronização de amplitudes para a rede (3.9) é proporcionado pelo parâmetro de ordem complexo  $z_n$ , introduzido por Ku-

ramoto [19, 50], e adaptado para rede de mapas acoplados como

$$z_n = R_n \exp(2\pi i \phi_n) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp(2\pi i x_n^{(j)}), \quad (4.4)$$

onde as quantidades  $R_n$  e  $\phi$  representam, respectivamente, a amplitude e o ângulo de um vetor de fase em um instante de tempo  $n$  de uma rede unidimensional com condições de contorno periódicas. A equação (4.4) é composta pelo termo complexo  $\exp(2\pi i x_n^{(j)})$  que fica expresso pela relação de Euler. Como  $\exp(2\pi i x_n^{(j)}) = \cos(2\pi x_n^{(j)}) + i \sin(2\pi x_n^{(j)})$ , calculando o módulo  $[(\cos(2\pi x_n^{(j)})^2 + \sin(2\pi x_n^{(j)})^2)^{\frac{1}{2}}$  e substituindo em (4.4) resulta em

$$R_n = \frac{1}{N} \left[ \left( \sum_{j=1}^N \cos(2\pi x_n^{(j)})^2 + \left( \sum_{j=1}^N \sin(2\pi x_n^{(j)})^2 \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (4.5)$$

O parâmetro de ordem é utilizado para caracterizar os estados completamente sincronizados, ou seja, quando os sítios possuem o mesmo valor de  $x_n^{(j)}$ . Neste caso a grandeza do parâmetro de ordem é igual a um para todo o tempo, com fase constante [39] e diz-se, então, que o sistema está completamente sincronizado. Para mapas desacoplados tem-se um padrão em que as amplitudes dos sítios são não correlacionadas, que podem ser consideradas como variáveis aleatórias. Para este caso, o parâmetro de ordem é menor do que um ( $R < 1$ ). Quando considera-se sincronização completa, espera-se que a grandeza do parâmetro de ordem tenha um valor constante igual a um.

Através da pesquisa constatou-se que as redes com  $q = 2$  e  $M = 1$ ,  $N = 4$  sítios,  $q = 2$  e  $M = 2$ ,  $N = 8$  sítios,  $q = 2$  e  $M = 3$ ,  $N = 16$  sítios apresentam sincronização de caos e o parâmetro de ordem é igual a um. A figura (4.1) mostra o comportamento da rede com  $q = 2$ ,  $M = 2$  e  $N = 8$  sítios através deste parâmetro, para dois diferentes valores da intensidade do acoplamento  $\varepsilon$ . É possível verificar que para o valor de  $\varepsilon = 0,7$ , a rede possui comportamento sincronizado, enquanto que para um valor de  $\varepsilon = 0,1$ , a sincronização não ocorre. Dessa forma, para valores da intensidade de acoplamento menores que um determinado valor, a rede possui um comportamento não sincronizado. Este valor será determinado posteriormente.

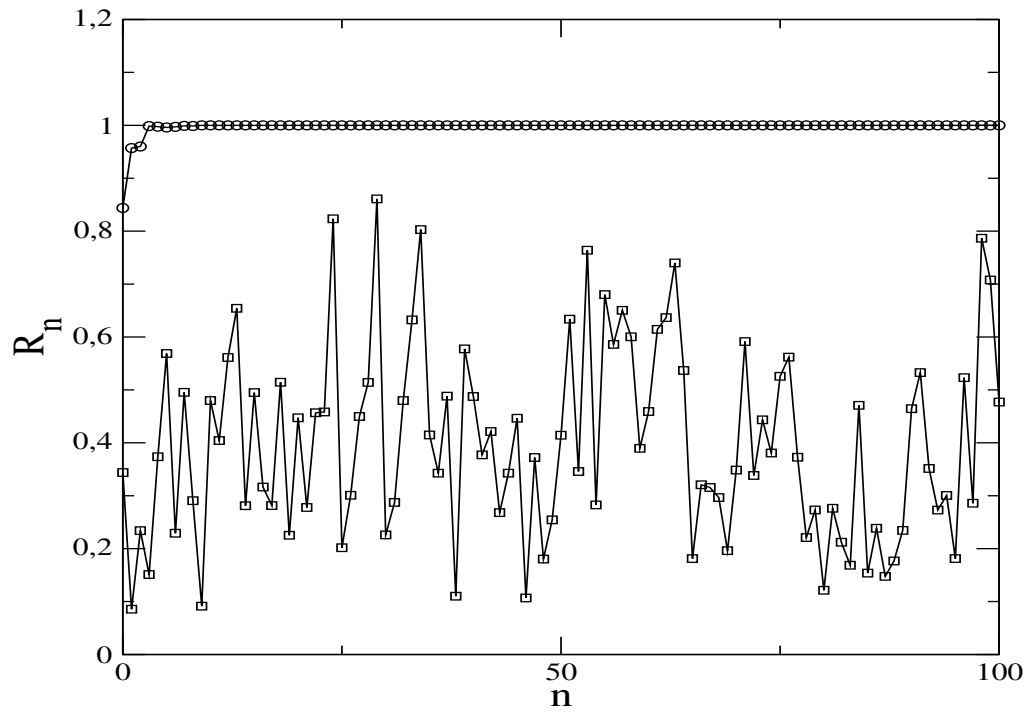


Figura 4.1: Parâmetro de ordem versus tempo para uma rede de mapas logísticos acoplados, sendo  $N = 8$ , o tamanho da rede,  $r = 4,0$ , o parâmetro de controle, considerando 100 iterações. O gráfico com circunferências corresponde a sincronização para  $\varepsilon = 0,7$  e com quadrados corresponde a não sincronização para  $\varepsilon = 0,1$ .

Várias simulações foram feitas com o objetivo de se determinar um valor para o tamanho da rede que apresentasse o comportamento que se pretendia investigar, neste caso uma região de sincronização da rede, no espaço de parâmetros. Com o tamanho da rede definido,  $N = 256$  passou-se a estudar a dinâmica do sistema através de seus possíveis estados sincronizados variando os parâmetros,  $\varepsilon$  de acoplamento,  $\sigma$  de alcance e  $r$  de controle do mapa logístico utilizado como dinâmica local da rede. O valor utilizado para o parâmetro de controle  $r$  passa a ser 3,69, valor este definido porque encontra-se no intervalo  $3,6 \leq r \leq 4,0$ , onde o mapa apresenta um comportamento que varia entre caótico e janelas periódicas.

Considerando-se  $q = 2$  e  $M = 7$ , o tamanho da rede é dado por  $N = 2q^M$  sendo neste caso,  $N = 256$  o tamanho da rede utilizado neste trabalho. A partir da figura (4.2) é fácil caracterizar os estados não sincronizado, intermitente e sincronizado fazendo o parâmetro  $\varepsilon$  assumir três diferentes valores. Na figura (4.2 a) não ocorre sincronização de caos pois  $R$  é menor que um para todo o tempo  $n$ . Quando os sítios oscilam de modo irregular, estando em alguns instantes de tempo não sincronizados e em outros instantes sincronizados, o parâmetro  $R$  oscila exibindo comportamento de intermitência, figura (4.2 b). Quando todos os sítios da rede estão sincronizados em todo instante de tempo,  $R$  não oscila com o decorrer das iterações e é igual a um, figura (4.2 c).

Utiliza-se a média temporal do parâmetro de ordem para analisar o comportamento dessa grandeza com a variação dos parâmetros do sistema. O valor médio é calculado pela expressão

$$R_m = \frac{1}{n_2 - n_1} \sum_{n_1+1}^{n_2} R_n, \quad (4.6)$$

sendo desprezadas  $n_1$  iterações transientes. Na expressão,  $n_1$  e  $n_2$  indicam o tempo.

A figura (4.3) exhibe um intervalo de valores para a intensidade do acoplamento  $\varepsilon$  que vai de 0,7 a 0,85 aproximadamente, onde o parâmetro de ordem médio torna-se constante e igual um, o que como já foi mencionado, caracteriza a



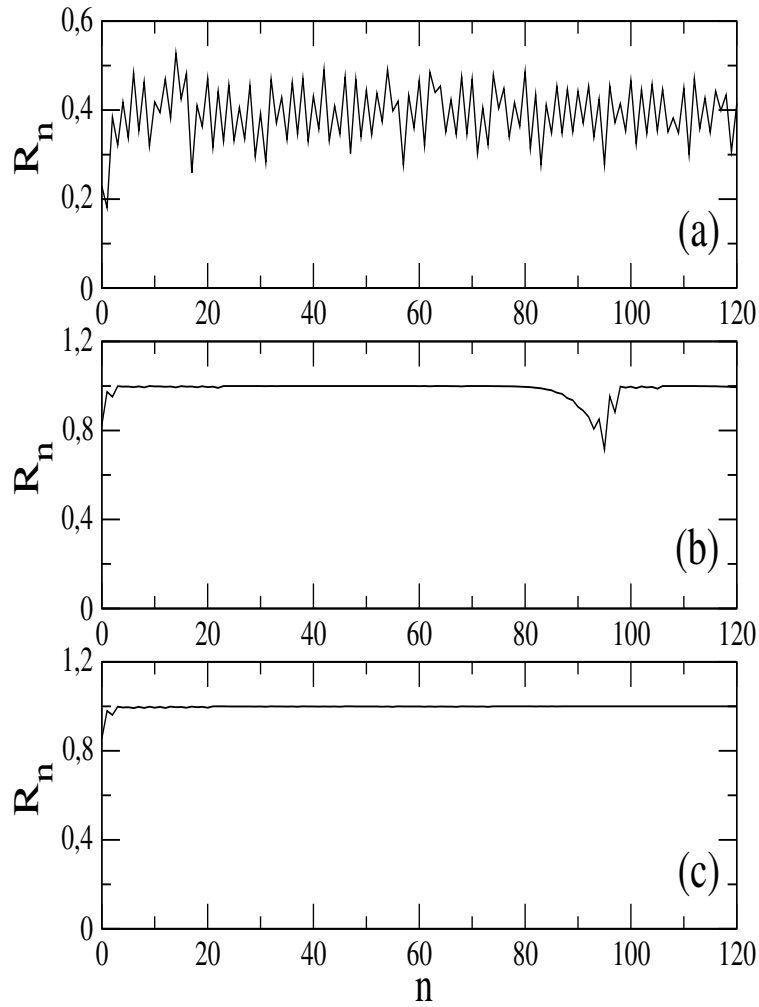


Figura 4.2: Parâmetro de ordem versus tempo para uma rede de mapas logísticos acoplados do tipo (3.19), com  $j_m(q) = q^m - 1$  para  $q = 2$  e  $M = 7$ ,  $r = 3,69$  o parâmetro de controle, considerando 120 iterações. (a)  $\sigma = 0,0$  e  $\varepsilon = 0,01$  caracterizando o estado não sincronizado; (b)  $\sigma = 0,0$  e  $\varepsilon = 0,7$  caracterizando o estado intermitente; (c)  $\sigma = 0,0$  e  $\varepsilon = 0,75$  caracterizando o estado sincronizado.

