

Universidade Estadual de Ponta Grossa
Setor de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós-Graduação em Ciências
Área de Concentração: Física

**Sistema mecânico como sonda de uma transição de fase
quântica**

Jader Pereira dos Santos

Ponta Grossa, 2011

JADER PEREIRA DOS SANTOS

**Sistema mecânico como sonda de uma transição de fase
quântica**

Dissertação submetida ao programa de Pós-Graduação em Ciências - Área de concentração: Física - da Universidade Estadual de Ponta Grossa como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Luis Semião da Silva

Ponta Grossa
2011

Ficha Catalográfica Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

J237s Santos, Jader Pereira dos
Sistema mecânico como sonda de uma transição de fase quântica /
Jader Pereira dos Santos. Ponta Grossa, 2011.
84f.

Dissertação (Mestrado em Ciências , área de concentração
Física), Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr . Fernando Luis Semião da Silva

1. Modelo de Dicke. 2. Transição de Fase. 3. Sistema
Optomecânico. I. Silva, Fernando Luis Semião da. II. T.

CDD: 530.12

TERMO DE APROVAÇÃO

JADER PEREIRA DOS SANTOS

“SISTEMA MECÂNICO COMO SONDA DE UMA TRANSIÇÃO DE FASE QUÂNTICA”.

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Ciências - Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador:


Prof. Dr. Fernando Luis Semião da Silva
UFABC/SP.


Prof. Dr. Sandro Ely de Souza Pinto
UEPG/PR


Profa. Dra. Kyoko Furuya
UNICAMP/SP

Ponta Grossa, 18 de março de 2011.

Aos meus pais e aos meus amigos, que estão perto e longe.

Agradecimentos

- Ao meu caro orientador Prof. Dr. Fernando Luis Semião da Silva.
- Aos meu colegas de grupo, João, Carlos, Dr. Pablo e ao Prof. Dr. Antonio Sérgio Magalhães de Castro.
- Ao Prof. Dr. Sandro Ely de Souza Pinto pelas suas sugestões ao trabalho.
- A Profa. Dra. Kyoko Furuya pelas discussões, sugestões, enfim, por sua ajuda na construção desse trabalho.
- Ao apoio financeiro da Capes.

“É preciso que o discípulo da sabedoria tenha o coração grande e corajoso. O fardo é pesado e a viagem longa.”
Confúcio

Resumo

O modelo de Dicke descreve um sistema contendo um conjunto de átomos acoplados a um modo do campo eletromagnético. Uma das características desse modelo é que ele exibe uma transição de fase quântica de segunda ordem. Neste trabalho tivemos como principal objetivo estudar a transição de fase quântica presente nesse modelo através de uma sonda mecânica. Consideramos que um dos espelhos da cavidade óptica tem liberdade para mover-se sob efeito de uma força restauradora linear. Nessas condições, o espelho livre se acopla, via interação de pressão de radiação, com o campo presente na cavidade. No limite termodinâmico observamos que na fase normal o espelho permanecerá desacoplado da cavidade, enquanto que na fase super-radiante o espelho sofre a ação de uma força clássica resultante. Uma característica importante é que a entropia do espelho não se altera dinamicamente em nenhuma das fases, quando no regime termodinâmico. Desse modo, o sistema mecânico funciona como uma sonda para estudar o reservatório (modelo de Dicke).

Palavras-chave: Modelo de Dicke, Transição de Fase, Sistema Optomecânico.

Abstract

The Dicke model describes a system that contains a group of atoms coupled to a mode of electromagnetic field. One of the features of this model is the presence of a second-order quantum phase transition. In this work, our main goal is to study the quantum phase transition present in the Dicke model through a mechanical probe. We consider that one of the mirrors in an optical cavity has the freedom to move under the effect of a linear restoring force. In these conditions, the mirror couples to the cavity field via pressure radiation interaction. In the thermodynamic limit, we found that the moving mirror decouples from the cavity while in the super-radiant phase it suffers the action of a resulting classical force. A remarkable feature is that the entropy of the mirror is not dynamically changed in any phase when the thermodynamic limit is taken. Consequently, the mechanical system will work as a probe to study the critical reservoir, namely the Dicke system.

Key-words: Dicke Model, Phase Transition, Optomechanical System.

Lista de Figuras

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | À esquerda, apresentamos um diagrama qualitativo de fase da água. Todas as transições são de primeira ordem, exceto no ponto crítico PC. A direita, apresentamos valores da densidade da água no estado líquido e no estado gasoso ao longo da linha de coexistência. Quando atingimos o ponto crítico, as duas fases se tornam indistinguíveis. | 15 |
| 2.2 | Na figura a esquerda, é apresentada a situação onde temos o cruzamento de níveis. Na figura a direita, temos a situação onde as curvas “se evitam” por um <i>gap</i> . Esse <i>gap</i> tende a zero no limite termodinâmico. | 16 |
| 2.3 | Diagrama de fase magnético do LiHoF_4 e momento magnético médio $\langle M_z \rangle$ em função de g (intensidade do campo magnético) | 19 |
| 2.4 | Átomos de Rb movendo-se em um potencial periódico criado por ondas estacionárias de um laser. À direita, temos a fase isolante (quando a rede de potencial é muito intensa) onde cada átomo acaba ocupando um mínimo. À esquerda, o estado superfluido (quando a rede de potencial tem intensidade mais fraca). | 20 |
| 2.5 | Distribuição de Velocidade dos átomos de Rb quando soltos. | 20 |
| 2.6 | Padrões de interferência de ondas de matéria obtidos depois que os átomos foram liberados de uma rede de potencial com diferentes profundidades. | 21 |
| 2.7 | Estrutura cristalina do La_2CuO_4 . Os átomos de Cu estão em vermelho, os de O estão em azul e os de La estão em verde. | 23 |
| 3.1 | Espectro de energia do Hamiltoniano de Dicke considerando a RWA (esquerda) e sem considerar a RWA (direita). Em ambos os casos $J = 5$ e $\omega_0 = \omega = 1$ | 38 |

| | | |
|-----|--|----|
| 3.2 | À esquerda temos a energia fundamental reescalada, E_{fund}/j , em função da constante de acoplamento λ . À direita temos a segunda derivada da energia fundamental em função da constante de acoplamento. Em ambas as figuras a linha sólida representa o limite termodinâmico enquanto que as linhas tracejadas correspondem a valores finitos para j . Também, em ambas as figuras consideramos $\omega = \omega_0 = 1$ | 45 |
| 3.3 | À esquerda temos a inversão atômica reescalada e à direita temos o número médio de fótons reescalada, ambos em função da constante de acoplamento λ . Em ambas as figuras consideramos $\omega = \omega_0 = 1$ e $\lambda_C = 0,5$. | 45 |
| 4.1 | Cavidade Fabry-Perot. Um dos espelhos é fixo e o outro move-se sob o efeito de um potencial. | 47 |
| 5.1 | Conjunto de N átomos de dois níveis interagindo com um modo do campo quantizado de uma cavidade. A cavidade tem um dos espelhos fixo e o outro se movimenta em torno do ponto l_0 sob os efeitos de um potencial (representado por uma mola) e da força de pressão de radiação. | 56 |
| 5.2 | Evolução temporal do número médio fônons $\langle c^\dagger c \rangle(t)$ para diferentes valores de J . Observamos que as curvas tendem ao resultado limite dado em (5.16). Nessa figura os parâmetros foram escolhidos como $\omega = \omega_0 = 10\omega_m$ e $\lambda = 0,6$ (fase super-radiante). | 61 |
| 5.3 | Evolução temporal da entropia do espelho para diferentes valores de J . Nessa figura os parâmetros foram escolhidos como $\omega = \omega_0 = 10\omega_m$ e $\lambda = 0,6$ (fase super-radiante). | 62 |



Sumário

| | |
|--|-----------|
| Lista de Figuras | 6 |
| Sumário | 8 |
| 1 Introdução | 10 |
| 2 Transição de Fase em Sistemas Quânticos | 13 |
| 2.1 Spins Interagentes | 16 |
| 2.2 Transição Isolante-Superfluido de Mott | 19 |
| 2.3 Cupratos Supercondutores | 22 |
| 3 Modelo de Dicke | 25 |
| 3.1 Interação entre a radiação e a matéria | 25 |
| 3.1.1 Energia do átomo | 27 |
| 3.1.2 Energia da interação átomo-campo | 28 |
| 3.1.3 Hamiltoniano de Jaynes-Cummings | 29 |
| 3.2 Hamiltoniano de Dicke | 30 |
| 3.2.1 Efeito da super radiância no modelo de Dicke | 34 |
| 3.2.2 Aproximação de Onda Girante | 35 |
| 3.2.3 Transição de fase no modelo de Dicke | 37 |
| 3.2.4 Modelo de Dicke no Limite Termodinâmico | 39 |
| 4 Sistemas opto-mecânicos | 46 |
| 4.1 Interação entre um espelho móvel e pressão de radiação | 46 |
| 4.2 Preparação de estados não-clássicos | 53 |
| 5 Resultados | 55 |
| 6 Conclusão e Perspectivas Futuras | 63 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| A | Quantização do Campo Eletromagnético | 65 |
| B | Transformações de Bogoliubov | 71 |
| | B.0.1 Fase Normal | 73 |
| | B.0.2 Fase super radiante | 73 |
| C | Operador de evolução temporal | 75 |
| | Referências Bibliográficas | 78 |

Introdução

A descrição semi-clássica da interação entre a radiação e a matéria (tratando o campo classicamente) é válida em diversas situações. Entretanto, existem situações onde um tratamento completamente quântico é requerido, como por exemplo no fenômeno da emissão espontânea [1]. O modelo de interação completamente quantizado entre um átomo de dois níveis e um modo do campo eletromagnético é chamado de modelo de Jaynes-Cummings [2]. A importância desse modelo reside no fato de que as aproximações nele realizadas levam a uma resolução analítica exata.

Uma extensão natural do modelo proposto por Jaynes e Cummings seria considerar não apenas um átomo, mas um conjunto de átomos interagindo com o campo eletromagnético. Isso foi feito por Dicke em [3]. Atualmente esse modelo é conhecido como o modelo de Dicke e uma das novidades apresentadas é a presença de uma transição de fase quântica de segunda ordem.

As transições de fase quânticas são guiadas apenas por flutuações quânticas, e não por flutuações térmicas. Por definição, as transições de fase quânticas só ocorrem em temperatura nula. Dentre os atuais temas de pesquisa que abordam transições de fase quânticas, a questão do comportamento de um sistema acoplado a um reservatório

crítico tem sido estudada [4, 5, 6].

Em [6] é apresentada uma maneira de se estudar a transição de fase quântica que ocorre em um sistema através de um *qubit*¹ sonda. O sistema em questão é descrito pelo modelo de Ising na presença de um campo magnético na direção longitudinal. Próximo do ponto de transição, o sistema é susceptível a pequenas perturbações. Um *qubit* especialmente preparado quando acoplado ao sistema de Ising pode induzir dinâmicas distintas dependendo de seu estado inicial. Por exemplo, se o *qubit* sonda se encontra em um estado $|0\rangle$, o sistema evolui para um estado $|\psi_0\rangle$, caso o *qubit* sonda esteja no estado $|1\rangle$, o sistema evolui para um estado $|\psi_1\rangle$. Foi demonstrado neste trabalho que medidas envolvendo apenas o *qubit* revelam a presença das diferentes fases apresentadas no modelo de Ising. Esse é portanto um importante exemplo da idéia de sonda quântica desenvolvida nesta dissertação num contexto optomecânico conforme explicaremos adiante.

Em [4] foi mostrado como a transição de fase quântica em uma cadeia de Ising na presença de um campo magnético transversal é capaz de induzir um *qubit* a passar de um estado puro para um estado misto, dependo da proximidade do ponto crítico do sistema de Ising. Isso foi mostrado através do decaimento da *Loschmidt Echo* (LE) da cadeia de Ising que está diretamente relacionado com a dinâmica do *qubit* acoplado, evidenciando novamente a idéia de um sistema quântico sonda.

A relação entre a transição de fase quântica e emaranhamento, também é um tópico em destaque [5, 7, 8]. Em [5], por exemplo, foi mostrado como uma transição de fase quântica de uma cadeia de spins em um campo transversal afeta o emaranhamento entre dois *qubits* acoplados a tal cadeia. A dinâmica do emaranhamento é fortemente afetada pelo comportamento crítico da cadeia de spins, sendo que quanto mais próximo do ponto crítico, maior é o emaranhamento entre os *qubits* acoplados ao reservatório.

Um outro tópico de atual interesse dentro da óptica quântica é a questão de cavidades optomecânicas assistidas por átomos ou *ensembles* atômicos [9, 10, 11]. Qualquer sistema que possui um acoplamento entre um elemento óptico e um elemento mecânico

¹Sistema de dois níveis

pode ser considerado um sistema optomecânico. Estes sistemas são de grande interesse uma vez que estão no limite entre a física clássica e a física quântica. Particularmente, em [12] foi estudado um sistema formado por um *único* átomo interagindo com uma cavidade monomodo que possui um espelho móvel.

Nesta dissertação, motivados pelo sistema proposto em [12], consideramos um conjunto de átomos dentro da cavidade optomecânica monomodo. Este sistema pode ser descrito como um modelo de Dicke optomecânico e desta maneira podemos estudar a transição de fase que ocorre no modelo de Dicke utilizando como sonda o sistema mecânico. No capítulo 2, discutimos a respeito das transições de fase em sistemas quânticos e apresentamos alguns exemplos de sistemas que apresentam tal fenômeno sob certas condições, como um sistema de spins interagentes, transição de Mott e cupratos super-condutores [13, 14]. No capítulo 3, discutimos o modelo de Jaynes-Cummings e o modelo de Dicke. Também discutimos a construção teórica do limite termodinâmico no modelo de Dicke, além da transição de fase quântica que surge ao variarmos a intensidade do acoplamento átomo-campo através de um valor crítico. No capítulo 4, introduzimos o formalismo Hamiltoniano da cavidade optomecânica [15], construído diretamente da equação de movimento do espelho e da equação de onda do campo. Também discutimos a respeito das aplicações deste Hamiltoniano na preparação de estados não clássicos. No capítulo 5, apresentamos o sistema proposto para o estudo da transição de fase quântica no modelo de Dicke e observamos como a transição afeta o sistema mecânico acoplado. Finalizamos este trabalho com o capítulo 5, onde são apresentadas as conclusões e perspectivas futuras deste trabalho.

Transição de Fase em Sistemas Quânticos

Ao longo desse capítulo, faremos uma discussão com o objetivo de introduzir o conceito de transição de fase em sistemas quânticos através de comparações e exemplos. O raciocínio central dessa discussão e os exemplos aqui citados podem ser encontrados em [13].

A idéia de transição de fase nos é exposta desde muito cedo. Desde o ensino fundamental, aprendemos que quando aquecemos a água a uma temperatura acima de 100°C , ela sofre uma transformação da fase líquida para a fase gasosa. Com o passar dos estudos, aprendemos que existe uma série de diferentes tipos de transições de fase. Por exemplo, quando resfriamos o sistema $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ (devidamente preparado) abaixo de uma determinada temperatura ele pode sofrer uma transformação de um estado de condutor normal para um estado supercondutor. O que existe de comum em todos esses processos é uma mudança qualitativa das propriedades do sistema sob a variação de um parâmetro de controle externo.

O gelo e a água são ambos constituídos de moléculas H_2O . Podemos estudar as características e propriedades da molécula H_2O , porém não vamos encontrar nesses dados o motivo pelo qual, na temperatura de 0°C , a água sofre uma transição de fase. Podemos entender essa transformação como sendo o resultado do equilíbrio entre os

diferentes “interesses” da energia e da entropia do sistema.

De acordo com um princípio básico, o valor de equilíbrio de qualquer parâmetro interno sem restrições, em um sistema em contato diatérmico com um reservatório de calor, tende a minimizar o potencial de Helmholtz, $F = E - TS$, onde E refere-se à energia, T à temperatura e S à entropia. No caso da água, por exemplo, a energia E está relacionada com as interações entre as moléculas de H_2O , e é minimizada na estrutura cristalina do gelo. A entropia, entretanto, é proporcional ao logaritmo do número de estados acessíveis, o qual é maior na fase líquida. Agora, quando olhamos para $F = E - TS$, vemos que, a baixas temperaturas, E contribui mais para o potencial de Helmholtz do que S . Por isso, à baixas temperaturas a água assume a estrutura cristalina onde E é minimizada. Quando consideramos altas temperaturas, acontece o inverso, ou seja, S contribui mais do que E para o valor de F . Assim, a água procura o estado de maior entropia disponível, minimizando o potencial de Helmholtz, e por isso a água assume a forma líquida.

As transições de fase podem ser classificadas em transições de primeira ordem e segunda ordem. Transições como a líquido-sólido no caso da água, em que existe um calor latente são transições de primeira ordem. Como exemplo de transição de segunda ordem, citamos a transição ferromagnética-paramagnética. A baixas temperaturas o ferro está em um estado ferromagnético, um estado ordenado. Quando aumentamos sua temperatura, a magnetização diminui continuamente. Isso acontece devido à agitação térmica dos constituintes. A uma determinada temperatura, a magnetização se anulará e o ferro torna-se paramagnético. Essa transição ocorre de maneira contínua, e não existe um ponto no qual as duas fases coexistem. Isso caracteriza uma transição de fase de segunda ordem. Na Fig.(2.1) apresentamos o diagrama de fases da água. Nessa figura as linhas entre as fases são linhas de coexistência, ou seja, as duas fases que a linha separa coexistem na linha. Quando a água passa através de uma linha, ela sofre uma transição de fase de primeira ordem. O ponto em que as três fases coexistem é chamado de ponto triplo. No caso da água, a transição sólido líquido sempre ocorrerá, mesmo para altas temperaturas e pressões. No caso da transição líquido-gás, entre-

tanto, a situação é diferente. Quando percorremos a linha de coexistência, no sentido do aumento da temperatura a diferença na densidade entre o líquido e o gás decai continuamente a zero, como ilustrado na Fig.(2.1). Nesse diagrama, o ponto em que tal diferença é igual a zero é conhecido como ponto crítico [16].

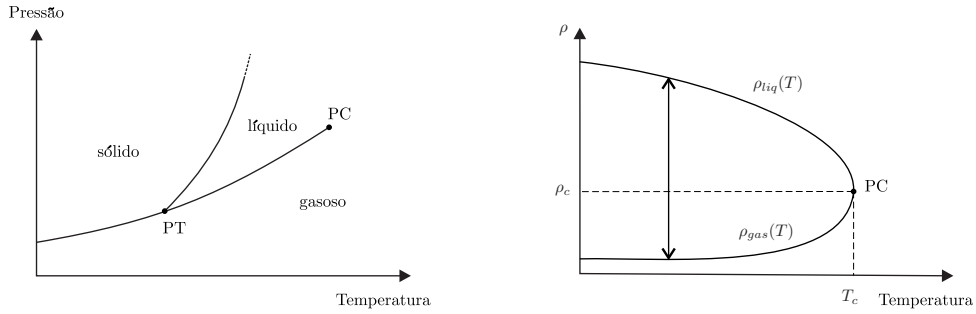


Figura 2.1: À esquerda, apresentamos um diagrama qualitativo de fase da água. Todas as transições são de primeira ordem, exceto no ponto crítico PC. A direita, apresentamos valores da densidade da água no estado líquido e no estado gasoso ao longo da linha de coexistência. Quando atingimos o ponto crítico, as duas fases se tornam indistinguíveis.

Uma característica comum a todas as transições acima citadas é o fato de que todas elas ocorrem em temperaturas finitas e a ordem macroscópica é destruída através de flutuações térmicas. Em geral, não associamos mecânica quântica com transições de fase, isso acontece porque quando estamos próximos de uma transição de fase a escala de energia das flutuações quânticas não se compara com a das flutuações térmicas, isto é

$$\omega_{tip}\hbar \ll k_B T,$$

em que ω_{tip} é uma frequência típica do sistema. Entretanto, existe uma classe de transições de fase que ocorre a temperatura nula. Em princípio parece estranho que ocorra qualquer tipo de mudança no estado de alguma substância à temperatura 0 K, pois imaginamos que nessa situação todas as moléculas deveriam estar em repouso e permanecer nessa situação. Entretanto, se levarmos em consideração as leis da mecânica quântica percebemos que as moléculas não podem estar em repouso (velocidade definida), pois se isso fosse verdade, o princípio de Heisenberg seria desrespeitado, uma vez que estamos em um espaço limitado (tamanho da amostra). Sendo assim, deve existir algum tipo de equilíbrio no comportamento das moléculas. Esse comportamento (com origem no princípio de incerteza de Heisenberg) é chamado de flutuação

quântica. Determinar o estado da água, por exemplo, a 0 K é uma questão de encontrar o estado energeticamente favorável, mas respeitando o princípio de incerteza de Heisenberg.

