

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO - FÍSICA

ROBSON CONRADO BONETTI

SINCRONIZAÇÃO E MEMÓRIAS EM OSCILADORES
COLPITTS ACOPLADOS

PONTA GROSSA
2014

ROBSON CONRADO BONETTI

SINCRONIZAÇÃO E MEMÓRIAS EM OSCILADORES
COLPITTS ACOPLADOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências, área de concentração Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como requisito para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Marcos Batista.

Co-orientador: Prof. Dr. Silvio Luiz Thomaz de Souza.

PONTA GROSSA
2014

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

B712 Bonetti, Robson Conrado
Sincronização e memórias em osciladores
colpitts acoplados/ Robson Conrado
Bonetti. Ponta Grossa, 2014.
134f.

Tese (Doutorado em Ciências - Área de
Concentração: Física), Universidade
Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Marcos
Batista.

Coorientador: Prof. Dr. Silvio Luiz
Thomaz de Souza.

1.Oscilador Colpitts. 2.Sincronização e
memórias. I.Batista, Antonio Marcos. II.
Souza, Silvio Luiz Thomaz de. III.
Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Doutorado em Ciências. IV. T.

CDD: 621.381

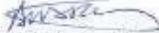
TERMO DE APROVAÇÃO

ROBSON CONRADO BONETTI

"Sincronização e Memórias em Osciladores Colpitts Acoplados"

Tese aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor no Programa de Pós-Graduação em Ciências - Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador:


Prof. Dr. Antonio Marcos Batista
Departamento de Matemática e Estatística - UEPG/PR


Prof. Dr. Zwinglio de Oliveira Guimarães Filho
Instituto de Física/Departamento de Física Aplicada – USP/SP


Prof. Dr. Adriano Doff Sotta Gomes
Departamento Acadêmico de Física - UTFPR/PR


Prof. Dr. Gelson Biscaia de Souza
Departamento de Física - UEPG/PR


Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade
Departamento de Matemática e Estatística - UEPG/PR

Ponta Grossa, 20 de outubro de 2014

Dedicatória

À minha esposa Melissa e ao meu amado
filho Theo.

Agradecimentos

- À Deus pela vida;
- À minha esposa Melissa e meu filho Theo pela compreensão e participação em todos os momentos desta longa e dura caminhada, desde a graduação até o doutorado;
- Ao orientador e amigo Professor Dr. Antonio Marcos Batista por seus ensinamentos durante o mestrado e o doutorado, pela sua paciência e dedicação;
- Ao co-orientador Professor Dr. Silvio Luiz Thomaz de Souza pelo profissionalismo, amizade e ensinamentos;
- À Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG) e ao Programa de Pós-Graduação em Ciências-Física;
- Aos meus pais (Jaime e Inez) e irmãos (Cleverson, Leanderson e Mônica) pelo apoio e incentivo;
- À Secretaria Estadual de Educação do Estado do Paraná - SEED/PR, pela liberação para cursar parte do doutorado;
- À todos os professores e funcionários do Programa de Pós-graduação em Ciências-Física (mestrado e doutorado), Departamento de Física da UEPG durante minha graduação, agradeço por toda a participação e colaboração nos conhecimentos adquiridos;
- Aos professores membros das bancas de qualificação e defesa da Tese pelas correções e sugestões;
- À todos os amigos da sala 105: Batista, Kelly, Danilo, Marli, Regiane, Brad, Vardo, Moisés, Paulo, Ricardo, Rafael e Carlos, obrigado pela amizade;
- À todos que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão deste trabalho.

*“Em todo caos há um universo, e em toda
desordem, há uma ordem oculta” (Grimm)*

Resumo

Concentramos o estudo nos osciladores Colpitts. Escolhemos este circuito devido ao fato de que ele pode ser útil em aplicações para sistemas de comunicação, bem como, exibe um rico comportamento dinâmico em certos valores de parâmetros. No oscilador Colpitts, a frequência de operação pode variar de alguns Hertz até a faixa de frequências de microondas, característica esta que permite a utilização deste circuito para transmitir informações em canais com diferentes larguras de banda de frequência. Esta tese tem duas partes: (i) transiente superpersistente em osciladores Colpitts numa configuração mestre-escravo; (ii) memórias de curta duração em Colpitts acoplados. Consideramos osciladores Colpitts acoplados de acordo com uma configuração mestre-escravo para estudar a sincronização de caos. Revelamos a existência de transientes superpersistentes neste sistema acoplado. Além disso, mostramos que um ruído aditivo no sistema escravo pode suprimir a sincronização caótica. Quando a sincronização não é suprimida, o ruído induz transientes mais longos. Além disso, considerou-se uma rede de circuitos acoplados, osciladores Colpitts, e investigamos o armazenamento de memória com uma entrada externa. As memórias foram definidas em termos das diferenças entre as amplitudes das correntes elétricas. Mostramos a existência de múltiplas memórias, o que nos permite utilizar estes sistemas para codificar sinais.

Palavras-chave: Oscilador Colpitts, sincronização e memórias.

Abstract

We focus on the study of Colpitts oscillators. We have chosen this circuit due to the fact that it can be useful in applications to communication systems, as well as, it exhibits a rich dynamical behaviour for certain parameter values. In the Colpitts oscillator the operation frequency can vary from few Hertz up to the microwave frequency range, a characteristic that enables the use of this circuit to transmit information in channels with different frequency bandwidths. This thesis has two parts: (i) super persistent transient in a master-slave configuration with Colpitts oscillators, and (ii) short-time memories in coupled Colpitts. We considered Colpitts oscillators coupled according to a master-slave configuration to study chaos synchronisation. We revealed the existence of super persistent transients in this coupled system. Moreover, we showed that an additive noise in the slave system may suppress chaos synchronisation. When synchronisation is not suppressed, the noise induces longer transients. Moreover, we considered a network of coupled circuits, Colpitts oscillators, and we investigated memory storage with an external input. The memories were defined in terms of the differences among the electrical currents amplitudes. We showed the existence of multiple memories, which enables us to use these systems to encode signals.

Keywords: Colpitts oscillators, synchronisation, memories.

Lista de Tabelas

2.1	Tabela referente a classificação dos sistemas espacialmente estendidos.	p.28
-----	---	------

Lista de Figuras

2.1	Família de soluções para $\dot{x} = ax$. (a) $a > 0$: crescimento exponencial; (b) $a < 0$ decaimento exponencial; (c) espaço de fase.	p. 11
2.2	Soluções para a Equação diferencial logística (2.5). (a) Quando a condição inicial for positiva as curvas de solução tendem para $x = 1$ à medida que t aumenta e quando a condição inicial é negativa as curvas divergem; (b) espaço de fase.	p. 12
2.3	Atratores: (a) ponto fixo, (b) ciclo-limite, (c) superfície toroidal e (d) atrator caótico.	p. 18
2.4	Ilustração da divergência de duas condições iniciais próximas.	p. 18
2.5	Evolução de um volume esférico no espaço de fase.	p. 20
2.6	Esboço dos rolos de convecção, sem levar em consideração os efeitos de borda.	p. 24
2.7	Atrator de Lorenz para $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$	p. 27
3.1	Diferença entre oscilador Colpitts e oscilador Hartley, onde A , B e C podem ser capacitores C ou indutores L	p. 32
3.2	(a) Esquema básico de um oscilador; (b) elementos de um oscilador.	p. 33
3.3	Analogia mecânica para um oscilador Classe C.	p. 35
3.4	Diagrama de blocos para um amplificador realimentado, onde o bloco $A(s)$ é o amplificador e o bloco $f(s)$ a malha de realimentação.	p. 37
3.5	Amplificador em malha aberta.	p. 38
3.6	Localização das frequências naturais no plano complexo seguindo a condição de oscilação ou a condição de arranque correspondente.	p. 40

3.7	Dependência da estabilidade da frequência do oscilador com a inclinação da resposta em fase.	p. 42
3.8	(a) Construção do transistor NPN; (b) Simbologia.	p. 44
3.9	(a) Estrutura de um diodo de junção; (b) Camada de depleção do diodo. . . .	p. 45
3.10	(a) Diagrama esquemático do oscilador Colpitts; (b) modelo do transistor numa configuração base comum (CB).	p. 48
3.11	Característica não-linear do resistor R_E de acordo com o modelo exponencial (EXP) e com o modelo linear por partes (PWL) no oscilador Colpitts.	p. 51
3.12	Cascata de Feigenbaum para o sistema de Equações (3.40) com ciclo quase-sinusoidal onde (a) órbita de período 1 com $I_0 = 0,85mA$ e $g^* = 1,9674$; (b) órbita de período 2 com $I_0 = 1,05mA$ e $g^* = 2,4305$; (c) órbita de período 4 com $I_0 = 1,16mA$ e $g^* = 2,6853$; (d) atrator caótico com $I_0 = 1,21mA$ e $g^* = 2,8002$	p. 61
3.13	(a) Diagrama de bifurcações para o oscilador Colpitts; (b) janelas de periodicidade.	p. 62
3.14	(a) Diagrama de bifurcações; (b) expoente de Lyapunov.	p. 63
4.1	Esquema de um par de osciladores Colpitts acoplados numa configuração mestre-escravo.	p. 66
4.2	Sistema de dois pêndulos: (a) pêndulos conectados por uma haste, (b) pêndulos suspensos por suportes isolados, (c) pêndulos compartilhando o mesmo suporte de sustentação.	p. 69
4.3	Sincronização dos circuitos mestre-escravo, plotando variável de estado versus tempo para os seguintes parâmetros de acoplamento: (a) $\varepsilon = 0,05$; (b) $\varepsilon = 0,1$.	p. 72
4.4	Evolução temporal do erro de sincronização Δ considerando: (a) $\varepsilon = 0,05$ e (b) $\varepsilon = 0,089$	p. 73
4.5	Domínios sincronizados (região verde) no espaço de parâmetros no plano $g^* \times \varepsilon$. A linha preta separa as regiões com e sem estabilidade local de sincronização, obtida através dos expoentes de Lyapunov.	p. 74

4.6	Histograma dos intervalos de tempo transiente para um total de 10^4 diferentes condições iniciais de x_2 e x_5 no intervalo de 0 à 0,001, onde consideramos $g = 2,863$, (a) $\varepsilon = 0,086$ (círculos vermelhos) e (b) $\varepsilon = 0,09$ (quadrados pretos).	p. 76
4.7	Dimensionamento do transiente superpersistente pela variação da força de acoplamento $g = 2,863$ e $\varepsilon_c = 0,086$. Cada ponto representa a média de mais de 100 diferentes condições iniciais de x_2 e x_5 . A linha sólida é o ajuste dos mínimos quadrados com declividade $-470,31$.	p. 77
4.8	Erro da média temporal de sincronização versus força de acoplamento para $g^* = 2,863$, $A = 0,1$ (círculos verdes), $A = 0,5$ (círculos vermelhos) e $A = 1,0$ (círculos pretos). Esses três casos tem exatamente a mesma condição inicial.	p. 80
4.9	Domínios sincronizados (região verde) considerando os mesmos parâmetros utilizados na Figura 4.5 e com a adição de um pequeno ruído $A = 3 \times 10^{-5}$.	p. 80
4.10	(a) ε^* versus A , onde os círculos pretos correspondem a $\tau_M \approx 10^4$. (b) Histograma do tempo transiente considerando $g = 2,863$, $\varepsilon = 1$, $A = 5 \times 10^{-5}$ (círculos negros) e $A = 6 \times 10^{-5}$ (quadrados vermelhos).	p. 81
5.1	Partículas acopladas com seus vizinhos através de molas elásticas.	p. 83
5.2	$c_n^{(i)}$ x n . O tamanho da rede é $N = 10$, com $K = 0,01$. (a) $A_n = 9$ para n ímpar e $A_n = 10$ para n par. (b) $A_n = 10$ para qualquer n e $r = 10^{-8}$.	p. 85
5.3	$c_n^{(i)}$ x n . O tamanho da rede é $N = 10$, com $K = 0,01$. A amplitude do forçamento muda de $A_n = 5$ para $A_n = 10$ em intervalos regulares de tempo. (a) $r = 0$ e (b) $r = 10^{-8}$.	p. 88
5.4	Construção de grafos aleatórios com 10 vértices e conectando-os com probabilidade (a) $P = 0$, (b) $P \approx 0,1$ e (c) $P = 0,2$.	p. 89
5.5	Modelo de mundo pequeno para $z = 4$ e $N = 20$. A rede passa de uma estrutura regular para uma estrutura aleatória com o aumento da probabilidade P .	p. 92
5.6	Rede regular e uma rede Newman-Watts produzida a partir dela.	p. 92

5.7	Variável de curvatura média em função do tamanho de rede N para (a) $P = 0,1$ e (b) $P = 0,7$. (c) e (d) são os desvios padrão correspondentes à (a) e (b), respectivamente. Outros parâmetros são $A_n = 10$, $K = 0,01$ e $r = 3,5 \times 10^{-9}$.	p. 96
5.8	Plano de parâmetros para a rede: as regiões brancas correspondem somente a uma memória permanente e as regiões em cinza correspondem a formação de múltiplas memórias. (a) $P \times r$ com $K = 0,01$. (b) $P \times K$ com $r = 10^{-9}$. Outros parâmetros são $A_n = 10$ e $N = 10$.	p. 97
5.9	$c^{(i)}(t) \times t$, com 500 osciladores Colpitts, $V_{ext} = 0$, $\varepsilon = 0$, $Q = 1,77$, $k = 0,5$, $\alpha_F = 0,996$ e $g^* = 2,0$.	p. 99
5.10	$c^{(i)}(t) \times t$, com 10 osciladores Colpitts, $V_{ext} = 0,1$ e $\varepsilon = 0,05$.	p. 100
5.11	$c^{(i)}(t) \times t$ com $\varepsilon = 0,1$ e $V_{ext} = 0,1$: (a) $N = 10$, (b) $N = 100$, (c) $N = 150$ e (d) $N = 200$.	p. 101
5.12	(a) $c_L \times t$ e (b) $\sigma_L \times t$. $\varepsilon = 0,1$, $V_{ext} = 0,1$, curva preta $N = 10$, curva vermelha $N = 100$, curva verde $N = 150$ e curva azul $N = 200$.	p. 102

Lista de símbolos

C	Capacitância elétrica
q	Carga do elétron
G_0	Condutância elétrica
$\langle z \rangle$	Conectividade média
$\mathcal{M}^{(i)}$	Conexões aleatórias
ε	Constante de acoplamento dos circuitos elétricos
k_b	Constante de Boltzmann
$\alpha_F I_E$	Corrente de emissão do diodo
I_B	Corrente elétrica da base
I_C	Corrente elétrica do coletor
I_E	Corrente elétrica do emissor
I_L	Corrente elétrica do indutor
I_S	Corrente elétrica de saturação
I	Corrente elétrica da ODC
σ_L	Desvio padrão da rede
k	Divisor de tensão capacitivo
γ	Expoente da escala algébrica
λ	Expoente de Lyapunov
$\bar{\Delta}$	Erro da média temporal
Δ	Erro médio entre variáveis de estado
Q	Fator de qualidade de ressonância da rede
V_{CC}	Fonte de alimentação

I_0	Fonte de corrente elétrica
A_n	Forçamento periódico externo
ω_0	Frequência de oscilação
n_{exp}	Função característica exponencial
n_{PWL}	Função característica linear por partes
$\text{int}\{z\}$	Função descontínua
g^*	Ganho da malha
α_F	Ganho de corrente elétrica
L	Indutância elétrica
m	Massa
I_{ij}	Matriz de conexão
x_{max}	Máximo local
z_i	Número de conexões
N_1	Número de conexões não-locais
N	Número de partículas, circuitos, osciladores ou elementos conectados
$P(\tau)$	Número de trajetórias que apresentam movimento caótico
N_T	Número total de conexões
p_c	Parâmetro crítico do sistema
K	Parâmetro de acoplamento ou constante elástica da mola
p	Parâmetro do sistema
r	Parâmetro que controla a não-linearidade do sistema
A	Perturbação estocástica
V_{ext}	Perturbação externa
Q_0	Polarização da corrente elétrica
E	Ponto de equilíbrio
O	Ponto de operação
i	Posição dos mapas, nós, sítios, osciladores, circuitos
j	Posição dos nós, sítios, osciladores, circuitos escolhidos aleatoriamente

P	Probabilidade
R^*	Reostato de resistência variável
R	Resistência elétrica
R_E	Resistência elétrica não-linear
t'	Tempo
t	Tempo contínuo
n	Tempo discreto
τ	Tempo transiente
τ_M	Tempo transiente médio
V	Tensão elétrica
V_{in}	Tensão elétrica de entrada
V_{out}	Tensão elétrica de saída
V_{BE}	Tensão elétrica na junção BE
V_{CB}	Tensão elétrica na junção CB
V_{CE}	Tensão elétrica na junção CE
V_{C_1}	Tensão elétrica no capacitor C_1
V_{C_2}	Tensão elétrica no capacitor C_2
V_{th}	Tensão limite
V_T	Tensão térmica
$A^{(i)}$	Termo de acoplamento
T	Transistor
$c_n^{(i)}$	Variável de curvatura
$c^{(i)}(t)$	Variável de curvatura a tempo contínuo
c_L	Variável de curvatura média da rede
x	Variável de estado
$r(t)$	Variável pseudo-aleatória
v	Velocidade da ODC

Lista de abreviaturas e siglas

AWGN	Additive White Gaussian Noise
CB	Base comum
BJT	Bipolar Junction Transistor
BIBO	Bounded Input Bounded Output
CC	Coletor comum
CA	Corrente elétrica alternada
CC	Corrente elétrica contínua
EC	Emissor comum
EDO	Equação diferencial ordinária
EDP	Equação diferencial parcial
FET	Field Effect Transistor
EXP	Modelo exponencial
PWL	Modelo linear por partes
ODC	Ondas de densidade de carga
SPLD	Semiplano lateral direito
SPLE	Semiplano lateral esquerdo
SLIT	Sistemas lineares invariantes no tempo
NbSe ₃	Trisseleneto de nióbio

Sumário

1	Introdução	p. 1
2	Equações diferenciais	p. 7
2.1	Equações diferenciais lineares e não-lineares	p. 10
2.2	Sistemas dinâmicos não-lineares	p. 14
2.2.1	Atratores	p. 15
2.2.2	Expoente de Lyapunov	p. 19
2.2.3	Atrator caótico	p. 23
2.3	Sistemas dinâmicos espaço-temporais	p. 27
3	Oscilador Colpitts	p. 30
3.1	Osciladores eletrônicos	p. 31
3.2	Circuito elétrico e equações de estado	p. 47
3.2.1	Equações de estado normalizadas	p. 55
3.3	Comportamento Caótico	p. 60
4	Acoplamento mestre-escravo e superpersistente	p. 65
4.1	Circuito elétrico acoplado	p. 65
4.2	Sincronização caótica	p. 68
4.3	Transiente caótico	p. 75

4.4	O efeito do ruído	p. 78
5	Memórias no oscilador Colpitts	p. 82
5.1	Formação de Memórias	p. 82
5.2	Memórias em uma rede com conexões aleatórias	p. 89
5.3	Memórias em uma rede de osciladores Colpitts	p. 97
6	Conclusões	p. 103
	Referências	p. 107

1 *Introdução*

Na atualidade sistemas dinâmicos não-lineares são modelos matemáticos para inúmeros problemas na física, química, biologia, economia, engenharia e áreas correlatas [1]. Estes sistemas dinâmicos não-lineares são normalmente associados às equações diferenciais não-lineares. Escolhemos osciladores caóticos por nos proporcionar um campo gigantesco de novos problemas para modelar, principalmente na área de engenharia de telecomunicações e circuitos eletrônicos, as quais necessitam do entendimento dos fenômenos não-lineares exibidos por certos osciladores eletrônicos [2, 3].