presença de um estado sincronizado.

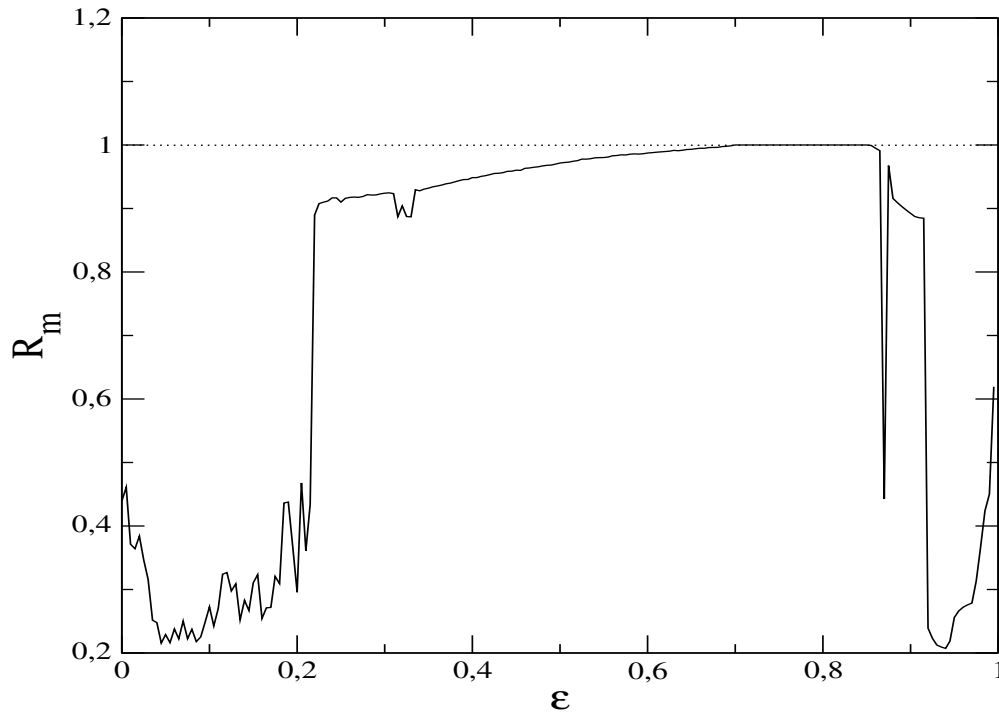


Figura 4.3: Parâmetro de ordem médio versus intensidade de acoplamento para uma rede do tipo (3.19), com  $j_m(q) = q^m - 1$  de tamanho  $N = 256$ ,  $r = 3,69$  e  $\sigma = 0,0$  com 100000 iterações e 50000 iterações transientes desprezadas.

Pode-se observar na figura (4.4) a dependência do parâmetro de ordem médio  $R_m$  com o parâmetro que controla o alcance. No intervalo  $0 \leq \sigma \leq 0,1$ , com  $\varepsilon = 0,75$ , a rede apresenta sincronização de caos.

A figura (4.5) mostra o comportamento da rede com a variação do parâmetro de controle  $r$  do mapa logístico, para as redes de tamanho  $N = 8$  e  $N = 256$  que estão sendo usadas neste trabalho. Para a rede de tamanho  $N = 8$ ,

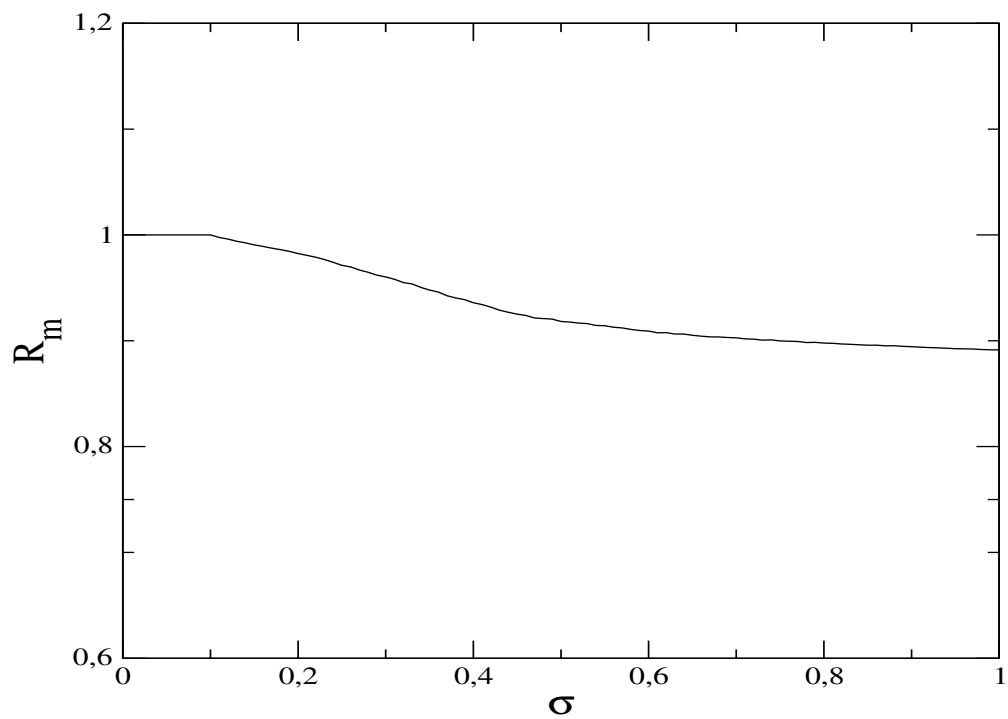


Figura 4.4: Parâmetro de ordem médio versus alcance da interação para uma rede de tamanho  $N = 256$ ,  $r = 3,69$  e  $\varepsilon = 0,75$  com 100000 iterações e 50000 desprezadas.

considerando  $\varepsilon = 0,75$ ,  $\sigma = 0,0$ , a mesma apresenta o estado de sincronização para todo  $r$ . Para a rede de tamanho  $N = 256$ , e utilizando as mesmas condições descritas, observa-se o mesmo comportamento, porém, para determinados valores de  $r$ , a rede sai do estado sincronizado.

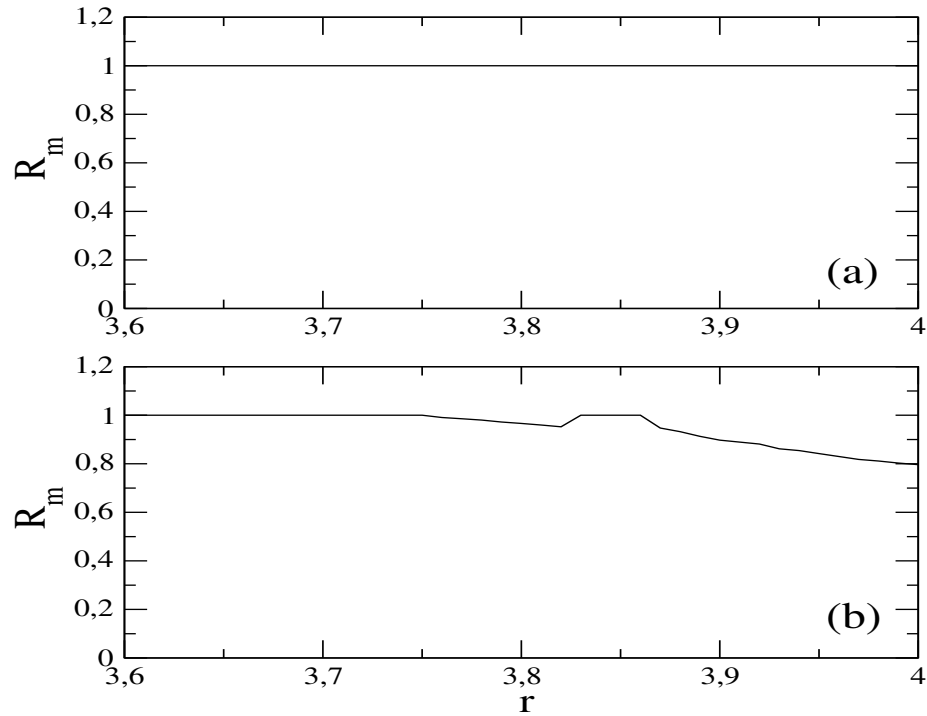


Figura 4.5: Parâmetro de ordem médio versus parâmetro de controle para uma rede: (a) de tamanho  $N = 8$  e  $\varepsilon = 0,75$ ; (b) de tamanho  $N = 256$  e  $\varepsilon = 0,75$ , com 100000 iterações e 80000 desprezadas.