Como no caso das transições de fase térmicas, é possível que existam diferentes estados de equilíbrio à $T = 0$ K e esses diferentes estados de equilíbrio são separados por transições de fase quântica. Nas transições de fase quânticas as não analiticidades da energia livre que ocorrem nas transições à $T \neq 0$ se manifestam na energia fundamental E_0 . Sendo assim, um ponto de não analiticidade na energia do estado fundamental caracteriza uma transição de fase quântica [17]. Supondo que o Hamiltoniano que descreve o sistema seja função de um parâmetro g , uma não analiticidade em $E_0(g)$ pode ocorrer se houver um cruzamento de níveis, ou seja, o primeiro estado excitado torna-se o fundamental, conforme mostrado na Fig.(2.2). Podemos ter ainda a situação onde tal cruzamento de níveis seja evitado mas que o *gap* entre a energia fundamental e a energia do primeiro estado excitado tenda a zero no limite termodinâmico. Com isso, teremos novamente uma não analiticidade em E_0 . Vamos agora discutir sobre alguns

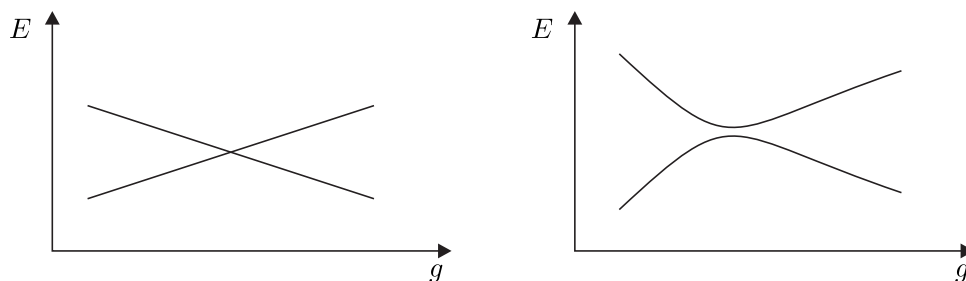


Figura 2.2: Na figura a esquerda, é apresentada a situação onde temos o cruzamento de níveis. Na figura a direita, temos a situação onde as curvas “se evitam” por um *gap*. Esse *gap* tende a zero no limite termodinâmico.

exemplos de sistemas que apresentam transição de fase quântica.

2.1 Spins Interagentes

Um dos exemplos mais simples de transição de fase quântica acontece em um sistema de spins interagentes [18]. Como se sabe, spin é o momento angular intrínseco de partículas elementares ou compostas. Se medirmos o spin do elétron em uma

determinada direção, z por exemplo, poderemos encontrar os valores $-\hbar/2$ e $+\hbar/2$. Na verdade, não medimos o spin diretamente. O que medimos é o momento magnético M_z associado ao elétron, que está diretamente ligado ao seu spin. A maioria dos materiais possui uma quantidade semelhante de spins $-\hbar/2$ e $+\hbar/2$, entretanto determinados materiais possuem uma quantidade de spins em uma determinada direção maior do que na direção oposta.

Vamos considerar o composto LiHoF_4 . Esse composto tem várias características que o torna útil no estudo da transição de fase magnética. Primeiramente, ele é um material isolante, e portanto os elétrons não tem liberdade para movimentarem-se ao longo da rede. Precisamos de um material com uma rede fixa de momentos magnéticos. Por razões específicas relacionadas à distribuição eletrônica das moléculas de LiHoF_4 , e da estrutura da rede cristalina, o resultado é uma arranjo tridimensional de sítios magnéticos, cada qual podendo assumir os valores $\pm\hbar/2$, correspondendo aos autoestados $|e\rangle$ e $|g\rangle$ da projeção do operador momento angular total (spin+orbital) numa direção fixa, que chamaremos de z .

Os spins são acoplados entre si via interação de dipolo magnético, ou seja, o campo magnético produzido por um dipolo acaba contribuindo para a orientação do dipolo vizinho. Escolhendo então que a orientação preferencial de quantização do material seja z e que um campo magnético seja aplicado na direção x , o Hamiltoniano que descreve esse sistema será dado por

$$H = H_z + gH_x. \quad (2.1)$$

A transição de fase que acontece nesse sistema está relacionada com o papel dos dois termos no Hamiltoniano. Por analogia, podemos associar H_z , H_x e g com os termos E , S e T na transição de fase térmica da água. Vamos primeiro considerar o caso $g \ll 1$, ou seja, nesse caso o termo H_z vai predominar e o estado fundamental nessas condições será dado por

$$|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_3 |\uparrow\rangle_4 |\uparrow\rangle_5 \dots \quad (2.2)$$

Como não existe nada que privilegie o estado $|\uparrow\rangle$ em relação ao estado $|\downarrow\rangle$, podemos também considerar o estado fundamental como

$$|\Downarrow\rangle = |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 |\downarrow\rangle_3 |\downarrow\rangle_4 |\downarrow\rangle_5 \dots \quad (2.3)$$

Existe um tipo de simetria entre os estados (2.2) e (2.3). Na prática não existe um cristal perfeito e as imperfeições acabam por dar preferência por um ou outro estado. Esse tipo de “escolha” acontece frequentemente em diferentes sistemas físicos e é chamado de quebra espontânea de simetria. Para o presente caso, vamos escolher o estado $|\uparrow\rangle$. Esse estado possui o maior valor possível para o momento magnético total $\langle M_z \rangle$, pois todos os momentos magnéticos de cada molécula de LiHoF_4 estão orientados no mesmo sentido $+z$.

Vamos analisar agora o regime oposto em que $g \gg 1$. Nesse caso, o termo H_x no Hamiltoniano vai entrar em ação. Esse termo é responsável pelo tunelamento entre os estados $|\downarrow\rangle$ e $|\uparrow\rangle$. Isso contribui para as flutuações quânticas. Em um caso limite $g \rightarrow \infty$ o estado fundamental de H será

$$|\Rightarrow\rangle = |\rightarrow\rangle_1 |\rightarrow\rangle_2 |\rightarrow\rangle_3 |\rightarrow\rangle_4 |\rightarrow\rangle_5 \dots, \quad (2.4)$$

onde

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle). \quad (2.5)$$

Nesse estado, (2.4), o momento magnético total $\langle M_z \rangle$ será igual a zero.

Como a natureza do estado fundamental em cada caso é qualitativamente distinta, deve haver uma transição de fase entre os dois casos limites para algum valor de g . Como vimos, quanto maior o valor de g mais importante é o efeito do termo H_x do Hamiltoniano. E esse termo induz tunelamento entre os estados $|\downarrow\rangle$ e $|\uparrow\rangle$ até que em um determinado ponto a transição ocorre. Uma vez que o valor médio do momento magnético M_z depende do valor do campo magnético aplicado na direção x , essa grandeza pode acusar a transição de fase quântica. Esse resultado pode ser visto na Fig.(2.3). A transição ocorre quando $g = g_c$. Podemos dizer que quando $g < g_c$, o

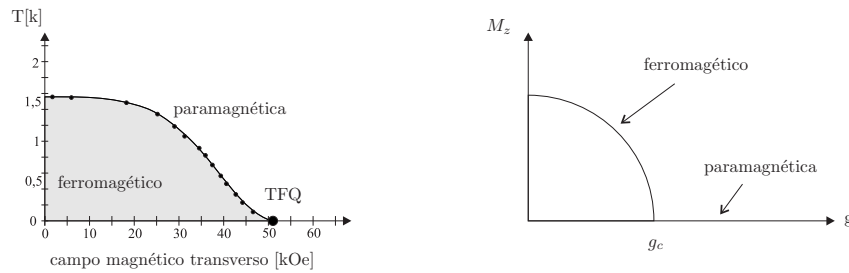


Figura 2.3: À esquerda, diagrama de fase magnético do LiHoF_4 (figura ilustrativa baseada no resultado experimental [18]). À direita, momento magnético médio $\langle M_z \rangle$ em função de g (intensidade do campo magnético). Em $g = g_c$ é possível observar a transição de fase quântica.

estado fundamental é dado por $|\uparrow\rangle$ e quando $g > g_c$ o estado fundamental é dado por $|\Rightarrow\rangle$.

2.2 Transição Isolante-Superfluido de Mott

Uma das principais características do condensado de Bose-Einstein [14] é que as partículas que constituem o condensado movem-se livremente através do sistema no mesmo estado quântico, o estado fundamental. Se de alguma maneira o movimento das partículas for limitado ou se as partículas forem aprisionadas, isso caracterizará um novo estado fundamental (com características diferentes), destruindo o condensado de Bose-Einstein. Recentemente essa idéia foi aplicada a um gás de Rb em um experimento reportado em [19]. Bloch e sua equipe foram capazes de limitar o movimento dos átomos de Rb construindo uma rede de barreira periódicas, como ilustrado na Fig.(2.4). Para criar essa rede de barreiras foram usadas três ondas estacionárias ortogonais entre si, de maneira que as ondas se cruzam em um ponto localizado no centro do condensado. Um conjunto de lentes e espelhos foram usados para criar um padrão de interferência da onda estacionária.

No referido trabalho [19] foi estudado como a intensidade do campo aplicado influencia o estado dos átomos. Para fazer isso, primeiro ele aprisionou os átomos, depois os soltou e mediu a velocidade dos átomos. Essa técnica já tinha sido utilizada por Eric Cornell, Carl Wiemann e colaboradores para estudar o condensado de Bose-Einstein no gás de Rb, mas sem a presença da rede de potencial [20]. Os resultados obtidos por Eric Cornell e Carl Wiemann estão na Fig.(2.5). Nessa figura, vemos a clara

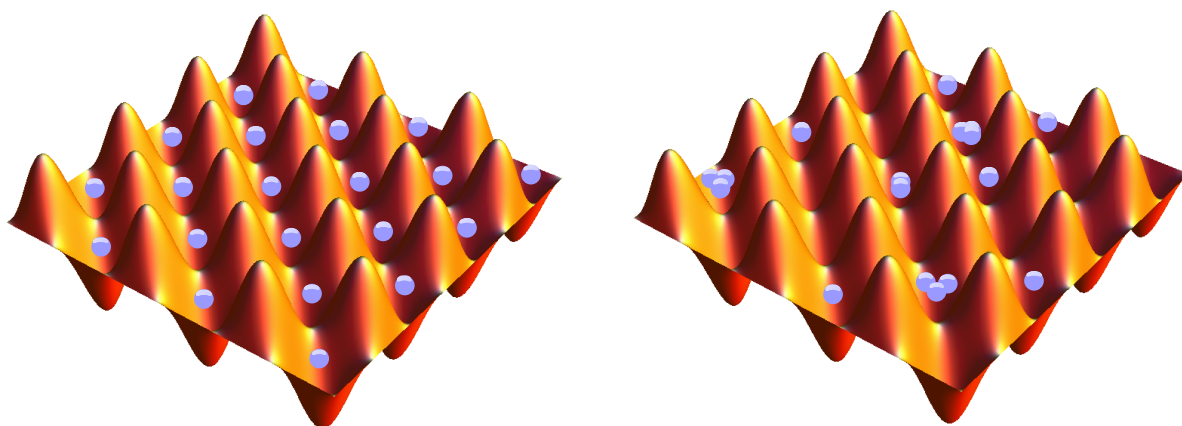


Figura 2.4: Átomos de Rb movendo-se em um potencial periódico criado por ondas estacionárias de um laser. À direita, temos a fase isolante (quando a rede de potencial é muito intensa) onde cada átomo acaba ocupando um mínimo. À esquerda, o estado superfluido (quando a rede de potencial tem intensidade mais fraca).

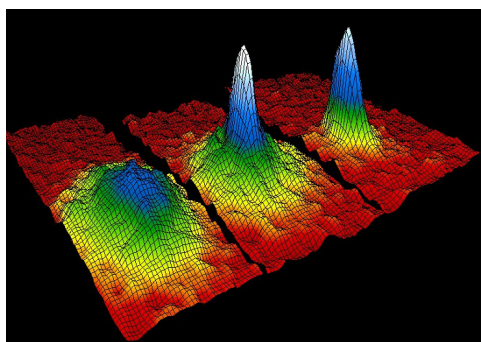


Figura 2.5: Distribuição de Velocidade dos átomos de Rb quando soltos. No gráfico a esquerda, a temperatura era de 400×10^{-9} K, no meio, 200^{-9} K e na direita 50×10^{-9} K. O pico agudo na figura a direita representa velocidades próximas do zero. Figura obtida em [21].

diferença entre uma situação normal e o momento da transição quando o gás entra no estado do condensado de Bose-Einstein.

A principal característica do resultado representado na Fig.(2.5) é a baixa velocidade das partículas quando liberadas da armadilha. Isso é representado pelo pico central na figura. O mesmo tipo de experimento foi realizado, mas na presença da uma rede de potencial periódico, como explicado anteriormente. O resultado obtido por Bloch pode ser visto na Fig.(2.6).

Uma das primeiras coisas que notamos, é que a Fig.(2.6 a-f) apresenta o mesmo pico central que está presente na Fig.(2.5). Isso significa que o condensado ainda está presente, porém ele se adaptou a nova situação, a rede de potencial. Quando a intensidade da rede de potencial é aumentada, teremos os casos Fig.(2.6 g-h). Esse resultado indica que todos os átomos de Rb quando soltos, estão em alta velocidade.

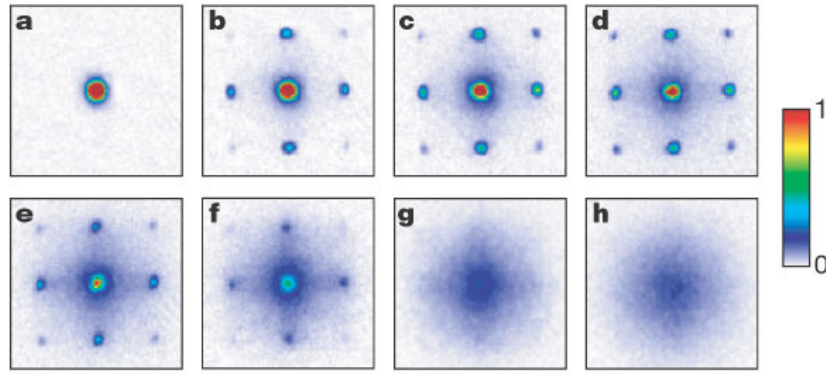


Figura 2.6: Padrões de interferência de ondas de matéria obtidos depois que os átomos foram liberados de uma rede de potencial com diferentes profundidades V_0 , onde (a) $0E_r$; (b) $3E_r$; (c) $7E_r$; (d) $10E_r$; (e) $13E_r$; (f) $14E_r$; (g) $16E_r$; (h) $25E_r$, onde E_r é uma constante. Figura obtida em [19].

Isso não está de acordo com o que esperamos que aconteça quando o sistema se encontra no condensado de Bose-Einstein. Podemos entender isso como uma consequência do princípio da incerteza de Heisenberg. Como o movimento dos átomos está agora mais restrito (fase isolante na Fig.(2.4)), esperamos uma grande incerteza na velocidade dos átomos.

Nesse modelo que estamos estudando, vamos assumir que cada átomo pode assumir apenas um estado em cada poço de potencial. Por exemplo, se um determinado átomo n ocupar um determinado poço j , dizemos que esse átomo está no estado $|j\rangle_n$. Como sabemos, quando estamos no condensado de Bose-Einstein, cada átomo estará no mesmo estado (isso caracteriza o condensado). E esse estado é uma superposição de todos os estados de cada poço:

$$|CBE\rangle = (|1\rangle_1 + |2\rangle_1 + |3\rangle_1 + \dots) \otimes (|1\rangle_2 + |2\rangle_2 + |3\rangle_2 + \dots) \otimes \dots \quad (2.6)$$

Quando fazemos todas as multiplicações em (2.6), vemos que esse estado é uma superposição de diferentes distribuições das partículas. Por exemplo, um dos termos será $|1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3 \dots$ no qual todas as partículas ocupam apenas um poço. Entretanto, também teremos estados como $|1\rangle_1|2\rangle_2|3\rangle_3 \dots$ em que cada partícula ocupa um poço diferente. Partindo dessa característica, podemos ter uma idéia da propriedade da superfluididez. Como não existe um número fixo de partículas em cada poço (o número de partículas flutua), as partículas são capazes de “atravessar” os poços sem nenhuma resistência.

Como foi dito anteriormente, quando a intensidade da rede de potencial é aumentada, chegará um momento em que ocorrerá uma transição de fase quântica. Nesse momento, o condensado de Bose-Einstein deixa de existir. Isso pode ser comprovado quando comparamos os casos Fig.(2.4a-f) com os casos na Fig.(2.4 g-h). No momento em que ocorre essa transição, as partículas deixam de estar no estado superfluido. Essa mudança de estado ocorre porque quanto maior a intensidade da rede de potencial, maior será a dificuldade dos átomos mudarem de posição. Quando a intensidade do potencial se torna grande o bastante, as partículas perdem a capacidade de “trocar” de posição. Porém, obviamente, ainda continuam sendo partículas indistinguíveis. O estado que representa essa situação é dado por

$$\begin{aligned}
 |I\rangle = & |1\rangle_1|2\rangle_2|3\rangle_3 \cdots + |1\rangle_1|2\rangle_3|3\rangle_2 \cdots + \\
 & |1\rangle_2|2\rangle_1|3\rangle_3 \cdots + |1\rangle_2|2\rangle_3|3\rangle_1 \cdots + \\
 & |1\rangle_3|2\rangle_1|3\rangle_2 \cdots + |1\rangle_3|2\rangle_2|3\rangle_1 \cdots + \cdots
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

O estado representado por $|I\rangle$ é uma superposição de estados em que não existe mais de uma partícula em cada poço. Como foi dito anteriormente, esse estado não permite o fluxo de partículas. Se os bósons fossem partículas carregadas e um campo elétrico fosse aplicado ao material, o material se comportaria como um isolante, impedindo o movimento dos bósons. A transição de fase que acabamos de descrever é conhecida como transição de fase isolante-superfluido.

2.3 Cupratos Supercondutores

Determinados compostos quando resfriados a certas temperaturas sofrem uma mudança brusca em sua condutividade. O fenômeno foi observado pela primeira vez em 1911 pelo físico experimental Kammerlingh Onnes, quando ele resfriou o hélio a uma temperatura de 4,2 K. A primeira explicação microscópica do fenômeno foi proposta por Bardeen, Cooper e Schrieffer (BCS) [22]. A explicação formulada por BCS utiliza novamente a idéia do condensado de Bose-Einstein. Os bósons que constituíam

o condensado eram dessa vez formados por pares de elétrons, chamados de pares de Cooper. A explicação do fenômeno da supercondutividade é então semelhante ao fenômeno da superfluidez descrito na seção anterior. Quando o material é resfriado a certa temperatura, os bósons (pares de Cooper) acabam por atingir o estado do condensado de Bose-Einstein. Nesse estado, a flutuação do número de partículas é muito grande. E essa flutuação faz com que os pares de Cooper não tenham resistência quando deslocam-se. E isso caracteriza o fenômeno da supercondutividade.

Para prosseguir com nossa discussão é necessário conhecer um pouco do composto La_2CuO_4 . A estrutura cristalina desse material é mostrada na Fig.(2.7).

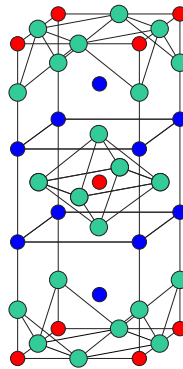


Figura 2.7: Estrutura cristalina do La_2CuO_4 . Os átomos de Cu estão em vermelho, os de O estão em azul e os de La estão em verde.