Os sistemas dinâmicos regidos por equações diferenciais que descrevem todo tipo de processo que se desenvolve continuamente no tempo são estudados desde o século XVIII com os primeiros trabalhos de Isaac Newton usando uma abordagem baseada em métodos geométricos [4]. Nos séculos seguintes numerosas técnicas foram desenvolvidas para encontrar soluções para estas equações. Porém, quase todos esses métodos analíticos funcionavam basicamente para equações lineares. Os casos não-lineares mostraram-se bem mais difíceis de serem resolvidos e analisados, uma vez que a dinâmica não-linear estuda sistemas de equações de evolução, onde o tempo é uma variável independente [5].

Nesta época as soluções eram limitadas e o comportamento assintótico do sistema convergia para um ponto fixo, solução periódica ou para uma solução quase-periódica. Com os trabalhos de Henry Poincaré no clássico problema dos três corpos [6] da mecânica clássica e utilizando os conceitos de variedade e análise qualitativas, Poincaré mostrou que as soluções assintóticas destes problemas eram bem mais complexas do que soluções conhecidas na época, deste modo estava descoberto o que hoje chamamos de caos. Poincaré percebeu que pequenas diferenças no estado inicial desses sistemas provocam grandes diferenças no estado final, ou seja, caos ocorre num sistema determinístico quando seu comportamento

é aperiódico (irregular) e quando apresenta dependência sensível às condições iniciais [7].

Os sistemas dinâmicos não-lineares existem em abundância na natureza e têm sido amplamente estudados na comunidade científica devido à sua interdisciplinaridade e aplicabilidade nas mais diversas áreas científicas. Na física aparecem em sistemas de baixa dimensão [8], dinâmica de populações com espécies em competição [9], redes neurais [10], geração de diferentes espécies de plânctons [11], redes de mundo pequeno [12], catalisação de reações químicas [13], redes sem escala [14], pulsos de neurônios [15], ciclos de epidemias [16], modelos climáticos [17] e sistemas elétricos e eletrônicos [18, 19]. Esses são alguns exemplos, cujo comportamento pode ser modelado em sistemas não-lineares.

A grande maioria destes sistemas não pode ser resolvido analiticamente, dificultando assim o seu estudo. Por isso é necessário analisá-los através de simulações numéricas. Estes sistemas apresentam características comuns, provenientes da não linearidade, como pontos de equilíbrio instáveis e estáveis, comportamentos periódicos e caóticos, duplicação de período, caos transiente, dentre outros [20–22]. Para o estudo desses tipos de sistemas dinâmicos, deve-se usar sistemas espacialmente estendidos [23], onde podemos ter: equações diferenciais parciais, autômatos celulares, redes de mapas acoplados e cadeia de osciladores acoplados.

A ocorrência de um comportamento caótico num sistema dinâmico pode ser desejável ou indesejável. No primeiro caso, podemos citar como exemplo as reações químicas onde a catalisação das reações é acelerada no regime caótico ou para o favorecimento da coexistência de espécies na natureza. Por outro lado, torna-se indesejável em sistemas onde a dinâmica deve ser completamente previsível, como o que ocorre em osciladores eletrônicos de frequência. Deste modo, nestes casos é fundamental garantir a estabilidade do comportamento desses sistemas, para que cada um deles desempenhe com eficiência seu papel. Assim, o estudo da duplicação de período, bifurcações, sincronização, formação de padrões de memórias e caos transiente num sistema dinâmico, são temas de alta relevância.

Primeiramente verificamos o comportamento caótico em osciladores elétricos proposto por Michael P. Kennedy, Oscar De Feo e Gian M. Maggio [19, 24], essas referências utilizaram o oscilador Colpitts [25], que é um dos osciladores usados em eletrônica para aplicações em frequências de rádio. Com este oscilador buscamos estudar o comportamento

caótico através de um sistema contendo três equações diferenciais autônomas de tempo contínuo, contendo um indutor linear, dois capacitores lineares, duas resistências lineares, duas fontes de tensão independentes, uma fonte de corrente linear controlada e uma resistência não-linear de tensão controlada. O resistor não-linear tem características de um modelo linear por partes (PWL - *Piece Wise Linear*), que permite modelar elementos de características não-lineares, aproximando a característica real da tensão *versus* corrente do elemento não-linear para uma curva linearizada. Conforme for a escolha dos parâmetros, este modelo exhibe cascata de duplicação de período ou comportamento caótico [26].

Estudando o oscilador Colpitts, procuramos desenvolver a mesma rotina computacional proposta por Kennedy, Feo e Maggio [19,24] com objetivo de verificar a simplicidade do modelo e se o mesmo apresenta ou não comportamento caótico. Confirmamos o que era esperado, ou seja, o modelo do oscilador Colpitts funciona muito bem e como descrito nas referências, exhibe a duplicação de período e comportamento caótico.

Para evidenciar a funcionalidade e o comportamento caótico no oscilador Colpitts, realizamos o acoplamento entre dois osciladores Colpitts sendo um mestre e o outro escravo, buscando o controle e sincronismo entre os circuitos [26]. A dinâmica caótica traz características interessantes sobre o oscilador Colpitts, especialmente na comunicação segura dos dados [27, 28]. Na atualidade, a maioria dos trabalhos em sistemas de comunicação caótica é baseada em sincronização caótica numa estrutura mestre-escravo, de modo que o sistema escravo é impulsionado através de um sinal derivado do sistema mestre [29, 30]. Diversas áreas de telecomunicações e processamento de sinais não são exceção para esta aplicação, especialmente após os trabalhos de Louis Pecora e Thomas Carroll [29]. A aplicação caótica para estes casos vai desde a modulação analógica e digital, criptografia, geração de sequências pseudo-aleatórias, marcas d'água digitais, entre muitos outros [31,32].

Os sistemas propostos funcionam muito bem em ambientes ideais, embora a presença de ruídos e distorções no canal de comunicação entre os circuitos trazem resultados insatisfatórios quando a sincronização caótica é utilizada [33], na maioria dos casos ocasionada devido a sensível dependência às condições iniciais que caracterizam o comportamento caótico [34–36]. Alguns trabalhos mostram que, quando existe um ruído aditivo no circuito, ocorre um erro de sincronização, que muitas vezes interrompe a comunicação entre os circuitos [37].

Deste modo, investigamos numericamente um modelo de acoplamento entre osciladores Colpitts [38] de modo que ocorra o sincronismo entre os circuitos e a informação passada entre os circuitos seja mais robusta e eficaz ao ruído entre o sistema mestre e o escravo utilizando para isso um sistema de equações diferenciais [33]. O tempo para atingir a sincronização entre os circuitos, depende fortemente das condições iniciais, algumas delas responsáveis por transientes muito longos [38].

Um comportamento transiente é descrito como o tempo necessário até o sistema chegar a uma solução que não varia com o tempo, ou seja, um atrator. É o estado que o sistema adquire nos instantes iniciais de desenvolvimento, e não reflete o verdadeiro comportamento do sistema que será distinto passado um certo intervalo de tempo. Caos transiente é utilizado para descrever respostas com características caóticas, mas que se tornam periódicas após um período de tempo [39]. Assim, transcorrido um período de tempo, as órbitas deixam a região caótica, estabelecendo um comportamento periódico ou quase-periódico.

No caos espaço-temporal é comum ocorrer transientes longos e quando o tempo para alcançar o atrator é muito grande, fica caracterizado o supertransiente [23, 40, 41]. Na classe de sistemas que desenvolvem caos espaço-temporal, a duração do transiente até a aproximação com um atrator aumenta exponencialmente com o tamanho do sistema. Certas combinações de condições iniciais podem recair sobre uma variedade caótica estável, necessitando assim de um grande número de iterações para se afastar dessa variedade e se aproximar de um atrator do sistema [40].

Em sistemas dinâmicos de alta dimensão o comportamento transiente passa a ser chamado de supertransiente, como o que ocorre num fluido dinâmico turbulento. Por outro lado, quando o sistema é de baixa dimensão usa-se o termo transiente superpersistente [42]. Esse é o caso, por exemplo, do sistema estudado nessa tese [38], que é composto por dois osciladores Colpitts acoplados, que tem seis dimensões. Este tipo de transiente caótico foi descoberto em 1983 por Grebogi, Ott e Yorke [43], são acionados por uma bifurcação de dois pontos fixos instáveis, onde uma órbita periódica instável no limite de um atrator caótico colide com outra órbita periódica instável que pré-existe fora do conjunto. Devido a coalescência do par de pontos fixos instáveis, estes transientes caóticos tem uma duração extraordinariamente longa.

Certos sistemas dinâmicos não-lineares com muitos graus de liberdade, quando submetidos a uma perturbação externa que pode ser um potencial elétrico, uma colisão, entre outros, armazenam a informação por um tempo transiente e podem devolvê-la novamente ao sistema dinâmico, característica esta denominada de memória. Caso o sistema sincronize, dizemos que a memória é zero e quando o sistema não sincroniza aparecem múltiplas memórias. Para explicar a formação de padrões de memórias, Coppersmith e colaboradores [44] usaram uma rede de mapas acoplados para simular o efeito das memórias de curta duração em experiências de ondas de densidade de carga (ODC) nas quais sequências de pulsos elétricos periódicos são aplicados em cerâmicas semicondutoras de trisseleneto de nióbio $NbSe_3$. Neste trabalho a rede de mapas acoplados descreve a dinâmica de uma cadeia de partículas acopladas por molas em um potencial externo periódico [45].

Para a análise da formação de memórias de curta duração consideramos inicialmente uma rede de mapas acoplados e na sequência osciladores Colpitts acoplados [26]. Propomos uma rede de osciladores Colpitts acoplados com conexões entre os osciladores vizinhos e algumas conexões aleatórias não-locais [45] obtidas a partir do processo de Newman-Watts [46]. Definimos apropriadamente uma quantidade (variável de curvatura) para caracterizar os padrões memorizados e descrever a dinâmica dos osciladores Colpitts acoplados.

O trabalho foi segmentado da seguinte forma:

No Capítulo 2 discorremos sobre equações diferenciais lineares e não-lineares, introduzindo alguns conceitos básicos relacionados a fluxos, onde a variável de estado e o tempo são contínuos e o espaço é discreto. Este capítulo aborda temas como sistemas dinâmicos não-lineares, classificação dos atratores, expoente de Lyapunov e atrator caótico.

No Capítulo 3 investigamos os osciladores eletrônicos, mostrando a condição de oscilação em termos da teoria linear, condição de estabilidade do sistema, modelo de realimentação e cálculo da frequência. Definimos os elementos constituintes do circuito elétrico no oscilador Colpitts bem como suas equações de estado e verificamos o comportamento caótico através da duplicação de período de Feigenbaum, do diagrama de bifurcações e do expoente de Lyapunov.

No Capítulo 4 analisamos o acoplamento entre osciladores Colpitts numa configu-

ração mestre-escravo, buscando verificar se ocorre ou não a sincronização caótica em função dos parâmetros dos circuitos acoplados. Verificamos a sincronização caótica em termos do tempo transiente para diferentes condições iniciais, mostrando a existência de transientes superpersistentes e adicionamos um ruído no canal de conexão entre os circuitos mestre-escravo.

No Capítulo 5 investigamos a formação de memórias em uma rede de mapas acoplados, com um acoplamento do tipo local, que modela N partículas conectadas por molas elásticas sujeitas a perturbações periódicas externas. Estudamos os padrões de memórias formadas, bem como os parâmetros do sistema que influenciam o tempo transiente necessário para formação desses padrões. Analisamos a formação de memórias em rede do tipo mundo pequeno com conexões aleatórias não-locais obtidas a partir do processo de Newman-Watts, analisando a probabilidade das conexões de termos ou não múltiplas memórias em função dos parâmetros da rede, como por exemplo, controle da não-linearidade, constante de acoplamento e tamanho da rede. Na seção seguinte, analisamos a formação de memórias numa rede de osciladores Colpitts acoplados em função do acoplamento entre os osciladores, de uma perturbação externa e da quantidade de osciladores Colpitts acoplados.

No Capítulo 6 apresentamos as conclusões deste trabalho bem como as sugestões para os trabalhos futuros.

2 *Equações diferenciais*

O nascimento da ciência moderna como conhecemos deu-se com Isaac Newton (1642-1727) e Galileu Galilei (1564-1642) [7], buscando compreender a realidade à nossa volta, levando-se em conta a observação precisa dos fenômenos, a elaboração de teorias quantitativas e o teste rigoroso dessas teorias. Para que tudo isso ocorresse foi necessário a elaboração de uma nova matemática, o Cálculo Diferencial, levando em conta o conceito de derivada, que desempenha na ciência moderna um papel análogo ao que a Geometria Euclidiana teve na Astronomia Ptolomaica, a mais moderna das ciências antigas. Deste modo as descrições quantitativas dos fenômenos que evoluem no tempo são adequados para este novo ferramental matemático, e com ele as leis que regem a Física passam a ser formuladas através de equações diferenciais [47].

Atualmente as equações diferenciais vem desempenhando um papel muito importante nas áreas de engenharia e ciências exatas, onde se estudam sistemas de equações de evolução, ou seja, equações onde o tempo é uma variável independente. Inúmeros problemas conduzem a uma ou várias equações diferenciais que deverão ser resolvidas. Basicamente as equações diferenciais dividem-se em lineares e não-lineares. Para resolver as equações diferenciais lineares existem técnicas analíticas cujas soluções gerais permitem determinar o comportamento futuro do sistema descrito de forma exata, em função do estado atual do sistema. Já as equações diferenciais não lineares são mais difíceis de analisar, pois essas soluções exatas, de modo geral, não existem numa forma fechada. O estudo de problemas não-lineares possui duas abordagens distintas. Uma abordagem é qualitativa e tem como principal objetivo entender o comportamento global de um dado sistema dinâmico, e a outra abordagem é quantitativa e procura analisar a evolução do sistema ao longo do tempo.

A grande variedade de problemas que podem ser analisados com maior facilidade são os sistemas que conduzem a equações lineares. Entretanto com o desenvolvimento dos computadores, a partir da segunda parte do século XX, tem sido possível resolver problemas não-lineares usando métodos numéricos. Estes sistemas permitem estudar muitos fenômenos interessantes e complicados que não aparecem em sistemas lineares, como por exemplo, quando estudamos a evolução temporal de sistemas dinâmicos descritos por equações não-lineares: órbitas periódicas e quase-periódicas, ciclos-limite, transiente e caos [5].

Um sistema é dinâmico quando algumas grandezas que caracterizam seus objetos constituintes variam no tempo. Os sistemas dinâmicos descrevem o comportamento futuro (ou passado) de um sistema típico, determinando as equações de suas trajetórias típicas. Busca-se compreender quando o comportamento dinâmico do sistema é estável, ou seja, quando o sistema permanece qualitativamente o mesmo ou se o sistema sofre pequenas perturbações. Um dos maiores desafios é compreender o fenômeno da sensibilidade com respeito às condições iniciais, ou comportamento caótico de um sistema, o que torna a evolução do sistema imprevisível em termos das trajetórias individuais. Outro ponto importante é o estudo de mudanças qualitativas drásticas de uma família de sistemas quando estes, por exemplo, passam por uma bifurcação [48].

Os sistemas dinâmicos dividem-se em duas grandes categorias, de acordo com o tipo de variável que designa o tempo. Na primeira categoria temos os “mapas” ou equações a diferenças, onde o tempo é uma variável discreta, ou seja, só assume valores inteiros $t = 0, 1, 2, \dots$. Um mapa descreve a evolução no tempo de um sistema dinâmico expressando o seu estado a partir do instante anterior, evoluindo portanto, de forma discreta. Uma das principais utilizações dos mapas é auxiliar na análise de sistemas dinâmicos, no estudo de formação de padrões e no estudo do caos [20]. De modo geral um mapa N-dimensional é expresso por:

$$\begin{aligned} x_{1(t)} &= f_1[x_{1(t-1)}, \dots, x_{N(t-1)}], \\ &\vdots \\ x_{N(t)} &= f_N[x_{1(t-1)}, \dots, x_{N(t-1)}], \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde (x_1, \dots, x_N) são as variáveis dependentes do tempo, e f_1, \dots, f_N são as funções arbitrárias destas variáveis. Como exemplo, podemos citar o mapa logístico (mapa unidimensional) e o mapa de Hénon (mapa bidimensional) [49].

A segunda categoria de sistemas dinâmicos são os chamados “fluxos” ou equações diferenciais, onde o tempo é uma variável contínua [20]. Costuma-se escrever os fluxos como sistemas de equações diferenciais de primeira ordem em relação ao tempo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_N), \\ &\vdots \\ \dot{x}_N &= f_N(x_1, \dots, x_N), \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde $\dot{x}_i \equiv dx_i/dt$, (x_1, \dots, x_N) são as variáveis dependentes do tempo e f_1, \dots, f_N são as funções arbitrárias destas variáveis e são chamadas de fluxo N-dimensional. Como exemplo, podemos citar as equações de movimento para uma partícula deslocando-se ao longo do eixo x (fluxo bidimensional), o sistema de Lorenz (fluxo tridimensional) e o problema geral de N corpos (fluxo 6N-dimensional) [5].

As equações diferenciais são objetos de intensa atividade de pesquisa, pois apresentam muitos aspectos puramente matemáticos e um grande leque de aplicações, além de apresentarem diversas ramificações. Neste contexto cabe evidenciar as equações diferenciais ordinárias (EDO), equações estas que apresentam apenas derivadas ordinárias em relação a uma variável independente, geralmente denotada por t , que muitas vezes representam o tempo. Caso contrário, equações que envolvem derivadas em mais de uma variável são chamadas de equações diferenciais parciais (EDP). Uma solução de uma EDO é uma função da forma $x(t)$, que em geral representa alguma quantidade física que muda com o tempo. Deste modo, a variável x pode ser considerada uma variável dependente [21]. As equações diferenciais ordinárias apresentam-se em dois tipos:

- Autônomas, onde a variável temporal t não aparece explicitamente nas funções de entrada da equação diferencial;
- Não-autônomas, a variável temporal t aparece explicitamente em algum coeficiente ou em alguma função de entrada na equação diferencial.

Em sistemas dinâmicos determinísticos, as equações diferenciais autônomas são equações que basicamente definem a evolução da variável de estado x , a partir de um estado inicial x_0 , denotada por equação de evolução. Já as equações não-autônomas podem ser escritas como um sistema autônomo, definindo uma nova variável y dependente e igual a t .

Ainda cabe ressaltar a ordem de uma equação diferencial, que é a derivada mais alta que ocorre na equação [21]. Vamos começar discutindo equações diferenciais de primeira ordem em sistemas lineares e não-lineares, em que ocorrem apenas derivadas da primeira variável dependente. Na sequência abordaremos as equações diferenciais em mais de uma dimensão através de sistemas de equações diferenciais não-lineares, as quais serão de extrema importância para este trabalho, visto que, se existem duas ou mais funções que devem ser determinadas, precisamos de um sistema de equações.