Para determinados valores de  $\varepsilon$  e de  $\sigma$ , ocorre a formação de platôs de sincronização ao longo do tempo. Estes platôs são estruturas que se mantêm constantes no tempo, isto é, com o passar do tempo o sistema continua com o parâmetro

de ordem igual a um, no entanto, em alguns momentos, o sistema sai desse estado apresentando estouros, ou seja, o estado sincronizado é perdido durante um intervalo de tempo.

A sincronização completa no regime caótico, segundo pesquisas recentes [19], ocorre na forma de uma transição via intermitência. O termo intermitência foi usado em dinâmica dos fluidos para descrever sinais de investigação em fluidos que alternavam entre porções suaves e porções que possuíam explosões, interpretadas como estados laminares e turbulentos no fluido [56]. A transição via intermitência é observada quando a intensidade de acoplamento entre os sítios da rede atinge um certo valor. O valor crítico encontrado para a rede em estudo,  $N = 256$ ,  $q = 2$ ,  $M = 7$ ,  $\sigma = 0,0$  e  $r = 3,69$  é  $\varepsilon = 0,669$ . O valor crítico é aquele que separa a região onde a rede nunca sincroniza completamente da região onde a rede apresenta sincronização completa após um certo transiente.

Delimita-se no espaço de parâmetros,  $\sigma$  versus  $\varepsilon$ , as regiões onde ocorre ou não a sincronização de caos. Na figura (4.6) pode-se observar 2 regiões: a região branca, onde não há sincronização e  $0 < R < 1$ , e a região preta, onde há sincronização, e  $R = 1$ . Observa-se que o tamanho da rede, com os demais parâmetros fixos, faz com que a área da região de sincronização diminua.

Para verificar a variação do comprimento da região de sincronização de caos considerou-se valores de  $\varepsilon$  próximos do valor 0,75 e uma média dos pontos  $(\sigma, \varepsilon)$  foi realizada para diminuir os erros de flutuações. Utilizou-se os tamanhos das redes  $N = 8$ ,  $N = 16$ ,  $N = 32$ ,  $N = 64$ ,  $N = 128$  e  $N = 256$  para se encontrar um alcance de interação  $\sigma$  que fosse máximo, onde ocorre a sincronização. Fez-se a intensidade de acoplamento variar no intervalo de  $0,75 \leq \varepsilon \leq 0,78$  o que pode ser verificado na figura (4.7). Os valores encontrados para  $\sigma$  foram: 2,96; 1,184; 0,689; 0,421; 0,249 e 0,134, respectivamente, de acordo com os tamanhos das redes citadas anteriormente. Esta distribuição é adequada por um ajuste que segue uma

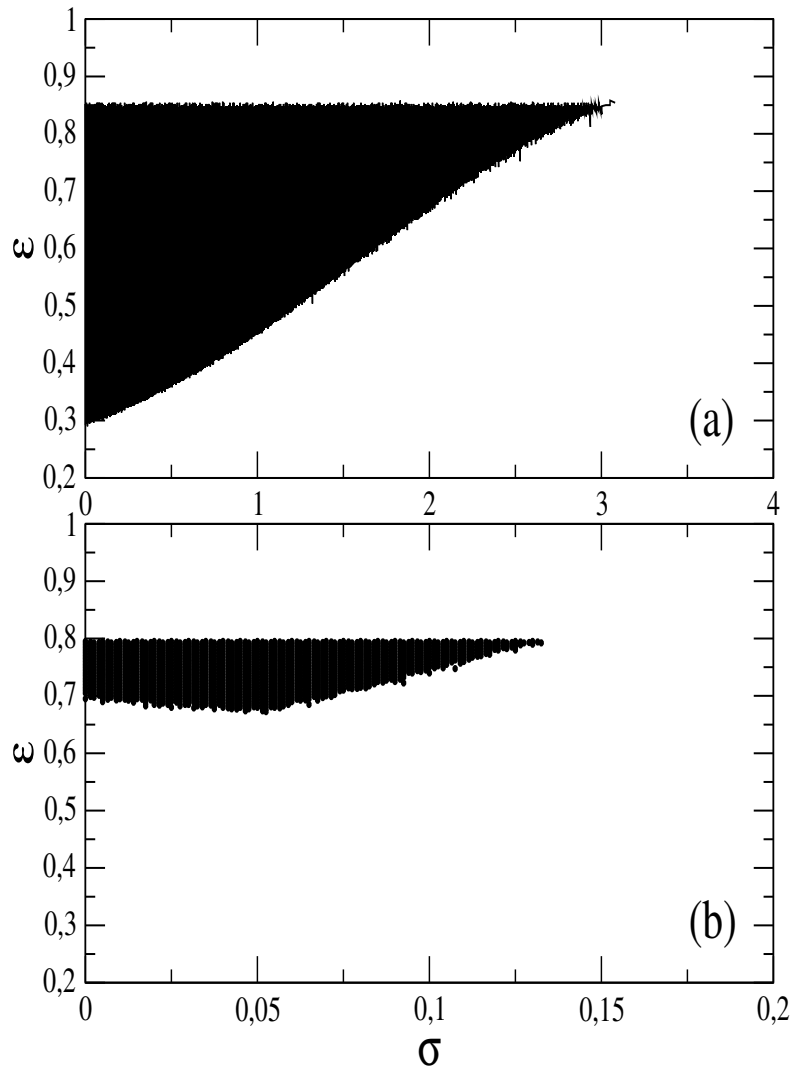


Figura 4.6: Intensidade do acoplamento versus alcance da interação para a rede de tamanho, (a)  $N = 8$ , (b)  $N = 256$  sítios,  $r = 3,69$  com 100000 iterações e 50000 desprezadas. Na região branca não ocorre sincronização de caos e na região preta há sincronização de caos.

lei de potência. O ajuste dado pela equação  $\Delta\sigma = \alpha N^\beta$ , fornece  $\alpha = 14,595$  e  $\beta = -0,85108$ , sendo  $-0,9944121$  o coeficiente de correlação dos dados observados.

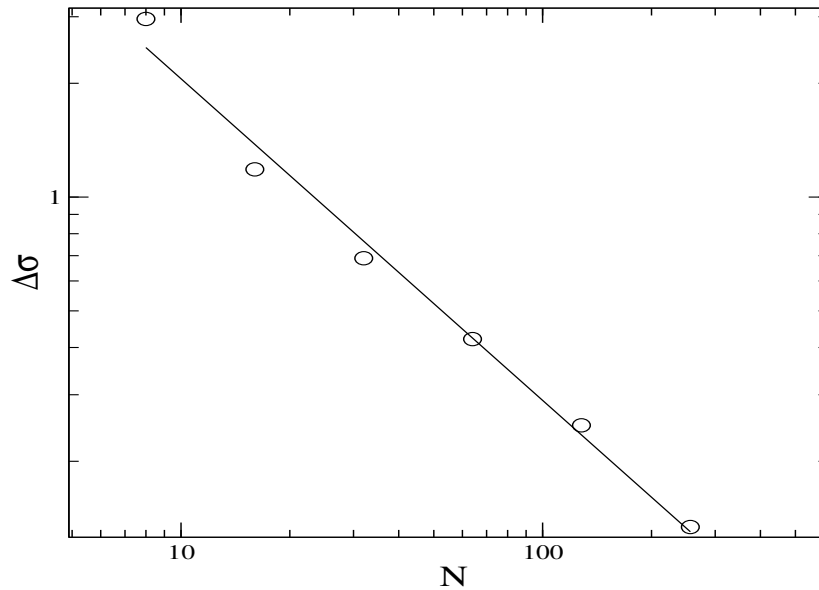


Figura 4.7: Comprimento da região de sincronização versus tamanho da rede para 100000 iterações e 50000 desprezadas como transiente. A equação  $\Delta\sigma = \alpha N^\beta$ , fornece  $\alpha = 14,595$  e  $\beta = -0,85108$ , sendo  $-0,9944121$  o coeficiente de correlação dos dados observados

## 4.2 Distribuição de tamanho dos platôs

Nesta seção será tratado o caso da rede ter o parâmetro  $\sigma$  fixo e o parâmetro  $\varepsilon$  variável.

Em um sistema determinístico é comum, para alguns valores de parâmetros, que exista um comportamento intermitente do sistema. Um sistema intermitente, não vai, ao longo do tempo, ter sempre um comportamento constante, sendo que em alguns intervalos de tempo ele passa a ter estouros. Estes estouros são uma das características de estados intermitentes, eles ocorrem entre comportamentos periódicos, chamados laminares, e acontecem quando um parâmetro é variado, chegando a um valor crítico. Como já mencionado, o valor crítico encontrado para a rede de tamanho  $N = 256$  foi  $\varepsilon = 0,669$ , o qual será utilizado para a determinação dos tamanhos dos platôs de sincronização.

O tamanho das regiões laminares ou platôs existentes em um comportamento intermitente é determinado pelo tempo  $\tau$  em que o sistema permanece nesta região. Supondo um sistema onde o tempo é uma variável discreta, o menor comprimento de uma fase laminar é dois, assim, quando um valor menor que este é atingido, considera-se que não existe região intermitente, ou seja, o sistema está não sincronizado. Quando o tempo  $\tau$  é o máximo utilizado para a iteração da rede, existe apenas uma grande região laminar, e o sistema atinge seu estado sincronizado. Na região onde a intermitência ocorre, essas fases laminares variam entre dois e o valor máximo, sendo intercaladas por regiões de estouros que indicam a saída do sistema da variedade de sincronização [37].