As propriedades eletrônicas desse material estão diretamente ligadas com as camadas de íons Cu [23]. Cada átomo de Cu tem um elétron livre. A repulsão Coulombiana faz com que os elétrons não se movimentem ao longo das camadas de átomos de Cu e por isso esse material é isolante.

É interessante notar como essa situação se assemelha àquelas discutidas anteriormente. Nesse caso, o potencial periódico (citado no caso da transição isolante-superfluido) é fornecido pela rede de íons de Cu positivamente carregados, e os elétrons são aprisionados em cada íon. Como no caso anterior, a transição de fase quântica irá acontecer quando, de alguma maneira, o efeito da repulsão coulombiana for superado, e isso pode ser alcançado através da substituição química.

No composto $\text{La}_{2-\delta}\text{Sr}_\delta\text{CuO}_4$ uma porcentagem dos átomos trivalentes de lantânio, La, são substituídos por átomos de estrôncio, Sr. Essa substituição acaba “rou-

bando" elétrons de alguns átomos de cobre. Dessa maneira o metal antes isolante La_2CuO_4 , torna-se um condutor. Quando a concentração de buracos é grande o suficiente, o material sofre uma transição e passa para o estado supercondutor. No caso do composto $\text{La}_{2-\delta}\text{Sr}_\delta\text{CuO}_4$ a transição de fase quântica acontece quando $\delta = 0,055$.

Modelo de Dicke

Neste capítulo trataremos de um dos tópicos mais importantes na óptica quântica, a interação entre um conjunto de átomos de dois níveis e o campo de radiação quantizado. O modelo onde é apenas considerado um único átomo e um único modo do campo foi resolvido, na aproximação *RWA*, por Jaynes e Cummings [2], e é conhecido como modelo de Jaynes-Cummings. Este sistema é fundamentalmente importante, uma vez que pode ser resolvido analiticamente e realizado experimentalmente [21]. O modelo onde é considerado um conjunto de átomos ao invés de apenas um único átomo na presença de um campo eletromagnético foi estudado por Dicke [3]. Para tratar o sistema, Dicke propôs uma série de hipóteses, as quais possibilitaram a resolução do modelo.

3.1 Interação entre a radiação e a matéria

O Hamiltoniano que descreve a interação de uma partícula de carga e e massa m na presença de um campo eletromagnético é conhecido como Hamiltoniano de

acoplamento mínimo [1],

$$H = \frac{1}{2m} [\vec{p} - e\vec{A}(\vec{r}, t)]^2 + eU(\vec{r}, t), \quad (3.1)$$

onde \vec{p} é o momento linear do elétron, $\vec{A}(\vec{r}, t)$ é o potencial vetor magnético e $U(\vec{r}, t)$ é o potencial escalar eletromagnético. Por meio do Hamiltoniano (3.1) podemos obter, por exemplo, a equação de movimento $m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E}(\vec{r}, t) + e\dot{\vec{r}} \wedge \vec{B}(\vec{r}, t)$, que é a força de Lorentz.

No caso de um elétron de um átomo, é preciso considerar mais um termo no Hamiltoniano (3.1), o potencial $V(\vec{r}, t)$ do núcleo atômico sobre o elétron.

Aproximação de dipolo

Como sabemos, devido às transformações de calibre, temos a liberdade de escolher $\vec{A}(\vec{r}, t)$ tal que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$. Além disso, como não existem cargas externas, o potencial escalar $U(\vec{r}, t)$ pode ser tomado como zero. Quando trabalhamos na região óptica (400-700 nm), o comprimento da onda da luz é muito maior do que a dimensão linear do átomo. Isso significa que $\vec{k} \cdot \vec{r} \ll 1$ sobre toda a extensão do átomo, e conseqüentemente, o potencial vetor passa, aproximadamente, a não depender mais da posição $\vec{A}(\vec{r}, t) \simeq \vec{A}(t)$. Essa aproximação é chamada de aproximação de dipolo. Sendo assim, podemos escrever o Hamiltoniano de acoplamento mínimo como

$$H = \frac{1}{2} [\vec{p} - e\vec{A}(\vec{r}_0, t)]^2 + V(\vec{r}). \quad (3.2)$$

Da equação de Schrödinger, podemos escrever

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \left\{ \frac{1}{2} [\vec{p} - e\vec{A}(\vec{r}_0, t)]^2 + V(\vec{r}) \right\} |\psi\rangle, \quad (3.3)$$

que quando projetado na representação $|r\rangle$, gera

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\vec{\nabla} - \frac{ie}{\hbar} \vec{A}(\vec{r}_0, t) \right]^2 + V(\vec{r}) \right\} \psi(\vec{r}, t). \quad (3.4)$$

Com o objetivo de simplificar o problema, vamos introduzir uma nova função de onda $\psi(\vec{r}, t)$ dada por

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{ie\vec{A}(\vec{r}_0, t) \cdot \vec{r} / \hbar} \phi(\vec{r}, t). \quad (3.5)$$

Substituindo (3.5) em (3.4) obtemos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) = \left[\frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) - e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}_0, t) \right] \phi(\vec{r}, t), \quad (3.6)$$

na qual podemos identificar o Hamiltoniano \hat{H} como

$$\hat{H} = \hat{H}_a + \hat{H}_{int}, \quad (3.7)$$

sendo que $\hat{H}_a = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})$ corresponde somente a energia do átomo, e $\hat{H}_{int} = -e\vec{r} \cdot \vec{E}(t)$ corresponde a energia da interação átomo-campo.

3.1.1 Energia do átomo

Quando apenas dois dos níveis atômicos $|e\rangle$ e $|g\rangle$, autoestados de H_a , estão em ressonância (ou aproximadamente em ressonância) com o campo, podemos descrever o átomo como um sistema de dois níveis

$$|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g| = \mathbb{1}. \quad (3.8)$$

É conveniente introduzir um novo vetor denominado $\vec{\sigma}$ cujas componentes são definidas como

$$\begin{aligned} \sigma_x &= |e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|, \\ \sigma_y &= i(|g\rangle\langle e| - |e\rangle\langle g|), \\ \sigma_z &= |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

As matrizes que representam as componentes do vetor $\vec{\sigma}$ na base $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ são chamadas de matrizes de Pauli. Também introduzimos os operadores σ_{eg} , σ_{ge} , σ_{ee} e σ_{gg} que são definidos pela relação

$$\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|. \quad (3.10)$$

A partir dessas definições, podemos escrever

$$H_A = \frac{\hbar}{2}\omega_0\sigma_z + \frac{1}{2}(E_e + E_g), \quad (3.11)$$

sendo $\omega_0 = (E_e - E_g)/\hbar$, a frequência de Bohr do átomo. Podemos omitir o termo constante da eq.(3.11), ficando com

$$H_A = \frac{\hbar}{2}\omega_0\sigma_z. \quad (3.12)$$

3.1.2 Energia da interação átomo-campo

O termo $H_{int} = -e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$ pode ser escrito como $H_{int} = -\vec{\phi} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$, sendo $\vec{\phi}$ chamado de operador momento de dipolo. Podemos representar H_{int} usando a base dos autoestados de H_a , $\{|i\rangle\}$. Ficamos com

$$\begin{aligned} -\vec{\phi} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\sum_{ij} |i\rangle\langle i| \vec{\phi} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) |j\rangle\langle j|, \\ -\vec{\phi} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\sum_{ij} \vec{\phi}_{ij} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \sigma_{ij}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

sendo $\vec{\phi}_{ij}$ o elemento de matriz de dipolo elétrico. Vamos agora substituir $\vec{E}(\vec{r}, t)$, que até agora esta sendo tratado classicamente, por sua versão quantizada¹ que, considerando o campo polarizado em uma das componentes s , e escolhendo a fase convenientemente,

¹Ver Apêndice A

pode ser escrito como

$$\hat{E}(t) = \sum_{\vec{k}} \mathcal{E}_{\vec{k}} \vec{u}_{\vec{k}} (a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}}^{\dagger}), \quad (3.14)$$

sendo $\mathcal{E}_{\vec{k}} = \sqrt{\hbar \omega_{\vec{k}} / (2\epsilon_0 L^3)}$. Substituindo (3.14) em (3.13), obtemos

$$\hat{H}_{int} = \sum_{\vec{k}} \sum_{i,j} -\sigma_{ij} \mathcal{E}_{\vec{k}} \vec{\phi}_{ij} \cdot \vec{u}_{\vec{k}} (a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}}^{\dagger}), \quad (3.15)$$

com o qual podemos reescrever (3.15) como

$$\hat{H}_{int} = \hbar \sum_{\vec{k}} \sum_{i,j} g_{\vec{k}}^{ij} \sigma_{ij} (a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}}^{\dagger}), \quad (3.16)$$

sendo $g_{\vec{k}}^{ij} = -\frac{\vec{\phi}_{ij} \vec{u}_{\vec{k}} \mathcal{E}_{\vec{k}}}{\hbar}$.

3.1.3 Hamiltoniano de Jaynes-Cummings

Nosso próximo passo é escrever o Hamiltoniano total da interação átomo-campo. Para isso somamos os Hamiltonianos que descrevem o campo eletromagnético (A.37), o átomo de dois níveis (3.11) e a interação átomo campo (3.16). Ficamos com

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_A + \hat{H}_C + \hat{H}_{int} \\ \hat{H} &= \frac{\hbar}{2} \omega_0 \sigma_z + \hbar \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} + \hbar \sum_{\vec{k}} \sum_{i,j} g_{\vec{k}}^{ij} \sigma_{ij} (a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}}^{\dagger}). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Na expressão (3.17) o termo de energia de ponto zero do campo foi omitido. Como estamos considerando que o átomo possui dois níveis $\{|e\rangle, |g\rangle\}$, e estes possuem paridade bem definida, os termos $\vec{\phi}_{ee}$ e $\vec{\phi}_{gg}$ são nulos. Levando este fato em consideração, o Hamiltoniano passa ser escrito como

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \omega_0 \sigma_z + \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} + \hbar \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}} (\sigma_{eg} + \sigma_{ge}) (a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}}^{\dagger}), \quad (3.18)$$

que, na hipótese de um campo monomodo, se reduz a

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2}\omega_0\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar g(\sigma_{eg} + \sigma_{ge})(a + a^\dagger). \quad (3.19)$$

Como $\sigma_{ge}|e\rangle = |g\rangle$ e $\sigma_{eg}|g\rangle = |e\rangle$, é comum denotar $\sigma_{eg} = \sigma_+$ e $\sigma_{ge} = \sigma_-$. Nessa notação, podemos escrever

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2}\omega_0\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar g(\sigma_+ + \sigma_-)(a + a^\dagger). \quad (3.20)$$

Em certas condições o Hamiltoniano acima, que não admite solução analítica exata, pode ser aproximado como

$$\hat{H}_{JC} = \frac{\hbar}{2}\omega_0\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger), \quad (3.21)$$

que é conhecido como Hamiltoniano de Jaynes-Cummings. As condições necessárias para a validade dessa aproximação são discutidas na seção (3.2.2).

3.2 Hamiltoniano de Dicke

Em mecânica quântica, é comum escrever o operador de spin \vec{S} em função do operador $\vec{\sigma}$

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}. \quad (3.22)$$

De maneira análoga ao que foi definido para o vetor $\vec{\sigma}$, podemos definir as seguintes relações

$$\begin{aligned} s_\pm &= \hbar\sigma_\pm, \\ s_i &= \frac{\hbar}{2}\sigma_i, \quad (i = x, y, z). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Podemos escrever o Hamiltoniano (3.20) como

$$\hat{H} = \omega_0 s_z + \hbar \omega a^\dagger a + g(s_+ + s_-)(a + a^\dagger). \quad (3.24)$$

Em 1953, o físico americano Robert H. Dicke [3] estendeu o Hamiltoniano (3.24) por considerar a presença de N átomos interagindo com o campo. É comum na física considerar o sistema da maneira mais simples possível, e foi isso que Dicke fez. Primeiramente, ele supôs que os átomos estavam localizados em um volume com dimensões muito pequenas comparadas com o comprimento de onda do campo aplicado. É de se imaginar que os átomos irão colidir entre si. Dicke supôs que essas colisões não afetavam o estado dos átomos e que as funções de onda dos átomos não se superpõem suficientemente, sendo que dessa maneira, os átomos são distinguíveis e não precisamos nos preocupar com simetrização das funções de onda. Sob essas considerações, podemos escrever o Hamiltoniano (3.20) para N átomos como

$$\hat{H} = \omega_0 \sum_{i=1}^N s_z + a^\dagger a \hbar \omega + g \sum_{i=1}^N (s_+^i + s_-^i)(a + a^\dagger), \quad (3.25)$$

sendo g dado pela expressão

$$g = -\frac{\vec{\phi}_{eg} \cdot \vec{u}}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 L^3}}. \quad (3.26)$$

Vamos agora introduzir uma nova variável, a densidade de átomos $\rho = N/L^3$ com a qual podemos reescrever g em função da densidade de átomos. Ficamos com

$$g = -\frac{\vec{\phi}_{eg} \cdot \vec{u}}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar \omega \rho}{2\epsilon_0 N}}. \quad (3.27)$$

Introduzimos também, o parâmetro $\lambda = -\vec{\phi}_{eg} \cdot \vec{u} \sqrt{\frac{\omega \rho}{2\epsilon_0 \hbar}}$, e reescrevendo g em função desse parâmetro, ficamos com $g = \lambda / \sqrt{N}$. Substituindo esse resultado no Hamiltoniano

(3.25), ficamos com

$$\hat{H} = \omega_0 \sum_{i=1}^N s_z + \hbar\omega a^\dagger a + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N (s_+^i + s_-^i)(a + a^\dagger), \quad (3.28)$$

Vamos agora introduzir operadores coletivos de momento angular, dados por

$$J_z = \sum_{j=1}^N s_z^{(j)}, \quad J_\pm = \sum_{i=1}^N s_\pm^{(i)}, \quad (3.29)$$

Esses operadores obedecem às mesmas relações de comutação usuais de momento angular

$$\begin{aligned} [J_z, J_+] &= \hbar J_+, \\ [J_+, J_-] &= 2\hbar J_z, \\ [J^2, J_z] &= 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Reescrevendo o Hamiltoniano (3.25) em função dos operadores coletivos de momento angular, temos

$$\hat{H}_D = \omega_0 J_z + a^\dagger a \hbar\omega + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} (J_+ + J_-)(a + a^\dagger), \quad (3.31)$$

o qual é conhecido como Hamiltoniano de Dicke.

Se N_1 dos N átomos estão no estado $|e\rangle$ e N_2 estão no estado $|g\rangle$, temos que

$$N = N_1 + N_2, \quad (3.32)$$

$$m = \frac{1}{2}(N_1 - N_2), \quad (3.33)$$

onde m é uma medida da inversão atômica total. Se considerarmos, por exemplo, o estado $|\phi\rangle$

$$|\phi\rangle = |e\rangle_1 |g\rangle_2 |g\rangle_3 \cdots |e\rangle_N, \quad (3.34)$$

da própria definição de J_z vemos que o estado $|\phi\rangle$ é um autoestado do operador J_z , com autovalor $m\hbar$. Assim

$$J_z|\phi\rangle = m\hbar|\phi\rangle, \quad -N/2 \leq m \leq N/2, \quad (3.35)$$

Quando consideramos a energia do conjunto de átomos em $H_a = \omega_0 J_z$, temos que

$$H_a|\phi\rangle = \omega_0\hbar m|\phi\rangle, \quad (3.36)$$

$$H_a|\phi\rangle = \omega_0\hbar \frac{1}{2}(N_1 - N_2)|\phi\rangle, \quad (3.37)$$

o autovalor independe da maneira como as excitações estão distribuídas ao longo dos N átomos. Dessa forma, o autovalor m tem degenerescência

$$d_m = \frac{N!}{N_1!N_2!}. \quad (3.38)$$

Vemos que quando $m = 0$, a degenerescência é a maior possível, e quando $m = \pm \frac{1}{2}N$ a degenerescência é igual a zero, neste caso, todos os átomos estão no estado fundamental ou no estado excitado.

Devido à relação de comutação (3.30), existem estados que são simultaneamente auto estados de J_z e J^2 . Estes estados contribuem para diminuir a degenerescência. Podemos denotar os autovalores de J^2 como $j(j+1)\hbar^2$ e definir os autoestados correspondentes como $|j, m\rangle$. Ficamos com

$$J_z|j, m\rangle = m\hbar|j, m\rangle, \quad (3.39)$$

$$J^2|j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j, m\rangle, \quad (3.40)$$

sendo $|m| \leq j \leq \frac{N}{2}$. Das propriedades do momento angular, temos que

$$J_{\pm}|j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|j, m \pm 1\rangle. \quad (3.41)$$

Os estados $\{|j, m\rangle; m = -j, -j+1, \dots, j-1, j\}$ são conhecidos como estados de Dicke. Ao

longo dessa dissertação, nós sempre tomaremos j para ter seu valor máximo $j = N/2$. Como o Hamiltoniano de Dicke (3.31) não altera o valor de j , o conjunto de N átomos de dois níveis passa a ser descrito como um único sistema de $2j + 1$ níveis.

O espaço de Hilbert do sistema total pode ser expresso em termos da base $\{|j, m\rangle \otimes |n\rangle\}$, onde n são os estados de número do campo, e $\{|j, m\rangle\}$ são os estados de Dicke. É comum omitir j nesta representação, e dessa forma, ficamos com $\{|m, n\rangle\}$.

3.2.1 Efeito da super radiância no modelo de Dicke

Dicke introduziu o conceito de radiação espontânea cooperativa, ou super radiância [3]. Dicke mostrou que a taxa em que um átomo excitado irradia é influenciada pela presença dos outros átomos. Como exemplo, vamos considerar um conjunto de N átomos e vamos supor que o sistema esteja inicialmente no estado $|m, 0\rangle$. A amplitude de probabilidade de transição para um estado final $|\psi\rangle$ é dada pelo elemento de matriz

$$\langle\psi|\frac{\lambda}{\sqrt{N}}(J_+ + J_-)(a + a^\dagger)|m, 0\rangle. \quad (3.42)$$

Quando elevamos o módulo da amplitude de probabilidade ao quadrado e somamos sobre todos os possíveis estados finais, obtemos uma expressão para a taxa de emissão dos fótons

$$\begin{aligned} \text{taxa de emissão} &\propto \sum_{\psi} \left| \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \langle\psi|m+1, 1\rangle \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \langle\psi|m-1, 1\rangle \right|^2, \\ \text{taxa de emissão} &\propto \sum_{\psi} \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \langle\psi|m+1, 1\rangle \langle\psi|m-1, 1\rangle^* \\ &\quad + \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \langle\psi|m-1, 1\rangle \langle\psi|m+1, 1\rangle^* \\ &\quad + (j-m)(j+m+1) |\langle\psi|m+1, 1\rangle|^2 \\ &\quad + (j+m)(j-m+1) |\langle\psi|m-1, 1\rangle|^2. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Quando todos os N átomos estão no estado $|g\rangle$, temos que $m = -\frac{1}{2}N$ e $j = \frac{1}{2}N$, e assim, a taxa de emissão será proporcional a N . Quando todos os átomos estão no estado $|e\rangle$, então $m = \frac{1}{2}N$ e $j = \frac{1}{2}N$, a taxa de emissão novamente será proporcional a N . Vamos agora considerar a situação onde metade dos átomos é descrita pelo estado $|e\rangle$ e a outra metade pelo estado $|g\rangle$, ou seja, $m = 0$. Nesse caso, temos que

$$\begin{aligned} \text{taxa de emissão} \propto & j(j+1) |\langle \psi | 1, 1 \rangle|^2 + j(j+1) |\langle \psi | -1, 1 \rangle|^2 \\ & + j(j+1) \langle \psi | 1, 1 \rangle \langle \psi | -1, 1 \rangle^* \\ & + j(j+1) \langle \psi | -1, 1 \rangle \langle \psi | 1, 1 \rangle^*, \end{aligned} \quad (3.44)$$

como sabemos, j pode variar da seguinte forma: $0 \leq j \leq N/2$, e quanto maior é o valor de j , maior é a taxa de radiação coletiva, por isso Dicke chamou j de número de cooperação [24]. Quando trabalhamos com o caso $j = N/2$, temos

$$\begin{aligned} \text{taxa de emissão} \propto & \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1 \right) |\langle \psi | 1, 1 \rangle|^2 + \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1 \right) |\langle \psi | -1, 1 \rangle|^2 \\ & + \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1 \right) \langle \psi | 1, 1 \rangle \langle \psi | -1, 1 \rangle^* \\ & + \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1 \right) \langle \psi | -1, 1 \rangle \langle \psi | 1, 1 \rangle^*, \end{aligned} \quad (3.45)$$

ou seja, para uma grande quantidade de átomos, $N \rightarrow \infty$, a taxa de radiação será proporcional a N^2 . Dessa forma, a taxa de radiação de um sistema atômico parcialmente excitado, $m = 0$, é maior do que a de um sistema atômico totalmente excitado. Essa característica dos processos de radiação foi chamada por Dicke de super radiação.