2.1 Equações diferenciais lineares e não-lineares

Ao estudarmos equações diferenciais deparamos com a dimensão de uma equação diferencial que se refere ao número de variáveis dependentes que temos na equação. Quando uma variável x é função da variável independente t temos uma equação diferencial linear expressa por \dot{x} , sendo a taxa de variação instantânea de x em relação ao t , em termos do estado atual x do sistema. Como exemplo, temos a equação

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = ax, \quad (2.3)$$

onde x é uma função escalar de t , a é uma constante real e \dot{x} indica a taxa de variação instantânea em relação ao tempo. Quando $a > 0$ temos um simples modelo de crescimento populacional quando a população é pequena. A taxa dx/dt em que a população cresce é proporcional ao tamanho x da população.

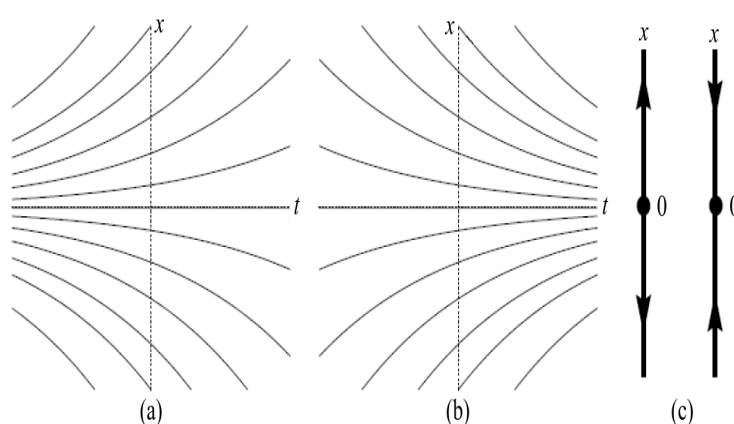
A Equação diferencial (2.3) tem uma família de soluções, dadas por $x(t) = ce^{at}$, onde c é um número constante real. Substituindo $t = 0$, temos $x(0) = c$. O número $x_0 = x(0)$ é o valor inicial da função x . Então a solução do problema de valor inicial $x_0 = x(0)$ juntamente com a EDO em (2.3) é dada por

$$x(t) = x_0 e^{at}. \quad (2.4)$$

Na Figura 2.1 temos as famílias de todas as soluções da Equação diferencial (2.3), para várias condições iniciais x_0 . Cada escolha de valor inicial x_0 , nos fornece uma solução. Este é um retrato de soluções da equação diferencial chamado de fluxo F . O fluxo F

representa o conjunto de soluções e deste modo, $F(t, x_0)$ é o valor no tempo t da solução de valor inicial x_0 . Certas soluções da Equação (2.3) se destacam mais que outras, por exemplo, quando $x_0 = 0$ a sua solução é uma função constante $x(t) = 0$, denotada por $x \equiv 0$ e é chamada de equilíbrio da equação. Ainda na Figura 2.1 representamos o retrato de fase, quando o eixo- t é suprimido, mostrando que os valores de x divergem para $a > 0$ e convergem quando $a < 0$.

Figura 2.1: Família de soluções para $\dot{x} = ax$. (a) $a > 0$: crescimento exponencial; (b) $a < 0$: decaimento exponencial; (c) espaço de fase.



FONTE: Adaptada de [21], páginas 276 e 278.

Por outro lado, a Equação (2.3) deixa de ser um modelo adequado para grandes populações x porque ignora os efeitos da superlotação, que são modelados por termos não-lineares. Estudos de Thomas Malthus em seu livro “*Ensaio sobre o Princípio da População*” [50], publicado em 1798, relacionava a população de uma geração com a população de uma nova geração [16], com base na suposição de que a população aumentava progressivamente na dependência de um fator de crescimento que seguia uma progressão geométrica, enquanto que os meios de subsistência aumentavam em uma progressão aritmética de forma bem mais lenta, concluindo que em breve não haveria alimento para todos.

Preconizando o controle da procriação, Pierre-François Verhulst em 1838 inseriu o conceito de fatores inibidores, sugerindo que a taxa de crescimento de uma população, não seria constante mas aumentaria de uma maneira exponencial com o passar do tempo. Deste modo, a taxa de crescimento da população, pode ser modelada por uma função não-linear,

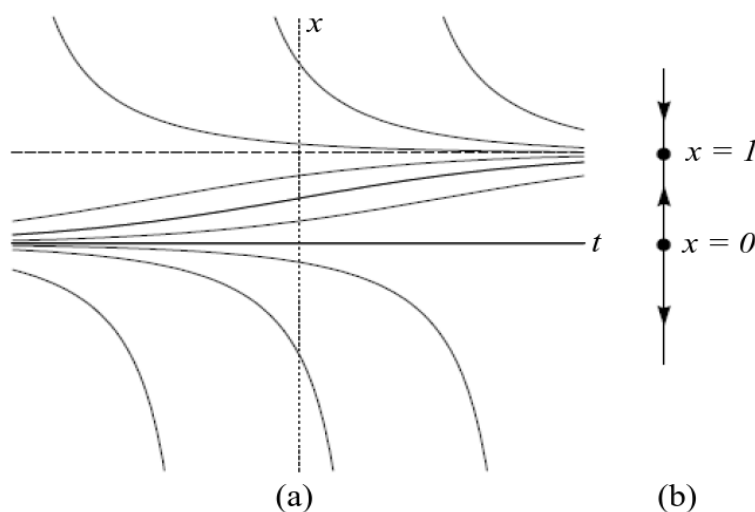
aqui chamada de função logística da população. A equação diferencial

$$\dot{x} = ax(1 - x), \quad (2.5)$$

onde a é uma constante positiva, é chamada de equação diferencial logística. Quando x se aproxima de 1, a população está no limite e a taxa de aumento da população vai para zero.

Fazendo \dot{x} igual a 0 na Equação (2.5) teremos duas soluções de equilíbrio, $x \equiv 0$ e $x \equiv 1$. Na Figura 2.2 é mostrado o fluxo de soluções da Equação (2.5). Para cada condição inicial x_0 há uma única curva de solução que denotamos por $F(t, x_0)$ que satisfaz simultaneamente a equação diferencial e a condição inicial x_0 . A curva de solução $F(t, x_0)$ pode ou não ser definida para tempos futuro [21]. Quando $x \equiv 1$ as soluções de equilíbrio são assintóticas, para todo intervalo de tempo t , por outro lado, quando $x_0 < 0$ as soluções explodem num tempo finito, isto é, elas têm uma solução assintótica para alguns valores de tempo finitos, visto que não tem sentido falar em populações negativas.

Figura 2.2: Soluções para a Equação diferencial logística (2.5). (a) Quando a condição inicial for positiva as curvas de solução tendem para $x = 1$ à medida que t aumenta e quando a condição inicial é negativa as curvas divergem; (b) espaço de fase.



FONTE: Adaptada de [21], página 279.

As setas na Figura 2.2(b) indicam as direções das soluções para perto ou para longe do ponto de equilíbrio, evidenciando o comportamento assintótico destas soluções. O retrato de fase da Equação diferencial logística (2.5) é mostrado na Figura 2.2(b). As setas

no retrato de fase mostram o sinal da derivada (positiva ou negativa) para os pontos que são maiores ou menores que os valores de equilíbrio. Em equações diferenciais autônomas unidimensionais, o retrato de fase fornece toda a informação importante sobre as soluções. Quando as condições iniciais propostas são positivas as curvas das solução convergem para $x = 1$ à medida que o tempo aumenta ($t \rightarrow \infty$) e quando as condições iniciais são negativas as curvas divergem ($t \rightarrow -\infty$). Uma solução para estes equilíbrios é chamado de atrator ou dissipador se as trajetórias de condições iniciais próximas convergem para ele. E será chamado de repulsor ou fonte se as soluções através das condições iniciais próximas divergem a partir dele. Deste modo, na Equação (2.3), $x \equiv 0$ é um atrator para $a < 0$ e um repulsor para $a > 0$. Enquanto que na Equação (2.5), $x \equiv 0$ é um repulsor e quando $x \equiv 1$ é um atrator.

Ao estudarmos equações diferenciais que governam uma série de problemas físicos, e para que a solução destas equações tenham solução única, suas funções e suas derivadas devem ser contínuas no domínio de definição destas funções [7]. Se estas condições são satisfeitas, existe um teorema que garante a existência e a unicidade das soluções a partir de qualquer condição inicial pertencente a esse domínio e que seja dependente dos dados presentes no problema. Logo, nos deparamos com as seguintes propriedades:

- Existência: cada ponto no plano (t, x) tem uma solução que passa através dele, esta solução tem inclinação dada pela equação diferencial naquele ponto;
- Unicidade: o problema tem, no máximo, uma solução;
- Dependência Contínua: a solução depende continuamente dos dados que estão presentes no problema, logo o fluxo $F(t, x_0)$ é uma função contínua de x_0 e t .

Nesta seção, estuda-se as equações diferenciais nas quais a quantidade aumenta ou diminui em uma maneira monotônica, alcançando um ponto fixo quando o tempo é aumentado. No mundo real estas quantidades podem oscilar para acima ou abaixo de maneira regular ou irregular. As equações diferenciais unidimensionais (uma única variável de primeira ordem e a primeira derivada) não podem produzir este tipo de oscilação, logo torna-se necessário o entendimento de equações diferenciais em mais de uma dimensão.

2.2 Sistemas dinâmicos não-lineares

Os sistemas dinâmicos podem ser lineares ou não-lineares. As diferenças entre os sistemas dinâmicos lineares e não-lineares são bem nítidas. Os sistemas lineares são aqueles em que, de forma geral, o movimento se apresenta previsível, regular e tendo como característica matemática a possibilidade da aplicação do princípio de superposição, isto é, duas de suas soluções podem ser somadas para formar uma terceira, que estará correta. Já para os sistemas ditos não-lineares essas características não se aplicam. Seu comportamento ao longo do tempo não pode ser previsto e o princípio de superposição não pode ser usado para inferir outras soluções, apresentando-se assim como não-periódico, irregular ou aleatório.

Como vimos, o fluxo em espaços de fase unidimensionais é extremamente limitado, ou seja, todas as trajetórias são forçadas a mudar monotonicamente ou permanecerem constantes. Entretanto, em espaços de fase de dimensões superiores, as trajetórias têm muito mais espaço para evoluírem, e assim uma maior diversidade de comportamentos dinâmicos aparecem [20].

Vários fenômenos podem ser modelados por sistemas dinâmicos lineares, com precisão adequada às aplicações e por meio de um processo de linearização, de modo que se pode realizar um estudo local de sistemas dinâmicos não-lineares através da análise do sistema linear associado [7]. Como os fenômenos na natureza são essencialmente não-lineares, sua descrição ou análise será melhor descrita através de modelos e técnicas não-lineares. Deste modo, neste trabalho destacaremos o estudo de sistemas dinâmicos não-lineares.

Em sistemas dinâmicos não-lineares, a dinâmica do sistema concentra-se nos comportamentos a longos períodos do sistema que está sendo estudado. O comportamento futuro a pequenos tempos, normalmente, pode ser facilmente obtido por solução numérica (computacional) das equações de evolução. Os problemas não-lineares possuem duas abordagens distintas. Uma abordagem é “qualitativa” e tem como principal objetivo entender o comportamento global de um dado sistema dinâmico, ou seja, estamos interessados em estudar propriedades gerais, como equilíbrio, estabilidade, tipos de convergência ou divergência, etc. A outra abordagem é “quantitativa” e procura analisar a evolução do sistema dinâmico

no tempo.

O campo de aplicações de sistemas dinâmicos não-lineares é muito extenso pois abrange qualquer sistema físico, biológico, químico, etc. que possa ser descrito por equações de evolução. Na Física, por exemplo, a dinâmica de partículas e corpos rígidos apresenta uma série de exemplos interessantes de sistemas dinâmicos não-lineares. As equações que descrevem circuitos elétricos com componentes não-lineares, como diodos e transistores, também aparecem em estudos de sistemas dinâmicos não-lineares [5].

Para obtermos uma solução analítica do sistema e, portanto, determinar a sua solução, devemos desprezar os termos que introduzem a não-linearidade do sistema e expandir em série de potências o sistema de equações diferenciais. Ao fazermos isso, estamos linearizando o sistema fazendo a análise linear ou local para a região limitada ao redor do ponto onde a expansão está sendo feita. Logo, a topologia do sistema pode ser, localmente, determinada pela análise linear.

Ao mencionarmos a topologia de um sistema dinâmico, estamos interessados em saber como se comporta o fluxo desse sistema. Os sistemas dinâmicos podem ser conservativos (Hamiltonianos) ou dissipativos em relação a topologia do sistema. No caso de sistemas Hamiltonianos, a topologia é caracterizada pelo surgimento de ilhas e regiões caóticas no espaço de estado, e, em sistemas dissipativos, pela formação de estruturas atrativas que podem ser regulares ou caóticas [7].

A forma e a localização com que o fluxo se desenvolve está diretamente ligado a um conjunto de invariantes do sistema que são responsáveis pela formação de atratores e, também, por comportamentos divergentes. Para definir o comportamento caótico em sistemas dinâmicos, um dos critérios utilizados são os expoentes de Lyapunov que avaliam a sensibilidade às condições iniciais, verificando a divergência exponencial no tempo de trajetórias vizinhas.

2.2.1 Atratores

O comportamento assintótico é típico dos sistemas dissipativos e é caracterizado pela existência de regiões limitadas no espaço de fase, chamadas de atratores, para as

quais as trajetórias convergem [7]. Um atrator é um conjunto de valores no espaço de fase para o qual o sistema migra com o tempo (se a função for contínua) ou por iterações (se a função for discreta), ou seja, o estado no qual um sistema dinâmico eventualmente se estabiliza. Um atrator pode ser um único ponto fixo, uma coleção de pontos regularmente visitados, uma órbita complexa, ou um número infinito de pontos. Ele não precisa ser uni ou bidimensional, e pode ter tantas dimensões quanto o número de variáveis que influenciam o seu sistema [21].

De modo simplificado, o atrator é uma figura geométrica que representa o comportamento assintótico do sistema, num espaço de fase formado pelas variáveis que caracterizam a evolução do sistema. Sua bacia de atração é definida como sendo o maior conjunto de pontos nesse espaço tais que, partindo de um desses pontos, tende-se assintoticamente para o atrator, deste modo, um atrator captura todas as órbitas que iniciam-se na sua bacia de atração e um repulsor é um ponto no espaço fase de onde um sistema se afasta, pois a cada nova iteração a órbita se afasta ou é repelida do ponto fixo.

Ao trabalharmos com atratores podemos classificá-los como estruturais ou pontuais. Os atratores estruturais são formados por órbitas periódicas estáveis e atratores caóticos, já os atratores pontuais são os pontos fixos estáveis. Para que a solução exista e seja periódica, é necessário pelo menos um ponto fixo instável, como é o caso do sistema de Van der Pol [22, 51]. Para a formação de um atrator caótico, são necessários pelo menos dois pontos fixos instáveis, como é o caso do atrator de Rössler [3, 22]. Se o sistema possuir três pontos de equilíbrio, onde dois deles funcionam como atratores, de modo que algumas órbitas do espaço de fase são capturadas por um ou outro ponto, temos o que ocorre no oscilador de Duffing [20, 21].

Os atratores mais comuns são conhecidos como:

- Ponto fixo (pontual) ou ponto de equilíbrio: a trajetória do sistema converge para um ponto e lá permanece indefinidamente. A solução nesse comportamento dinâmico é independente do tempo e tem dimensão zero;
- Ciclo-limite: a trajetória converge para uma curva fechada, descrevendo um comportamento periódico no tempo, com amplitude e período determinados pela forma das equações e pelos valores de seus parâmetros e tem dimensão 1 (uma frequência

fundamental);

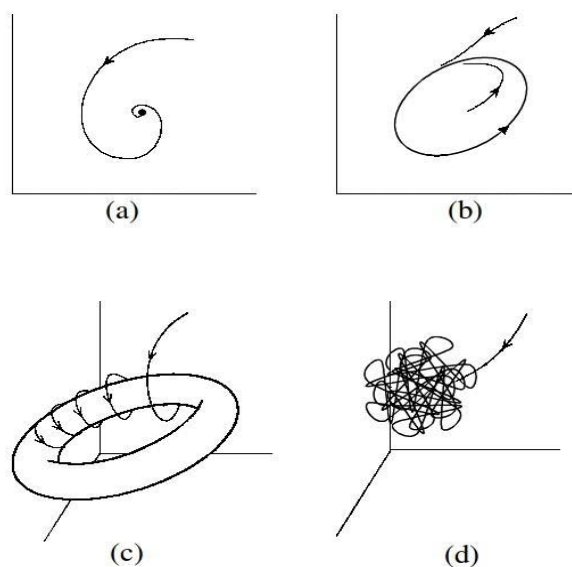
- Atrator estranho: o atrator apresenta detalhes em escalas infinitesimalmente pequenas. Possui dimensão fracionária e uma figura com essa característica é chamada de fractal;
- Superfície toroidal: representa um regime periódico ou quase-periódico, com duas frequências fundamentais independentes;
- Caótico: apresenta uma divergência média do tipo exponencial entre duas trajetórias muito próximas quando houver dependência sensível das condições iniciais.

Na Figura 2.3(a) temos o atrator pontual e na Figura 2.3(b) o atrator ciclo-limite cujas formas geométricas são simples com dimensão nula ou inteira. Suas trajetórias indicam que o fluxo converge para o atrator pontual (a) e periódico em (b) onde as trajetórias são fechadas no espaço de fase para a qual as órbitas vizinhas se aproximam em espiral. Por outro lado, quando existem duas ou mais frequências, as trajetórias correspondentes repousam sobre uma superfície toroidal e jamais se fecham, descrevendo um movimento que é chamado quase-periódico, Figura 2.3(c). Por sua vez, atratores com propriedades geométricas complexas são conhecidos como atratores caóticos, Figura 2.3(d) e para caracterizá-los quantitativamente, medimos a sua dimensão e caso sua dimensão seja não inteira estes são chamados de fractais [52]. Num atrator caótico as órbitas nunca fecham mas se mantêm confinadas numa dada região do espaço. Este tipo de atrator será melhor abordado na seção 2.2.3.

Também podemos quantificar um atrator através do expoente característico de Lyapunov ou número de Lyapunov [51, 53, 54]. Esta medida está baseada na sensibilidade às condições iniciais dos sistemas dinâmicos, evidenciando consequências práticas, uma vez que pequenos desvios nas condições iniciais estão sempre presentes, devido em grande parte a existência de ruído experimental ou por imprecisões inerentes. Os expoentes de Lyapunov medem a taxa de divergência exponencial em trajetórias vizinhas muito próximas, como por exemplo, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ que evoluem ao longo do tempo de modo a produzirem órbitas $x_1(t + \Delta t)$ e $x_2(t + \Delta t)$, conforme a Figura 2.4, onde a dinâmica caótica do sistema faz com que as duas curvas inicialmente próximas afastem-se e que serão melhor discutidos na

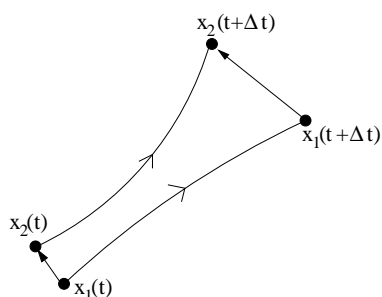
seção 2.2.2.

Figura 2.3: Atratores: (a) ponto fixo, (b) ciclo-limite, (c) superfície toroidal e (d) atrator caótico.