Quando aumenta a diferença entre o valor do parâmetro  $\varepsilon$  e seu valor crítico, a duração média dos estados laminares diminui e os estouros ocorrem com mais frequência. No comportamento intermitente, os tamanhos das regiões laminares são relacionadas com os valores de  $\varepsilon$ . Tal comportamento permanece estável no tempo para um valor de  $\varepsilon$  desde que este não chegue ao valor crítico, que por sua vez, indica o limite desta fase.

Os platôs, ao qual associa-se um comprimento, estão indicados na figura (4.8) que representa a evolução temporal da rede de tamanho  $N = 256$ . Os



tamanhos destes platôs correspondem ao número de iterações com  $R = 1$  e considere-se aqui que o menor platô é de tamanho dois. O parâmetro de ordem pode evoluir constituindo uma região laminar e por sua vez, evoluir através de explosões apresentando  $R < 1$ . O comprimento  $\tau$  é associado ao período de tempo em que  $R = 1$ , continuamente. O resultado desta rica dinâmica temporal associada a presença de uma extensão espacial é a intermitência, ou seja, um regime onde regiões laminares e caóticas coexistem no espaço e no tempo, como mostra a figura (4.8).

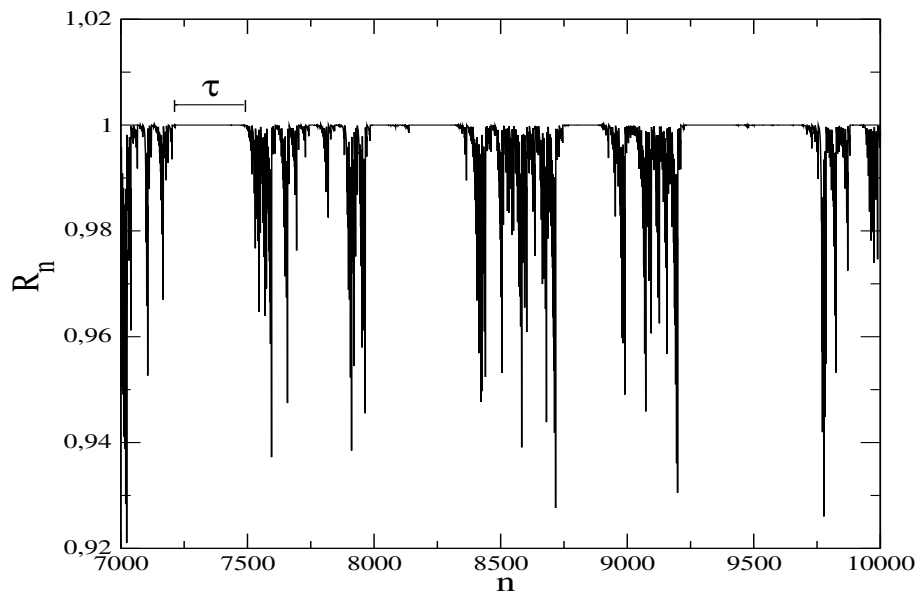


Figura 4.8: Sucessão de regiões laminares e caóticas registradas a partir do instante 7000 das 10000 iterações realizadas, com  $\varepsilon = 0,66$ ,  $r = 3,69$ ,  $\sigma = 0,0$  e  $N = 256$ .

Uma característica da transição intermitente para a sincronização é característica universal da distribuição estatística das regiões laminares. Na figura (4.9) apresenta-se um histograma normalizado para o número de regiões laminares com respeito aos seus comprimentos. A curva exhibe duas leis de escala. Este tipo

de distribuição onde existem duas leis de escala (existência de um “ombro” na distribuição) é típico de sistemas que exibem comportamento intermitente onde um termo ruidoso é adicionado às equações envolvidas. Neste caso, o valor da variável onde a curva muda de comportamento está relacionada ao nível de ruído [19, 43].

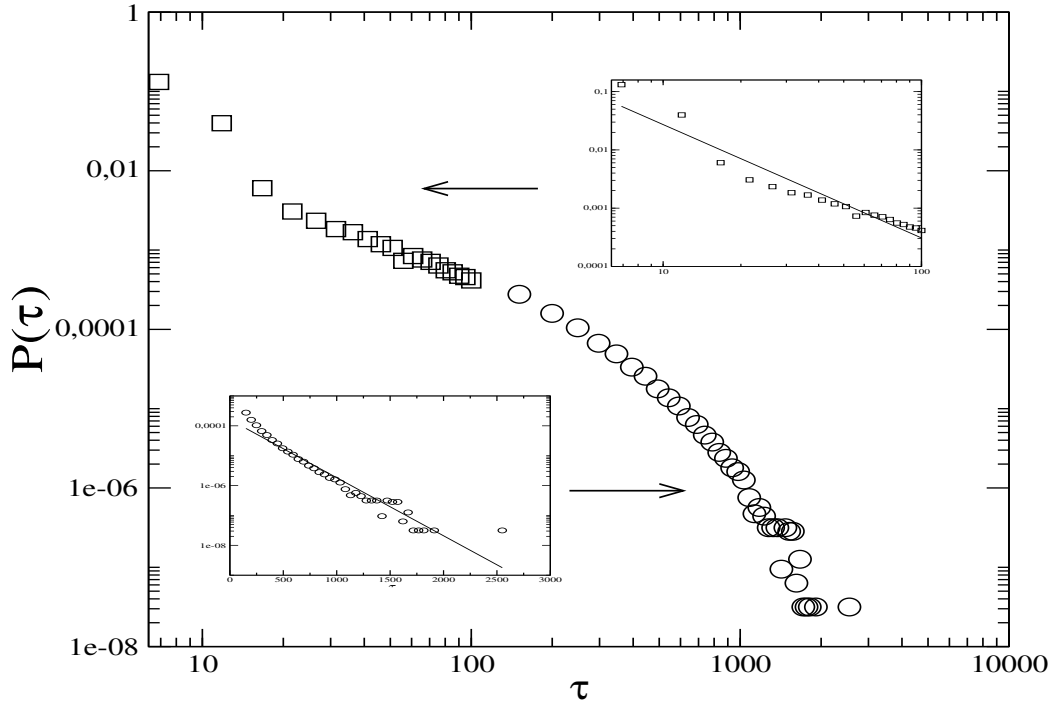


Figura 4.9: Histograma normalizado para um número relativo de platôs de sincronização para  $\varepsilon = 0,6690$  e  $\sigma = 0,0$  e rede de tamanho  $N = 256$ .

Dois regimes diferentes aparecem na figura (4.9). Para regiões laminares pequenas o histograma é ajustado por uma lei de potência  $\tau^\omega$ ; enquanto que a escala é exponencial  $e^{-K\tau}$  para intervalos grandes. O ajuste da função representada por quadrados é dado pela equação  $P(\tau) = 2,4011\tau^{-1,9459}$  apresentando coeficiente

de correlação igual a 0,96323 e coeficiente angular (inclinação) igual a  $-1,9459$ . No canto superior da figura, aparece o histograma normalizado para um número relativo de platôs de sincronização, para  $\varepsilon = 0,6690$  e  $\sigma = 0,0$  da rede de tamanho  $N = 256$ . A linha sólida representa a regressão com inclinação  $-1,9459$ . O ajuste da função representada por circunferências é do tipo exponencial e é dado pela equação  $P(\tau) = 0,00016063e^{-0,0044737\tau}$  apresentando coeficiente de correlação igual a 0,9653181 e coeficiente angular (inclinação) igual a  $-0,0044737$ . No canto inferior da mesma figura, aparece o histograma normalizado para um número relativo de platôs de sincronização, para  $\varepsilon = 0,6690$  e  $\sigma = 0,0$  da rede de tamanho  $N = 256$ . A linha sólida representa a regressão com inclinação  $-0,0044737$ .

## Capítulo 5

# Espectro de Lyapunov

Neste capítulo será verificado o comportamento da rede de mapas acoplados com interação de longo alcance através do espectro de Lyapunov. O espectro de Lyapunov será utilizado na determinação da dimensão de Lyapunov. Fenômenos como intermitência, sincronização e supressão de caos serão abordados.

### 5.1 Espectro de Lyapunov de uma rede de mapas logísticos acoplados

Uma rede com  $N$  mapas unidimensionais acoplados pode ser visualizada como um grande sistema dinâmico com  $N$  dimensões

$$\begin{aligned}x_{n+1}^{(1)} &= f^1(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, x_n^{(3)}, \dots, x_n^{(N)}) \\x_{n+1}^{(2)} &= f^2(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, x_n^{(3)}, \dots, x_n^{(N)}) \\&\vdots = \vdots \\x_{n+1}^{(N)} &= f_N(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, x_n^{(3)}, \dots, x_n^{(N)}).\end{aligned}\tag{5.1}$$

Como foi visto na seção (2.4), os expoentes de Lyapunov caracterizam

o quanto em média a taxa com a qual uma pequena distância no espaço de fases irá ser ampliada ou reduzida. Em um mapa  $N$ -dimensional existem  $N$  direções independentes e, a cada uma delas, associa-se um expoente de Lyapunov. O conjunto ordenado  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ , formado pelos  $N$  expoentes constitui o espectro de Lyapunov. Sendo assim, deve-se primeiramente calcular o produto ordenado de  $n$  matrizes Jacobianas do mapa  $N$ -dimensional

$$A_n = J_1 \cdot J_2 \cdot \dots \cdot J_{n-1} \cdot J_n = \prod_{l=1}^n J_l,$$

$$(J_n) = \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_n^{(j)}}. \quad (5.2)$$

O produto da Jacobiana ao longo da trajetória determina o espectro de Lyapunov através da evolução dos autovalores dessa matriz. Os expoentes de Lyapunov  $\lambda_i$  são dados pelos logaritmos naturais dos autovalores da matriz  $A_n$  divididos pelo número de iterações, fazendo este último tender a infinito. Cada expoente está associado a um autovetor unitário  $u_i$ .