3.2.2 Aproximação de Onda Girante

Podemos escrever o Hamiltoniano de Dicke em termos de g como

$$\hat{H}_D = \underbrace{\omega_0 J_z + a^\dagger a \hbar \omega}_{H_0} + \underbrace{g(J_+ a + J_- a^\dagger) + g(J_+ a^\dagger + J_- a)}_{H_{int}}, \quad (3.46)$$

onde H_0 é a parte livre não perturbada, e H_{int} é o termo responsável pela interação. Podemos reescrever (3.46) utilizando a representação de interação. Ficamos com

$$\begin{aligned}\hat{H}_I &= e^{iH_0t/\hbar}\hat{H}_{int}e^{-iH_0t/\hbar}, \\ \hat{H}_I &= g(e^{iH_0t/\hbar}J_+ae^{-iH_0t/\hbar} + e^{iH_0t/\hbar}J_-a^\dagger e^{-iH_0t/\hbar}) \\ &\quad + g(e^{iH_0t/\hbar}J_+a^\dagger e^{iH_0t/\hbar} + e^{iH_0t/\hbar}J_-ae^{iH_0t/\hbar}).\end{aligned}\quad (3.47)$$

Para quaisquer operadores \hat{A} e \hat{B} , temos a relação [25]

$$e^{-\alpha A}Be^{\alpha A} = B - \alpha[A, B] + \frac{\alpha^2}{2!}[A, [A, B]] + \dots, \quad (3.48)$$

sendo α um número complexo. Utilizando a relação (3.48) podemos reescrever (3.47) como

$$\hat{H}_I = g \underbrace{(J_+ae^{i(\omega_0-\omega)t} + J_-a^\dagger e^{-i(\omega_0-\omega)t})}_{\text{termo girante}} + g \underbrace{(J_+a^\dagger e^{i(\omega_0+\omega)t} + J_-ae^{-i(\omega_0+\omega)t})}_{\text{termo contra girante}}, \quad (3.49)$$

agora que temos \hat{H}_I podemos calcular o operador de evolução temporal

$$U(t) = \mathbb{1} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \hat{H}_I(t') + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_0^t dt' \hat{H}_I(t') \int_0^{t'} dt'' \hat{H}_I(t'') + \dots \quad (3.50)$$

Quando resolvemos as integrais obtemos

$$\begin{aligned}U(t) &= \mathbb{1} + F_1 \left[\frac{g}{\omega - \omega_0} \right] + G_1 \left[\frac{g}{\omega + \omega_0} \right] + F_2 \left[\frac{g}{\omega - \omega_0} \right]^2 \\ &\quad + G_2 \left[\frac{g}{\omega + \omega_0} \right]^2 + F_1 G_1 \left[\frac{g^2}{(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)} \right]^2 + \dots,\end{aligned}\quad (3.51)$$

em que podemos notar que, sob a consideração de campo fraco $g \ll \omega, \omega_0$ e ressonância $(\omega - \omega_0) \simeq 0$, os termos com F_i se tornam mais importantes que os demais termos, ou seja, podemos desprezar os demais termos. Isso obviamente é uma aproximação, e é conhecida como *aproximação de onda girante* (RWA)² [26]. Escrevendo (3.49) na RWA e

²“Rotating wave approximation”

na representação de Schrödinger, obtemos

$$\hat{H}_D^{RWA} = \omega_0 J_z + a^\dagger a \hbar \omega + g(J_+ a + J_- a^\dagger). \quad (3.52)$$

Uma das principais vantagens de trabalhar com o Hamiltoniano de Dicke (ou mesmo o Hamiltoniano de Jaynes-Cummings) na *RWA* é o fato de ser solúvel analiticamente, porém é preciso estar atento às condições onde a *RWA* pode ser considerada, isto é $g \ll \omega, \omega_0$ e $(\omega - \omega_0) \simeq 0$.

3.2.3 Transição de fase no modelo de Dicke

Como dito anteriormente, o modelo de Dicke tomado na *RWA*, é solúvel analiticamente. Escrevendo o Hamiltoniano de Dicke (na *RWA*) na base de Dicke, temos

$$\hat{H}_D^{RWA} = \hbar \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-J}^J \left[(m\omega_0 + n\omega) |n, m\rangle \langle n, m| + g \sqrt{n+1} \sqrt{J(J+1) - m(m-1)} (|n, m\rangle \langle n+1, m-1| + |n+1, m-1\rangle \langle n, m|) \right]. \quad (3.53)$$

Como ilustração, vamos considerar o caso com $J = 1/2$ (um átomo). Primeiramente, vamos representar \hat{H}_D^{RWA} através de uma matriz. Ordenando a base como $\{|0, -1/2\rangle, |0, 1/2\rangle, |1, -1/2\rangle, \dots\}$, ficamos com

$$\hat{H}_D^{RWA} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\omega_0\hbar & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2}\omega_0\hbar & \hbar & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & g\hbar & \frac{1}{2}\omega_0\hbar & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (\frac{1}{2}\omega_0 + n\omega)\hbar & \hbar g \sqrt{n+1} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \hbar g \sqrt{n+1} & (\frac{1}{2}\omega_0 + (n+1)\omega)\hbar & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Como podemos observar, a matriz (3.54) é bloco diagonal. Quando consideramos casos com J maior, a dificuldade aumenta, entretanto, a matriz continua sendo bloco diagonal

e portanto tem solução.

Como dito anteriormente, o modelo de Dicke sem RWA não é solúvel analiticamente, isto é, quando representamos \hat{H}_D através de uma matriz, essa não será bloco diagonal. Uma maneira de aproximadamente diagonalizar o Hamiltoniano de Dicke é truncando a base e trabalhando com a matriz como um todo.

Na Fig.(3.1) apresentamos o espectro de energias do modelo de Dicke (direita) e do modelo de Dicke na RWA (esquerda) para $J = 5$. Vimos anteriormente que a RWA é válida somente em um determinado regime e o gráfico apresentado na Fig.(3.1) não respeita esse regime. Mesmo com essa restrição apresentamos esse resultado para compararmos com o resultado sem considerar a RWA. No caso onde consideramos o

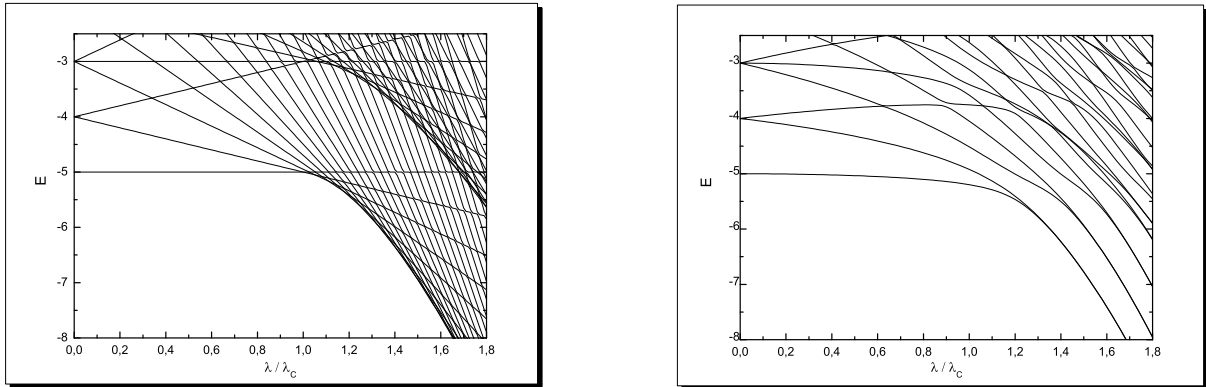


Figura 3.1: Espectro de energia do Hamiltoniano de Dicke considerando a RWA (esquerda) e sem considerar a RWA (direita). Em ambos os casos $J = 5$ e $\omega_0 = \omega = 1$.

modelo de Dicke na RWA, observamos que quando λ alcança um determinado valor λ_c , o estado fundamental acaba cruzando com o primeiro estado excitado. Isso caracteriza uma transição de fase quântica de primeira ordem. Aumentando ainda mais o valor de λ novos cruzamentos ocorrem. No modelo de Dicke (sem a RWA), percebemos que com o aumento de λ o primeiro estado excitado parece se aproximar cada vez mais do estado fundamental. Entretanto, não existe um cruzamento entre os níveis. Esse comportamento nos induz a acreditar que existe uma TFQ de segunda ordem nesse modelo. Para podermos confirmar isso, é preciso analisar o modelo no limite termodinâmico.

3.2.4 Modelo de Dicke no Limite Termodinâmico

Vamos agora considerar o modelo de Dicke no limite termodinâmico, onde o número de átomos tende a infinito. Nesse caso, o modelo de Dicke apresenta uma transição de fase quântica quando variamos o valor do parâmetro de acoplamento átomo-campo λ através do valor crítico λ_c . Para descrever a transição de fase, nos vamos obter dois Hamiltonianos, um para cada fase. Os resultados apresentados nessa sessão foram obtidos originalmente em [27].

Começamos por introduzir a representação de Holstein-Primakoff (HP) para os operadores de momento angular. Essa representação faz com que os operadores de momento angular sejam apresentados em termos de operadores de modos bosônicos. Na representação HP, teremos

$$\begin{aligned} J_+ &= \hbar b^\dagger \sqrt{2j - b^\dagger b}, \\ J_- &= \hbar \sqrt{2j - b^\dagger b} b, \\ J_z &= \hbar(b^\dagger b - j), \end{aligned} \quad (3.55)$$

Na representação HP, dado um valor para J , o estado de momento angular com $m = -J$ será associado com o estado $|n_b = 0\rangle$ que é estado dos operadores bosônicos $\{b, b^\dagger\}$. O estado com $m = -J + 1$ será associado ao estado $|n_b = 1\rangle$, e assim sucessivamente. Consideremos, por exemplo, o caso com $J = 3/2$. Teremos a seguinte correspondência

$$\begin{aligned} |m = -3/2\rangle &\xrightarrow{HP} |n_b = 0\rangle, \\ |m = -1/2\rangle &\xrightarrow{HP} |n_b = 1\rangle, \\ |m = 1/2\rangle &\xrightarrow{HP} |n_b = 2\rangle, \\ |m = 3/2\rangle &\xrightarrow{HP} |n_b = 3\rangle. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Para os operadores, citamos os seguintes exemplos

$$\begin{aligned} J_+|-3/2\rangle &= \sqrt{3}\hbar|-1/2\rangle \xrightarrow{HP} b^\dagger \sqrt{2j - b^\dagger b}\hbar|0\rangle = \sqrt{3}\hbar|1\rangle, \\ J_-|3/2\rangle &= \sqrt{3}\hbar|1/2\rangle \xrightarrow{HP} \sqrt{2j - b^\dagger b}b\hbar|3\rangle = \sqrt{3}\hbar|2\rangle, \\ J_z|1/2\rangle &= \frac{1}{2}\hbar|1/2\rangle \xrightarrow{HP} (b^\dagger b - j)\hbar|2\rangle = \frac{1}{2}\hbar|2\rangle. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Na representação HP, podemos substituir as Eq.(3.55) em (3.31) obtendo o Hamiltoniano de dois modos

$$\hat{H}_D = \omega_0 \hbar (b^\dagger b - j) + \omega \hbar a^\dagger a + \lambda \hbar (a^\dagger + a) \left(b^\dagger \sqrt{1 - \frac{b^\dagger b}{2j}} + \sqrt{1 - \frac{b^\dagger b}{2j}} b \right). \quad (3.58)$$

Fase Normal

Vamos agora tomar o limite termodinâmico, $N \rightarrow \infty$, do Hamiltoniano (3.58). Isso se resume a desprezar termos com j no denominador. Além disso, vamos considerar $\hbar = 1$. Ficamos com

$$\hat{H}_D = \omega_0 b^\dagger b + \omega a^\dagger a + \lambda (a^\dagger + a)(b^\dagger + b) - j\omega_0. \quad (3.59)$$

Podemos diagonalizar o Hamiltoniano (3.59) por meio das transformações de Bogoliubov³, e o resultado, escrito em termos dos operadores de criação e aniquilação dos modos normais c_1^\dagger, c_1 e c_2^\dagger, c_2 é

$$\hat{H}_{D-N} = \varepsilon_-^{(1)} c_1^\dagger c_1 + \varepsilon_+^{(1)} c_2^\dagger c_2 + \frac{1}{2} (\varepsilon_-^{(1)} + \varepsilon_+^{(1)} - \omega - \omega_0) - j\omega_0. \quad (3.60)$$

As energias dos dois osciladores independentes são dadas por

$$\varepsilon_\pm^{(1)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\omega^2 + \omega_0^2 \pm \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 16\lambda^2 \omega \omega_0} \right)}. \quad (3.61)$$

Como podemos observar, para um determinado valor de λ , a energia de excitação do oscilador $c_1, (\varepsilon_-^{(1)})$, deixa de ser real. Isso acontece quando

$$\omega^2 + \omega_0^2 < -\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 16\lambda^2 \omega \omega_0},$$

que pode ser escrito como

$$\lambda > \frac{\sqrt{\omega \omega_0}}{2}. \quad (3.62)$$

³ver Apêndice B e [27]

No ponto $\lambda_c = \frac{\sqrt{\omega\omega_0}}{2}$, o Hamiltoniano (3.31) que descreve o sistema em questão, deixa de ser hermitiano e, conseqüentemente, deixa de ser fisicamente aceitável. Isso sinaliza a existência da transição de fase quântica.

Fase Super-radiante

O primeiro passo na descrição do Hamiltoniano que descreve a nova fase (fase super radiante) é definir os seguintes operadores unitários

$$U(1) = e^{\sqrt{\alpha}(a-a^\dagger)}, \quad U(2) = e^{-\sqrt{\beta}(b-b^\dagger)}, \quad (3.63)$$

$$W(1) = e^{-\sqrt{\alpha}(a-a^\dagger)}, \quad W(2) = e^{\sqrt{\beta}(b-b^\dagger)}, \quad (3.64)$$

onde α e β são parâmetros reais, além disso os operadores $U(1)$ e $W(1)$ atuam no subespaço do oscilador a, a^\dagger e $U(2)$ e $W(2)$ atuam no subespaço do oscilador b, b^\dagger . Em princípio, vamos trabalhar apenas com os operadores $U(1)$ e $U(2)$. Podemos realizar as seguintes transformações

$$U(1)aU(1)^\dagger = a + \sqrt{\alpha}, \quad (3.65)$$

$$U(2)bU(2)^\dagger = b - \sqrt{\beta}. \quad (3.66)$$

Vamos assumir que os parâmetros α e β são da ordem de j , pois isso nos leva ao correto limite termodinâmico. Sendo o operador U definido como $U = U(1) \otimes U(2)$, podemos realizar a seguinte transformação unitária no Hamiltoniano (3.58)

$$\begin{aligned} U\hat{H}_D U^\dagger = & \omega_0\{b^\dagger b - \sqrt{\beta}(b^\dagger + b) + \beta - j\} + \omega\{a^\dagger a + \sqrt{\alpha}(a^\dagger + a) + \alpha\} \\ & + \lambda(a^\dagger + a + 2\sqrt{\alpha}) \left[(b^\dagger + \sqrt{\beta}) \sqrt{1 - \frac{(b^\dagger - \sqrt{\beta})(b - \sqrt{\beta})}{2j}} \right] \\ & + \lambda(a^\dagger + a + 2\sqrt{\alpha}) \left[\sqrt{1 - \frac{(b^\dagger - \sqrt{\beta})(b - \sqrt{\beta})}{2j}} (b - \sqrt{\beta}) \right]. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Podemos escrever

$$\sqrt{1 - \frac{(b^\dagger - \sqrt{\beta})(b - \sqrt{\beta})}{2j}} = \sqrt{\frac{k}{2j}} \sqrt{\xi}, \quad (3.68)$$

definindo k e ξ como

$$k = 2j - \beta, \quad (3.69)$$

$$\sqrt{\xi} = \sqrt{1 - \frac{b^\dagger b - \sqrt{\beta}(b^\dagger + b)}{k}}. \quad (3.70)$$

Desse modo (3.67) passa a ser escrito como

$$\begin{aligned} U\hat{H}_D U^\dagger = & \omega_0 \{b^\dagger b - \sqrt{\beta}(b^\dagger + b) + \beta - j\} + \omega \{a^\dagger a + \sqrt{\alpha}(a^\dagger + a) + \alpha\} \\ & + \lambda \sqrt{\frac{k}{2j}} (a^\dagger + a + 2\sqrt{\alpha})(b^\dagger \sqrt{\xi} + \sqrt{\xi}b - 2\sqrt{\beta}\sqrt{\xi}). \end{aligned} \quad (3.71)$$

O próximo passo é expandir $\sqrt{\xi}$ em uma série de potências. Temos

$$\sqrt{\xi} = 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{b^\dagger b - \sqrt{\beta}(b^\dagger + b)}{k} \right] - \frac{1}{8} \left[\frac{b^\dagger b - \sqrt{\beta}(b^\dagger + b)}{k} \right]^2 + \dots \quad (3.72)$$

Vamos substituir (3.72) em (3.71) e desprezar termos com $O(j^n)$ onde $n < 0$, pois tais termos vão a zero no limite termodinâmico ($j \rightarrow \infty$). Ficamos com

$$\begin{aligned} U\hat{H}_D U^\dagger = & \omega a^\dagger a + \left\{ \omega_0 + \frac{2\lambda}{k} \sqrt{\frac{\alpha\beta k}{2j}} \right\} b^\dagger b - \left\{ 2\lambda \sqrt{\frac{\beta k}{2j}} - \omega \sqrt{\alpha} \right\} (a^\dagger + a) \\ & + \left\{ \frac{4\lambda}{k} \sqrt{\frac{\alpha k}{2j}} (j - \beta) - \omega_0 \sqrt{\beta} \right\} (b^\dagger + b) + \frac{\lambda}{2k^2} \sqrt{\frac{\alpha\beta k}{2j}} (2k + \beta)(b^\dagger + b)^2 \\ & + \frac{2\lambda}{k} \sqrt{\frac{k}{2j}} (j - \beta)(a^\dagger + a)(b^\dagger + b) \\ & + \left\{ \omega_0(\beta - j) + \omega\alpha - \frac{\lambda}{k} \sqrt{\frac{\alpha\beta k}{2j}} (1 + 4k) \right\}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

O próximo passo é escolher os parâmetros α e β tal que os termos lineares sejam eliminados. Para essa condição ser satisfeita, temos que exigir

$$\left\{ 2\lambda \sqrt{\frac{\beta k}{2j}} - \omega \sqrt{\alpha} \right\} = 0, \quad (3.74)$$

e

$$\left\{ \frac{4\lambda}{k} \sqrt{\frac{\alpha k}{2j}}(j - \beta) - \omega_0 \sqrt{\beta} \right\} = 0. \quad (3.75)$$

Resolvendo as equações (3.74) e (3.75) para α e β , encontramos

$$\sqrt{\alpha} = \frac{2\lambda}{\omega} \sqrt{\frac{j}{2}(1 - \mu^2)}, \quad (3.76)$$

$$\sqrt{\beta} = \sqrt{j(1 - \mu)}, \quad (3.77)$$

sendo μ definido como

$$\mu \equiv \frac{\omega\omega_0}{4\lambda^2} = \frac{\lambda_c^2}{\lambda^2}. \quad (3.78)$$