FONTE: O autor.

Figura 2.4: Ilustração da divergência de duas condições iniciais próximas.



FONTE: O autor.

O comportamento caótico é caracterizado pela existência de, pelo menos, um dos expoentes de Lyapunov positivo. Para situações em que temos mais de um expoente de Lyapunov positivo fica caracterizado o hipercaos [55]. Atratores caóticos podem possuir dimensão fractal mas existem alguns atratores com dimensões fractais que não apresentam nenhum expoente de Lyapunov positivo e, deste modo, não são caóticos [56]. Portanto, o termo caos reflete a sensibilidade às condições iniciais de um sistema, e o termo estranho, à geometria do atrator.

2.2.2 Expoente de Lyapunov

No final do século XIX, Lyapunov elaborou um método para quantificar a dependência sensitiva às condições iniciais [21], ou seja, o caos, através dos expoentes de Lyapunov [53, 54]. Atualmente este método é a forma mais utilizada para verificar se o comportamento dinâmico do sistema é caótico ou não. Em equações diferenciais, a existência de conjuntos caóticos pode ser demonstrada analiticamente pelo teorema de Shilnikov [20], o qual diz que deve existir uma órbita homoclínica no sistema, tal que sua órbita é formada pela fusão da variedade instável e estável de um ponto fixo, de modo que, as trajetórias comecem e terminem no mesmo ponto fixo. Entretanto, são raros os sistemas que permitem a determinação analítica dos expoentes de Lyapunov, sendo necessário determiná-los numericamente.

Henry Poincaré em seu trabalho clássico para o problema dos três corpos [6], utilizando conceitos de variedade e análises qualitativas, mostrou que as soluções assintóticas do problema eram mais complexas do que as três possibilidades conhecidas na época. O método inovador de análise, baseia-se em um mapa de duas dimensões que relaciona o cruzamento da trajetória num plano adequadamente definido com o cruzamento subsequente no mesmo sentido relativo [57]. Poincaré, verificou a existência de possíveis movimentos e estabilidades associadas. Além disso, introduziu o conceito de variedades instável e estável, ou seja, curvas especiais cujo entendimento permite caracterizar movimentos associados a diferentes trajetórias. Poincaré determinou que variedades de diferentes tipos podem cruzar entre si, gerando os pontos homoclínicos que implicam a existência de movimentos estáveis altamente complexos, movimentos estes conhecidos como caóticos.

A imprevisibilidade da trajetória ao longo do tempo está relacionada ao termo trajetória caótica, uma vez que o sistema apresenta sensibilidade às condições iniciais. Vamos supor dois pontos num espaço de fase de três dimensões, inicialmente bem próximos, como o que pode ser visto na Figura 2.4. Em trajetórias caóticas de um atrator, essas trajetórias vão se separar exponencialmente com o tempo, até que num determinado instante estarão percorrendo trajetórias completamente distintas que jamais vão se cruzar, do ponto de vista local, mas que, globalmente, estarão presas ao atrator. Para medir a taxa média da divergência exponencial das trajetórias, de modo a quantificar a dependência sensitiva

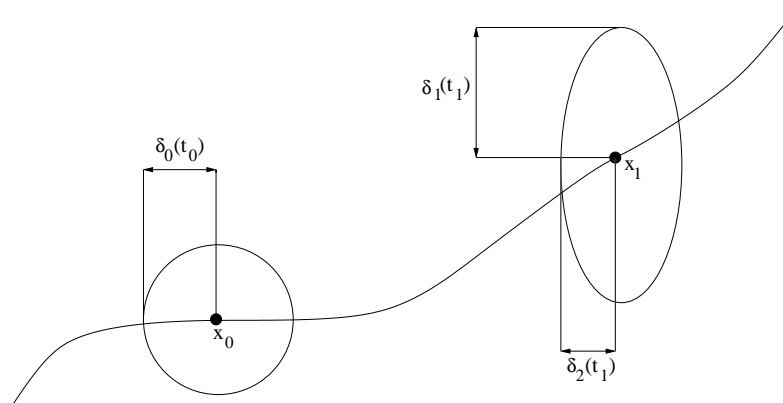
às condições iniciais utilizam-se os expoentes característicos de Lyapunov ou número de Lyapunov.

Definindo geometricamente os expoentes de Lyapunov de acordo com [58, 59], consideraremos um sistema contínuo descrito por N equações diferenciais ordinárias que é envolto por um volume esférico infinitesimal de estados vizinhos bidimensional y_0 e raio $\delta_0(t_0)$, em torno do ponto inicial arbitrário x_0 de uma linha de fluxo, ou seja,

$$|y_0 - x_0| \leq \delta_0(t_0). \quad (2.6)$$

A evolução temporal deste fluxo nos dá um comportamento assintótico, ou seja, o fluxo transforma a esfera em um elipsóide com eixos principais $\delta_i(t)$, onde $i = 1, 2, 3, \dots, N$, conforme a Figura 2.5. Deste modo terá ocorrido, em média, a expansão de um dos seus eixos, contração do outro e, condições iniciais que estão no eixo que corresponde à direção da trajetória de x_0 , não alterarão suas distâncias relativas, logo, nesse eixo, em média, não ocorre expansão nem contração.

Figura 2.5: Evolução de um volume esférico no espaço de fase.



FONTE: Adaptada de [22], página 132.

Na Figura 2.5 representa-se em duas dimensões a deformação da esfera. A circunferência, que é fronteira das condições iniciais, de raio $\delta_0(t_0)$ e é centrado em x_0 , sofre expansão em uma direção, representado pelo eixo $\delta_1(t_1)$, e contração na outra $\delta_2(t_1)$. A média da variação exponencial desses eixos é medida pelos expoentes de Lyapunov e são

definidos por:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta_0(t_0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\delta_i(t)}{\delta_0(t_0)}, \quad (2.7)$$

onde $i = 1, 2, \dots, N$. De modo geral, os λ_i dependem do estado inicial x_0 , mas em muitos casos eles são constantes ao longo de uma significativa região do espaço de fases. Os expoentes de Lyapunov estão relacionados com a natureza da contração ou expansão de diferentes direções no espaço de fases [59]. Desta forma, a orientação do elipsóide muda continuamente conforme o sistema evolui. Da Equação (2.7) é imediato que

$$\delta_i(t) \approx \delta_0(t_0) e^{\lambda_i(t)}, \quad (2.8)$$

assim, se existir pelo menos um expoente de Lyapunov positivo, haverá uma expansão orbital nas direções associadas. Deste modo, para que a solução seja caótica, a dependência às condições iniciais implica na existência de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo ($\lambda_i > 0$). Para o caso de soluções periódicas e quase-periódicas ($\lambda_i < 0$), há uma contração nas direções perpendiculares ao movimento, enquanto que ao longo da trajetória, $\lambda_i = 0$ [54]. Para um instante t qualquer, um elemento do hiper-volume no espaço de fase é dado por

$$\xi V(t) = \prod_{i=1}^N \delta_i(t). \quad (2.9)$$

Substituindo a Equação (2.8) na Equação (2.9) obtemos

$$\xi V(t) = \xi V(0) \exp\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i t\right). \quad (2.10)$$

Portanto, existem duas situações em que o hiper-volume no espaço de fases não diverge:

- quando $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 0$, situação em que $\xi V(t) = \xi V(0)$, o sistema é conservativo;
- quando $\sum_{i=1}^N \lambda_i < 0$, que resulta $\xi V(t) < \xi V(0)$, o sistema é dissipativo.

Podemos identificar o tipo de atrator através dos sinais dos expoentes de Lyapunov. Em sistemas dissipativos o somatório dos expoentes de Lyapunov é negativo, pois nesses sistemas seu volume se contrai, ou seja, há uma diminuição do hiper-volume no espaço de fases, fato este, que condiciona a ocorrência de atratores estranhos. Uma outra

condição para que o sistema apresente atratores estranhos em um espaço de fase é que a dimensão do espaço de fase tem que ser $N \geq 3$, pois em um espaço bidimensional, a presença de um expoente de Lyapunov positivo tornaria o somatório dos expoentes de λ_i positivos, o que não caracteriza uma contração no espaço de fase. Vamos verificar como isso pode ser feito para o sistema dissipativo de três dimensões:

- Ponto fixo (pontual) ou ponto de equilíbrio: as trajetórias convergem para um único ponto no espaço, cessando qualquer deslocamento, assim os expoentes devem ser $(-, -, -)$;
- Ciclo-limite: apenas a direção da trajetória não deve, em média, se contrair, portanto $(0, -, -)$;
- Toro T^2 : existem duas direções ao longo das quais os deslocamentos se processam, logo $(0, 0, -)$;
- Caótico: devido à sensibilidade às condições iniciais, pelo menos um expoente deve ser positivo, ao longo da trajetória associa-se um expoente nulo e o terceiro expoente deve ser negativo para que o sistema seja dissipativo e exista um atrator, assim $(+, 0, -)$.

Deste modo para que no sistema ocorra um atrator pontual, basta um sistema de uma dimensão com expoente de Lyapunov negativo, assim, quando o sistema começa a evoluir no tempo, a distância entre duas condições iniciais começa a diminuir infinitamente, tornando-se nula ao atingirem o ponto fixo. Para que ocorra um ciclo-limite (órbita periódica estável), é necessário no mínimo além da direção de contração (como no caso do atrator pontual), uma outra dimensão com expoente de Lyapunov nulo, refletindo assim o fato de que duas condições iniciais sobre o ciclo-limite, quando evoluídas, em média, não sofrerão contração nem expansão, ou seja, passado um certo intervalo de tempo igual ao período do ciclo-limite, o sistema passa a apresentar soluções nas mesmas posições das suas condições iniciais, mantendo a mesma distância entre elas.

Para que ocorra caos em sistemas contínuos no tempo, deve existir pelo menos um expoente de Lyapunov maior que zero e a dimensão no espaço de fases $N \geq 3$. Assim, duas

direções devem comportar-se como no ciclo-limite, e a terceira condição deve apresentar expoente de Lyapunov positivo, caracterizando a divergência exponencial entre duas trajetórias com condições iniciais muito próximas, responsável pela sensibilidade às condições iniciais de um sistema caótico. Para o caso de mapas é suficiente que $N = 1$ se o mapa for não inversível, ou seja, onde a sua função inversa não é única [5]. As condições para identificar a ocorrência de um atrator caótico, num sistema tridimensional, resumidamente são:

- $\sum_{i=1}^N \lambda_i < 0$, que garante a contração do volume num sistema dissipativo;
- $(\lambda_i > 0)$, a existência de um expoente de Lyapunov positivo.

2.2.3 Atrator caótico

No final do século XIX, J. H. Poincaré se propôs a estudar a dinâmica de um sistema de três corpos, M_1 , M_2 e m que se atraem de acordo com a lei da gravitação de Newton, cujo objetivo era determinar o movimento dos corpos, a partir das suas condições iniciais. Este problema é bem mais complexo do que o problema da dinâmica de dois corpos, usualmente considerada na época. Após analisar o problema dos três corpos na sua versão simplificada, Poincaré concluiu que esse é um problema insolúvel, no sentido que é impossível encontrar uma fórmula analítica exata que descreva o movimento de m , a partir de uma posição inicial qualquer [7].

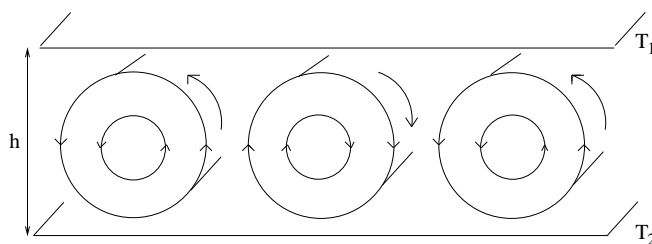
Embora Poincaré tenha sido capaz de vislumbrar a possibilidade de comportamentos caóticos, que desafiam a idéia de haver uma solução fechada e válida para quaisquer instantes de tempo, ele não pôde avançar nessa descrição, devido à impossibilidade prática de resolver as equações do movimento por um tempo suficientemente longo, a ponto de evidenciar as consequências de um possível comportamento caótico [5]. Apesar da clara visão de Poincaré, somente um século depois, quando Edward N. Lorenz (1963) estudava problemas meteorológicos a partir do modelo de convecção natural de Rayleigh-Bénard que se retomou a idéia do caos na análise de sistemas dinâmicos, visto que na área de previsão numérica do tempo, as equações que descrevem o sistema (neste caso, a atmosfera) são não-lineares. Tendo o auxílio de um computador, Lorenz observou que uma pequena variação

nas condições iniciais poderia acarretar grandes diferenças na evolução do sistema.

O seu trabalho nessa área envolvia a solução numérica de um sistema com 12 equações diferenciais acopladas que descrevem a forma como o ar se move na atmosfera. A solução destas equações continha elementos como velocidades do vento, temperatura, pressão, entre outros e poderia ser usada na previsão do tempo, ainda que na época houvesse um grande ceticismo em relação à eficácia desses métodos. Este fenômeno ficou conhecido como “efeito borboleta”, como uma alusão de que se uma borboleta batesse suas asas em algum lugar do planeta, poderia alterar a resposta de um sistema dinâmico do outro lado da Terra. Portanto, tratava-se de um sistema totalmente determinístico cujos resultados poderiam ser aleatórios.

O estudo de Lorenz considera duas placas paralelas separadas por um fluido. A placa superior está a uma temperatura mais baixa que a inferior. Provocam-se movimentos convectivos aquecendo um fluido “por baixo”. Assim, por ação da temperatura, o fluido da parte inferior tende a subir enquanto o fluido da porção superior tende a descer por ação da gravidade. Quando a diferença de temperatura ΔT excede um certo valor crítico ΔT_C , o líquido começa a girar, formando rolos, conforme Figura 2.6. Dessa maneira, o calor no fluido passa a ser transportado também por convecção. A distância h entre as placas pode nos fornecer por comparação a dimensão desses rolos e, para que ocorra uma configuração de equilíbrio na densidade do fluido e na temperatura o movimento molecular é organizado [7].

Figura 2.6: Esboço dos rolos de convecção, sem levar em consideração os efeitos de borda.



FONTE: Adaptada de [7], página 24.

Lorenz utilizando uma versão simplificada do modelo de Rayleigh-Bénard para convecção natural procurou estudar esse intrigante fenômeno usando a teoria qualitativa dos sistemas dinâmicos introduzida por Poincaré. Uma das suas primeiras preocupações foi

tentar achar sistemas mais simples de equações que exibissem o mesmo tipo de propriedade que ele havia observado nas equações para a atmosfera. Como o gradiente de temperatura induz o fluido a se movimentar de forma ascendente enquanto que o efeito da gravidade induz o fluido a se movimentar de forma descendente, a interação entre estes dois fatores cria fenômenos bem interessantes.

Para descrever este fenômeno é necessário considerar as equações de Navier-Stokes, da condução de calor e da conservação da massa. A equação de Navier-Stokes que descreve a dinâmica dos processos atmosféricos é dada por

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) = \vec{F} + \vec{F}_C - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v}, \quad (2.11)$$

a equação de condução de calor é expressa como

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \kappa \nabla^2 T, \quad (2.12)$$

e a equação de conservação da massa é dada pela equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.13)$$

onde T é a temperatura, $\rho(T)$ a densidade (uma função de temperatura), \vec{F} a força gravitacional, p a pressão, \vec{v} a velocidade, \vec{F}_C a força de Coriolis, μ a viscosidade dinâmica, κ a condutividade térmica, $\vec{\nabla}$ é o operador nabla em coordenadas cartesianas e ∇^2 é o operador Laplaciano. Essas grandezas são funções do tempo t e das coordenadas x , y e z .

Destas três equações anteriores, Lorenz obteve um sistema composto por 12 equações diferenciais de primeira ordem, cujas soluções eram estacionárias e periódicas, inúteis para o seu propósito, pois o método linear é capaz de prever tais comportamentos. Logo, Lorenz necessitava encontrar uma solução aperiódica para este sistema de equações que fosse bem mais simples do que um sistema composto de 12 equações. Em 1962, B. Saltzman desenvolveu um modelo para estudar movimentos atmosféricos de origem convectiva com um sistema de 7 equações. Lorenz notou que os valores de 4 das 7 variáveis se tornavam muito pequenos, e ficou curioso para saber se o sistema formado apenas pelas outras 3 variáveis também exibia comportamento aperiódico. A simplificação proposta por Lorenz [17], para os mesmos valores dos parâmetros escolhidos por Saltzman é formado

por 3 equações diferenciais ordinárias descrevendo a convecção de Rayleigh-Bénard:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} = -xz + rx - y, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (2.14)$$

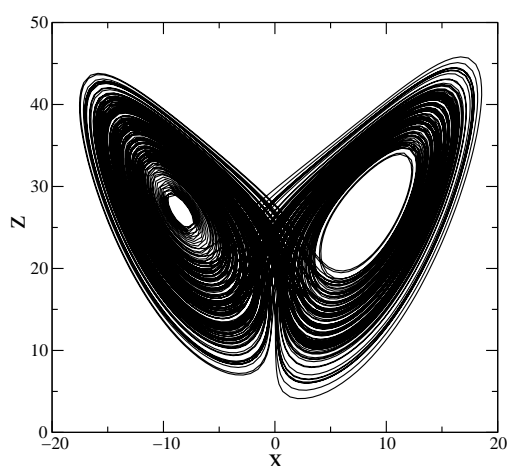
onde x é o fluxo convectivo, se $x = 0$ não há movimento convectivo e o calor é transportado apenas por condução, se $x > 0$ implica na circulação horária e se $x < 0$ a circulação é anti-horária. A variável y é proporcional à diferença de temperaturas entre as correntes descendente e ascendente do fluido. A variável z é proporcional à distorção do perfil vertical da temperatura em relação ao perfil linear. O parâmetro σ é a relação entre a viscosidade e a condutividade térmica, sendo conhecido como número de Prandtl $\sigma \equiv \mu/\kappa$ em homenagem a L. Prandtl por seus trabalhos em aerodinâmica. O parâmetro r é proporcional a diferença de temperaturas entre os lados inferior e superior, sendo conhecido como número de Rayleigh reduzido $r \equiv R/R_C$ onde a convecção ocorre para $r > 1$ e b é a relação entre a altura e a largura do retângulo, expresso como $b \equiv 4/(1 + a^2)$.

Em 1963, Lorenz publicou seus resultados no artigo *Deterministic nonperiodic flow* [17], descrevendo geometricamente as características principais da solução caótica que havia encontrado. A partir de um espaço abstrato, cujos eixos são as variáveis $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ para cada instante de tempo, formam-se um conjunto de pontos com uma estrutura matemática complicada, chamado atrator borboleta, devido as curvas terem a forma de asas de borboleta, conforme a Figura 2.7. A Figura 2.7 exhibe a solução do sistema de Equações de Lorenz (2.14), para $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$. Essas equações são não-lineares devido ao produtos cruzados das variáveis x , y e z . A solução desse sistema, está representada no espaço de fases, formado pelo eixo-X e pelo eixo-Z.