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right) \ln \|A_n u_i\|. \quad (5.3)$$

A matriz Jacobiana da rede é determinada pela derivada da matriz, denominada de matriz das derivadas parciais e representada por

$$J_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{n+1}^{(1)}}{\partial x_n^{(1)}} & \frac{\partial x_{n+1}^{(1)}}{\partial x_n^{(2)}} & \frac{\partial x_{n+1}^{(1)}}{\partial x_n^{(3)}} & \dots & \frac{\partial x_{n+1}^{(1)}}{\partial x_n^{(N)}} \\ \frac{\partial x_{n+1}^{(2)}}{\partial x_n^{(1)}} & \frac{\partial x_{n+1}^{(2)}}{\partial x_n^{(2)}} & \frac{\partial x_{n+1}^{(2)}}{\partial x_n^{(3)}} & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_{n+1}^{(3)}}{\partial x_n^{(1)}} & \frac{\partial x_{n+1}^{(3)}}{\partial x_n^{(2)}} & \frac{\partial x_{n+1}^{(3)}}{\partial x_n^{(3)}} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_{n+1}^{(N)}}{\partial x_n^{(1)}} & \frac{\partial x_{n+1}^{(N)}}{\partial x_n^{(2)}} & \frac{\partial x_{n+1}^{(N)}}{\partial x_n^{(3)}} & \dots & \frac{\partial x_{n+1}^{(N)}}{\partial x_n^{(N)}} \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Considerando a rede de mapas com acoplamento local

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2}[f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)})], \quad (5.5)$$

reescreve-se os termos da matriz a fim de facilitar a sua visualização fazendo com que  $\frac{\partial x_{n+1}^{(i)}}{\partial x_n^{(j)}} = f'^{(i,j)}$  e  $(1 - \varepsilon) = \xi$ , a matriz Jacobiana a cada instante de tempo é dada por

$$J_n = \begin{pmatrix} \xi f'^{(1,1)} & \frac{\varepsilon}{2} f'^{(1,2)} & 0 & \dots & \frac{\varepsilon}{2} f'^{(1,N)} \\ \frac{\varepsilon}{2} f'^{(2,1)} & \xi f'^{(2,2)} & \frac{\varepsilon}{2} f'^{(2,3)} & \dots & \dots \\ 0 & \frac{\varepsilon}{2} f'^{(3,2)} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\varepsilon}{2} f'^{(N,1)} & 0 & 0 & \dots & \xi f'^{(N,N)} \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

onde  $N$  denota o tamanho da rede de mapas acoplados.

O produto das Jacobianas fornece uma matriz não simétrica. Devido a não simetria dessa matriz, usa-se a redução a forma superior de Hessenberg para calcular os autovalores. A sensibilidade no cálculo dos autovalores a erros numéricos durante a execução dos algoritmos pode ser reduzida pelo procedimento denominado de balanceamento. Os erros encontrados por procedimentos numéricos são proporcionais a norma Euclidiana da matriz, isto é, para a raiz quadrada da soma dos quadrados dos elementos da matriz. A idéia do balanceamento consiste em usar transformações similares para fazer linhas e colunas correspondentes da matriz terem normas comparáveis, reduzindo-se assim a norma total da matriz. Tal processo mantém os autovalores da matriz inalterados. Uma matriz simétrica já é balanceada. O balanceamento é um procedimento de operações de ordem  $N^2$ . Como o balanceamento leva mais do que uma pequena porcentagem do tempo total necessário para calcular os autovalores, é recomendado usar o balanceamento para matrizes não simétricas. O algoritmo devido a Osborne, consiste em uma seqüência de transformações similares por matrizes diagonais. A saída é a matriz que é balanceada na norma dada pela adição de valores nos elementos da matriz. Isto é mais eficiente do que usar a norma Euclidiana e igualmente efetivo: uma grande redução em uma norma implica uma grande redução das outras. Se os elementos da diagonal de saída de qualquer linha ou coluna da matriz são todos zero, então o elemento da diagonal é um autovalor [53].

Depois do balanceamento reduz-se a matriz Jacobiana à forma de Hessenberg. Uma matriz de Hessenberg superior tem zeros abaixo da diagonal exceto para a primeira linha subdiagonal. Por exemplo, na matriz  $6 \times 6$ , os elementos diferentes de zero são

$$\begin{pmatrix} X & X & X & X & X & X \\ X & X & X & X & X & X \\ 0 & X & X & X & X & X \\ 0 & 0 & X & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & X \end{pmatrix}$$

Na redução, é usado um procedimento análogo a eliminação de Gauss com pivotamento. Com a matriz na forma de Hessenberg calcula-se os autovalores por meio de uma transformação  $J = QR$ , onde  $Q$  é uma matriz ortogonal e  $R$  é uma matriz triangular superior [53].

Para a análise do espectro de Lyapunov de uma rede de mapas acoplados, utiliza-se o mapa logístico dado por  $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$ , onde  $r$  é o parâmetro de controle. Com a variação do parâmetro de controle  $r$  e do acoplamento  $\varepsilon$ , observam-se alterações no espectro de Lyapunov. As alterações ocorrem devido as modificações na dinâmica da rede [34]. Quando os mapas estão desacoplados ( $\varepsilon = 0$ ) eles apresentam comportamento caótico, ou seja, o espectro de Lyapunov apresenta todos os seus valores positivos. Quando a rede apresenta caos espaço temporal, o espectro de Lyapunov apresenta valores positivos, e exibe uma forma de decaimento em sua representação geométrica [7].

## 5.2 Espectro de Lyapunov para o acoplamento de longo alcance

Considerando-se a rede de mapas com alcance, que está sendo estudada nesta dissertação

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)} \sum_{m=1}^M \frac{1}{(q^m - 1)^\sigma} [f(x_n^{(i-q^m+1)}) + f(x_n^{(i+q^m-1)})], \quad (5.7)$$

exemplifica-se o cálculo da matriz Jacobiana para uma rede de 8 sítios com condições de contorno periódicas, onde  $q = 2$ ,  $M = 2$  e  $\eta(\sigma) = 2 \sum_{m=1}^M \frac{1}{(q^m - 1)^\sigma}$ . Denotando

$\frac{\partial x_{n+1}^{(i)}}{\partial x_n^{(j)}} = f^{(i,j)}$  e  $\xi = (1 - \varepsilon)$ , tem-se

$$J_n = \begin{pmatrix} \xi f^{(1,1)} & \frac{\varepsilon}{4} f^{(1,2)} & 0 & \frac{\varepsilon}{4} f^{(1,4)} & 0 & \frac{\varepsilon}{4} f^{(1,6)} & 0 & \frac{\varepsilon}{4} f^{(1,8)} \\ \frac{\varepsilon}{4} f^{(2,1)} & \xi f^{(2,2)} & \frac{\varepsilon}{4} f^{(2,3)} & 0 & \frac{\varepsilon}{4} f^{(2,5)} & 0 & \frac{\varepsilon}{4} f^{(2,7)} & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon}{4} f^{(3,2)} & \xi f^{(3,3)} & \frac{\varepsilon}{4} f^{(3,4)} & 0 & \frac{\varepsilon}{4} f^{(3,6)} & 0 & \frac{\varepsilon}{4} f^{(3,8)} \\ \frac{\varepsilon}{4} f^{(4,1)} & 0 & \frac{\varepsilon}{4} f^{(4,3)} & \xi f^{(4,4)} & \frac{\varepsilon}{4} f^{(4,5)} & 0 & \frac{\varepsilon}{4} f^{(4,7)} & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon}{4} f^{(5,2)} & 0 & \frac{\varepsilon}{4} f^{(5,4)} & \xi f^{(5,5)} & \frac{\varepsilon}{4} f^{(5,6)} & 0 & \frac{\varepsilon}{4} f^{(5,8)} \\ \frac{\varepsilon}{4} f^{(6,1)} & 0 & \frac{\varepsilon}{4} f^{(6,3)} & 0 & \frac{\varepsilon}{4} f^{(6,5)} & \xi f^{(6,6)} & \frac{\varepsilon}{4} f^{(6,7)} & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon}{4} f^{(7,2)} & 0 & \frac{\varepsilon}{4} f^{(7,4)} & 0 & \frac{\varepsilon}{4} f^{(7,6)} & \xi f^{(7,7)} & \frac{\varepsilon}{4} f^{(7,8)} \\ \frac{\varepsilon}{4} f^{(8,1)} & 0 & \frac{\varepsilon}{4} f^{(8,3)} & 0 & \frac{\varepsilon}{4} f^{(8,5)} & 0 & \frac{\varepsilon}{4} f^{(8,7)} & \xi f^{(8,8)} \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$