Substituindo os valores para α e β na eq.(3.73), obtemos

$$\begin{aligned} U\hat{H}_D U^\dagger = & \omega a^\dagger a + \frac{\omega_0}{2\mu}(1 + \mu)b^\dagger b + \frac{\omega_0(1 - \mu)(3 + \mu)}{8\mu(1 + \mu)}(b^\dagger + b)^2 \\ & + \lambda\mu \sqrt{\frac{2}{1 + \mu}}(a^\dagger + a)(b^\dagger + b) - j \left\{ \frac{2\lambda^2}{\omega} + \frac{\omega_0^2 \omega}{8\lambda^2} \right\} \\ & - \frac{\lambda^2}{\omega}(1 - \mu). \end{aligned} \quad (3.79)$$

Novamente temos um Hamiltoniano bilinear, que pode ser diagonalizado através de transformações de Bogoliubov. Aplicando as transformações apresentadas no

Apêndice B , ficamos com

$$\begin{aligned} \hat{H}_{SR} = & \varepsilon_-^{(2)} e_1^\dagger e_1 + \varepsilon_+^{(2)} e_2^\dagger e_2 - j \left\{ \frac{2\lambda^2}{\omega} + \frac{\omega_0^2 \omega}{8\lambda^2} \right\} \\ & + \frac{1}{2} \left(\varepsilon_+^{(2)} + \varepsilon_-^{(2)} - \frac{\omega_0}{2\mu} (1 + \mu) - \omega - \frac{2\lambda^2}{\omega} (1 - \mu) \right), \end{aligned} \quad (3.80)$$

sendo que as energias $\varepsilon_\pm^{(2)}$ são dadas por

$$\varepsilon_\pm^{(2)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0^2}{\mu^2} + \omega^2 \pm \sqrt{\left[\frac{\omega_0^2}{\mu^2} - \omega^2 \right]^2 + 4\omega^2 \omega_0^2} \right)}. \quad (3.81)$$

Como podemos observar, a energia de excitação $\varepsilon_-^{(2)}$ é real somente quando

$$\frac{\omega_0^2}{\mu^2} + \omega^2 \geq \sqrt{\left[\frac{\omega_0^2}{\mu^2} - \omega^2 \right]^2 + 4\omega^2 \omega_0^2},$$

ou ainda

$$\lambda \geq \sqrt{\omega\omega_0}/2 = \lambda_c.$$

Vemos que o Hamiltoniano (3.80) descreve o sistema para $\lambda \geq \lambda_c$, isto é, descreve o modelo de Dicke, no limite termodinâmico, na fase super radiante. Em princípio, poderíamos ter usado os operadores $W(1)$ e $W(2)$ definidos em (3.64), ao invés dos operadores $U(1)$ e $U(2)$ definidos em (3.63). Caso usássemos os operadores $W(1)$ e $W(2)$, obteríamos os mesmos valores para α e β , e conseqüentemente o mesmo Hamiltoniano (3.80). Essa opção tem como consequência a origem de uma degenerescência em \hat{H}_{SR} . A Fig.(3.1) não é tomada no limite termodinâmico ($J = 5$), entretanto, podemos ter uma idéia de como a degenerescência surge quando passamos da fase normal para a fase super radiante.

A Fig.(3.2), mostra a energia fundamental reescalada do modelo E_{fund}/j (esquerda), e sua segunda derivada (direita) para valores finitos de J e também no limite termodinâmico $j \rightarrow \infty$. A forma não analítica porém continua da segunda derivada evidencia o fato da transição ser de segunda ordem. Os resultados com J finito são

obtidos via Hamiltoniano (3.31).

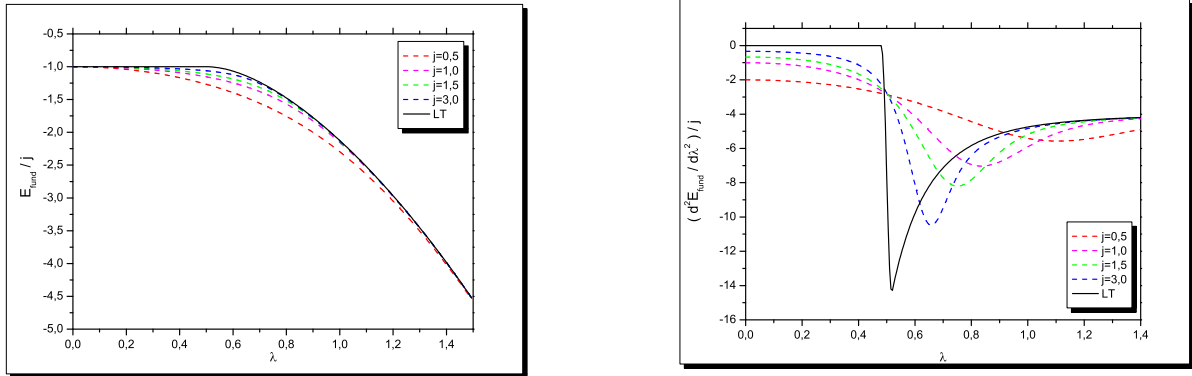


Figura 3.2: À esquerda temos a energia fundamental reescalada, E_{fund}/j , em função da constante de acoplamento λ . À direita temos a segunda derivada da energia fundamental em função da constante de acoplamento. Em ambas as figuras a linha sólida representa o limite termodinâmico enquanto que as linhas tracejadas correspondem a valores finitos para j . Também, em ambas as figuras consideramos $\omega = \omega_0 = 1$.

Na Fig.(3.3) apresentamos dois resultados que ajudam entender a natureza da transição de fase. Na figura à esquerda apresentamos a inversão atômica reescalada e na figura à direita o número médio de fótons no campo reescalado, ambos em função do parâmetro de acoplamento λ . Nas duas figuras as curvas em tracejado representam casos com um número finito de átomos enquanto que a curva contínua representa o limite termodinâmico. Observamos que na fase normal ($\lambda < \lambda_c$) o sistema é microscopicamente excitado enquanto que na fase super-radiante ($\lambda > \lambda_c$) tanto o campo quanto o ensemble atômico adquirem excitações macroscópicas.

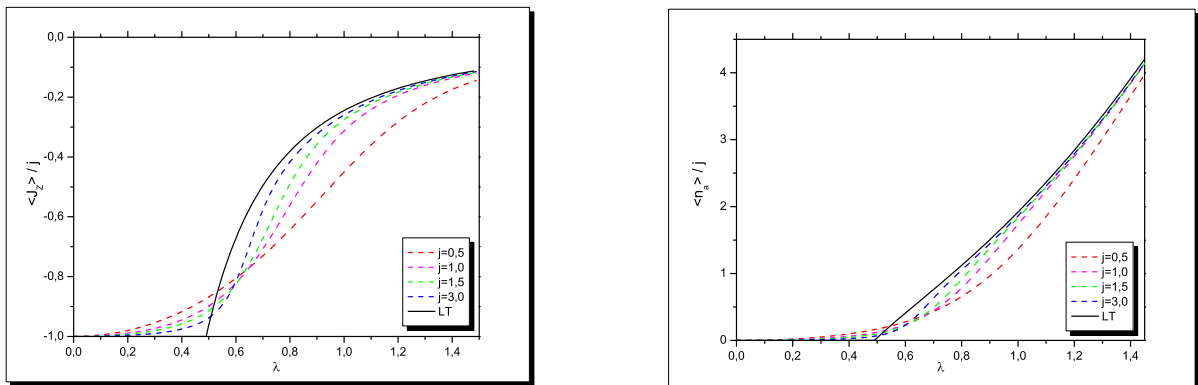


Figura 3.3: À esquerda temos a inversão atômica reescalada e à direita temos o número médio de fótons reescalada, ambos em função da constante de acoplamento λ . Em ambas as figuras consideramos $\omega = \omega_0 = 1$ e $\lambda_c = 0,5$.

Sistemas opto-mecânicos

No século XVII, Kepler sugeriu que as caudas dos cometas apontavam para longe do Sol devido à força exercida pela radiação solar. Apenas no começo do século XX os primeiros efeitos da pressão de radiação foram observados em laboratório, como nos experimentos realizados por Nichols and Hull [28, 29, 30]. Com a chegada do laser foi possível utilizar a força da radiação para manipular o movimento mecânico de objetos de uma maneira controlada. Foram propostos experimentos com o objetivo de usar a pressão de radiação para reduzir o movimento aleatório de átomos ("*laser cooling*") [31], e também aprisionar partículas neutras. Temos como principal objetivo nesta seção estudar a interação entre sistemas ópticos e mecânicos por meio da interação de pressão de radiação.

4.1 Interação entre um espelho móvel e pressão de radiação

Qualquer sistema que possui um acoplamento entre um elemento óptico e um elemento mecânico pode ser considerado um sistema optomecânico. Um sistema

simples, o qual chamamos de cavidade optomecânica, consiste de uma cavidade Fabry-Perot onde um dos espelhos é fixo no espaço e o outro move-se sob efeito de um potencial, conforme mostrado na Fig.(4.1). Nesta sessão vamos introduzir o formalismo Hamiltoniano desse sistema (em um caso unidimensional) [32], construído diretamente da equação de movimento do espelho e da equação de onda do campo. Assumimos que o espelho fixo se encontra na posição $x = 0$, enquanto que o espelho móvel de massa m está na posição $q(t)$ sujeito a um potencial $V(q)$. O movimento do espelho móvel também será influenciado pela pressão de radiação do campo presente na cavidade. O sistema é representado na Fig.(4.1). O potencial vetor $A(x, t)$ é definido dentro da

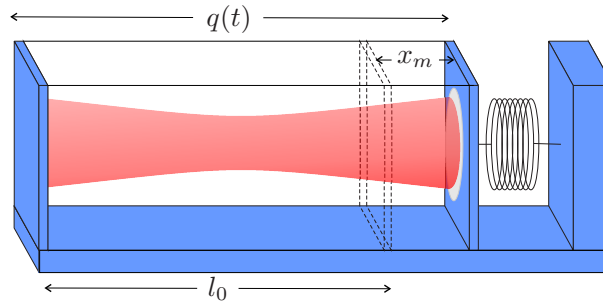


Figura 4.1: Cavidade Fabry-Perot. Um dos espelhos é fixo e o outro move-se sob o efeito de um potencial.

cavidade, isto é, $0 \leq x \leq q(t)$ e obedece a equação de onda

$$\frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial t^2}, \quad (4.1)$$

onde consideramos $c = 1$. Consideramos o potencial vetor A como escalar, porque as duas polarizações do campo não interagem uma com a outra. Neste problema são válidas as seguintes condições de contorno

$$A(0, t) = 0, \quad (4.2)$$

$$A(q(t), t) = 0, \quad (4.3)$$

A equação de movimento do espelho é dada por

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A(x, t)}{\partial x} \right)^2 \Big|_{x=q(t)}. \quad (4.4)$$

O segundo termo na Eq.(4.4) é responsável pela força de pressão de radiação. Podemos obtê-lo por meio do Hamiltoniano (A.24), que neste caso é dado por

$$H_{campo} = \frac{1}{2} \int_0^q \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (4.5)$$

uma vez que o A é nulo sobre o espelho.

Podemos escrever $A(x, t)$ como

$$A(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) \varphi(x), \quad (4.6)$$

onde

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{q(t)}} \sin\left(\frac{k\pi x}{q(t)}\right) \quad (4.7)$$

e k é um número inteiro positivo. Vamos definir um conjunto de coordenadas generalizadas Q_k dadas por

$$Q_k \equiv \sqrt{\frac{2}{q(t)}} \int_0^{q(t)} dx A(x, t) \sin\left(\frac{k\pi x}{q(t)}\right). \quad (4.8)$$

Com a ajuda de (4.6) e da condição de ortogonalidade $\int_0^{q(t)} \varphi_k(x) \varphi_{k'}(x) dx = \delta_{k,k'}$, podemos reescrever (4.1) e (4.4) como

$$\ddot{Q}_k = -\omega_k^2 Q_k + 2 \frac{\dot{q}}{q} \sum_j g_{kj} \dot{Q}_j + \frac{\ddot{q}q - \dot{q}^2}{q^2} \sum_j g_{kj} Q_j + \frac{\dot{q}^2}{q^2} \sum_{jl} g_{jk} g_{jl} Q_l, \quad (4.9)$$

$$m\dot{q} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q} + \frac{1}{q} \sum_{k,j} (-1)^{k+j} \omega_k \omega_j Q_k Q_j, \quad (4.10)$$

onde

$$\omega_k(q) = \frac{k\pi}{q} \quad (4.11)$$

é a frequência (dependente da posição do espelho). O coeficiente adimensional g_{kj}

pode ser escrito como

$$g_{kj} = \begin{cases} (-1)^{k+j} \frac{2kj}{j^2 - k^2}, & k \neq j, \\ 0, & k = j. \end{cases} \quad (4.12)$$

A Lagrangeana L que nos fornece as equações de movimento (4.9) e (4.10) é escrita como

$$L(q, \dot{q}, Q_k, \dot{Q}_k) = \frac{1}{2} \sum_k [\dot{Q}_k^2 - \omega_k^2(q) Q_k^2] + \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) - \frac{\dot{q}}{q} \sum_{j,k} \dot{Q}_k Q_j + \frac{\dot{q}^2}{2q^2} \sum_{j,k,l} g_{k,j} g_{kl} Q_l Q_j, \quad (4.13)$$

e o Hamiltoniano associado com L é definido como

$$H(P_k, Q_j, p, q) \equiv p \dot{q} + \sum_k P_k \dot{Q}_k - L(q, \dot{q}, Q_k, \dot{Q}_k), \quad (4.14)$$

onde P_k e p são, respectivamente, os momentos canonicamente conjugados a Q_k e q ,

$$P_k = \dot{Q}_k - \frac{\dot{q}}{q} \sum_j g_{kj} Q_j, \quad (4.15)$$

$$p = m \dot{q} - \frac{1}{q} \sum_{j,k} g_{kj} P_k Q_j. \quad (4.16)$$

Podemos agora reescrever $H(P_k, Q_j, p, q)$ como

$$H = \frac{1}{2m} \left(p + \frac{1}{q} \sum_{j,k} P_k Q_j \right)^2 + V(q) + \frac{1}{2} \sum_k [P_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2]. \quad (4.17)$$

O Hamiltoniano (4.17) nos fornece uma boa base para a quantização do sistema. Seguindo o processo de quantização canônica, substituímos as variáveis q , P , Q_k e P_k por operadores que obedecem as seguintes relações de comutação $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$, $[\hat{Q}_j, \hat{P}_k] = i\delta_{jk}\hbar$.

Vamos agora definir os operadores de criação e aniquilação dados por

$$a_k(\hat{q}) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k(\hat{q})}} \left[\omega_k(\hat{q})\hat{Q}_k + i\hat{P}_k \right], \quad (4.18)$$

$$a_k^\dagger(\hat{q}) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k(\hat{q})}} \left[\omega_k(\hat{q})\hat{Q}_k - i\hat{P}_k \right]. \quad (4.19)$$

A dependência de a_k e a_k^\dagger com o operador \hat{q} indica que para cada posição do espelho teremos um novo conjunto de estados de Fock associados com cada posição. O conjunto de estados de Fock pode ser escrito como $|\{n_l\}, q\rangle$ onde $\{n_l\} = \{n_1, n_2, n_3, \dots\}$, que denota o número de fótons, para diferentes modos da cavidade. Os kets $|\{n_l\}, q\rangle$ satisfazem as seguintes relações

$$a_k^\dagger a_k |\{n_l\}, q\rangle = n_k |\{n_l\}, q\rangle, \quad (4.20)$$

$$\hat{q} |\{n_l\}, q\rangle = q |\{n_l\}, q\rangle. \quad (4.21)$$

Podemos então reescrever o Hamiltoniano (4.17) como

$$H = \frac{(p + \Gamma)^2}{2m} + V(q) + \hbar \sum_k \omega_k(q) \left[a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right], \quad (4.22)$$

onde

$$\Gamma \equiv \frac{i\hbar}{2q} \sum_{k,j} \left[\frac{k}{j} \right]^{1/2} \left[a_k^\dagger a_j^\dagger - a_k a_j + a_k^\dagger a_j - a_j^\dagger a_k \right]. \quad (4.23)$$

A energia do vácuo presente em (4.22) é divergente. Quando consideramos o espaço vazio, essa energia não pode ser observada, entretanto, quando consideramos uma região limitada, como entre dois espelhos, somente determinadas frequências são permitidas, como em (4.22). De fato, é possível mostrar que no caso unidimensional [33] a energia do vácuo é dada por $-\frac{\hbar\pi}{24q}$. Sendo assim, o Hamiltoniano (4.22) poder ser escrito

como

$$H = \frac{(p + \Gamma)^2}{2m} + V(q) + \hbar \sum_k \omega_k(q) a_k^\dagger a_k - \frac{\hbar\pi}{24q} \quad (4.24)$$

Podemos escolher o potencial $V(q)$ de maneira que ele mantenha o movimento do espelho próximo de uma posição de equilíbrio l_0 . Quando o deslocamento $x_m \equiv q - l_0$ é pequeno comparado com l_0 , temos que

$$\Gamma \approx \Gamma_0, \quad (4.25)$$

sendo $\Gamma_0 = \Gamma|_{q=l_0}$. Vamos também tomar a seguinte expansão

$$\begin{aligned} a_k(q) &\approx a_{k0} - \frac{x_m}{2l_0} a_{k0}^\dagger, \\ a_k^\dagger(q) &\approx a_{k0}^\dagger - \frac{x_m}{2l_0} a_{k0}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

e

$$\omega_k(q) \approx \omega_{k0} \left(1 - \frac{x_m}{l_0}\right), \quad (4.27)$$

em que a_{k0} (a_{k0}^\dagger) e ω_{k0} denotam o operador de aniquilação (criação) e a frequência na posição de equilíbrio. Substituindo (4.25), (4.26) e (4.27) em (4.22), e fazendo a transformação unitária $H' = T^\dagger H T$, onde o operador T é definido como

$$T = e^{ix_m \Gamma_0 / \hbar}, \quad (4.28)$$

ficamos com

$$H' \approx \frac{p^2}{2m} + u(x_m) + \hbar \sum_k \omega_{k0} a_{k0}^\dagger a_{k0} - x_m F_0, \quad (4.29)$$

sendo $u(x_m) = V(q) - \frac{\hbar\pi}{24q}$ e F_0 é a força de pressão de radiação dada por

$$F_0 = \frac{\hbar}{2l_0} \sum_{k,j} (-1)^{k+j} \sqrt{\omega_{k0}\omega_{j0}} (a_{k0}a_{j0} + a_{k0}^\dagger a_{j0}^\dagger + a_{k0}^\dagger a_{j0} + a_{j0}^\dagger a_{k0}). \quad (4.30)$$

Em um caso especial em que somente um único modo contribui de maneira dominante, o termo $x_m F_0$ pode ser reduzido à seguinte forma

$$x_m F_0 \approx x_m \frac{\hbar\omega_{k0}}{l_0} a_{k0}^\dagger a_{k0}. \quad (4.31)$$

O resultado (4.31) é encontrado devido à aproximação *RWA*¹. Escrevendo o Hamiltoniano (4.29) na representação de interação veremos que os termos a_{k0}^2 e $(a_{k0}^\dagger)^2$ serão menos importantes que $a_{k0}^\dagger a_{k0}$ e por isso poderão ser desprezados.

É comum reescrever o Hamiltoniano (4.29) com $x_m = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_m}}(b + b^\dagger)$

$$H = \hbar\omega_0 a^\dagger a + \hbar\omega_m b^\dagger b - \hbar g a^\dagger a (b^\dagger + b), \quad (4.32)$$

onde b e b^\dagger são os operadores bosônicos do espelho, ω_m é a sua frequência de oscilação e $g = \frac{\hbar\omega_0}{l_0} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_m}}$.

No passado não existiam grandes aplicações para força de pressão de radiação, a não ser na astronomia, onde a intensidade da luz e as distâncias envolvidas são grandes. Com a invenção do laser na década de 1960, finalmente pesquisadores foram capazes de utilizar a pressão de radiação. Um dos pioneiros nesse estudo foi Arthur Ashkin. Focando um feixe de laser, Ashkin e colaboradores demonstraram que pequenas partículas, tais como esferas de poliestireno com diâmetro micrométrico podem ser deslocadas e até mesmo levitar contra a gravidade através da pressão de radiação [34].