A figura, cuja forma lembra as asas de uma borboleta é o atrator desse sistema dinâmico. Este comportamento está associado à dependência sensível às condições iniciais, propriedade característica do comportamento caótico de um sistema dinâmico. Trata-se do efeito borboleta mencionado por Lorenz [17] e das causas muito diminutas enunciadas por Poincaré para caracterizar a imprevisibilidade dos sistemas com comportamento caótico. No ano de 1972, Lorenz proferiu a palestra “*Does the flap of a butterfly’s wings in Brazil set off a tornado in Texas?*” (o bater das asas de uma borboleta no Brasil pode ocasionar

um tornado no Texas?) na 139ª reunião da American Association for the Advancement of Science. Em outras palavras, Lorenz quis dizer que uma influência tão pequena como o bater das asas de uma borboleta poderia alterar as condições iniciais de um sistema caótico (como a formação de ventos na atmosfera) a ponto de levar a um comportamento futuro imprevisível, como um tornado [5]. Isto tudo gerou a expressão “efeito borboleta”, que é muito utilizado para representar o efeito que pequenas alterações podem ter sobre o comportamento futuro dos sistemas.

Figura 2.7: Atrator de Lorenz para $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$.



FONTE: O autor.

2.3 Sistemas dinâmicos espaço-temporais

Atualmente sistemas dinâmicos espaço-temporais com muitos graus de liberdade têm sido amplamente estudados na comunidade científica devido à sua interdisciplinaridade e aplicabilidade em várias áreas científicas. Este interesse é motivado em virtude do grande número de problemas práticos onde a dinâmica espacial desempenha um papel significativo: sistemas óticos, fenômenos de turbulência observados em fluidos e plasmas [60], física do estado sólido [61], química [62], redes neurais [10], formação de padrões em sistemas naturais, sistemas elétricos e eletrônicos [18, 19], redes de mundo pequeno [12], redes sem escala [14], sistemas dinâmicos acoplados em biologia e tecnologia, dentre outros [5]. Para o estudo destes sistemas dinâmicos deve-se utilizar um modelo espaço-temporal [63], onde

existe a possibilidade da ocorrência de caos.

A Tabela 2.1 apresenta uma classificação dos sistemas em relação ao espaço, tempo e variáveis de estado. Em sistemas de equações diferenciais parciais o espaço, o tempo e a variável de estado são contínuos. Em sistemas de equações diferenciais iteradas temos o diferencial no tempo como sendo discreto. Nos sistemas que envolvem cadeias de osciladores que são equações diferenciais ordinárias acopladas, a variável de estado e o tempo são contínuos e o espaço é discreto. Para sistemas de autômatos celulares o espaço, o tempo e a variável de estado são discretos. Neste trabalho utilizaremos sistemas de equações diferenciais acopladas, visto que cada equação diferencial é dita como uma posição do sistema.

Tabela 2.1: Tabela referente a classificação dos sistemas espacialmente estendidos.

Sistema	Espaço	Tempo	Variável de Estado
equações diferenciais acopladas	discreto	contínuo	contínua
equações diferenciais parciais	contínuo	contínuo	contínua
equações diferenciais iteradas	contínuo	discreto	contínua
redes de mapas acoplados	discreto	discreto	contínua
autômatos celulares	discreto	discreto	discreta

O uso ou escolha de um ou outro sistema leva a uma questão na facilidade de implementação de tal sistema. Por exemplo, podemos utilizar equações diferenciais parciais que são sistemas hierarquicamente superiores (todas as grandezas são contínuas) devido à sua “generalidade”, mas o tempo computacional necessário pode tornar-se um problema e para efetuarmos a integração numérica, necessitamos discretizar o espaço e o tempo. Podemos utilizar os autômatos celulares, mas devido ao fato do tempo, espaço e a variável de estado serem discretos podemos perder em “generalidade” [5].

Conforme a Tabela 2.1, os sistemas dinâmicos podem ser classificados de várias formas, em relação à variação temporal podem ser de tempo discreto, sendo representados por mapas, e de tempo contínuo, sendo para este caso, representados por equações diferenciais. Podem também ser lineares ou não-lineares, com parâmetros fixos ou variáveis no tempo. Esta tese aborda sistemas dinâmicos de tempo contínuo não-lineares através de equações diferenciais acopladas de forma a modelar sistemas reais, como por exemplo, o oscilador Colpitts. De maneira geral, este trabalho aborda o estudo de sistemas dinâmicos

não-lineares por meio de recursos computacionais. Muitos eventos existentes na natureza tem comportamentos dinâmicos interessantes, e podem de forma satisfatória serem modelados por equações matemáticas e assim, acabam sendo melhor e mais profundamente conhecidos.

Ao se tentar fazer previsões da natureza utilizando modelos matemáticos, podemos nos deparar com problemas que envolvam centenas de variáveis e parâmetros diferentes. Tentar resolver de maneira analítica é inviável na prática, por isso, é interessante utilizar programas computacionais que resolvem de maneira algébrica ou tentam utilizar algumas técnicas para resolver com aproximações. Nesta tese utilizamos programação em C++ em nossas simulações com a evolução temporal do sistema computada através do algoritmo Runge-Kutta de quarta ordem com passo fixo. O método Runge-Kutta de quarta ordem é considerado um integrador numérico adequado devido a sua simplicidade, considerável exatidão, baixo erro de truncamento e baixo esforço computacional.

Os sistemas dinâmicos parecem representar de modo mais adequado a forma como sistemas naturais podem ser tratados de modo a se fazer previsões favoráveis ao avanço da tecnologia. Entretanto, está longe de ter sido completamente compreendida a forma como estes sistemas operam. O estudo e a construção de novos modelos é, assim, importante na compreensão desses sistemas.

3 *Oscilador Colpitts*

As análises de bifurcações têm sido usadas no estudo de osciladores senoidais. Em muitos osciladores senoidais a condição de oscilação usada em projetos eletrônicos corresponde a bifurcações de Hopf que surgem de ciclos limites estáveis [64]. Por outro lado, bifurcações por duplicação de período são responsáveis pelo aparecimento do comportamento subharmônico [65]. Os comportamentos complexos observados em osciladores eletrônicos podem ser relacionados à cascata de Feigenbaum e/ou a existência de bifurcações homoclínicas Shilnikov [24, 66]. Mais ainda, a coexistência de atratores pode surgir por efeitos de histerese no oscilador.

O esforço no sentido de desenvolver osciladores caóticos para a aplicação em sistemas de comunicação tem destacado a necessidade do entendimento dos fenômenos não-lineares exibidos por osciladores eletrônicos. Neste contexto, a teoria da bifurcação e as análises qualitativas de sistemas não-lineares desempenham um papel importante. Os osciladores são usados para uma infinidade de aplicações, sendo as mais comuns o osciloscópio, o gerador de frequência variável, o injetor de sinais, a televisão, o radiotransmissor, o receptor, o radar, o sonar, entre outros [67, 68].

O primeiro circuito oscilador foi desenvolvido no início de 1910, por vários engenheiros, entre eles Reginald Fessenden e H. J. Proud [69]. Este circuito utilizava uma válvula termiônica, o triodo. Desta forma aplicando-se uma realimentação positiva, com o triodo atuando como um amplificador de energia, obtinha-se um sinal na frequência de ressonância do seu circuito sintonizado, permitindo a emissão de ondas contínuas e, conseqüentemente a comunicação em um único canal. Este tipo de circuito foi aperfeiçoado por outros pesquisadores como Edwin H. Armstrong, Edwin H. Colpitts e Ralph V. Hartley.

No início de 1899, Edwin Henry Colpitts (1872-1949) começou a trabalhar como assistente de George A. Campbell na American Bell Telephone Company em Boston, empresa tradicional na área de comunicações, projetando um gerador de frequência variável para utilização em transmissões eletrônicas buscando deste modo, minimizar a distorção e atenuação do sinal emitido. Investigou também a funcionalidade de dielétricos em capacitores [70]. Em 1907, Colpitts se transferiu para empresa Western Electric Company em Nova Iorque, onde juntamente com seu colega Ralph Hartley inventaram um oscilador de acoplamento indutivo que Colpitts melhorou em 1915 e no ano de 1920 foi patenteado como “Gerador de Oscilação”. Colpitts juntamente com Edward Beech Craft [25] escreveram a famosa frase para o ramo de comunicações, *“a possibilidade de comunicação por voz entre quaisquer duas pessoas no mundo civilizado, é um dos fins mais desejáveis para que a engenharia pode se esforçar”*.

3.1 Osciladores eletrônicos

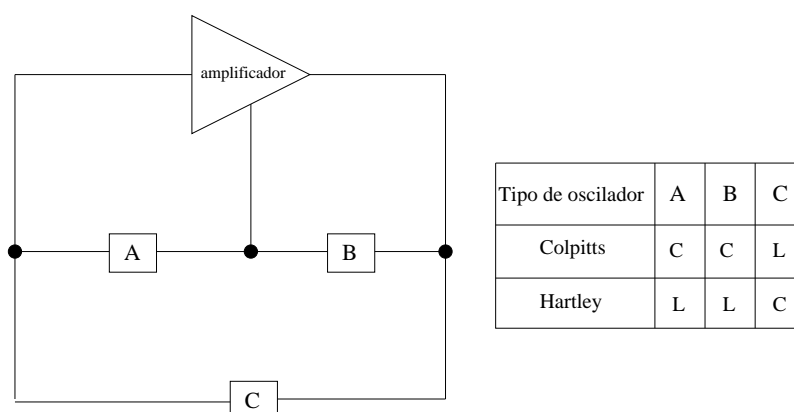
Osciladores eletrônicos são circuitos que se destinam à geração primária de sinais periódicos, ou seja, produzem sinal alternado a partir de um sinal contínuo. Dito de outra forma, um oscilador é um sistema que converte potência de corrente elétrica contínua (CC) em um sinal periódico de potência com corrente elétrica alternada (AC). Isto é conseguido pela interação de um circuito passivo (elementos no circuito elétrico que recebem energia do circuito, com por exemplo, resistores, capacitores e indutores) e um ou mais elementos ativos (elementos no circuito elétrico que fornecem energia ao circuito, como exemplo, os geradores elétricos). É essencial a existência de um comportamento não-linear pois só assim o oscilador poderá estabilizar a amplitude das oscilações em regime permanente. Normalmente este comportamento está associado aos elementos ativos do circuito elétrico.

Na atualidade existem basicamente dois tipos de osciladores eletrônicos: os osciladores harmônicos (senoidais) e os osciladores de relaxação. Os primeiros tem por base a variação da frequência de uma onda sinusoidal devido às perturbações num circuito ressonante provocadas por variações de impedância gerando assim oscilações mais estáveis e precisas. São exemplos de osciladores senoidais [67, 68, 71] o oscilador Colpitts, oscilador Hartley, oscilador de Wien, oscilador de Armstrong, entre outros. Por outro lado o os-

cilador de relaxação têm por base um multivibrador astável, que é um circuito eletrônico que tem dois estados, mas nenhum dos dois é estável. Este circuito muda constantemente de estado, numa velocidade que depende dos valores dos componentes usados e que, portanto gera um sinal retangular. O circuito é um gerador de sinais retangulares, onde o circuito tem sua frequência determinada por um capacitor e um resistor.

Nos osciladores senoidais o processo de sintonia da frequência de oscilação é feita por elementos reativos, conforme Figura 3.1. O oscilador Hartley é um tipo de oscilador LC que utiliza dois indutores e um capacitor para realizar o processo de sintonia da frequência de oscilação que pode variar de 10 Hz até 50 MHz. O oscilador Colpitts tem o princípio de funcionamento bastante similar ao oscilador Hartley, com a única diferença que o processo de sintonia da frequência de oscilação é feito através de um circuito de realimentação capacitivo, formado por dois capacitores e um indutor, aqui sua frequência pode variar de 1 Hz até 100 MHz e em alguns casos sua variação vai até a região de microondas (giga-Hertz), dependendo da tecnologia.

Figura 3.1: Diferença entre oscilador Colpitts e oscilador Hartley, onde A , B e C podem ser capacitores C ou indutores L .



FONTE: O autor.

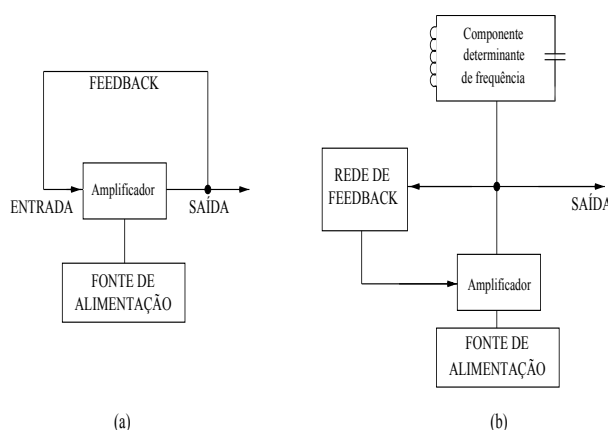
Algumas características do oscilador senoidal incluem a produção de ondas sinusoidais com baixa distorção e em muitas aplicações, a funcionalidade de ser facilmente ajustada para que o utilizador possa variar a sua frequência numa gama considerável [72]. Uma oscilação é uma forma de instabilidade causada pela realimentação positiva que reforça um sinal que acabaria por desaparecer devido a perdas de energia. Para que a

realimentação seja regenerativa, ou seja, repor a perda de energia do sinal, esta deve satisfazer certas relações de amplitude e fase. Um oscilador é projetado com uma malha de realimentação de características conhecidas, para que ocorra a oscilação a uma frequência pré-determinada.

Em sistemas de rádio, os osciladores senoidais geram a frequência portadora de transmissores e alimentam estágios misturadores que convertem sinais de uma frequência para outra. Numa extensão pequena mas crescente, essas aplicações podem também ser desempenhadas por osciladores de onda quadrada e sintetizadores, mas na maioria dos casos, osciladores senoidais são fontes de sinais bastante econômicas. Basicamente, os osciladores senoidais são circuitos que, através de amplificação e realimentação, dão uma onda senoidal de saída.

Um oscilador eletrônico básico, Figura 3.2(a), pode ser encarado como um amplificador que fornece um sinal de entrada para ele mesmo, transformando potência com corrente elétrica contínua (CC) em um sinal periódico de potência com corrente elétrica alternada (AC) a uma frequência pré-determinada. É necessário que parte do sinal de saída retorne à entrada de forma adequada, ou seja, é necessário que haja uma realimentação positiva (regeneração). Basicamente o oscilador é formado por um amplificador, um feedback regenerativo e uma rede de determinação de frequência, conforme Figura 3.2(b).

Figura 3.2: (a) Esquema básico de um oscilador; (b) elementos de um oscilador.



FONTE: O autor.

Os amplificadores têm como objetivo alterar o nível de um sinal, utilizando uma

pequena quantidade de energia para controlar uma quantidade maior. Existem diversas configurações, chamadas de classes, para implementação dos amplificadores, as quais indicam quanto o sinal de saída irá variar sobre um ciclo de operação, para um ciclo completo do sinal de entrada. Os amplificadores de um modo geral podem ser divididos em cinco classes: A, B, AB, C e D [73]. No feedback ocorre a transferência de energia de um ponto de alto nível do sistema para um ponto de baixo nível. O feedback que realimenta o sinal de entrada é regenerativo ou positivo e quando se opõe ao sinal de entrada é degenerativo ou negativo.

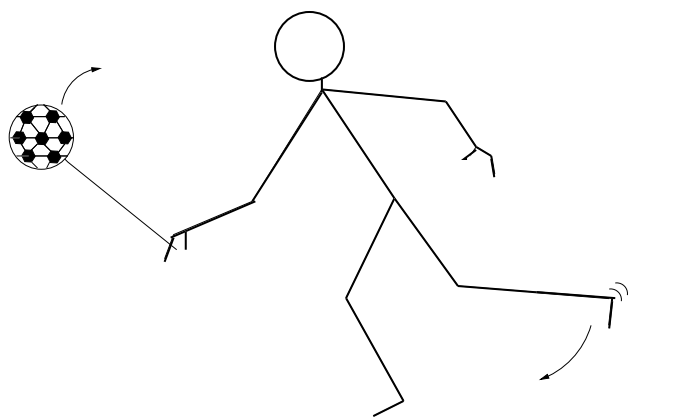
No amplificador Classe A, o sinal de saída varia por um ciclo completo de 360° , sendo polarizado de forma que as variações nas polaridades do sinal de entrada ocorram dentro dos limites de corte e saturação. Nos amplificadores Classe B, um circuito fornece um sinal de saída que varia sobre metade do ciclo de entrada ou por 180° de sinal. Na Classe AB a amplificação do sinal é mais que 180° e menos que 360° , onde obtemos um sinal amplificado com menos distorção que na classe B e mais eficiente que na classe A. A saída de um amplificador Classe C é polarizada para uma operação em menos de 180° do ciclo e opera apenas com circuitos ressonantes, os quais fornecem um ciclo completo de operação para a frequência sintonizada. Para amplificação de sinais pulsados (digitais), que permanecem ligados por um curto intervalo de tempo e desligados durante um longo intervalo de tempo, utilizamos os amplificadores Classe D [73]. Neste trabalho utilizamos os amplificadores Classe C, pois esta configuração é muito encontrada em amplificadores de radiofrequências e em transmissores.

A condição de oscilação em termos da teoria linear, de acordo com a abordagem clássica seguido em eletrônica se baseia em dois modelos fundamentais: o modelo de realimentação e o modelo de resistência negativa. Neste trabalho a abordagem característica tem como ponto de partida o modelo de realimentação, cujo tratamento é muito utilizado na engenharia para a análise de osciladores sinusoidais, tais como o oscilador Colpitts que é o objeto de estudo neste trabalho.

O oscilador Colpitts é um representante dos osciladores geralmente conhecidos sob o termo de osciladores Classe C. Estes osciladores funcionam de acordo com o princípio “*Kick-and-Resonate*” [74], ou seja, eles são compostos, como mostrado na Figura 3.2(b). Uma analogia pode ser feita do funcionamento dos osciladores Classe C, dado pela Figura

3.3, onde temos uma brincadeira com um pêndulo. Numa das extremidades da corda temos uma bola amarrada e a outra extremidade da corda é presa a mão da criança. A criança chuta fortemente a bola com energia suficiente que permita ao pêndulo realizar uma rotação completa pelo menos. Na ausência de qualquer atrito, após um transiente inicial, o pêndulo entra num regime harmônico que seria preservado para sempre. Num sistema real, o atrito dissipa energia e, em consequência, o pêndulo desacelera até parar. O regime harmônico poderia ser preservado se a criança chutasse a bola sempre que ela passasse na frente do seu pé, fornecendo instantaneamente a energia que será dissipada durante a rotação realizada. Esta é certamente uma explicação bastante qualitativa do princípio de funcionamento dos osciladores Classe C, onde uma rede de ressonância dissipativa proporciona ao circuito que o feedback ative e realimente o sinal de entrada num tempo muito pequeno no que diz respeito à frequência de oscilação, ou seja, quase que instantaneamente a energia dissipada pela rede de ressonância dura um número inteiro de oscilações.

Figura 3.3: Analogia mecânica para um oscilador Classe C.



FONTE: O autor.

O modelo de realimentação consiste na decomposição do circuito em um subsistema de tempo linear invariante (rede ativa) e um elemento de realimentação não-linear, conectados juntos em um circuito fechado. A condição necessária para que ocorra a oscilação é obtida através da análise linear, considerando uma aproximação linear do elemento de realimentação e exigindo que o sistema admita uma oscilação auto-sustentada. Deste modo, o ganho do amplificador deve ser maior que a perda no caminho de realimentação e o sinal realimentado na entrada do amplificador deve estar em fase, assim, o amplificador

encontra-se em modo de realimentação positiva ou regenerativa [75].