No caso de  $\sigma \rightarrow \infty$ , a matriz Jacobiana  $J$  torna-se

$$J_n = \begin{pmatrix} \xi f'(1,1) & \frac{\varepsilon}{2} f'(1,2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{2} f'(1,8) \\ \frac{\varepsilon}{2} f'(2,1) & \xi f'(2,2) & \frac{\varepsilon}{2} f'(2,3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon}{2} f'(3,2) & \xi f'(3,3) & \frac{\varepsilon}{2} f'(3,4) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{2} f'(4,3) & \xi f'(4,4) & \frac{\varepsilon}{2} f'(4,5) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{2} f'(5,4) & \xi f'(5,5) & \frac{\varepsilon}{2} f'(5,6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{2} f'(6,5) & \xi f'(x_n^{(6,6)}) & \frac{\varepsilon}{2} f'(6,7) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{2} f'(7,6) & \xi f'(7,7) & \frac{\varepsilon}{2} f'(7,8) \\ \frac{\varepsilon}{2} f'(8,1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{2} f'(8,7) & \xi f'(8,8) \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

que é a matriz Jacobiana para o acoplamento local. Verifica-se que a Jacobiana, no caso de  $\sigma = 0$ , é diferente da obtida utilizando-se o acoplamento tipo lei de potência usual

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon) f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\sigma} [f(x_n^{(i-j)}) + f(x_n^{(i+j)})], \quad (5.10)$$

que para  $\sigma = 0$  torna-se o acoplamento global do campo médio, e a matriz Jacobiana apresenta a forma matricial

$$J_n = \begin{pmatrix} \xi f'(1,1) & \frac{\varepsilon}{N-1} f'(1,2) & \frac{\varepsilon}{N-1} f'(1,3) & \dots & \frac{\varepsilon}{N-1} f'(1,N) \\ \frac{\varepsilon}{N-1} f'(2,1) & \xi f'(2,2) & \frac{\varepsilon}{N-1} f'(2,3) & \dots & \dots \\ \frac{\varepsilon}{N-1} f'(3,1) & \frac{\varepsilon}{N-1} f'(3,2) & \xi f'(3,3) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\varepsilon}{N-1} f'(N,1) & \dots & \dots & \dots & \xi f'(N,N) \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Para calcular os expoentes de Lyapunov transforma-se a Jacobiana em uma matriz superior de Hessenberg e em seguida obtém-se seus autovalores. Com os expoentes de Lyapunov analisamos o comportamento para o caso do acoplamento  $q = 2$  e  $M = 7$ . A figura (4.2) exhibe o parâmetro de ordem em função do tempo para a rede de mapas logísticos acoplados  $q = 2$ ,  $M = 7$ ,  $N = 256$  e  $r = 3,69$  e a figura (5.1) mostra o espectro de Lyapunov obtidos para a situação da figura (4.2 a) e (4.2 c). Então, a figura (4.2 a) representa um estado não sincronizado

com  $\varepsilon = 0,01$ , e para esta situação, a figura (5.1 a) exibe o espectro de Lyapunov que apresenta os seus valores positivos, indicando um comportamento caótico. A figura (4.2 c) representa um estado sincronizado e pelo espectro de Lyapunov (5.1 b), observa-se que apenas um expoente de Lyapunov é positivo enquanto que os demais são negativos caracterizando a sincronização caótica.

### 5.3 Dimensão de Lyapunov

Uma outra forma de estudar a rede de mapas acoplados é através da dimensão de Lyapunov. Considerando um mapa em  $R^N$  e uma órbita com expoentes de Lyapunov  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$  e  $p$  como o maior inteiro tal que  $\sum_{i=1}^p \lambda_i \geq 0$ , então define-se a dimensão de Lyapunov  $D$  da órbita como

$$D = \begin{cases} 0 & \text{se nenhum } p \text{ existe} \\ p + \frac{1}{|\lambda_{p+1}|} \sum_{i=1}^p \lambda_i & \text{se } p < N \\ N & \text{se } p = N \end{cases}, \quad (5.12)$$

indicando que a dimensão de Lyapunov é zero quando todos os expoentes são negativos ou é igual ao valor do tamanho da rede quando todos os expoentes de Lyapunov são positivos, e por fim valores intermediários na situação em que o maior inteiro para o somatório positivo seja menor que o tamanho da rede [30].

A figura (5.2) mostra o cálculo da dimensão de Lyapunov para uma rede com  $N = 256$  mapas acoplados variando a intensidade de acoplamento. Para valores de  $\varepsilon$  de 0,0 até aproximadamente 0,05, com  $\sigma = 0,0$ , a dimensão é 256, indicando que todos os valores dos expoentes de Lyapunov são positivos. Para  $\varepsilon$  de valor 0,66, abaixo do  $\varepsilon$  crítico, observou-se um valor baixo da dimensão de Lyapunov, caracterizando a sincronização de caos para a rede investigada. Para os demais valores do acoplamento, aparecem muitos expoentes de Lyapunov positivos e alguns poucos negativos, pela observação dos dados. No caso da rede não apresentar nenhum ex-

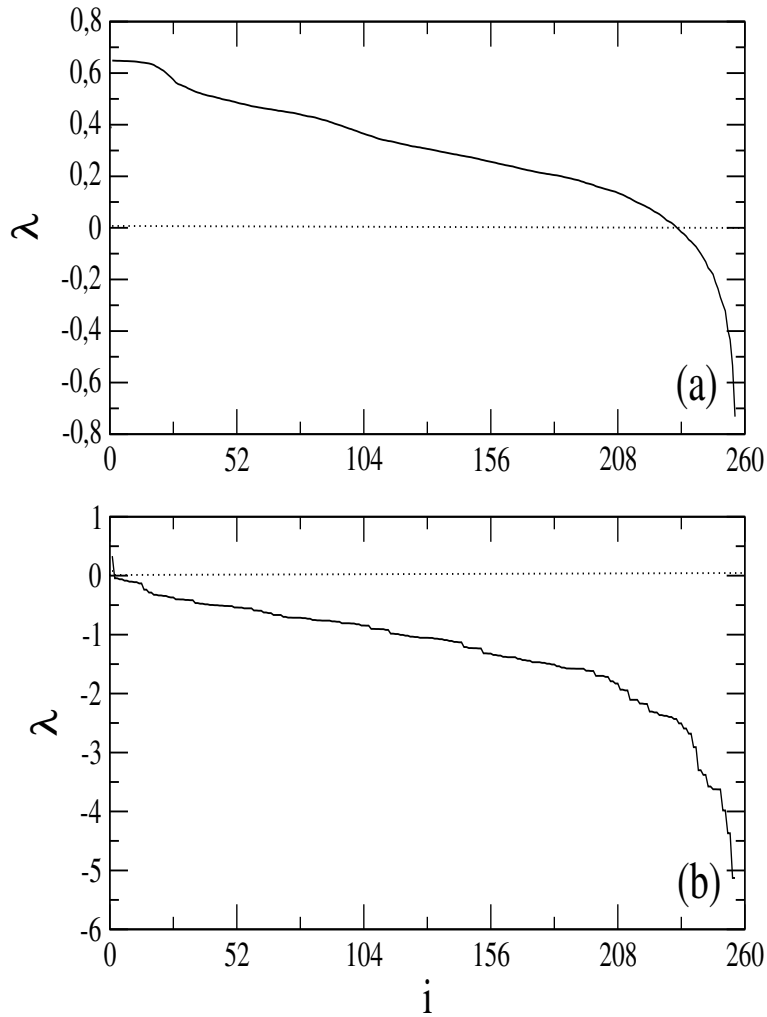


Figura 5.1: Espectro de Lyapunov, (a)  $\sigma = 0,0$ ,  $\varepsilon = 0,01$  e  $r = 3,69$  (b)  $\sigma = 0,0$ ,  $\varepsilon = 0,75$  e  $r = 3,69$ , sendo realizadas 40000 iterações transientes para  $N = 256$ .

poente de Lyapunov positivo, a dimensão é igual a zero e não ocorre comportamento caótico.

Observando a figura (5.2), dimensão pela intensidade do acoplamento, com mais detalhes, duas novas características aparecem relacionadas ao parâmetro de acoplamento. Para determinados valores do parâmetro de acoplamento, a rede apresenta perda de comportamento caótico. Esta situação é denominada supressão de caos e indica que, mesmo a rede sendo formada por sítios caóticos, o acoplamento entre eles, de alguma forma, faz com que a rede apresente comportamento periódico ou quase-periódico. A primeira característica é a supressão de caos na rede para  $\varepsilon = 0,16$ , como mostra a figura (5.3 a) e para  $\varepsilon = 0,33$  na figura (5.3 b) com 100050 iterações realizadas e 100000 de transiente. Quando ocorre a supressão de caos a dimensão de Lyapunov é igual a zero, isto devido ao fato de todos os expoentes de Lyapunov serem negativos. A segunda característica, a qual ocorre para  $\varepsilon = 0,94$ , é o aparecimento da estrutura *zigzag*, que é caracterizada pela condição:

$$(x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)})(x_n^{(i)} - x_n^{(i-1)}) < 0, \quad (5.13)$$

ou a condição

$$(x_n^{(i+1)} - x^*)(x_n^{(i)} - x^*) < 0, \quad (5.14)$$

com  $x^* = 1 - \frac{1}{r}$ , ponto fixo instável para o mapa logístico.

A dinâmica temporal da estrutura *zigzag*, no caso em estudo, é de período 2 como mostra a figura (5.3 c). As estruturas *zigzag* são importantes pois podem levar a uma rota de quase periodicidade para o caos [16]. O movimento quase-periódico em um espaço de fases é um terceiro movimento não caótico possível além do periódico. O movimento periódico ocorre quando após um certo intervalo de tempo a órbita retorna ao mesmo ponto de partida percorrendo assim sempre uma mesma trajetória. O movimento quase-periódico pode ser considerado como uma mistura de movimentos periódicos de várias frequências fundamentais diferentes e ocorre frequentemente em sistemas dissipativos [54].