¹Ver seção 3.2.2

4.2 Preparação de estados não-clássicos

Dentre as possíveis aplicações do sistema descrito pelo Hamiltoniano (4.32), citamos a produção de uma grande classe de estados não clássicos do campo da cavidade [35]. Estados não clássicos são por definição aqueles para os quais a distribuição $P(\alpha)$ de Glauber-Sudarshan torna-se altamente singular ou assume valores negativos. Estados não clássicos não são obtidos por fontes usuais de luz como lâmpadas ou estrelas, é preciso um processo mais complexo para sua produção. Dentre os estados não clássicos podemos citar o estado de Fock, estado coerente comprimido e as superposições de estados coerentes.

Como foi visto anteriormente, o Hamiltoniano que descreve um sistema formado por um cavidade com um espelho móvel é dado por

$$H = \hbar\omega_0 a^\dagger a + \hbar\omega_m b^\dagger b - \hbar g a^\dagger a (b^\dagger + b). \quad (4.33)$$

Podemos escrever o operador de evolução temporal correspondente a esse Hamiltoniano como²

$$U(\tau) = e^{-ira^\dagger a \tau} e^{ik^2(a^\dagger a)^2(\tau - \sin(\tau))} e^{ka^\dagger a(\eta b^\dagger - \eta^* b)} e^{-ib^\dagger b \tau}, \quad (4.34)$$

onde $k = g/\omega_m$, $r = \omega_0/\omega_m$ e $\tau = \omega_m t$, caso assumamos que o espelho e o campo estão em um estado coerente. Podemos escrever o estado inicial como

$$|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle_c \otimes |\beta\rangle_m, \quad (4.35)$$

onde $|\alpha\rangle_c$ representa o estado coerente do campo da cavidade e $|\beta\rangle_m$ representa o estado coerente do oscilador mecânico. Considerando $H_0 = \hbar\omega_0 a^\dagger a$, o estado do sistema em função do tempo na representação de interação será dado por

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-ik^2 n^2(\tau - \sin(\tau))} |n\rangle_c |\phi_n(t)\rangle_m, \quad (4.36)$$

²Ver Apêndice C e [35].

onde $|\phi_n(t)\rangle_m$ é dado por

$$|\phi_n(t)\rangle_m = |e^{-i\tau}\beta + kn\eta\rangle. \quad (4.37)$$

Estados de gato

Em um tempo $\tau = 2\pi$ e tomando $k = 0,5$, o estado do sistema será dado por

$$|\psi(t)\rangle_I = \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{in^2\pi/2} |n\rangle_c \right] \otimes |\beta\rangle_m. \quad (4.38)$$

Na expressão (4.38) podemos reescrever o estado do campo como

$$\begin{aligned} |\zeta\rangle_c &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{in^2\pi/2} |n\rangle_c \right], \\ |\zeta\rangle_c &= e^{-|\alpha|^2/2} |0\rangle_c + ie^{-|\alpha|^2/2} \alpha |1\rangle_c + e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}} |2\rangle_c + ie^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^3}{\sqrt{3!}} |3\rangle_c \dots, \\ |\zeta\rangle_c &= \frac{1}{2} \left[e^{-|\alpha|^2/2} |0\rangle_c + e^{-|\alpha|^2/2} \alpha e^{i\pi/2} |1\rangle_c + e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}} |2\rangle_c + e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^3}{\sqrt{3!}} |3\rangle_c \dots \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[e^{-|\alpha|^2/2} |0\rangle_c + e^{-|\alpha|^2/2} (-\alpha) |1\rangle_c + e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}} |2\rangle_c + e^{-|\alpha|^2/2} \frac{(-\alpha)^3}{\sqrt{3!}} |3\rangle_c \dots \right] \\ &+ \frac{i}{2} \left[e^{-|\alpha|^2/2} |0\rangle_c + e^{-|\alpha|^2/2} \alpha |1\rangle_c + e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}} |2\rangle_c + e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^3}{\sqrt{3!}} |3\rangle_c \dots \right] \\ &- \frac{i}{2} \left[e^{-|\alpha|^2/2} |0\rangle_c + e^{-|\alpha|^2/2} (-\alpha) |1\rangle_c + e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}} |2\rangle_c + e^{-|\alpha|^2/2} \frac{(-\alpha)^3}{\sqrt{3!}} |3\rangle_c \dots \right], \\ |\zeta\rangle_c &= \left(\frac{1+i}{2} \right) |\alpha\rangle + \left(\frac{1-i}{2} \right) |-\alpha\rangle. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Quando $|\alpha|$ é grande, $|\alpha\rangle$ e $|-\alpha\rangle$ são significativamente distintos entre si. Esse estado é análogo ao estado proposto por Schrödinger em seu experimento imaginário do gato morto-vivo. Por isso, esses estados são conhecidos como estados de gato [36]. Caso façamos $k = 1/\sqrt{6}$, podemos arranjar o estado obtido da seguinte maneira

$$|\zeta\rangle_c = \frac{(3 + \sqrt{3}i)}{6} |\alpha e^{i\pi/3}\rangle + \frac{(3 + \sqrt{3}i)}{6} |\alpha e^{-\pi/3}\rangle + \frac{\sqrt{3}}{3} |-\alpha\rangle, \quad (4.40)$$

que é um estado de gato de três componentes.

Resultados

O objetivo desta dissertação é compreender como a dinâmica de um sistema optomecânico acoplado a um reservatório spin-bóson comporta-se quando o reservatório sofre a TQF. Os resultados apresentados nesse capítulo encontram-se publicados em [37]. O modelo escolhido como reservatório foi o modelo de Dicke, pois além de ser relativamente simples, existem propostas de realização experimental desse modelo [38]. Este tipo de análise (reservatório que sofre transição de fase influenciando um sistema) já foi feito antes usando diferentes reservatórios e sistemas, como apresentado na introdução dessa dissertação.

O sistema em questão pode ser melhor compreendido com a ajuda da fig.(5.1). Em nosso modelo um dos espelhos é fixo e o outro se move sob efeito de uma força restauradora. Além disso consideramos um conjunto de N átomos independentes, nas mesmas condições do modelo de Dicke já explicado no capítulo 3. Como foi visto no capítulo 3, o Hamiltoniano que descreve o modelo de Dicke pode ser escrito como (considerando $\hbar = 1$)

$$H_D = \omega a^\dagger a + \omega_0 J_z + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} (a^\dagger + a)(J_+ + J_-), \quad (5.1)$$

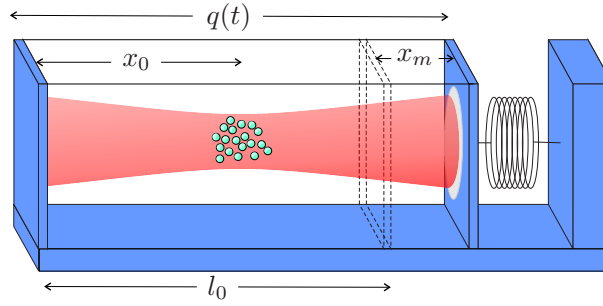


Figura 5.1: Conjunto de N átomos de dois níveis interagindo com um modo do campo quantizado de uma cavidade. A cavidade tem um dos espelhos fixo e o outro se movimenta em torno do ponto l_0 sob os efeitos de um potencial (representado por uma mola) e da força de pressão de radiação.

sendo a frequência angular do campo na cavidade dada por

$$\omega(t) = \frac{n\pi c}{q(t)}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.2)$$

em que c é a velocidade da luz, $q(t)$ é a distância entre os espelhos, ω_0 é a diferença entre os níveis dos átomos, $\{J_+, J_-, J_z\}$ são os operadores de coletivos de momento angular. A constante de acoplamento entre os átomos e cavidade λ pode ser escrita como

$$\lambda = \wp \mathcal{E} \text{sen}(kx_0) \quad (5.3)$$

em que \wp é o elemento de matriz de dipolo elétrico, $\mathcal{E} = \sqrt{\omega/\epsilon_0 q(t)}$ é a amplitude do campo elétrico no vácuo, k é definido como $k = n\pi/q(t)$ e x_0 a posição dos átomos ao longo do eixo da cavidade. Os átomos ocupam uma região muito pequena comparada com o tamanho $q(t)$ da cavidade. Por isso, é razoável aproximar a posição de cada átomo como sendo x_0 . Essa aproximação é comum dentro do modelo de Dicke [27, 39]. Caso essa aproximação não fosse feita, deveríamos considerar uma constante de acoplamento diferente para cada átomo, o que tornaria o problema mais difícil. Para essa situação foi mostrado em [40] que a conduta crítica do modelo de Dicke é essencialmente a mesma quando consideramos uma constante de acoplamento média para os átomos.

Como foi visto anteriormente, consideramos um dos espelhos como sendo móvel. Este espelho está sob o efeito de um potencial (representado na Fig.(5.1) por uma mola) que mantém o espelho oscilando em torno de um ponto l_0 . Considerando

que as oscilações do espelho móvel são muito pequenas comparadas com o tamanho da cavidade, isto é, $q(t) - l_0 \ll l_0$, podemos expandir o Hamiltoniano (5.1) como

$$H = \frac{n\pi c}{l_0} a^\dagger a + \omega_0 J_z - \frac{n\pi c}{l_0^2} x_m a^\dagger a + \frac{\wp}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{n\pi c}{\epsilon_0 l_0^2}} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{l_0} x_0 \right) (a^\dagger + a)(J_+ + J_-) - \frac{\wp}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{n\pi c}{\epsilon_0 l_0^2}} \frac{x_m}{l_0} \left[\frac{1}{2} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{l_0} x_0 \right) + \frac{n\pi}{l_0} x_0 \cos \left(\frac{n\pi}{l_0} x_0 \right) \right] (a^\dagger + a)(J_+ + J_-), \quad (5.4)$$

em que $x_m = q(t) - l_0$. Se definirmos $k' = n\pi/l_0$, $\omega' = n\pi c/l_0$, $\mathcal{E}' = \sqrt{\omega'/\epsilon_0 l_0}$ e $\lambda' = \wp \mathcal{E}' \text{sen}(k' x_0)$ podemos reescrever (5.4) como

$$H = \omega' a^\dagger a + \omega_0 J_z + \frac{\lambda'}{\sqrt{N}} (a^\dagger + a)(J_+ + J_-) - \frac{\omega'}{l_0} x_m a^\dagger a - \frac{\wp \mathcal{E}'}{\sqrt{N}} x_m \delta (a^\dagger + a)(J_+ + J_-), \quad (5.5)$$

sendo $\delta = 1/l_0 [1/2 \sin(k' x_0) + k' x_0 \cos(k' x_0)]$. Como vimos, a coordenada x_m será agora o operador posição do espelho móvel. Podemos então escrever x_m como $x_m = 1/\sqrt{2m\omega_m}(c^\dagger + c)$, onde m é a massa do espelho e ω_m sua frequência de oscilação. Além disso, vamos introduzir o termo livre $\omega_m c^\dagger c$. Ficamos com

$$H = \omega' a^\dagger a + \omega_0 J_z + \omega_m c^\dagger c + \frac{\lambda'}{\sqrt{N}} (a^\dagger + a)(J_+ + J_-) - g(c^\dagger + c)a^\dagger a - \frac{\eta}{\sqrt{N}} (a^\dagger + a)(c^\dagger + c)(J_+ + J_-), \quad (5.6)$$

sendo $g = \omega'/[l_0 \sqrt{2m\omega_m}]$ e $\eta = \wp \mathcal{E}' \delta / \sqrt{(2m\omega_m)}$. Dependendo de como os parâmetros dos sistema sejam escolhidos, g ou η podem ser mais ou menos importantes no Hamiltoniano. Como o acoplamento envolvendo g , já foi realizado experimentalmente [41], escolhemos trabalhar com ele. Para anularmos o efeito do termo envolvendo η , basta escolhermos os parâmetros da maneira apropriada. Então, por exemplo, para o modo fundamental $n = 1$, e para $k' x_0 \approx 1,8366$, teremos que $\eta \approx 0$. Isto significa que colocando os átomos aproximadamente na posição $x_0 = 0,58l_0$, o Hamiltoniano que descreve o sistema poderá ser escrito como

$$H = \omega' a^\dagger a + \omega_m c^\dagger c + \omega_0 J_z + \frac{\lambda'}{\sqrt{N}} (a^\dagger + a)(J_+ + J_-) - g a^\dagger a (c^\dagger + c). \quad (5.7)$$

Podemos definir a densidade de átomos em uma cavidade unidimensional como $\rho = N/l_0$ e reescrevendo g em função de ρ ficamos com $g = \omega' \rho / [N \sqrt{2m\omega_m}]$. Podemos então reescrever (5.8) como

$$H = \omega' a^\dagger a + \omega_m c^\dagger c + \omega_0 J_z + \frac{\lambda'}{\sqrt{N}} (a^\dagger + a)(J_+ + J_-) - \frac{g_0}{N} a^\dagger a (c^\dagger + c), \quad (5.8)$$

sendo g_0 definido como $g_0 = gN$.

O próximo passo será introduzir as transformações de Hosten-Primakoff¹

$$H = \omega' a^\dagger a + \omega_0 b^\dagger b + \lambda' (a^\dagger + a) \left(b^\dagger \sqrt{1 - \frac{b^\dagger b}{N}} + \sqrt{1 - \frac{b^\dagger b}{N}} b \right) + \omega_m c^\dagger c - \frac{g_0}{N} a^\dagger a (c^\dagger + c). \quad (5.9)$$

Como vimos, quando tomamos o limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$) o Hamiltoniano de Dicke descreve o sistema em duas fases distintas, a fase normal e a fase super radiante.

No caso da fase normal ($\lambda < \lambda_c$), teremos

$$H_{nor} = H_{nor}^{Dicke} + \omega_m c^\dagger c, \quad (5.10)$$

onde H_{nor}^{Dicke} é o próprio Hamiltoniano de Dicke na fase normal, dado por

$$H_{nor}^{Dicke} = \omega' a^\dagger a + \omega_0 b^\dagger b + \lambda' (a^\dagger + a)(b^\dagger + b). \quad (5.11)$$

Observamos que na fase normal o espelho acaba por se desacoplar do reservatório e evolui livremente como um oscilador harmônico. Isto pode ser interpretado como uma consequência do fato do modelo de Dicke estar apenas microscopicamente excitado na fase normal.

Para fase super-radiante ($\lambda' > \lambda_c$) seguimos o mesmo procedimento que já foi apresentado na seção 3.2.4. Entretanto, o termo $\frac{g_0}{N} a^\dagger a (c^\dagger + c)$ não será nulo nessa

¹Ver subseção 3.2.4

situação. Quando o operador deslocamento é aplicado nesse termo, obtemos

$$\frac{g_0}{N} a^\dagger a (c^\dagger + c) \rightarrow \frac{g_0}{N} (a^\dagger a + (a^\dagger + a) \sqrt{\alpha} + \alpha) (c^\dagger + c),$$

e quando o limite termodinâmico é tomado, o termo proporcional a α ainda restará.

Assim, ficamos com

$$H_{sr} = H_{sr}^{Dicke} + \omega_m c^\dagger c - \frac{g_0 (\lambda')^2}{(\omega')^2} (1 - \mu^2) (c^\dagger + c), \quad (5.12)$$

onde H_{sr}^{Dicke} é o Hamiltoniano de Dicke na fase super-radiante.

$$\begin{aligned} H_{sr}^{Dicke} = & \omega' a^\dagger a + \frac{\omega_0}{2\mu} (1 + \mu) b^\dagger b + \frac{\omega_0 (1 - \mu) (3 + \mu)}{8\mu (1 + \mu)} (b^\dagger + b)^2 \\ & + \lambda' \mu \sqrt{\frac{2}{1 + \mu}} (a^\dagger + a) (b^\dagger + b). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Vemos que na fase super radiante o espelho também se desacopla do reservatório, mas ele sofre consequências pelo fato do campo e do átomo estarem macroscopicamente excitados. O efeito do reservatório sobre o espelho é o de uma força clássica (termo proporcional a $c^\dagger c$). Este resultado é muito interessante uma vez que um reservatório térmico nunca produz oscilações coerentes, até mesmo à temperatura zero. A explicação para isso segue do fato do espelho estar acoplado somente a um único elemento do reservatório, o campo eletromagnético. Uma vez que o campo não é isolado, ele interage com o *ensemble* de átomos e a interação tende a tornar-se clássica no sentido de $a \rightarrow \sqrt{\alpha}$. O processo pode ser resumido como

$$\frac{g_0}{N} a^\dagger a (c^\dagger + c) \rightarrow \frac{g_0}{N} \alpha (c^\dagger + c). \quad (5.14)$$

Observamos agora que o espelho pode ser utilizado como uma sonda para a transição. Se $\lambda < \lambda_c$, o número médio de fônons $\langle c^\dagger c \rangle(t)$ será independente do tempo, de acordo com (5.10). Porém, quando o sistema se encontra acima do ponto crítico, o

espelho evolui segundo

$$H_{esp} = \omega_m c^\dagger c + \Omega(c^\dagger + c), \quad (5.15)$$

sendo $\Omega = -\frac{g_0(\lambda')^2}{(\omega')^2}(1 - \mu^2)$ e com isso o número médio de fônons não será uma constante de movimento. Se considerarmos, por exemplo, que o reservatório está inicialmente no estado fundamental e o espelho está no estado de vácuo, teremos

$$\langle c^\dagger c \rangle(t) = \frac{2\Omega^2}{\omega_m^2} [1 - \cos(\omega_m t)], \quad (5.16)$$

para $\lambda > \lambda_c$.

Podemos verificar se os resultados obtidos para o limite termodinâmico estão corretos resolvendo o Hamiltoniano (5.1) numericamente para diferentes valores de J . Esperamos que quanto maior seja o número de átomos, mais próximos os resultados obtidos estarão daqueles no limite termodinâmico.

O procedimento numérico foi realizado da seguinte maneira. Para uma determinada escolha dos parâmetros envolvidos, escrevemos o Hamiltoniano de Dicke (5.1) na base $\{|n_a, n_b\rangle\}$ e diagonalizamos a matriz. Dentre os autovalores obtidos, selecionamos aquele de menor energia e o autovetor correspondente. Com isso obtemos o estado fundamental correto do reservatório $|fundamental\rangle_{Dicke}$.