Para sistemas de controle em malha fechada não-lineares ou variantes no tempo, existem definições de estabilidade que seguem os critérios de estabilidade de entrada nula ou estabilidade da resposta natural do sistema (estado), com aplicabilidade restrita e geralmente de formulação complexa [71]. A estabilidade pode refletir o comportamento do sistema quando o mesmo é submetido a uma entrada, representando assim o comportamento externo do sistema, sendo adequado utilizar o critério BIBO “*Bounded Input, Bounded Output*” para analisar a estabilidade, uma vez que para cada entrada limitada, o sistema produz uma saída limitada, diz-se que o sistema é estável no sentido BIBO. Para sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT), a estabilidade BIBO e a estabilidade assintótica são equivalentes.

O estudo da estabilidade do sistema está intimamente ligado ao controle que se pode estabelecer sobre o mesmo. Um circuito projetado para ampliar ou filtrar um sinal de entrada, por exemplo, não deve oscilar aleatoriamente, ou mesmo apresentar um sinal de saída cuja amplitude cresça indefinidamente. Por outro lado, um circuito projetado para oscilar não deve ter um sinal de saída com amplitude que tenda a zero, que permaneça constante ou que cresça indefinidamente [67,68]. Assim um sistema linear, que se encontre em um determinado estado de equilíbrio, terá sua estabilidade definida em função de como o sistema vai reagir a uma determinada perturbação.

Um sinal de saída ou uma variável interna do sistema pode ser considerada como resposta de um sistema. Um sistema linear pode ser classificado em instável, marginalmente estável e assintoticamente estável. Caso uma perturbação, por menor que seja, produza uma resposta cuja amplitude cresça indefinidamente, mesmo após a perturbação tenha sido removida o sistema será instável. Por outro lado, se a resposta se mantém, porém com amplitude limitada, o sistema é marginalmente estável e caso a resposta tenda a zero, o sistema será classificado como assintoticamente estável. Removendo a perturbação, o sistema encontra-se na condição de entrada nula.

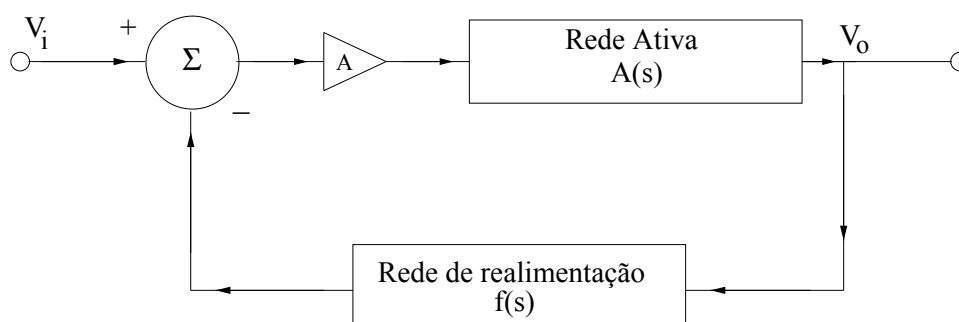
Um sistema dinâmico de tempo contínuo é estável quando todos os seus pólos, ou seja, todas as raízes de sua equação característica possuem parte real negativa, isto é, residem no semiplano lateral esquerdo (SPLE) do plano complexo. Por outro lado, a

presença de pólos no semiplano lateral direito (SPLD) vai fazer com que a resposta do sistema aumente exponencialmente, de forma monotônica ou oscilatória.

Nesta situação o oscilador é um amplificador realimentado, cuja malha de realimentação produz pólos no semiplano lateral direito. Quando o oscilador é ligado ou ativado, sua saída só vai crescer com o passar do tempo. Caso nenhum dispositivo de saturação esteja presente, ou então algum mecanismo de interrupção atue no processo de crescimento da saída, o sistema irá certamente sofrer danos ou passar a operar de forma imprevisível, pois nenhum sistema físico pode apresentar uma saída, ou mesmo algum estado interno, que cresça indefinidamente sem produzir anormalidades.

A Figura 3.4, apresenta o diagrama de blocos, que é a divisão do circuito em blocos para facilitar a análise dos componentes. Neste caso, temos o modelo de realimentação, uma vez que o oscilador é um amplificador realimentado, cuja malha de realimentação produz pólos no semiplano lateral direito. O oscilador senoidal é decomposto em uma rede ativa $A(s)$ e uma rede de realimentação $f(s)$.

Figura 3.4: Diagrama de blocos para um amplificador realimentado, onde o bloco $A(s)$ é o amplificador e o bloco $f(s)$ a malha de realimentação.



FONTE: O autor.

De acordo com o diagrama de blocos, a relação entre a entrada e a saída expressa uma função de frequência de entrada, denominada função de transferência do circuito, sendo expressa pelo quociente de dois polinômios, da seguinte forma:

$$a(s) = \frac{V_0}{V_i} = \frac{A(s)}{1 - A(s)f(s)}, \quad (3.1)$$

onde os pólos de $a(s)$ são as raízes do seu denominador e os zeros de $a(s)$ são as raízes

do seu numerador. Para expressar graficamente, no plano complexo, os pólos e os zeros da função $a(s)$, pode-se utilizar o diagrama de pólos e zeros da função de transferência do mesmo.

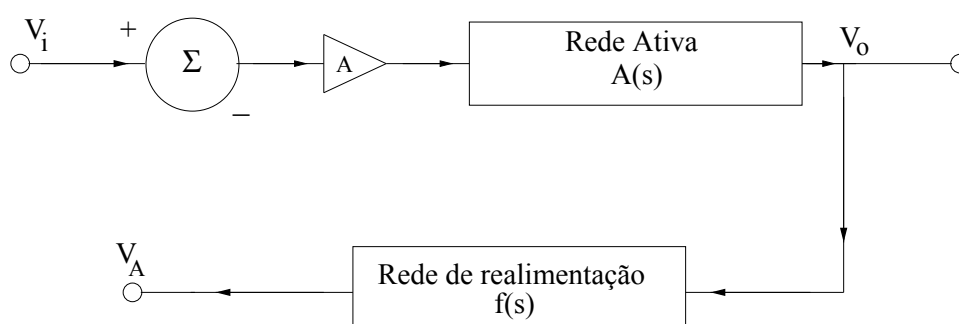
Na ausência de um sinal de entrada $V_i = 0$, o sinal que sai é $V_0 \neq 0$. Isto só é possível se a magnitude da função de transferência do circuito, denominada de ganho de malha $g(s)$ for infinita (algo inviável na prática), ou se o denominador da Equação (3.1) é cancelado, assim temos a função para os pólos,

$$1 - A(s)f(s) = 0. \quad (3.2)$$

O amplificador irá oscilar com uma certa frequência se a função de transferência for instável e um par de pólos complexos estiver no semiplano lateral direito. Para determinar a frequência de oscilação e a condição de instabilidade, deve-se abrir a malha de realimentação, conforme a Figura 3.5, e calcular o ganho da malha $g(s)$. Deste modo, o comportamento linear do circuito de realimentação é estudado através da quantidade de ganho da malha aberta, definido como sendo o produto entre as funções da rede ativa e da rede de realimentação, ou seja,

$$g(s) = A(s)f(s). \quad (3.3)$$

Figura 3.5: Amplificador em malha aberta.



FONTE: O autor.

A equação característica para o modelo de realimentação, cujas soluções fornecem as frequências naturais do sistema, definidas como os zeros do polinômio característico do

sistema [71], é dada por [76]:

$$1 - g(s) = 0, \quad (3.4)$$

substituindo s por $j\omega$ onde $j^2 = -1$, o circuito oscilará em uma frequência ω , que pode ser calculada ao longo do eixo imaginário $s = \pm j\omega$ e definida como sendo a função resposta em frequência, dada por $s(j\omega)$, o ganho da malha será uma quantidade real, assim

$$g(j\omega) = g(s) \Big|_{s=j\omega}, \quad (3.5)$$

e a Equação (3.1) pode ser escrita da seguinte forma,

$$a(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{1 - A(j\omega)f(j\omega)}. \quad (3.6)$$

Para determinarmos a frequência de oscilação ω e a condição de instabilidade, abrimos a malha de realimentação, conforme a Figura 3.5, para obtermos o ganho de malha aberta. A condição de oscilação resultante é conhecida como *critério de Barkhausen* [67,76], a qual prevê que uma oscilação auto-sustentada irá ocorrer na frequência ω_0 em um sistema de realimentação quando a mudança de fase em torno do circuito é zero e o ganho da malha é igual a unidade, portanto, o ganho da malha $A(j\omega)f(j\omega)$ é um número complexo que pode ser representada pela sua amplitude e fase, ou de forma equivalente pelas Equações (3.7) e (3.8)

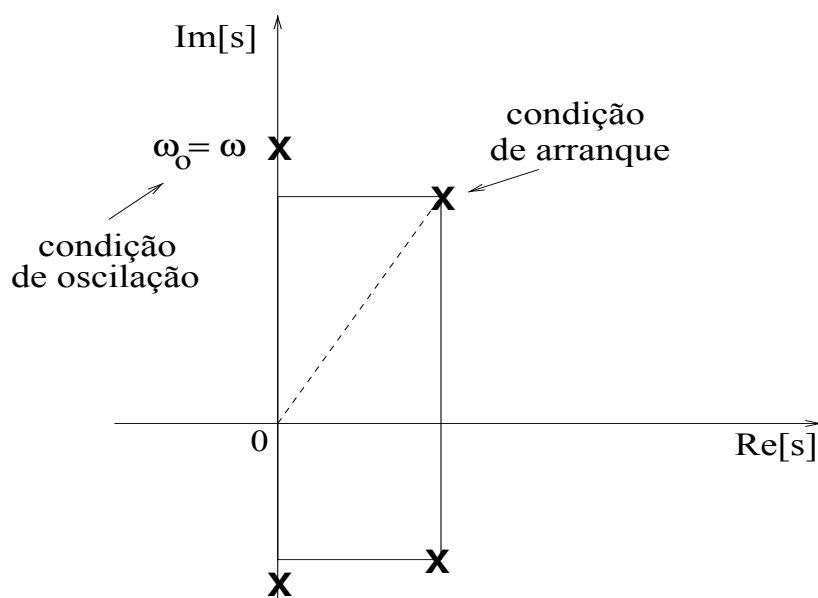
$$\begin{cases} g(j\omega) = A(j\omega)f(j\omega), \\ \operatorname{Re}[g(j\omega_0)] = 1, \\ \operatorname{Im}[g(j\omega_0)] = 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

ou

$$\begin{cases} g(j\omega) = A(j\omega)f(j\omega), \\ |g(j\omega_0)| = 1, \\ \arg[g(j\omega_0)] = 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

com a resposta oscilando numa frequência ω , porém atenuada por um fator $g(j\omega_0)$ e defasada um ângulo $\phi = \arg[g(j\omega_0)]$ que dependem de ω . O critério de Barkhausen é equivalente a impor a restrição onde o sistema admite apenas um par de frequências naturais $\pm j\omega_0$ no eixo imaginário, como esboçado na Figura 3.6.

Figura 3.6: Localização das frequências naturais no plano complexo seguindo a condição de oscilação ou a condição de arranque correspondente.



FONTE: O autor.

Quando o ganho da malha é exatamente a unidade teremos uma abstração no estudo de osciladores, sendo completamente irrealizável na prática. Para osciladores reais é sempre necessário providenciar que o ganho da malha seja ligeiramente maior que a unidade (na frequência de oscilação ω_0), a fim de assegurar a formação de oscilações, impedindo assim que o ganho da malha seja inferior à unidade, devido às variações dos transistores ou outros parâmetros do circuito. Assim, a condição de arranque no modelo de realimentação pode ser formulada da seguinte forma [71]:

$$\begin{cases} |g(j\omega'_0)| > 1, \\ \arg[g(j\omega'_0)] = 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

onde ω'_0 é a frequência com fase nula e a condição para a fase no critério de Barkhausen é satisfeita, conforme a Equação (3.8). De forma geral, $\omega'_0 \neq \omega_0$ e nenhuma delas coincide com a frequência de oscilação atual do oscilador. Na verdade, esta última frequência depende também das não-linearidades do circuito, que não são levadas em consideração por meio da análise linear.

Para o circuito oscilar em uma certa frequência, o critério deve ser satisfeito apenas

nessa frequência ω_0 , gerando assim uma oscilação senoidal. O circuito não oscila quando $|g(j\omega_0)| < 1$, por outro lado, quando $|g(j\omega_0)| > 1$, a amplitude do sinal de retorno crescerá até que o amplificador entre na região de saturação, resultando numa oscilação distorcida. Assim, a frequência de oscilação ω_0 é determinada exclusivamente pelas características de fase da malha de realimentação, logo a malha oscila na frequência de ressonância. Isto significa que a estabilidade da frequência de oscilação será determinada pelo modo pelo qual a fase $\phi(\omega)$ da malha de realimentação varia com a frequência.

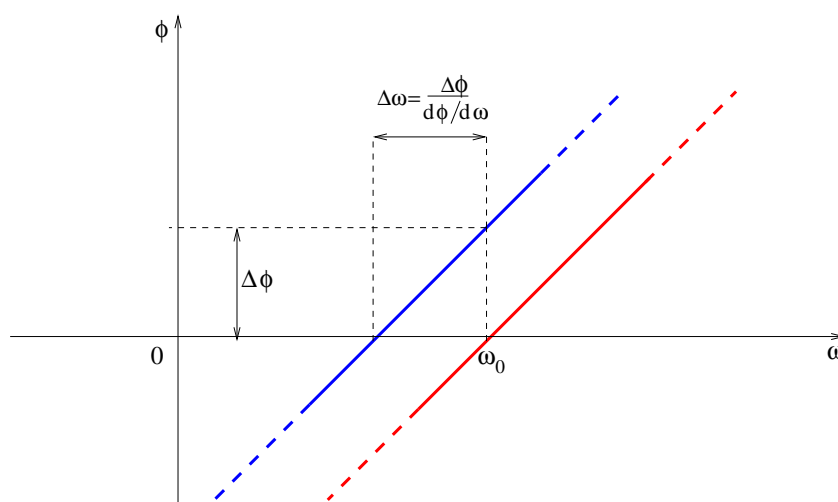
Cabe ressaltar que a função de transferência $a(s)$ pode possuir mais de um par de pólos no semiplano lateral direito, o que estabelece mais de uma frequência de oscilação. Porém, os osciladores são limitados em amplitude, devido às não linearidades na região de grandes sinais. O processo de limitação é realizado fazendo a redução do ganho de malha até a unidade. Neste mecanismo, os pólos permanecem próximos do eixo imaginário se $A(j\omega)f(j\omega) > 1$, enquanto os outros migram para o semiplano lateral esquerdo. Ligando a fonte de alimentação as oscilações aumentam e quando a amplitude da oscilação atinge o valor desejado um controle não-linear passa a atuar no circuito fazendo com que os pólos sejam deslocados para o eixo imaginário. Deste modo, o circuito mantém as oscilações na amplitude desejada para $g(s) = 1$. Se o ganho $A(j\omega)f(j\omega)$ ficar menor que 1 as oscilações diminuem de amplitude.

A condição de arranque dada pela Equação (3.9) exige que o circuito seja instável sobre o seu ponto de operação admitindo assim um par de frequências naturais complexas no semiplano lateral direito, conforme a Figura 3.6. Caso as frequências naturais complexas encontrem-se perto do eixo imaginário da frequência ω'_0 poderemos utilizá-la como uma estimativa da frequência de oscilação. Como resultado para a instabilidade do circuito, uma excitação inicial produz um crescimento transiente. À medida que o sinal aumenta, a sua amplitude é limitada pelo início das não-linearidades do circuito. Como o oscilador é um circuito autônomo, a excitação inicial que inicia a oscilação é normalmente pela fonte de alimentação.

Uma forma alternativa para estudar os circuitos osciladores consiste no exame dos pólos do circuito, que são as raízes da Equação característica (3.4). Para o circuito produzir e manter oscilações em ω_0 , a equação característica deve ter raízes em $s = \pm j\omega_0$. Portanto, $1 - A(s)f(s)$ deve ser da forma $s^2 + \omega_0^2$ [67]. Caso a função tenha uma inclinação

íngreme, $\phi(\omega)$ resultará em uma frequência mais instável, deste modo, pode ocorrer uma variação de fase $\Delta\phi$ devido a uma variação nos componentes do circuito (temperatura, por exemplo). Se $d\phi/d\omega$ for alta a variação resultante em ω_0 será pequena [67], conforme a Figura 3.7.

Figura 3.7: Dependência da estabilidade da frequência do oscilador com a inclinação da resposta em fase.



FONTE: Adaptada de [67], página 1168.

Como neste trabalho utilizaremos o modelo de realimentação, cabe ressaltar que no modelo de resistência negativa, um resistor de valor negativo é um elemento ativo que vai fornecer energia para o sistema. Este resistor ativo pode ser obtido por diferentes procedimentos como o uso de um diodo túnel (quando a tensão está muito próxima de zero) ou o uso de técnicas de realimentação de sistemas. Estas técnicas, entretanto só aproximam o modelo deste resistor linear para uma determinada faixa de valores de tensão e corrente. Assim, não é incomum que, com o aumento dos valores de tensão e corrente, o modelo de resistência negativa deixe de ser válido.

Além da necessidade de uma realimentação positiva, devem ser incorporados ao circuito um transistor (BJT, FET ou cristal) que vai agir como amplificador de sinal, elementos determinantes da frequência e as necessárias tensões de corrente contínua de polarização. Ao ser alimentado, um sinal randômico é gerado no dispositivo ativo $A(s)$ da Figura 3.4 e assim amplificado. Este sinal é realimentado positivamente em $f(s)$ através de circuitos seletores de frequência, e retorna à entrada, onde é novamente amplificado. O

estado de equilíbrio é atingido quando as perdas no circuito são aceitáveis e a frequência de oscilação é determinada por componentes externos, como capacitores, indutores ou um cristal.

Antes de 1951, as válvulas eram os principais dispositivos usados para amplificar sinais fracos [78]. Embora sejam excelentes amplificadores, apresentam uma série de desvantagens, pois possuem um filamento interno ou aquecedor que requer pelo menos 1W de potência, a vida útil de seu filamento é da ordem de algumas milhares de horas, ocupa muito espaço e por fim o aquecimento necessário para o seu funcionamento faz aumentar a temperatura interna dos equipamentos eletrônicos. Em 1951, William Bradford Shockley inventou o primeiro transistor de junção, um dispositivo semicondutor capaz de amplificar sinais de rádio e TV [78]. A utilização de transistores em circuitos elétricos ultrapassa de longe as desvantagens de uma válvula, uma vez que, o transistor não tem filamento ou aquecedor, requerendo assim uma potência muito menor. Por ser um dispositivo semicondutor, ele pode durar indefinidamente. Devido às suas pequenas dimensões, ele ocupa pouco espaço e como gera pouco calor, os equipamentos podem funcionar com temperaturas internas mais baixas.

O elemento ativo nos osciladores é normalmente um transistor de junção bipolar (*Bipolar Junction Transistor* - BJT) ou um transistor por efeito de campo (*Field Effect Transistor* - FET) e a frequência de operação é determinada por um circuito sintonizado (ou um cristal pizeoelétrico) na malha de realimentação (amplificador que pode gerar o seu próprio sinal de entrada). Utilizam-se transistores em circuitos elétricos de maneira apropriada para amplificar a energia, tensão ou a corrente elétrica, enquanto que para aplicações digitais, o transistor tem função de mudar os estados de ON para OFF em curta duração de tempo [77].