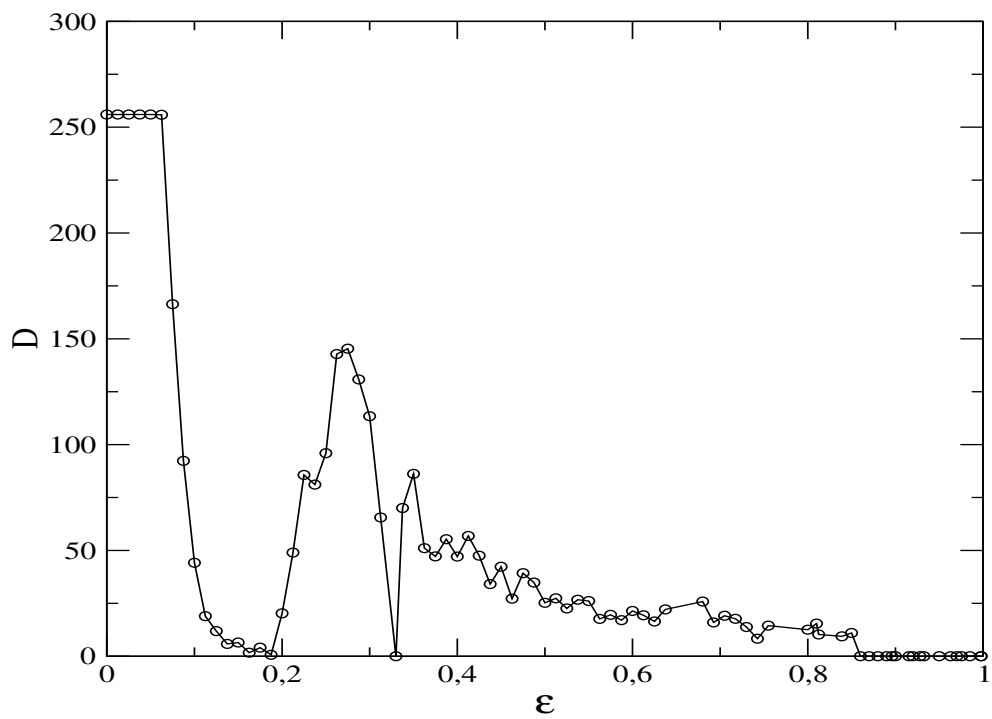


Figura 5.2: Dimensão de Lyapunov pela intensidade do acoplamento  $\varepsilon$  para a rede com  $N = 256$ ,  $\sigma = 0,0$  e  $r = 3,69$ .

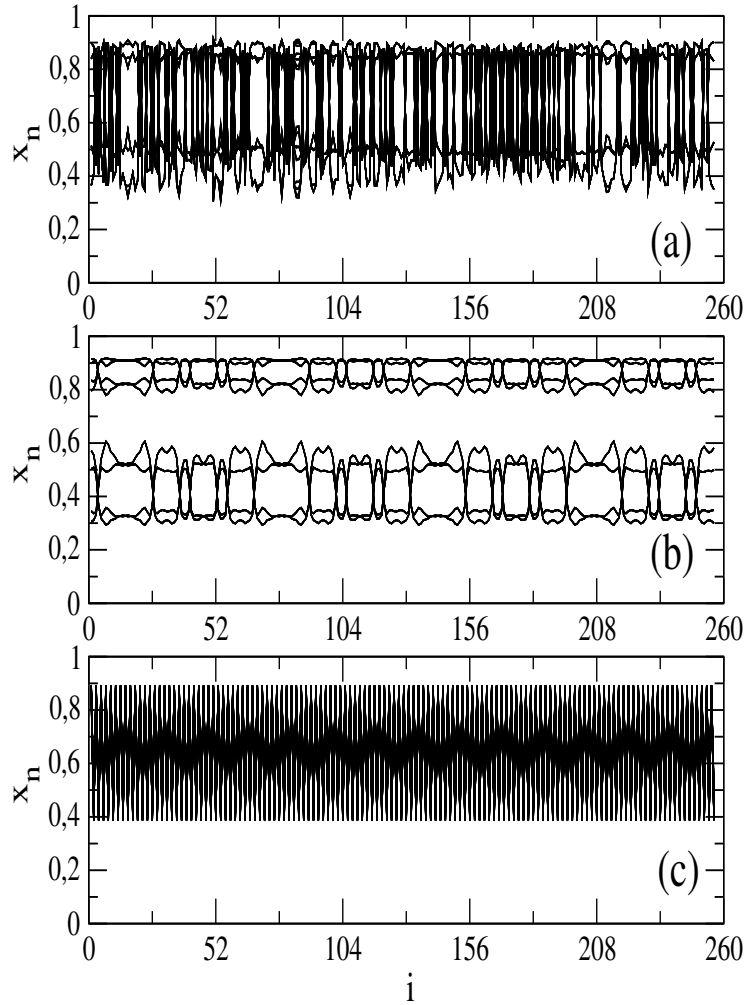


Figura 5.3: Perfil da rede de 256 mapas logísticos acoplados exibindo: (a) supressão de caos para  $\varepsilon = 0,16$ ,  $\sigma = 0,0$ ,  $r = 3,69$ ; (b) supressão de caos para  $\varepsilon = 0,33$ ,  $\sigma = 0,0$ ,  $r = 3,69$ ; (c) estrutura zigzag para  $\varepsilon = 0,94$ ,  $\sigma = 0,0$ ,  $r = 3,69$ , considerando nas três situações 100050 iterações e 100000 desprezadas.

## Capítulo 6

### Conclusões

Este trabalho teve por objetivo o estudo de uma rede de mapas logísticos acoplados, fazendo uso de um acoplamento onde a interação entre sítios decai com a distância entre os mesmos segundo uma lei de potência. O parâmetro  $\sigma$ , que controla o alcance da interação entre os sítios, permitiu que a rede apresentasse um acoplamento não-local, sendo que cada sítio interagiu somente com alguns sítios da rede, diferente do acoplamento existente na literatura, em que todos os sítios interagem entre si. Foi considerada uma versão modificada de acoplamento com  $j = q^m - 1$ , sendo conveniente em termos de simulação computacional, pelo fato de um sítio ficar conectado somente com alguns sítios da rede. As redes utilizadas neste trabalho foram determinadas através da escolha de  $q$  e de  $M$  e o seu tamanho pela expressão  $N = 2q^M$ , portanto, uma rede de 8 sítios e outra de 256 sítios foram as escolhidas para o estudo da sua dinâmica.

O acoplamento não-local permite que a interação se estenda a vários sítios, favorecendo a ocorrência da sincronização, logo, a principal contribuição no estudo das redes mencionadas referiu-se ao entendimento e compreensão do fenômeno da sincronização. Foi possível observar que dependendo dos valores do parâmetro de acoplamento  $\varepsilon$ , a rede de 8 sítios apresentou diferentes perfis. Valores pequenos

para o parâmetro de acoplamento  $\varepsilon$ , como  $\varepsilon = 0,1$  caracterizou um comportamento não sincronizado, ao passo que, para  $\varepsilon = 0,7$ , a rede teve um comportamento sincronizado.

A sincronização foi diagnosticada através do valor do parâmetro de ordem complexo. Para a rede de 256 sítios, fixado o valor do parâmetro de controle do mapa em  $r = 3,69$ , constatou-se sincronização de caos para determinados valores do parâmetro de acoplamento e de interação. Observou-se, também, que quando os sítios oscilavam de modo irregular, o parâmetro de ordem exibiu comportamento intermitente. Como a dinâmica desta rede apresentou intermitência pôde-se estudar os platôs através da distribuição de seus respectivos tamanhos. Verificou-se que o tamanho dos platôs e sua quantidade obedecem a uma lei de potência (platôs pequenos) e a uma lei exponencial (platôs grandes). E, ainda, pôde-se observar no espaço de parâmetros, regiões que não apresentaram sincronização de caos. Para esta rede, também foi calculado o parâmetro de ordem médio e fixado  $\sigma = 0,0$  observou-se sincronização de caos no intervalo de valores de  $0,7$  a  $0,85$  para  $\varepsilon$ . Este comportamento também ocorreu no intervalo de  $0,0$  a  $0,1$  para  $\sigma$  e considerando  $\varepsilon = 0,75$ .

A sincronização completa ocorreu na forma de uma transição via intermitência, observada quando a intensidade de acoplamento  $\varepsilon$  atingiu um valor crítico. O valor crítico encontrado para a rede de 256 sítios foi  $\varepsilon = 0,669$ . Foi verificado que para valores do parâmetro de acoplamento menores que o valor crítico citado não levam esta rede a sincronização completa. Identificou-se no espaço de parâmetros,  $(\sigma, \varepsilon)$ , uma região onde há sincronização com  $R = 1$  e outra região onde não há sincronização de caos com  $0 < R < 1$ . Ficou evidente que quanto maior a rede menor a região de sincronização.

Para detectar a sincronização de outra forma, estudou-se o espectro de Lyapunov de mapas logísticos acoplados utilizando o acoplamento de longo alcance.



Calculou-se o espectro de Lyapunov para verificar a caoticidade da rede de 256 sítios e a sincronização de caos. Pôde-se observar que quando o valor do parâmetro de acoplamento  $\varepsilon = 0,01$ , a rede apresentou comportamento caótico, ou seja, o espectro de Lyapunov apresentou todos os seus valores positivos, enquanto que para  $\varepsilon = 0,75$ , esta mesma rede atingiu o estado de sincronização, ou seja, o espectro de Lyapunov apresentou o primeiro expoente positivo e todos os demais negativos. Com os expoentes de Lyapunov foi possível obter a dimensão de Lyapunov. Pelos resultados obtidos, concluiu-se que para valores de  $\varepsilon$  de 0,0 até aproximadamente 0,05, o valor da dimensão foi 256, indicando que todos os valores dos expoentes de Lyapunov encontrados são positivos. Para  $\varepsilon$  de valor aproximado 0,66, próximo do  $\varepsilon$  crítico, observou-se um valor baixo da dimensão de Lyapunov, caracterizando a sincronização de caos para a rede investigada. Também verificou-se o caso em que ocorre a supressão de caos para alguns valores de  $\varepsilon$ , tais como  $\varepsilon = 0,16$  e  $\varepsilon = 0,33$ . Outra característica observada nesta rede de 256 sítios foi o aparecimento da estrutura *zigzag*, a qual ocorreu para  $\varepsilon = 0,94$ .