A segunda etapa é escrever o Hamiltoniano (5.1) na base $\{|n_a, n_b, n_c\rangle\}$, e diagonalizar a matriz. A evolução temporal é feita da seguinte maneira. Primeiramente selecionamos o estado inicial. Como estamos estudando o efeito da transição de fase no reservatório, obrigatoriamente o estado inicial do reservatório será o estado fundamental. Para compararmos com o resultado obtido em (5.16) vamos escolher o estado inicial do oscilador acoplado como sendo o estado de vácuo $|0\rangle_c$. Sendo assim, o estado inicial será dado por $|\psi(0)\rangle = |fundamental\rangle_{Dicke} \otimes |0\rangle_c$. A próxima etapa será diagonalizar o Hamiltoniano (5.8) para encontrar a base adequada e escrever o estado inicial como

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n(t_0) |\phi_n\rangle, \quad (5.17)$$

sendo $|\phi_n\rangle$ o ket que representa os autoestados do Hamiltoniano e $c_n(0)$ é dado pela relação usual $c_n(0) = \langle \phi_n | \psi(0) \rangle$. Depois disso, calculamos $|\psi(t)\rangle$ numericamente através da relação

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t_0) e^{-iE_n t/\hbar} |\phi_n\rangle, \quad (5.18)$$

sendo E_n as autoenergias associadas com os autoestados $|\phi_n\rangle$. O programa foi construído de maneira que reescrevemos o estado $|\psi(t)\rangle$ na base original $\{|n_a, n_b, n_c\rangle\}$, por conveniência. Depois de obter o estado $|\psi(t)\rangle$ numericamente podemos calcular o número médio de fônons $\langle c^\dagger c \rangle(t)$. Esse resultado é apresentado na Fig.(5.2) para diferentes valores de J . Como podemos observar, o número médio de fônons tende ao valor obtido no limite termodinâmico mesmo para valores relativamente baixos de J . Isso indica que o limite termodinâmico foi tomado corretamente. Quando observamos o Hamiltoniano do sistema no limite termodinâmico, para fase normal (5.10) e para a fase super-radiante (5.12), vemos que não existem produtos dos operadores a ou b com c e isso significa que o reservatório não induz decoerência no espelho móvel. Consequentemente, esperamos que a quantidade de entropia do espelho não mude com o passar do tempo. Afim de verificar a veracidade desse resultado, calculamos a entropia de Von Neumann do espelho $S_c(t) = -\text{Tr}[\rho_c(t) \ln(\rho_c(t))]$, onde $\rho_c(t) = \text{Tr}_{a,J}[\rho(t)]$ e $\rho(t)$ é o operador densidade do sistema total, dado por $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$. Consideramos

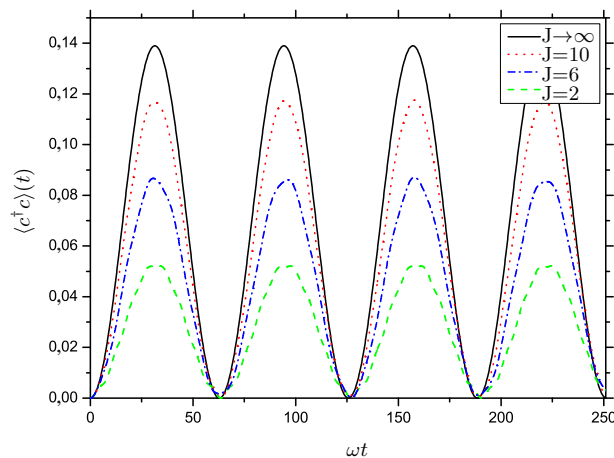


Figura 5.2: Evolução temporal do número médio fônons $\langle c^\dagger c \rangle(t)$ para diferentes valores de J . Observamos que as curvas tendem ao resultado limite dado em (5.16). Nessa figura os parâmetros foram escolhidos como $\omega = \omega_0 = 10\omega_m$ e $\lambda = 0,6$ (fase super-radiante).

novamente o estado inicial $|\psi(0)\rangle = |fundamental\rangle_{Dicke} \otimes |0\rangle_c$, para o qual a entropia do espelho é nula. A entropia de Von Neumann foi calculada numericamente para diferentes valores de J e os resultados obtidos são apresentados na Fig.(5.3). Observamos que quanto maior o número átomos na cavidade, menor o valor da entropia ao longo do tempo. Esse resultado está de acordo com o que esperamos que aconteça no limite termodinâmico.

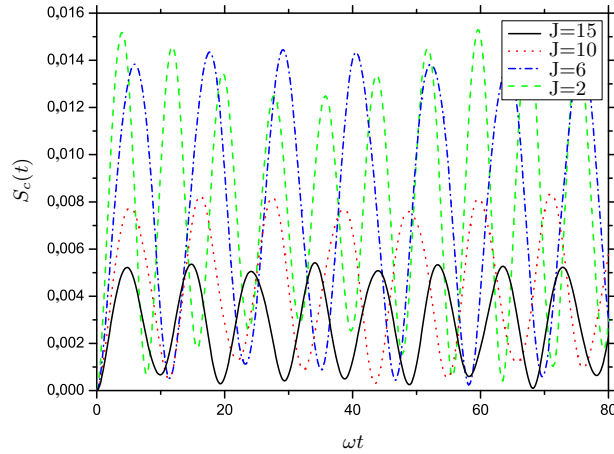


Figura 5.3: Evolução temporal da entropia do espelho para diferentes valores de J . Nessa figura os parâmetros foram escolhidos como $\omega = \omega_0 = 10\omega_m$ e $\lambda = 0,6$ (fase super-radiante).

Conclusão e Perspectivas Futuras

Neste trabalho foi discutida a questão de como um sistema mecânico (oscilador) acoplado a um reservatório (modelo de Dicke) se comporta quando o reservatório sofre uma transição de fase. A construção do Hamiltoniano efetivo teve como base o Hamiltoniano de Dicke, porém, consideramos um dos espelhos móvel na cavidade e sob efeito de um potencial harmônico. Com a aplicação do limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$) chegamos à conclusão de que o espelho pode servir como uma sonda da transição de fase, uma vez que tem um comportamento completamente diferente em cada fase. Como vimos, quando o modelo de Dicke se encontra na fase normal, o espelho evolui livremente, enquanto que quando o modelo de Dicke se encontra na fase super radiante, o espelho sofrerá a ação de uma força clássica sem causar qualquer perda de coerência. Tais resultados foram publicados em [37].

Perspectivas futuras para esse trabalho são mais relacionadas com a implementação experimental. Seria interessante, por exemplo, buscar a implementação dessas idéias, ou seja, um sistema de Dicke optomecânico, usando condensados de Bose Einstein (em preparação em [42]). Nesse caso, modelos detalhados de perda de coerência quântica precisam ser levados em consideração, e o objetivo é analisar a manifestação da força clássica na fase super radiante sob condições experimentais reais.

Outra possibilidade interessante, é a realização desse tipo de estudo em sistemas de cavidades e átomos descritos por Hamiltonianos não lineares. Inclui-se aqui transições de dois fótons e acoplamentos dependentes da intensidade do campo. O objetivo seria estudar como o espelho móvel se comportará quando tais acoplamentos não lineares entre átomos e campo são considerados.

Quantização do Campo Eletromagnético

Neste apêndice trataremos de um problema fundamental dentro da ótica quântica, a descrição da teoria eletromagnética clássica do ponto de vista da mecânica quântica. Essa descrição é conhecida como eletrodinâmica quântica.

As equações que governam os fenômenos eletromagnéticos são as equações de Maxwell [43],

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}, \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B}(\vec{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t) = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad (\text{A.4})$$

onde $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}(\vec{r}, t)$ são, respectivamente, os vetores campo elétrico e campo magnético. $\rho(\vec{r}, t)$ e $\vec{J}(\vec{r}, t)$ são as densidade de carga e de corrente. As constantes μ_0 e ϵ_0 são, respectivamente, a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica do espaço livre. Devido ao fato de que o divergente de $\vec{B}(\vec{r}, t)$ é nulo (A.4), podemos escrever \vec{B}

como

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}. \quad (\text{A.5})$$

Substituindo esse resultado em (A.3), é fácil ver que

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Um vetor cujo o rotacional é nulo, pode ser escrito como um gradiente de um potencial escalar. Temos

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (\text{A.7})$$

Substituindo as Eq.(A.5) e (A.7) na Eq.(A.2), podemos escrever

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = -\mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \frac{\partial U}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{J}. \quad (\text{A.8})$$

Usando a identidade vetorial $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} &= -\mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \frac{\partial U}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{J}, \\ \left(\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial U}{\partial t} \right) &= -\mu_0 \vec{J}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Devido as transformações de calibre, temos a liberdade de escolher $\vec{A}(\vec{r}, t)$ tal que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$. Isso caracteriza o calibre de Coulomb. Além disso, como não existem cargas externas, temos que $U = 0$ e $\vec{J} = 0$. Com isso, ficamos com

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{A.10})$$

Vamos considerar o campo em um cubo de volume $V = L^3$. O potencial vetor nessa cavidade pode ser expandido em um somatório de ondas planas

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 L^3}} \sum_{\vec{k}} \vec{A}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (\text{A.11})$$

as componentes do vetor \vec{k} são dadas por $k_j = 2\pi n_j/L$, onde n_j é um número inteiro. Para que a Eq.(A.11) seja real, é necessário impor que $\vec{A}_{-\vec{k}} = \vec{A}_{\vec{k}}^*$. Substituindo a Eq.(A.11) na Eq.(A.10) vemos que

$$\vec{A}_{\vec{k}}(t) = e^{-i\omega_{\vec{k}}t} \vec{e}_{\vec{k}} + e^{i\omega_{-\vec{k}}t} \vec{e}_{-\vec{k}}^* \quad (\text{A.12})$$

Para satisfazer a condição de calibre $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, os vetores \vec{k} e $\vec{A}_{\vec{k}}$ devem ser perpendiculares. Sendo assim, $\vec{e}_{\vec{k}}$ pode ser escrito como uma combinação de dois vetores ortogonais

$$\vec{e}_{\vec{k}} = g_{\vec{k},1} \vec{u}_{\vec{k},1} + g_{\vec{k},2} \vec{u}_{\vec{k},2} \quad (\text{A.13})$$

$$\vec{k} \cdot \vec{u}_{\vec{k},i} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (\text{A.14})$$

$$\vec{u}_{\vec{k},i}^* \cdot \vec{u}_{\vec{k},j} = \delta_{i,j} \quad (\text{A.15})$$

$$\vec{u}_{\vec{k},1}^* \wedge \vec{u}_{\vec{k},2} = \vec{k}/k \quad (\text{A.16})$$

onde os coeficientes $g_{\vec{k},1}$ e $g_{\vec{k},2}$ são dados por

$$g_{\vec{k},1} = \vec{e}_{\vec{k}} \cdot \vec{u}_{\vec{k},1} \quad (\text{A.17})$$

$$g_{\vec{k},2} = \vec{e}_{\vec{k}} \cdot \vec{u}_{\vec{k},2} \quad (\text{A.18})$$

Substituindo a Eq.(A.13) na Eq.(A.12), temos

$$\vec{A}_{\vec{k}}(t) = e^{-i\omega_{\vec{k}}t} (g_{\vec{k},1} \vec{u}_{\vec{k},1} + g_{\vec{k},2} \vec{u}_{\vec{k},2}) + e^{-i\omega_{-\vec{k}}t} (g_{-\vec{k},1}^* \vec{u}_{-\vec{k},1}^* + g_{-\vec{k},2}^* \vec{u}_{-\vec{k},2}^*) \quad (\text{A.19})$$

Substituindo em (A.11), temos

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 L^3}} \sum_{\vec{k}} \sum_{s=1}^2 \left(e^{-i\omega_{\vec{k}}t} g_{\vec{k},s} \vec{u}_{\vec{k},s} + e^{i\omega_{-\vec{k}}t} g_{-\vec{k},s}^* \vec{u}_{-\vec{k},s}^* \right) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}, \quad (\text{A.20})$$

a qual pode ser escrita como

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 L^3}} \sum_{\vec{k}} \sum_{s=1}^2 \left(\beta_{\vec{k},s}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{u}_{\vec{k},s} + \beta_{\vec{k},s}^*(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{u}_{\vec{k},s}^* \right), \quad (\text{A.21})$$

onde $\beta_{\vec{k},s} = e^{-i\omega_{\vec{k}}t} g_{\vec{k},s}$. Agora que temos uma expressão para o potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$ podemos encontrar os campos $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}(\vec{r}, t)$ através das Eq.(A.5) e (A.7). Ficamos com

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 L^3}} \sum_{\vec{k}} \sum_{s=1}^2 i\omega_{\vec{k}} \left(\beta_{\vec{k},s}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{u}_{\vec{k},s} + \beta_{\vec{k},s}^*(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{u}_{\vec{k},s} \right), \quad (\text{A.22})$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 L^3}} \sum_{\vec{k}} \sum_{s=1}^2 i \left(\beta_{\vec{k},s}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} (\vec{k} \wedge \vec{u}_{\vec{k},s}) + \beta_{\vec{k},s}^*(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} (\vec{k} \wedge \vec{u}_{\vec{k},s}) \right). \quad (\text{A.23})$$

O Hamiltoniano para o campo eletromagnético é dado por

$$H_C = \frac{1}{2} \int_V \left[\epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t)^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r}, t)^2 \right] dv. \quad (\text{A.24})$$

Substituindo as equações (A.22) e (A.23), podemos reescrever o Hamiltoniano (A.24) como

$$H_C = 2 \sum_{\vec{k}} \sum_s \omega_{\vec{k}}^2 |\beta_{\vec{k},s}(t)|^2 \quad (\text{A.25})$$

Introduzimos um par de variáveis canônicas dadas por

$$q_{k,s}(t) = \beta_{\vec{k},s}(t) + \beta_{\vec{k},s}^*(t), \quad (\text{A.26})$$

$$p_{k,s}(t) = -i\omega_{\vec{k}} (\beta_{\vec{k},s}(t) - \beta_{\vec{k},s}^*(t)). \quad (\text{A.27})$$

Nessas novas variáveis o Hamiltoniano assume a forma

$$H_C = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \sum_s [p_{k,s}^2(t) + \omega_{\vec{k}}^2 q_{k,s}^2(t)], \quad (\text{A.28})$$

a qual é idêntica àquela formada por um conjunto de osciladores harmônicos desacoplados. Podemos concluir que, dentro desta abordagem, cada grau de liberdade do campo eletromagnético (cada modo do campo (\vec{k}, s)) corresponde a um oscilador harmônico com frequência $\omega_{\vec{k}}$.

O próximo passo é a quantização do campo eletromagnético. A quantização do

campo eletromagnético é realizada substituindo as variáveis canônica q, p por operadores \hat{q}, \hat{p} , e postular que esses operadores satisfazem as seguintes regras de quantização

$$[\hat{q}_{k,s}(t), \hat{p}_{k',s'}(t)] = i\hbar\delta_{\vec{k}}^3\delta_s, \quad (\text{A.29})$$

$$[\hat{q}_{k,s}(t), \hat{q}_{k',s'}(t)] = 0, \quad (\text{A.30})$$

$$[\hat{p}_{k,s}(t), \hat{p}_{k',s'}(t)] = 0, \quad (\text{A.31})$$

nisso consiste a quantização canônica. Vamos agora introduzir os operadores de criação ($a^\dagger(t)$) e aniquilação ($a(t)$) definidos como

$$a_{\vec{k},s}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left[\sqrt{\omega_{\vec{k},s}} \hat{q} + \frac{i}{\sqrt{\omega_{\vec{k},s}}} \hat{p} \right], \quad (\text{A.32})$$

$$a_{\vec{k},s}^\dagger(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left[\sqrt{\omega_{\vec{k},s}} \hat{q} - \frac{i}{\sqrt{\omega_{\vec{k},s}}} \hat{p} \right]. \quad (\text{A.33})$$

Como consequência da Eq.(A.29), temos

$$[a_{\vec{k},s}(t), a_{\vec{k},s}^\dagger(t)] = 1. \quad (\text{A.34})$$

Os operadores $a(t)$ e $a^\dagger(t)$ correspondem às amplitudes $\beta_{\vec{k},s}(t)$ e $\beta_{\vec{k},s}^*(t)$, e possuem a mesma dependência temporal

$$a_{\vec{k},s}(t) = a_{\vec{k},s} e^{-i\omega_{\vec{k},s}t}, \quad (\text{A.35})$$

$$a_{\vec{k},s}^\dagger(t) = a_{\vec{k},s}^\dagger e^{+i\omega_{\vec{k},s}t}. \quad (\text{A.36})$$

Vamos agora reescrever o Hamiltoniano em função dos operadores de criação e aniquilação. Ficamos com

$$\hat{H}_C = \sum_{\vec{k}} \sum_s [a_{\vec{k},s} a_{\vec{k},s}^\dagger + 1/2] \hbar\omega_{\vec{k}}. \quad (\text{A.37})$$

Com a quantização, os operadores $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}(\vec{r}, t)$ podem ser reescritos como operadores,

simplesmente através da troca

$$\beta_{\vec{k},s}(t) \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\vec{k}}}} a_{\vec{k},s} e^{-i\omega_{\vec{k}}t}, \quad (\text{A.38})$$

$$\beta_{\vec{k},s}(t) \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\vec{k}}}} a_{\vec{k},s}^{\dagger} e^{+i\omega_{\vec{k}}t}, \quad (\text{A.39})$$

sendo assim, ficamos com

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 L^3}} \sum_{\vec{k}} \sum_{s=1}^2 i \sqrt{\omega_{\vec{k}}} \left(a_{\vec{k},s} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t)} \vec{u}_{\vec{k},s} + a_{\vec{k},s}^{\dagger} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t)} \vec{u}_{\vec{k},s} \right), \quad (\text{A.40})$$

$$\hat{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 L^3}} \sum_{\vec{k}} \sum_{s=1}^2 \sqrt{\frac{i}{\omega_{\vec{k}}}} \left(a_{\vec{k},s} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t)} (\vec{k} \wedge \vec{u}_{\vec{k},s}) + a_{\vec{k},s}^{\dagger} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t)} (\vec{k} \wedge \vec{u}_{\vec{k},s}) \right). \quad (\text{A.41})$$

Transformações de Bogoliubov

Primeiramente, apresentaremos a técnica das transformações de Bogoliubov com um exemplo simples, para então considerá-las nos casos tratados ao longo dessa dissertação. Nesse exemplo, consideraremos um único modo bosônico incluindo termos não-lineares (quadráticos). O Hamiltoniano em questão é dado por:

$$H = c_1 a^\dagger a + c_2 (a^\dagger a^\dagger + aa) \quad (\text{B.1})$$

Podemos diagonalizar H definindo um novo conjunto de operadores de criação e aniquilação

$$a = u_1 A - u_2 A^\dagger, \quad a^\dagger = u_1 A^\dagger - u_2 A, \quad (\text{B.2})$$

onde assumimos os coeficientes u_1 e u_2 como reais. A transformação é canônica se os novos operadores também obedecem as relações canônicas de comutação

$$[A, A^\dagger] = 1, \quad (\text{B.3})$$

$$[A, A] = [A^\dagger, A^\dagger] = 0 \quad (\text{B.4})$$

É fácil mostrar que para a relação (B.3) ser verdadeira, a seguinte condição tem de ser respeitada

$$u_1^2 - u_2^2 = 1. \quad (\text{B.5})$$

Substituindo as relações (B.2) em (B.1), podemos escrever

$$\begin{aligned} H = & (c_1(u_1^2 + u_2^2) - 4c_2u_1u_2)A^\dagger A + (c_1u_2^2 - 2c_2u_1u_2) \\ & + (c_2(u_1^2 + u_2^2) - c_1u_1u_2)(AA + A^\dagger A^\dagger) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Embora os parâmetros u_1 e u_2 tenham que satisfazer a condição (B.5), sua razão é arbitrária e pode ser usada para diagonalizar o Hamiltoniano (B.6). Sendo assim, escolhemos eliminar a última linha do Hamiltoniano (B.6)

$$(c_2(u_1^2 + u_2^2) - c_1u_1u_2) = 0. \quad (\text{B.7})$$

Podemos parametrizar a relação (B.5) como

$$u_1 = \cosh \phi, \quad u_2 = \sinh \phi. \quad (\text{B.8})$$

Substituindo (B.8) em (B.7), teremos a seguinte relação para ϕ

$$\tanh 2\phi = 2\frac{c_2}{c_1}. \quad (\text{B.9})$$

A relação (B.9) é válida apenas para $|2c_2/c_1| < 1$. A transformação canônica realizada é conhecida como uma transformação de Bogoliubov. No caso dos Hamiltonianos (3.59) e (3.79), transformações semelhantes podem ser efetuadas com o objetivo de diagonalizar os Hamiltonianos. Nesse apêndice apresentaremos as transformações de Bogoliubov utilizadas para diagonalizar esses Hamiltonianos. Esses resultados podem ser encontrados em [27].