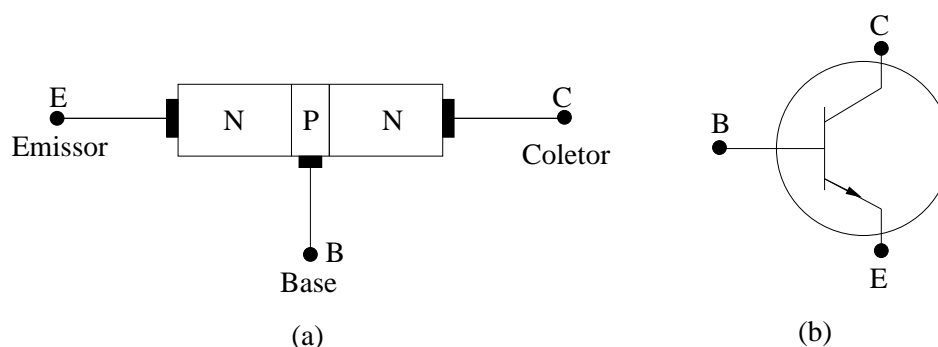
O transistor tem quatro regiões de operação distintas: ativa, corte, saturação e ruptura. Os transistores operam na região ativa quando são usados como amplificadores de sinais fracos. As regiões de saturação e corte são usadas nos circuitos digitais e outros circuitos de computador [78]. O transistor atua como uma chave eletrônica e conduz periodicamente, sempre que a energia é realimentada desde o circuito sintonizado, a fim de manter as oscilações do circuito tanque (circuito LC), circuito este capaz de restaurar a onda senoidal de entrada [79] e por isso são habitualmente utilizados nas estruturas de

realimentação dos osciladores para a seleção de frequência de oscilação.

Os materiais utilizados na fabricação do transistor são principalmente o silício (Si), o germânio (Ge), o gálio (Ga) e alguns óxidos. Na natureza, o silício é um semimetal devido à conformação das ligações eletrônicas do seu átomo, gerando uma rede eletrônica altamente estável. Atualmente, o transistor de germânio é menos utilizado, tendo sido substituído pelo de silício. O transistor de silício e germânio foram inventados nos Laboratórios da Bell Telephone por John Bardeen e Walter H. Brattain em 1947. Eles pretendiam fabricar um transistor por efeito de campo (FET) idealizado por Julius E. Lilienfeld antes de 1925, mas acabaram por descobrir uma amplificação da corrente no ponto de contato do transistor. Isto evoluiu posteriormente para converter-se no transistor de junção bipolar (BJT) em 1951. O objetivo principal do projeto era criar um dispositivo compacto e barato para substituir as válvulas termoiônicas usadas nos sistemas telefônicos da época.

Neste trabalho utilizamos o transistor BJT que é um semicondutor composto de três regiões dopadas conforme a Figura 3.8(a) e simplificado pela simbologia na Figura 3.8(b), cuja região central, é inserida entre duas regiões que possuem dopagem diferente da região central, o que faz o transistor ser do tipo NPN ou PNP.

Figura 3.8: (a) Construção do transistor NPN; (b) Simbologia.



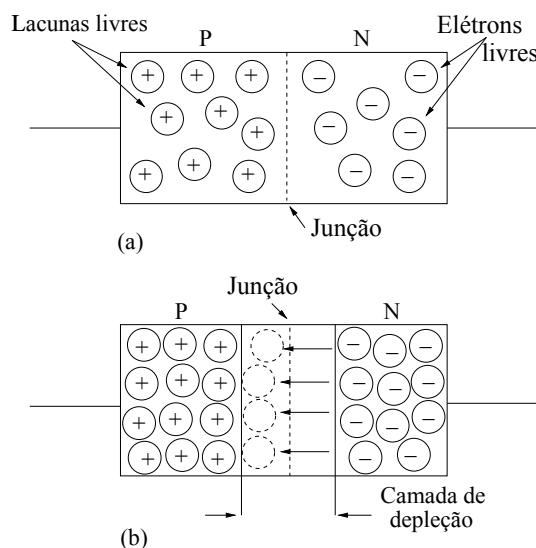
FONTE: O autor.

O transistor NPN (utilizado neste trabalho) é caracterizado por duas junções PN (junção base-emissor e junção base-coletor) e por três terminais designados por emissor (E), base (B) e coletor (C). O semicondutor tipo N de uma das junções, com baixo nível de dopagem é chamado “coletor”, pois esta região coleta os portadores de corrente, por outro lado, o outro semicondutor tipo N com alto nível de dopagem é denominado “emissor”,

pois nesta região ocorre a emissão dos portadores de corrente. O semiconductor tipo P com baixo nível de dopagem comum às duas junções é denominado “base”, uma vez que esta região controla o fluxo de corrente. As regiões tipo N contém elétrons livres como portadores majoritários, enquanto que a região tipo P contém lacunas livres como portadores majoritários.

A junção mostrada na Figura 3.9(a) é a fronteira, ou a linha divisória, que marca o fim de uma seção e o início de outra, em outras palavras, a junção é parte de um cristal onde o material do tipo P termina e o material do tipo N começa. Num cristal inteiriço, os elétrons livres podem se mover através da junção, e quando estes elétrons livres atravessam a junção preenchem algumas lacunas do cristal P. A Figura 3.9(b) mostra este efeito. Como resultado, uma região chamada de camada de depleção é formada [79]. Os elétrons que preencheram as lacunas são capturados e não estão mais disponíveis para serem portadores de corrente, deste modo, os elétrons que saíram do material tipo N e as lacunas preenchidas na junção do material tipo P criaram uma região sem portadores livres. Essa região em torno da junção se tornou escassa de portadores de corrente.

Figura 3.9: (a) Estrutura de um diodo de junção; (b) Camada de depleção do diodo.



FONTE: Adaptada de [79], página 42.

Para o transistor NPN, os elétrons livres na região N se difundem através da junção e se recombinam com as lacunas na região P. Como resultado, teremos duas camadas de

depleção, sendo uma na junção NP e outra na junção PN [78]. As camadas de depleção não crescem indefinidamente. Uma diferença de potencial, ou força, surge nas camadas de depleção impedindo que os outros elétrons as cruzem e venham a preencher todas as demais lacunas. Para cada uma dessas camadas de depleção, a barreira de potencial é de cerca de 0,7 V na temperatura de 25° C para o dispositivo de silício.

As duas junções do transistor devem ser polarizadas corretamente, uma vez que não se pode substituir um componente do tipo NPN por outro do tipo PNP, pois os mesmos tem polaridades distintas. Para que o transistor opere corretamente a junção coletor-base deve permanecer reversamente polarizada, enquanto que a junção base-emissor deve permanecer diretamente polarizada para acionar o transistor. Assim, a resistência da junção base-emissor se torna muita pequena se comparada àquela da junção base-coletor. Esta grande diferença na resistência da junção confere ao transistor a capacidade de fornecer ganho de potência [79].

O nome transistor bipolar vem do fato que ambos os portadores (elétrons livres e lacunas) tomam parte do fluxo de corrente que atravessa o dispositivo. Por outro lado, o transistor bipolar PNP opera de maneira análoga ao transistor NPN, porém com fluxo de portadores majoritários de cargas sendo as lacunas. A região central é chamada de base e cumprirá a função de terminal de controle enquanto as outras duas regiões cumprirão os papéis de emissor e coletor.

Os transistores podem ser ligados entre si em três configurações básicas, base comum (CB), emissor comum (EC) e coletor comum (CC). Essas denominações comuns relacionam-se ao ponto onde o sinal é injetado e onde é retirado, ou ainda, qual dos terminais do transistor é referência para entrada ou saída do sinal. As configurações base comum, emissor comum e coletor comum são também denominadas base a terra, emissor a terra e coletor a terra. O que é diferente na maneira de construção dos diversos tipos de transistores não é somente as intensidades de corrente e o calor gerado. Ao analisarmos um transistor veremos que a região da junção entre o emissor e a base e entre a base e o coletor se comporta como um capacitor.

Deste modo, existem componentes que se aproveitam deste fato na sua operação, como exemplo, os diodos varicaps (possuem uma capacitância variável que é função da

tensão à qual ele é submetido). É de vital importância o efeito dessa capacitância denominada parasita num transistor, pois na realidade ela é indesejável na maioria das aplicações dos transistores de rádio frequência. Assim, quando um transistor for ligado como amplificador, o sinal aplicado deve ao mesmo tempo polarizar a junção base-emissor, supondo que a configuração seja a de emissor comum, e também carregar e descarregar um pequeno capacitor parasita que obrigatoriamente deve estar instalado no circuito.

3.2 Circuito elétrico e equações de estado

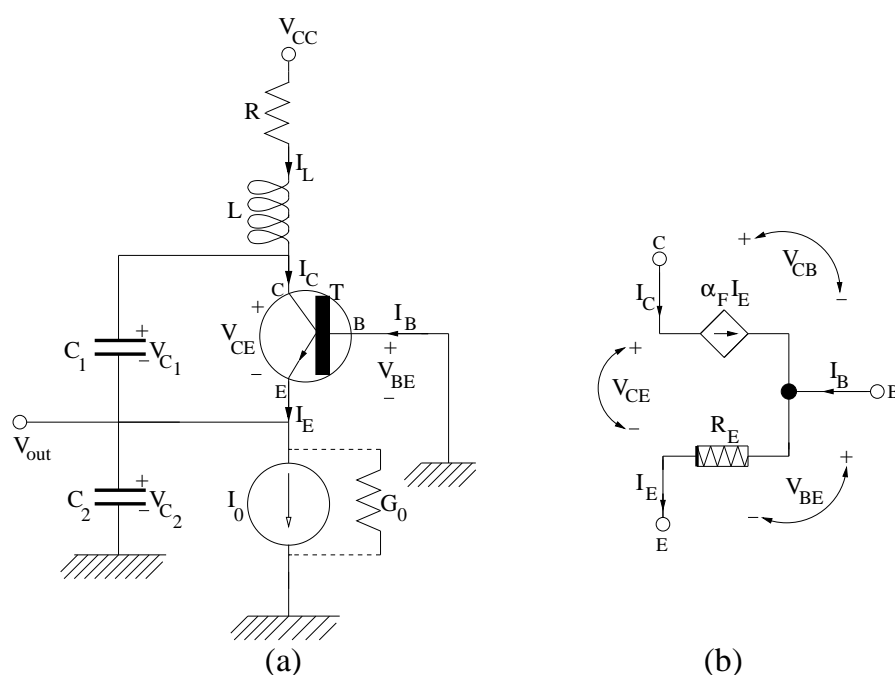
Embora o oscilador Colpitts tenha sido originalmente projetado para ser um oscilador quase senoidal [67], verifica-se que o mesmo exibe um rico comportamento dinâmico em certos valores dos parâmetros [80]. Foi demonstrado por Michael P. Kennedy, Oscar De Feo e Gian M. Maggio [81, 82] com a teoria da bifurcação que formas normais e técnicas numéricas podem ser bem empregadas para caracterizar qualitativamente os diferentes comportamentos dinâmicos exibidos pelo oscilador Colpitts.

O diagrama esquemático do oscilador Colpitts geralmente considerado em engenharia eletrônica é mostrado na Figura 3.10(a). O circuito compreende um transistor T de junção bipolar (BJT), atuando como elemento ativo controlado por um diodo ou resistor não-linear R_E , uma rede de ressonância que consiste de um indutor L em série com um resistor R que representa as perdas do indutor real, um par de capacitores C_1 e C_2 que fornecem a realimentação necessária para que ocorra a oscilação. A polarização do circuito é fornecida pela tensão de alimentação V_{CC} e uma fonte de corrente elétrica real I_0 em paralelo com uma condutância G_0 , fornecendo assim uma fonte de corrente ideal (Teorema de Norton) [78] que é capaz de fornecer sempre a mesma corrente, independente do valor da carga. Na prática, entretanto, existe um limite dentro da qual a fonte pode operar, a exemplo do que ocorre com as fontes de tensão.

Na Figura 3.10(b) temos um transistor bipolar numa configuração base comum (CB) onde sua base é ligada ao terra. Este arranjo é utilizado para amplificadores que necessitam de uma impedância de entrada baixa. O sinal é injetado entre emissor e a base e retirado entre o coletor e a base. Desta forma, pode-se dizer que a base é o terminal comum para a entrada e saída do sinal. Temos também uma fonte de corrente controlada

I_E que é a corrente elétrica do emissor, I_B é a corrente elétrica da base, I_C é a corrente elétrica do coletor, $\alpha_F I_E$ é a corrente de emissão do diodo e α_F é a eficiência de energia transferida, determinando a porcentagem de energia disponível processado a partir da rede ativa que é desperdiçada durante a transferência para a rede ressonante. α_F é o análogo do ganho de corrente elétrica do curto circuito a frente da configuração base comum do transistor bipolar.

Figura 3.10: (a) Diagrama esquemático do oscilador Colpitts; (b) modelo do transistor numa configuração base comum (CB).



FONTE: Adaptada de [67], páginas 1179-1180.

O circuito tanque LC é empregado para fornecer as oscilações senoidais, assim um pulso de corrente no coletor carrega o capacitor. À medida que este componente se descarrega através do indutor, o campo magnético do indutor aumenta e a energia vai se armazenando no campo magnético do indutor. Após a descarga completa do capacitor, o campo começa a ser reduzido, mantendo a corrente circulando pelo circuito. Com a extinção do campo, o capacitor passa a atuar novamente como fonte, sendo novamente carregado, mas na polaridade oposta. Após a redução do campo, o capacitor novamente começa a se descarregar através do indutor, com a corrente circulando no sentido oposto

e o campo magnético do indutor aumentando. Por fim, o campo magnético do indutor começa a diminuir, de modo que o capacitor é carregado com a polaridade original. Deste modo, o ciclo passa a se repetir continuamente [75].

A ação do circuito tanque resulta na descarga do capacitor em um indutor, que posteriormente se descarrega no capacitor, e assim por diante. Indutores e capacitores são dispositivos de armazenamento de energia, e à medida que a energia é transferida de um elemento para outro, uma onda senoidal é gerada [79]. As perdas no circuito, devido a resistência, provocarão uma redução nas oscilações no circuito tanque com o passar do tempo. Aplicando-se um pulso ao circuito tanque em cada ciclo, é possível manter a amplitude da onda senoidal constante. Para implementar um oscilador LC prático, deve-se empregar um amplificador. O ganho do amplificador compensará as perdas resistivas, gerando assim uma onda senoidal com amplitude constante.

Seguindo o método padrão para análise qualitativa de sistemas não-lineares [20], escolhemos um modelo mínimo para o oscilador Colpitts, ou seja, um modelo mais simples o possível mas que mantém as características essenciais exibidas pelo oscilador real. Isso exige, naturalmente, uma análise da robustez do modelo, a fim de validar os resultados. Assumindo que os elementos reativos e passivos do circuito são ideais e em relação ao modelo do transistor NPN, fazemos os seguintes pressupostos:

1. o transistor T é modelado por um resistor não-linear R_E de tensão controlada V_{BE} e uma fonte de corrente elétrica ideal I_0 , de modo que as correntes parasitas e os efeitos reversos são descartados [67] como mostrado na Figura 3.10(b);
2. α_F é o ganho de corrente do transistor bipolar numa configuração base comum (CB), podendo ser expresso pelo quociente entre a corrente elétrica do coletor I_C e a corrente elétrica do emissor I_E . O ponto de acionamento característico [71] da junção base-emissor $B - E$ pode ser aproximada por uma função exponencial [67] dada por

$$I_E = \frac{I_S}{\alpha_F} \left[\exp\left(\frac{V_{BE}}{V_T}\right) - 1 \right], \quad (3.10)$$

onde I_E é a corrente elétrica do emissor, I_S é a corrente de saturação na junção $B - E$, V_{BE} é a tensão através da junção $B - E$, $V_T \equiv k_b T / q$ é a tensão térmica onde k_b é a constante de Boltzmann, T é a temperatura absoluta expressa em Kelvin, q é a carga

do elétron e $V_T \simeq 27mV$ à temperatura ambiente;

3. a dinâmica de parasitas são negligenciadas do transistor, para isso, capacitores parasitas C_{BE} e C_{CE} podem ser adicionados em paralelo com C_2 e C_1 , respectivamente.

Cabe ressaltar que o resistor não-linear R_E modelado na junção $B-E$ do transistor na Figura 3.10(b) desempenha um papel fundamental na determinação de fenômenos não-lineares que ocorrem no oscilador Colpitts, uma vez que o diodo devido a barreira de potencial (barreira esta que fornece a diferença de potencial existente na região de depleção da junção PN) não age como um resistor linear e quando o diodo é plotado numa curva de corrente elétrica versus tensão teremos um gráfico não-linear. Através de uma análise robusta do modelo, os elementos que são negligenciados não alteram o comportamento qualitativo do sistema, de modo que elementos parasitas não adicionam novas dinâmicas para o sistema.

Em relação ao esquema da Figura 3.10(a), a escolha natural para as variáveis de estado $V_{C_1}(= V_{CE})$, $V_{C_2}(= -V_{BE})$ e I_L que são as tensões entre os capacitores C_1 e C_2 e a corrente através do indutor L respectivamente, correspondem às seguintes equações de estado

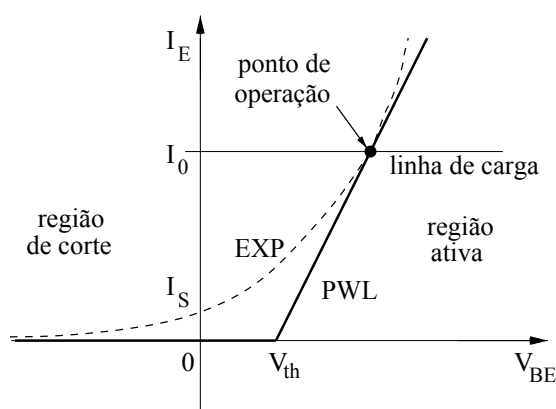
$$\begin{cases} C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt'} = -\alpha_F n(-V_{C_2}) + I_L, \\ C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt'} = (1 - \alpha_F) n(-V_{C_2}) - G_0 V_{C_2} + I_L - I_0, \\ L \frac{dI_L}{dt'} = -V_{C_1} - V_{C_2} - R I_L + V_{CC}, \end{cases} \quad (3.11)$$

onde as tensões V_{C_1} e V_{C_2} são as variáveis de estado através dos capacitores C_1 e C_2 respectivamente, I_L é a corrente no indutor L , G_0 é a condutância, t' é o tempo expresso como $t = t'\omega_0$, V_{CC} é a voltagem fornecida ao circuito por uma fonte de corrente I_0 , α_F é ganho de corrente do transistor numa configuração base comum (CB) [24]. A função característica $n()$ fornece os pontos de condução do resistor não-linear R_E . Esta característica pode ser expressa como $I_E = n(V_{C_2}) = n(-V_{BE})$.

A dependência funcional utilizada para modelar o resistor não-linear R_E ou diodo

da Figura 3.10(b) no oscilador Colpitts pode ser distinguida entre um modelo exponencial (EXP) ou um modelo linear por partes (PWL) conforme a Figura 3.11, onde a linha tracejada fina corresponde ao modelo exponencial e a linha contínua larga corresponde ao modelo linear por partes.