Esta rede de 256 sítios acoplados com interação de longo alcance mostrou comportamentos indicando a sincronização de caos, intermitência e supressão de caos para valores do parâmetro de acoplamento diferentes dos já obtidos na literatura por meio da rede com alcance usual. Destacou-se que, neste trabalho, alguns cálculos e resultados foram obtidos através do que se conhece na área sobre redes de mapas acoplados. Procurou-se obter valores para poder comparar com os valores até então conhecidos.

Como trabalho futuro, pode-se investigar a dinâmica transversal da variedade de sincronização.

# Bibliografia

- [1] Segel, L. A. *Modeling dynamic phenomena in molecular and cellular biology*. Cambridge University Press, 1989.
- [2] Lorenz, E. N. *Deterministic nonperiodic flow*. *Atmos.Sci.*, 20:130,1963.
- [3] Bai-Lin, H. *Chaos*. World Scientific, 1984.
- [4] Kaneko, K. *Collapse of tori and genesis of chaos in dissipative systems*. Tese de Doutorado, p. 222, 1983. (uma versão foi publicada pela editora World Scientific, Singapore, 1986).
- [5] Waller, I., Kapral, R., *Physical Review A* **30**, 2047, 1984.
- [6] Chate, H., Manneville, P. *Spatio temporal intermittency in coupled map lattices*. *Physica D* **32**, 409, 1988.
- [7] Batista, A. M. *Memórias, espectro de Lyapunov e sincronização de sistemas acoplados*. Tese de Doutorado, UFPR, 2001.
- [8] Kaneko, K. *Globally coupled circle maps*. *Physica D* **54**, 5-19, 1991.
- [9] Tessone, C. J., Cencini, M., Torcini, A. *Synchronization of Extended Chaotic Systems with Long-Range Interactions: An Analogy to Lévy-Flight Spreading of Epidemics*. *Physical Review Letters* **97**:224101, 2006.
- [10] Strogatz, S. H., Stewart, I. *Coupled oscillators and biological synchronization*. Scientific American, New York, 1993.

- [11] Strogatz, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos*. New York: Perseus Books, 1994.
- [12] Wang W., Kiss, I. Z., Hudson, J. L. *Chaos*. **10**, 248, 2000; DeShazer, D. J., Breban, R., Ott, E., Roy, R. *Physical Review Letters* **87**, 044101, 2001.
- [13] Wiesenfeld, K., Hadley, P. *Attractor crowding in oscillator array*. *Physical Review Letters* **62**, 1335, 1989.
- [14] Percora, L. M., Carroll, T. L., *Physical Review Letters* **64**, 821, 1990.
- [15] Kaneko, K. *Lyapunov analysis and information flow in coupled map lattices*. *Physica D* **23**, 436, 1986.
- [16] Crutchfield, J. P., Kaneko, K. *Phenomenology of spatio-temporal chaos, in: Directions in chaos*. Vol. 1, Ed. Hao Bai-lin (World Scientific, Singapore, 1987).
- [17] Isola, S., Politi, A., Ruffo, S., Torcini, A. *Lyapunov spectra of coupled map lattices*. *Physics Letters A* **143**, 8, 365, 1990.
- [18] Pikovsky, A., Rosembaum, M., Kurths, J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2001); Boccaletti, S., Kurths, J., Osipov, G., Valladares, D. L., Zhou, C. S.: *Physical Reports* **366**,1(2002); *Synchronization: Theory and Applications*, edited by Pikovsky, A., Maistrenko, Yu (Kluwer, Dordrecht, 2003)
- [19] Viana, R. L., Grebogi, C., Pinto, S. E. de S., Lopes, S. R., Batista, A. M., Kurths, J. *Validity of numerical trajectories in the synchronization transition of complex systems*. *Physical Review E* **68**, 067204, 2003.
- [20] Batista, A. M., Pinto, S. E. de S, Viana, R. L., Lopes, S. R. *Lyapunov spectrum and synchronization of piecewise linear maps lattices with power-law coupling*. *Physical Review E* **65**, 056209, 2002.
- [21] Anteneodo, C., Pinto, S. E. de S., Batista, A. M., Viana, R. L. *Analytical results for coupled map lattices with long-range interactions*. *Physical Review E* **68**, 045202, 2003.

- [22] Torcini, A., Lepri, S. *Physical Review E* **55**, R 3805, 1997.
- [23] Pinto, S. E. de S. e Viana, R. L. *Synchronization plateaus in a lattice of coupled sine-circle maps*. *Physical Review E* **61**:5154, 2000.
- [24] Viana, R. L., Batista, A. M. *Synchronization of coupled kicked limit cycle systems*. *Chaos, Solitons and Fractals*, **9**:1931, 1998.
- [25] Viana, R.L. *Introdução às redes de mapas acoplados: Modelos para o estudo de caos espaço-temporal*. Notas de Aula-Mini Curso-Pós-Graduação-Instituto de Física-USP, 1999.
- [26] Moreira, I. De C. *Sistemas caóticos em física-uma introdução*. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 15, n. 1-4, p. 163-170, 1992. .
- [27] Lorenz, E. *The essence of CHAOS*. Seattle: Washington, 1994.
- [28] Devaney, R. L. *A first course in chaotic dynamical systems: Theory and experiment*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1993
- [29] Ferrara, N. Fiedler, Prado, C. P. C. *Caos: Uma introdução*. Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 1994.
- [30] Alligood, K. T., Sauer, T. D., Yorke, J. A. *Chaos an introduction to dynamical systems*. Springer-Verlag New York, Inc. 1997.
- [31] Malthus, T. *Ensaio sobre o princípio da população*. Sintra, Publicações Europa-América, 1978.
- [32] May, R. M. *Theoretical Ecology: principles and applications*. Oxford, Blackwell Scientific Publications, 1976.
- [33] May, R. M. *Simple mathematical models with very complicated dynamics*. *Nature*, 261:459, 1976.
- [34] Kaneko, K. *Pattern dynamics in Spatiotemporal chaos*. *Physica D*, p.1-41, 1989.

- [35] Kaneko, K. *Theory and application of coupled map lattices*. Wiley, Chichester, 1993.
- [36] Vasconcelos, D.B. *Correlação espacial em redes de mapas acoplados*. Tese de Doutorado, UFPR, 2005.
- [37] Santos, A. M. dos, *Caos espaço-temporal em sistemas dinâmicos acoplados*. Tese de Doutorado, UFPR, 2006.
- [38] Rogers, J. L. e Wille, L. T. *Phase transitions in nonlinear oscillator chains*. Physical Review E **54**:3, 1996.
- [39] Viana, R. L., Batista, A. M. *Synchronization of coupled kicked limit cycle systems*. Chaos, Solitons and Fractals, **9**:1931, 1998.
- [40] Raghavachari, S., Glaizer, J. A. *Spatially coherent states in fractally coupled map lattices*. Physical Review Letters **74**:3297, 1995.
- [41] Tamarit, F., Anteneodo, C. *Rotators with long-range interactions: connection with the mean-field approximation*. Physical Review Letters **84**:208, 2000.
- [42] Ishii, S., Sato, M. *Associative memory based on parametrically coupled chaotic elements*. Physica D **121**:344, 1998.
- [43] Gade, P. M., Hu, C. K. *Synchronization and coherence in thermodynamic coupled map lattices with intermediate-range coupling*. Physical Review E **60**:4966, 1999.
- [44] Batista, A. M., Viana, R. L. *Lyapunov exponent of a lattice of chaotic maps with a power-law coupling*. Physics Letters A **286**:134, 2001.
- [45] Schuster, H. G. *Deterministic Chaos*. (VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim), 1995.
- [46] Pinto, S. E. de S. e Viana, R. L. *Synchronization plateaus in a lattice of coupled sine-circle maps*. Physical Review E **61**:5154, 2000.

- [47] Glass, L. *Synchronization and rhythmic processes in physiology*. Nature, **410**:277, 2001.
- [48] Wiggins, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, 1990.
- [49] Heagy, J. F., Carroll, T. L., Pecora, L. M. *Synchronous chaos in coupled oscillator systems*. Physical Review E **50**:1874, 1994.
- [50] Kuramoto, Y. *Chemical Oscillations, waves and turbulence*. Spring-Verlag, Berlin, 1984.
- [51] Viana, R. L., Batista, A. M. *Synchronization of Coupled Kicked Limit Cycle Systems, Chaos, Solitons and Fractals*. **12**:9:1931, 1998.
- [52] Batista, A. M. *Mapas acoplados na rede e sincronização*. Dissertação de Mestrado, UFPR, 1996.
- [53] Press, H. W., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. e Flannery, B. P. *Numerical Recipes in C: The art of scientific computing*. Cambridge University Press, Programas Copyright, 1992.
- [54] Ott, E. *Chaos in dynamical system*. Cambridge University Press, New York; 1993.
- [55] Grebogi, C., Ott, E., Yorke, J. A. *Chaos, strange attractors, and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics*. Science, **238**, 632-638, 1987.
- [56] Platt, N., Spiegel, E. A. e Tresser, C. *On-off intermittency: A mechanism for bursting*. Physical Review Letters **70**:279, 1993.