B.0.1 Fase Normal

Podemos expressar os operadores bosônicos $\{a, a^\dagger, b, b^\dagger\}$ em função dos operadores bosônicos $\{c_1, c_1^\dagger, c_2, c_2^\dagger\}$ através do conjunto de transformações

$$\begin{aligned}
 a^\dagger &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos \gamma^{(1)}}{\sqrt{\omega \varepsilon_-^{(1)}}} [(\omega + \varepsilon_-^{(1)})c_1^\dagger + (\omega - \varepsilon_-^{(1)})c_1] + \frac{\text{sen} \gamma^{(1)}}{\sqrt{\omega \varepsilon_+^{(1)}}} [(\omega + \varepsilon_+^{(1)})c_2^\dagger + (\omega - \varepsilon_+^{(1)})c_2] \right\}, \\
 a &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos \gamma^{(1)}}{\sqrt{\omega \varepsilon_-^{(1)}}} [(\omega - \varepsilon_-^{(1)})c_1^\dagger + (\omega + \varepsilon_-^{(1)})c_1] + \frac{\text{sen} \gamma^{(1)}}{\sqrt{\omega \varepsilon_+^{(1)}}} [(\omega - \varepsilon_+^{(1)})c_2^\dagger + (\omega + \varepsilon_+^{(1)})c_2] \right\}, \\
 b^\dagger &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{-\text{sen} \gamma^{(1)}}{\sqrt{\omega_0 \varepsilon_-^{(1)}}} [(\omega_0 - \varepsilon_-^{(1)})c_1^\dagger + (\omega_0 + \varepsilon_-^{(1)})c_1] + \frac{\text{sen} \gamma^{(1)}}{\sqrt{\omega_0 \varepsilon_+^{(1)}}} [(\omega_0 - \varepsilon_+^{(1)})c_2^\dagger + (\omega_0 + \varepsilon_+^{(1)})c_2] \right\}, \\
 b &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{-\text{sen} \gamma^{(1)}}{\sqrt{\omega_0 \varepsilon_-^{(1)}}} [(\omega_0 - \varepsilon_-^{(1)})c_1^\dagger + (\omega_0 + \varepsilon_-^{(1)})c_1] + \frac{\cos \gamma^{(1)}}{\sqrt{\omega_0 \varepsilon_+^{(1)}}} [(\omega_0 - \varepsilon_+^{(1)})c_2^\dagger + (\omega_0 + \varepsilon_+^{(1)})c_2] \right\}.
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

As relações inversas, são dadas por

$$\begin{aligned}
 c_1^\dagger &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos \gamma^{(1)}}{\sqrt{\omega \varepsilon_-^{(1)}}} [(\varepsilon_-^{(1)} + \omega)a^\dagger + (\varepsilon_-^{(1)} - \omega)a] - \frac{\text{sen} \gamma^{(1)}}{\sqrt{\omega_0 \varepsilon_+^{(1)}}} [(\varepsilon_-^{(1)} + \omega_0)b_2^\dagger + (\varepsilon_-^{(1)} - \omega_0)b] \right\}, \\
 c_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos \gamma^{(1)}}{\sqrt{\omega \varepsilon_-^{(1)}}} [(\varepsilon_-^{(1)} - \omega)a^\dagger + (\varepsilon_-^{(1)} + \omega)a] - \frac{\text{sen} \gamma^{(1)}}{\sqrt{\omega_0 \varepsilon_+^{(1)}}} [(\varepsilon_-^{(1)} - \omega_0)b_2^\dagger + (\varepsilon_-^{(1)} + \omega_0)b] \right\}, \\
 c_2^\dagger &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\text{sen} \gamma^{(1)}}{\sqrt{\omega \varepsilon_+^{(1)}}} [(\varepsilon_+^{(1)} + \omega)a^\dagger + (\varepsilon_+^{(1)} - \omega)a] + \frac{\cos \gamma^{(1)}}{\sqrt{\omega_0 \varepsilon_+^{(1)}}} [(\varepsilon_+^{(1)} + \omega_0)b_2^\dagger + (\varepsilon_+^{(1)} - \omega_0)b] \right\}, \\
 c_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\text{sen} \gamma^{(1)}}{\sqrt{\omega \varepsilon_+^{(1)}}} [(\varepsilon_+^{(1)} - \omega)a^\dagger + (\varepsilon_+^{(1)} + \omega)a] + \frac{\cos \gamma^{(1)}}{\sqrt{\omega_0 \varepsilon_+^{(1)}}} [(\varepsilon_+^{(1)} - \omega_0)b_2^\dagger + (\varepsilon_+^{(1)} + \omega_0)b] \right\}.
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

O ângulo $\gamma^{(1)}$ que acaba por eliminar desacoplar os osciladores, pode ser encontrado a partir da relação

$$\tan 2\gamma^{(1)} = \frac{4\lambda \sqrt{\omega \omega_0}}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{B.12}$$

B.0.2 Fase super radiante

Podemos expressar os operadores bosônicos $\{a, a^\dagger, b, b^\dagger\}$ em função dos operadores bosônicos $\{e_1, e_1^\dagger, e_2, e_2^\dagger\}$ através do conjunto de transformações

$$\begin{aligned}
a^\dagger &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos \gamma^{(2)}}{\sqrt{\omega \varepsilon_-^{(2)}}} [(\omega + \varepsilon_-^{(2)})e_1^\dagger + (\omega - \varepsilon_-^{(2)})e_1] + \frac{\sin \gamma^{(2)}}{\sqrt{\omega \varepsilon_+^{(2)}}} [(\omega + \varepsilon_+^{(2)})e_2^\dagger + (\omega - \varepsilon_+^{(2)})e_2] \right\}, \\
a &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos \gamma^{(2)}}{\sqrt{\omega \varepsilon_-^{(2)}}} [(\omega - \varepsilon_-^{(2)})e_1^\dagger + (\omega + \varepsilon_-^{(2)})e_1] + \frac{\text{sen} \gamma^{(2)}}{\sqrt{\omega \varepsilon_+^{(2)}}} [(\omega - \varepsilon_+^{(2)})e_2^{(2)} + (\omega + \varepsilon_+^{(2)})e_2] \right\}, \\
b^\dagger &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{-\text{sen} \gamma^{(2)}}{\omega' \varepsilon_-^{(2)}} [(\omega' + \varepsilon_-^{(2)})e_1^\dagger + (\omega' - \varepsilon_-^{(2)})e_1] + \frac{\cos \gamma^{(2)}}{\omega' \varepsilon_+^{(2)}} [(\omega' + \varepsilon_+^{(2)})e_2^\dagger + (\omega' - \varepsilon_+^{(2)})e_2] \right\}, \\
b &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{-\text{sen} \gamma^{(2)}}{\sqrt{\omega' \varepsilon_-^{(2)}}} [(\omega' - \varepsilon_-^{(2)})e_1^\dagger + (\omega' + \varepsilon_-^{(2)})e_1] + \frac{\cos \gamma^{(2)}}{\sqrt{\omega' \varepsilon_+^{(2)}}} [(\omega' - \varepsilon_+^{(2)})e_2^{(2)} + (\omega' + \varepsilon_+^{(2)})e_2] \right\},
\end{aligned} \tag{B.13}$$

e as transformações inversas são dadas por

$$\begin{aligned}
e_1^\dagger &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos \gamma^{(2)}}{\sqrt{\omega \varepsilon_-^{(2)}}} [(\varepsilon_-^{(2)} + \omega)a^\dagger + (\varepsilon_-^{(2)} - \omega)a] - \frac{\text{sen} \gamma^{(2)}}{\sqrt{\omega' \varepsilon_-^{(2)}}} [(\varepsilon_-^{(2)} + \omega')b^\dagger + (\varepsilon_-^{(2)} - \omega')b] \right\}, \\
e_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos \gamma^{(2)}}{\sqrt{\omega \varepsilon_-^{(2)}}} [(\varepsilon_-^{(2)} - \omega)a^\dagger + (\varepsilon_-^{(2)} + \omega)a] - \frac{\text{sen} \gamma^{(2)}}{\sqrt{\omega' \varepsilon_-^{(2)}}} [(\varepsilon_-^{(2)} - \omega')b^\dagger + (\varepsilon_-^{(2)} + \omega')b] \right\}, \\
e_2^\dagger &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\text{sen} \gamma^{(2)}}{\sqrt{\omega \varepsilon_+^{(2)}}} [(\varepsilon_+^{(2)} + \omega)a^\dagger + (\varepsilon_+^{(2)} - \omega)a] + \frac{\cos \gamma^{(2)}}{\sqrt{\omega' \varepsilon_+^{(2)}}} [(\varepsilon_+^{(2)} + \omega')b^\dagger + (\varepsilon_+^{(2)} - \omega')b] \right\}, \\
e_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\text{sen} \gamma^{(2)}}{\sqrt{\omega \varepsilon_+^{(2)}}} [(\varepsilon_+^{(2)} - \omega)a^\dagger + (\varepsilon_+^{(2)} + \omega)a] + \frac{\cos \gamma^{(2)}}{\sqrt{\omega' \varepsilon_+^{(2)}}} [(\varepsilon_+^{(2)} - \omega')b^\dagger + (\varepsilon_+^{(2)} + \omega')b] \right\},
\end{aligned} \tag{B.14}$$

onde o ângulo $\gamma^{(2)}$ é dado por

$$\tan 2\gamma^{(2)} = \frac{2\omega\omega_0\mu^2}{\omega_0^2 - \mu^2\omega^2} \tag{B.15}$$

e a constante ω' é definida como

$$\omega' \equiv \frac{\omega_0}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} \right). \tag{B.16}$$

Operador de evolução temporal

O Hamiltoniano do sistema composto por um modo do campo de uma cavidade de frequência ω_0 , descrito pelos operadores bosônicos a e a^\dagger , interagindo com um espelho móvel $b(b^\dagger)$ de frequência ω_m é dado por

$$\begin{aligned} H &= \hbar\omega_0 a^\dagger a + \hbar\omega_m b^\dagger b - \hbar g a^\dagger a (b^\dagger + b), \\ H &= \hbar\omega_m (r a^\dagger a + b^\dagger b - k a^\dagger a (b^\dagger + b)), \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

onde $k = g/\omega_m$ e $r = \omega_0/\omega_m$. O operador de evolução temporal $U(t) = e^{iHt/\hbar}$ será escrito como [35]

$$U(t) = e^{-ira^\dagger a \tau} e^{-i(b^\dagger b - k a^\dagger a (b^\dagger + b)) \tau}, \quad (\text{C.2})$$

onde $\tau = t\omega_m$. Definindo o operador unitário T como $T = e^{-ka^\dagger a(b^\dagger - b)}$, temos os seguintes resultados

$$\begin{aligned} Tb^\dagger T^\dagger &= b^\dagger + ka^\dagger a, \\ TbT^\dagger &= b + ka^\dagger a, \\ Tb^\dagger bT^\dagger &= b^\dagger b + ka^\dagger a(b^\dagger + b) + k^2(a^\dagger a)^2, \\ Ta^\dagger aT^\dagger &= a^\dagger a, \end{aligned} \tag{C.3}$$

Utilizando o fato de que

$$Tf(\{X_i\})T^\dagger = f(\{TX_iT^\dagger\}), \tag{C.4}$$

podemos escrever a seguinte relação

$$TU(t)T^\dagger = e^{-ira^\dagger a\tau} e^{-ib^\dagger b\tau + ik^2(a^\dagger a)^2\tau}. \tag{C.5}$$

Multiplicando T^\dagger a esquerda e T a direita de (C.5), temos o operador de evolução temporal $U(\tau)$

$$\begin{aligned} U(\tau) &= e^{ka^\dagger a(b^\dagger - b)} e^{-ira^\dagger a\tau} e^{-ib^\dagger b\tau + ik^2(a^\dagger a)^2\tau} e^{-ka^\dagger a(b^\dagger - b)}, \\ U(\tau) &= e^{-ira^\dagger a\tau} e^{ik^2(a^\dagger a)^2\tau} e^{ka^\dagger a(b^\dagger - b)} e^{-ib^\dagger b\tau} e^{-ka^\dagger a(b^\dagger - b)}. \end{aligned} \tag{C.6}$$

Sendo que $e^{-ib^\dagger b\tau} a^\dagger a(b^\dagger - b) e^{ib^\dagger b\tau} = a^\dagger a(b^\dagger e^{-i\tau} - b e^{i\tau})$, podemos usar a relação (C.4) para escrever

$$e^{-ib^\dagger b\tau} e^{-ka^\dagger a(b^\dagger - b)} e^{ib^\dagger b\tau} = e^{-ka^\dagger a(b^\dagger e^{-i\tau} - b e^{i\tau})}, \tag{C.7}$$

finalmente, temos

$$e^{-ib^\dagger b\tau} e^{-ka^\dagger a(b^\dagger - b)} = e^{-ka^\dagger a(b^\dagger e^{-i\tau} - b e^{i\tau})} e^{-ib^\dagger b\tau}. \tag{C.8}$$

Substituindo (C.8) em (C.6), ficamos com

$$U(t) = e^{-ira^\dagger a \tau} e^{ik^2(a^\dagger a)^2 \tau} e^{ka^\dagger a(b^\dagger b)} e^{-ka^\dagger a(b^\dagger e^{-i\tau} - be^{i\tau})} e^{-ib^\dagger b \tau} \quad (\text{C.9})$$

Devido ao fato de que

$$e^{ka^\dagger a(b^\dagger + b)} e^{-ka^\dagger a(b^\dagger e^{-i\tau} - be^{i\tau})} = e^{-k^2(a^\dagger a)^2} i \sin(\tau) e^{ka^\dagger a(b^\dagger \eta - b \eta^*)} e^{-ib^\dagger b \tau}, \quad (\text{C.10})$$

onde $\eta = (1 - e^{-i\tau})$, podemos reescrever $U(\tau)$ como

$$U(\tau) = e^{-ira^\dagger a \tau} e^{ik^2(a^\dagger a)^2(\tau - \sin(\tau))} e^{ka^\dagger a(\eta b^\dagger - \eta^* b)} e^{-ib^\dagger b \tau}. \quad (\text{C.11})$$



Referências Bibliográficas

- [1] M. O. Scully and M. S. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press. 1997.
- [2] E. T. Jaynes and F. W. Cummings. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *IEEE*, 51(1):89, Jan 1963.
- [3] R. H. Dicke. Coherence in spontaneous radiation processes. *Phys. Rev.*, 93(1):99, Jan 1954.
- [4] H. T. Quan, Z. Song, X. F. Liu, P. Zanardi, and C. P. Sun. Decay of loschmidt echo enhanced by quantum criticality. *Phys. Rev. Lett.*, 96(14):140604, Apr 2006.
- [5] Qing Ai, Tao Shi, G. Long, and C. P. Sun. Induced entanglement enhanced by quantum criticality. *Phys. Rev. A*, 78(2):022327, Aug 2008.
- [6] Jingfu Zhang, Xinhua Peng, Nageswaran Rajendran, and Dieter Suter. Detection of quantum critical points by a probe qubit. *Phys. Rev. Lett.*, 100(10):100501, Mar 2008.
- [7] Tobias J. Osborne and Michael A. Nielsen. Entanglement in a simple quantum phase transition. *Phys. Rev. A*, 66(3):032110, Sep 2002.

- [8] Julien Vidal, Guillaume Palacios, and Rémy Mosseri. Entanglement in a second-order quantum phase transition. *Phys. Rev. A*, 69(2):022107, Feb 2004.
- [9] C. Genes, D. Vitali, and P. Tombesi. Emergence of atom-light-mirror entanglement inside an optical cavity. *Phys. Rev. A*, 77(5):050307, May 2008.
- [10] D. Meiser and P. Meystre. Coupled dynamics of atoms and radiation-pressure-driven interferometers. *Phys. Rev. A*, 73(3):033417, Mar 2006.
- [11] H. Ian, Z. R. Gong, Yu-xi Liu, C. P. Sun, and Franco Nori. Cavity optomechanical coupling assisted by an atomic gas. *Phys. Rev. A*, 78(1):013824, Jul 2008.
- [12] H Ian Yue Chang and C. P. Sun. Triple coupling and parameter resonance in quantum optomechanics with a single atom. *Journal of Physics B*, 42(1):21, Outubro 2009.
- [13] S. Sachdev. Quantum Phase Transitions. Disponível em: <<http://qpt.physics.harvard.edu/allpap.html>>, Acessado em: outubro 2010.
- [14] Franco Dalfovo, Stefano Giorgini, Lev P. Pitaevskii, and Sandro Stringari. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Rev. Mod. Phys.*, 71(3):463–512, Apr 1999.
- [15] C. K. Law. Effective Hamiltonian for the radiation in a cavity with a moving mirror and a time-varying dielectric medium. *Phys. Rev. A*, 49(1):433–437, Jan 1994.
- [16] N. Goldenfeld. *Lectures in Phase Transitions and the Renormalization Group*. Perseus Books, 1992.
- [17] S. Sachdev. *Quantum Phase Transition*. Cambridge University Press, 1999.
- [18] D. Bitko, T. F. Rosenbaum, and G. Aeppli. Quantum critical behavior for a model magnet. *Phys. Rev. Lett.*, 77(5):940–943, Jul 1996.
- [19] Markus Greiner, Olaf Mandel, Tilman Esslinger, Theodor W. Hänsch, and Immanuel Bloch. Quantum phase transition from a superfluid to a mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature*, 415:39, 2001.

- [20] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269:198, 1995.
- [21] T. Aoki, B. Dikan, E. Wilcut, W. P. Bowen, A. S. Parkins, T. J. Kippenberg, K. J. Vahala, and H. J. Kimble. Observation of strong coupling between one atom and a monolithic microresonator. *Nature*, 443:671, 2006.
- [22] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, 108(5):1175–1204, Dec 1957.
- [23] M. A. Kastner, R. J. Birgeneau, G. Shirane, and Y. Endoh. Magnetic, transport, and optical properties of monolayer copper oxides. *Rev. Mod. Phys.*, 70(3):897–928, Jul 1998.
- [24] L. Mandel e E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press.
- [25] W. H. Louisell. *Quantum Statistical Properties of Radiation*. John Wiley & Sons, 1973.
- [26] L. Allen and J. H. Eberly. *Optical Resonance and Two-Level Atoms*. Dover Pub., 1987.
- [27] Clive Emary and Tobias Brandes. Chaos and the quantum phase transition in the Dicke model. *Phys. Rev. E*, 67(6):066203, Jun 2003.
- [28] E. F. Nichols and G. F. Hull. A preliminary communication on the pressure of heat and light radiation. *Phys. Rev. (Series I)*, 13(5):307–320, Nov 1901.
- [29] E. F. Nichols and G. F. Hull. The pressure due to radiation. (second paper.). *Phys. Rev. (Series I)*, 17(1):26–50, Jul 1903.
- [30] E. F. Nichols and G. F. Hull. The pressure due to radiation. (second paper.). *Phys. Rev. (Series I)*, 17(2):91, Aug 1903.
- [31] A. Ashkin. Trapping of atoms by resonance radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 40(12):729–732, Mar 1978.

- [32] C. K. Law. Interaction between a moving mirror and radiation pressure: A Hamiltonian formulation. *Phys. Rev. A*, 51(3):2537–2541, Mar 1995.
- [33] K. A. Milton. The Casimir effect: Physical manifestations of zero-point energy. <http://arxiv.org/abs/hep-th/9901011>, Oct 1999.
- [34] A. Ashkin and J. M. Dziedzic. Optical levitation by radiation pressure. *Appl. Phys. Lett.*, 19(8):283–285, Oct 1971.
- [35] S. Bose, K. Jacobs, and P. L. Knight. Preparation of nonclassical states in cavities with a moving mirror. *Phys. Rev. A*, 56(5):4175–4186, Nov 1997.
- [36] P. L. Knight C. C. Gerry. Quantum superpositions and schrödinger cat states in quantum optics. *Am. J. Phys.*, 65(10):964, 1997.
- [37] J. P. Santos, F. L. Semião, and K. Furuya. Probing the quantum phase transition in the Dicke model through mechanical vibrations. *Phys. Rev. A*, 82(6):063801, Dec 2010.
- [38] F. Dimer, B. Estienne, A. S. Parkins, and H. J. Carmichael. Proposed realization of the Dicke-model quantum phase transition in an optical cavity qed system. *Phys. Rev. A*, 75(1):013804, Jan 2007.
- [39] Neill Lambert, Clive Emary, and Tobias Brandes. Entanglement and the phase transition in single-mode superradiance. *Phys. Rev. Lett.*, 92(7):073602, Feb 2004.
- [40] Hayato Goto and Kouichi Ichimura. Quantum phase transition in the generalized Dicke model: Inhomogeneous coupling and universality. *Phys. Rev. A*, 77(5):053811, May 2008.
- [41] Simon Gröblacher, Klemens Hammerer, Michael R. Vanner, and Markus Aspelmeyer. Observation of strong coupling between a micromechanical resonator and an optical cavity field. *Nature*, 460:724, 2009.
- [42] F.L. Semião M. Paternostro. (em preparação).

- [43] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, third edition, 1999.