Figura 3.11: Característica não-linear do resistor R_E de acordo com o modelo exponencial (EXP) e com o modelo linear por partes (PWL) no oscilador Colpitts.



FONTE: O autor.

As formas como são polarizadas as junções emissor-base e coletor-base, direta ou reversa, são utilizadas para obter o modo de operação dos transistores e conseqüentemente nos fornecem as características não-lineares do resistor R_E . Na região ativa da Figura 3.11 o transistor opera como amplificador. As aplicações de chaveamento utilizam as regiões de corte e saturação. O objetivo da polarização é estabelecer uma corrente contínua e constante no emissor ou no coletor. Essa corrente deve ser previsível e insensível à variações na temperatura. A necessidade de manter uma corrente constante no coletor provém do fato de que a operação do transistor como amplificador é altamente influenciada pelo valor de polarização da corrente. No circuito, a junção emissor-base está diretamente polarizada pela tensão de V_{BE} .

Por outro lado, a polarização reversa da junção coletor-base é estabelecida pela conexão da fonte DC de alimentação V_{CC} através do resistor R . O sinal de entrada a ser amplificado está representado pela tensão V_{BE} , dessa forma, para que o circuito opere na região ativa, a tensão no coletor V_C deve ser maior que a tensão na base V_B por um valor que permita oscilações com amplitude razoáveis no sinal de coletor e ainda mantenha o

transistor na região ativa o tempo todo.

A região de corte corresponde a região onde a corrente da base I_B é zero, mas ainda existe uma corrente mínima no coletor I_C que poderá ser ignorada [78]. Na região de corte, o diodo emissor sai da polarização direta e o funcionamento do transistor é perdido. Ao polarizar um transistor em corrente contínua, escolhamos o seu ponto de operação, também denominado ponto quiescente, ou seja, definimos em qual região o transistor deverá funcionar. Caso não ocorra a polarização do transistor, o ponto de operação O estará na origem do gráfico da Figura 3.11, aumentando a corrente contínua no emissor, o ponto de operação O move-se para cima na curva. Se a fonte de polarização da corrente for ideal, ou seja, $G_0 = 0$ a linha de carga é horizontal.

A Figura 3.11 mostra o gráfico do diodo diretamente polarizado. O valor de tensão V_{BE} no qual a corrente começa a aumentar rapidamente é chamado *tensão de joelho* do diodo que, pelo gráfico corresponde a voltagem limite V_{th} . Com uma tensão de 0 V no diodo ele não conduzirá. O diodo não conduzirá até que algumas centenas de milivolts sejam aplicadas em seus terminais [79]. Esta é a tensão necessária para vencer a camada de depleção. Para um diodo de silício, a tensão de joelho é igual à barreira de potencial, aproximadamente 0,7 V. Um diodo de germânio, por outro lado, tem uma tensão de joelho próxima de 0,3 V [78]. Pelo gráfico é visível que não há corrente enquanto a tensão no diodo não chegar ao valor da tensão limite V_{th} . Nesse ponto, o diodo conduz. A partir deste ponto, o diodo entra em condução e a tensão V_{BE} aumenta linear ou proporcionalmente com o aumento da corrente I_E .

Levando-se em conta que a resistência não-linear R_E corresponde à junção base-emissor do transistor, modelamos a característica de tensão *versus* corrente, seguindo o modelo exponencial, assim a Equação (3.10) pode ser escrita como

$$I_E \simeq \frac{I_S}{\alpha_F} \left[\exp \left(\frac{V_{BE}}{V_T} \right) \right], \quad (3.12)$$

para $V_{BE} \gg V_T$. Como $I_E = n(V_{C_2}) = n(-V_{BE})$, podemos escrever a função característica no modelo exponencial para $n(V_{C_2})$ da forma

$$n_{exp}(V_{C_2}) = \frac{I_S}{\alpha_F} \left[\exp \left(-\frac{V_{C_2}}{V_T} \right) \right], \quad (3.13)$$

estamos negligenciando a corrente de saturação I_S quando o transistor é interrompido de forma que $V_{BE} < V_T$. Deste modo, o resistor R_E não é passivo na região de corte e passa a atuar sobre a passagem de corrente elétrica. Normalmente quando o transistor está saturado a corrente de saturação vale $I_S \sim 10^{-15} \text{A}$.

Para obtermos o modelo linear por partes (PWL) do oscilador Colpitts nos dois modos possíveis de funcionamento do dispositivo, que são a região de corte e região ativa do transistor BJT, assumimos que o transistor nunca será conduzido para a região de saturação, pois V_{CC} tem um valor suficientemente grande. Em cada uma dessas regiões, fazemos uma aproximação linear com características não-lineares n_{exp} que melhor representará o funcionamento do dispositivo. Para a região ativa a linearização n_{exp} é feita no ponto de operação O do circuito, enquanto que para a região de corte assumimos que $I_E = 0$, na Equação (3.12).

Para desenvolvermos o modelo, é necessário primeiramente calcular o ponto de operação O do circuito, de modo que possamos encontrar o ponto de equilíbrio das equações de estado do sistema de Equações (3.11), impondo que o lado direito deste sistema é igual a zero, o que resulta em

$$\begin{cases} V_{C_{10}} &= V_{CC} - \alpha_F R I_0 + V_T \ln\left(\alpha_F \frac{I_0}{I_S}\right), \\ V_{C_{20}} &= -V_T \ln\left(\alpha_F \frac{I_0}{I_S}\right), \\ I_{L_0} &= \alpha_F I_0, \end{cases} \quad (3.14)$$

que está localizado dentro da região ativa do transistor, uma vez que $V_{C_{20}} < -V_{th}$.

Fazendo a expansão de Taylor em primeira ordem na Equação (3.12) em relação à V_{BE} e em torno do ponto de operação O obtemos

$$I_E = n_e(V_{BE}) \simeq n_e(V_{BE_0}) + n'_e(V_{BE_0})(V_{BE} - V_{BE_0}) \quad (3.15)$$

$$I_E \simeq I_0 + \frac{I_0}{V_T}(V_{BE} - V_{BE_0}), \quad (3.16)$$

onde $n_e(V_{BE}) = n_{exp}(-V_{BE})$, deste modo na Equação (3.14) temos que

$$V_{BE_0} = -V_{C_{20}} = V_T \ln\left(\alpha_F \frac{I_0}{I_S}\right). \quad (3.17)$$

Assim a característica não-linear pode ser aproximada em duas situações distintas, para $V_{BE} \geq V_{th}$ teremos o oscilador operando na região ativa e a corrente do emissor será

$$I_E = I_0 \left(\frac{V_{BE} - V_{th}}{V_T} \right), \quad (3.18)$$

por outro lado, quando $V_{BE} < V_{th}$ o transistor é interrompido e a corrente do emissor é nula ($I_E = 0$), fazendo com que o oscilador opere na região de corte. A voltagem limite V_{th} será dada por

$$V_{th} = V_T \left[\ln \left(\alpha_F \frac{I_0}{I_S} \right) - 1 \right], \quad (3.19)$$

de tal modo que o transistor está na região de corte ($I_E = 0$) se $V_{BE} < V_{th}$. Na Figura 3.11, fica evidenciado que o valor de $V_{BE} = V_{th}$ pode ser utilizado como referência para distinguir as regiões de corte e ativa no funcionamento do transistor.

Para as variáveis de estado quando $V_{C_2} \leq -V_{th}$ teremos a região ativa no transistor expressa pela função característica no modelo linear por partes, dada por

$$n_{PWL}(V_{C_2}) = -I_0 \left(\frac{V_{C_2} + V_{th}}{V_T} \right), \quad (3.20)$$

por outro lado, quando $V_{C_2} > -V_{th}$ o transistor é interrompido, ou seja, $n_{PWL}(V_{C_2}) = 0$ e o oscilador opera na região de corte.

Resumindo, a característica não-linear em termos da corrente no emissor I_E pode ser aproximada como se segue:

$$I_E = \begin{cases} I_0 \left(\frac{V_{BE} - V_{th}}{V_T} \right), & V_{BE} \geq V_{th} & \text{(região ativa)} \\ 0, & V_{BE} < V_{th} & \text{(região de corte)} \end{cases} \quad (3.21)$$

e em termos das variáveis de estado, obtemos:

$$n_{PWL}(V_{C_2}) = \begin{cases} -I_0 \left(\frac{V_{C_2} + V_{th}}{V_T} \right), & V_{C_2} \leq -V_{th} & \text{(região ativa)} \\ 0. & V_{C_2} > -V_{th} & \text{(região de corte)} \end{cases} \quad (3.22)$$

3.2.1 Equações de estado normalizadas

A Equação (3.11) admite um único ponto de equilíbrio $E \equiv (\bar{V}_{C_1}, \bar{V}_{C_2}, \bar{I}_L)$ no espaço de estado definido pelas seguintes equações transcendentais:

$$\begin{cases} \bar{V}_{C_1} = V_{CC} - \alpha_F R n(-\bar{V}_{C_2}) - \bar{V}_{C_2}, \\ \bar{V}_{C_2} = \frac{1}{G_0} \left[n(-\bar{V}_{C_2}) - I_0 \right], \\ \bar{I}_L = -\alpha_F n(-\bar{V}_{C_2}), \end{cases} \quad (3.23)$$

onde \bar{V}_{C_2} coincide com a tensão limite (V_{th}) da junção $B - E$ [82]. Este conjunto de equações é semelhante ao sistema de Equações (3.14).

Movendo o ponto de equilíbrio E e fazendo o ponto de operação O da Equação (3.11) como sendo a origem do novo sistema de coordenadas, não temos mais dependência com relação à tensão de alimentação V_{CC} , deste modo podemos normalizar as variáveis de estado e introduzir novas variáveis adimensionais (x_1, x_2, x_3), juntamente com a normalização da tensão ($V_{ref} = V_T$), da corrente ($I_{ref} = I_0$) e do tempo ($t_{ref} = 1/\omega_0$), assim

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{V_{C_1} - \bar{V}_{C_1}}{V_T} = \frac{1}{V_T} [V_{C_1}(\omega_0 t) - V_{C_{10}}], \\ x_2(t) &= \frac{V_{C_2} - \bar{V}_{C_2}}{V_T} = \frac{1}{V_T} [V_{C_2}(\omega_0 t) - V_{C_{20}}], \\ x_3(t) &= \frac{I_L - \bar{I}_L}{I_0} = \frac{1}{I_0} [I_L(\omega_0 t) - I_{L_0}], \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde $V_{C_{10}}$, $V_{C_{20}}$ e I_{L_0} são definidos na Equação (3.14) e ω_0 é a frequência de ressonância do circuito tanque (LC) dada por

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (3.25)$$

como $\omega_0 = 2\pi f_0$, teremos

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (3.26)$$

A capacitância a ser utilizada na Equação (3.25) é a capacitância equivalente por onde passa a corrente de circulação. No circuito tanque do oscilador Colpitts da Figura 3.10(a), a corrente de circulação flui através de C_1 em série com C_2 . Portanto, a capaci-

tância equivalente é

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}, \quad (3.27)$$

e a Equação (3.25) poderá ser escrita da forma

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_{eq}}} = \frac{1}{\sqrt{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}}. \quad (3.28)$$

Fazendo a transformação linear nas variáveis de estado e tempo, as Equações de estado (3.11) do oscilador Colpitts podem ser reescritas em termos da representação em espaços de estados, assim

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{g^*}{Q(1-k)}[-\alpha_F n(x_2) + x_3], \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{g^*}{Qk}[(1-\alpha_F)n(x_2) + x_3] - Q_0(1-k)x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = -\frac{Qk(1-k)}{g^*}[x_1 + x_2] - \frac{1}{Q}x_3, \end{cases} \quad (3.29)$$

onde o termo não-linear $n(x_2)$ é expresso por

$$n(x_2) = e^{-x_2} - 1, \quad (3.30)$$

quando $x_2 \leq 1$, teremos a região ativa no transistor dada por $n_{PWL}(x_2) = -x_2$, por outro lado, quando $x_2 > 1$ o transistor é interrompido, ou seja, $n_{PWL}(x_2) = -1$ e o oscilador opera na região de corte, tanto para o modelo exponencial quanto para o modelo linear por partes, conforme as Equações (3.13) e (3.22), respectivamente.

A ideia fundamental é associar um estado ao circuito elétrico, descrita pelas N variáveis de estado, através de um ponto correspondente ao espaço de estado N dimensional. Assim, a evolução temporal do circuito corresponde, no espaço de estado, a trajetória descrita pelo ponto representativo do sistema. O campo de vetores que rege a evolução da trajetória é simplesmente dado pelas equações de estado do circuito. Fazer a representação no espaço de estado do circuito elétrico, mostra que as técnicas geométricas e topológicas podem ser aplicadas para analisar o comportamento dinâmico do circuito.

Deve-se notar que o ponto de operação O do circuito corresponde ao ponto de equilíbrio E no espaço de estado.

Além disso, uma oscilação quase sinusoidal do circuito elétrico é caracterizada por um espaço de estado associado com a presença de um ciclo limite estável, que pode ser pensado como uma simples curva fechada no espaço de estado N dimensional, conforme discutiremos na próxima seção. Caso o circuito esteja com comportamento de estado estacionário podemos relacioná-lo com a topologia chamada de atrator no espaço de estado. Por exemplo, o comportamento complexo exibido pelo oscilador Colpitts pode estar relacionado com a existência de um atrator caótico no espaço de estado.

Deve-se notar ainda que o sistema de Equações (3.29), depende dos seguintes parâmetros Q , k , Q_0 e g^* . O parâmetro Q é o fator de qualidade de ressonância da rede e fornece uma medida para a perda de energia por ciclo de um sistema oscilatório [83], ou seja,

$$Q = \frac{2\pi E}{|\Delta E|} \quad (3.31)$$

onde E é a energia total do sistema e ΔE é a energia perdida em um ciclo. O fator Q resume os efeitos de dissipação do sistema ressonante, determinando a percentagem de energia ressonante que é dissipada numa oscilação. Um oscilador mecânico amortecido é caracterizado muitas vezes pelo seu fator Q da forma

$$Q = \frac{\omega_0 m}{b}, \quad (3.32)$$

onde m é a massa e b é a constante de amortecimento. No circuito tanque o fator de qualidade Q pode ser definido de forma semelhante. Como a indutância L é análoga à massa m e a resistência R é análoga à constante de amortecimento b , o fator de qualidade de ressonância da rede ou do circuito tanque para a frequência ω_0 é dado por

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}, \quad (3.33)$$

e está associado à capacidade do circuito entrar em ressonância nesta frequência determinando a largura da ressonância, como por exemplo, um rádio receptor que pode selecionar uma frequência emitida por uma determinada estação e separá-la das outras.

O parâmetro k é o divisor de tensão capacitivo. Em sistemas eletrônicos, um

divisor de tensão é um circuito linear que produz uma tensão de elétrica de saída V_{out} que é proporcional à tensão elétrica de entrada $V_{in} = V_{CC}$, referindo-se à separação de um certo valor de tensão entre os componentes do divisor, neste caso, C_1 e C_2 respectivamente. Para o circuito da Figura 3.10(a), o divisor de tensão capacitivo é

$$V_{out} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} V_{in}, \quad (3.34)$$

e denotando a proporção de tensão do divisor por k , teremos a função de transferência, expressa da forma

$$k = \frac{C_1}{C_1 + C_2}. \quad (3.35)$$

No sistema de Equações (3.29), o parâmetro Q_0 nos fornece a polarização da corrente elétrica através da tensão de alimentação V_{CC} e de uma fonte de corrente elétrica real I_0 em paralelo com uma condutância G_0 , conforme a Figura 3.10, fornecendo assim uma fonte de corrente elétrica ideal que impõe ao circuito uma corrente constante, mesmo que a carga varie e é expressa como

$$Q_0 = \omega_0 L G_0. \quad (3.36)$$

Por fim, o ganho da malha do oscilador denotado pelo parâmetro g^* e definido pela Equação (3.5), para a frequência de ressonância ω_0 é uma quantidade real, assim $g^* = g(j\omega_0)$. O ganho da malha descreve a conversão da energia disponível a partir da rede ativa para a forma como é armazenada na rede ressonante, determinando o quanto de energia é transferida da rede ativa para a rede ressonante. O ganho da malha g^* tem dependência com a transcondutância g_m do circuito elétrico, sendo esta definida como a razão entre a variação na corrente elétrica do coletor I_C e a variação na tensão elétrica na junção $B - E$, em outras palavras, é uma medida de como a tensão de entrada controla efetivamente a corrente de saída, ou seja,

$$g_m = \frac{\partial I_C}{\partial V_{BE}} = \frac{\alpha_F I_0}{V_T}, \quad (3.37)$$

obtida de forma semelhante a Equação (3.12), porém em relação à corrente elétrica no coletor do transistor. Logo para o sistema de Equações (3.29) da Figura 3.10(a), o ganho

da malha é

$$g^* = \frac{g_m L}{R(C_1 + C_2)}, \quad (3.38)$$

ou

$$g^* = \frac{\alpha_F I_0 L}{V_T R(C_1 + C_2)}. \quad (3.39)$$

Note que g^* representa o valor do ganho da malha para o qual a condição de fase do critério de Barkhausen é satisfeita no caso perfeito ($\alpha_F = 1$). Assim, o oscilador irá começar a oscilar apenas se a condição de arranque, $g^* > 1$, for cumprida. Em particular, consideraremos ($\alpha_F < 1$) e uma fonte de corrente de polarização ideal, onde a condutância G_0 é muito pequena, logo $Q_0 \simeq G_0 \simeq 0$ e o sistema de Equações (3.29) torna-se

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{g^*}{Q(1-k)} [-\alpha_F n(x_2) + x_3], \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{g^*}{Qk} [(1 - \alpha_F)n(x_2) + x_3], \\ \frac{dx_3}{dt} = -\frac{Qk(1-k)}{g^*} [x_1 + x_2] - \frac{1}{Q}x_3. \end{cases} \quad (3.40)$$

onde $n(x_2) = e^{-x_2} - 1$. Neste espaço de estado normalizado (x_1, x_2, x_3) estão relacionados com o modelo linear por partes do oscilador Colpitts, podendo o transistor ser dividido em dois modos de operação, em particular para $x_2 \leq 1$, o transistor funciona na região ativa, enquanto que para $x_2 > 1$ funciona na região de corte. Para $x_2 = 1$ surge uma superfície de descontinuidade, definindo assim uma fronteira entre as duas diferentes regiões de operação do transistor no espaço de fase. Este sistema de equações depende apenas de três parâmetros Q , g^* e α_F , enquanto que o parâmetro k é apenas um fator de escala para as variáveis de estado, portanto, não tem influência sobre a dinâmica do oscilador.

Na próxima seção, abordaremos o comportamento caótico para o sistema de Equações (3.40), evidenciando a rota de Feigenbaum, o diagrama de bifurcações e o expoente de Lyapunov.

3.3 Comportamento Caótico

A descoberta da primeira rota para o caos é devido às pesquisas de Walter Ricker e Mitchell Feigenbaum. No ano de 1954, Walter Ricker descobriu que uma sequência de ressonâncias subharmônicas para valores de parâmetros aleatórios, resultariam em caos [84]. Mais tarde, em 1978, Mitchell Feigenbaum [85] deu uma explicação universal para tais fenômenos. A universalidade descoberta por Feigenbaum, mostra que o comportamento complexo que aparece a partir de fenômenos de ressonância subharmônica é conhecido hoje em dia como rota para o caos ou rota de Feigenbaum.

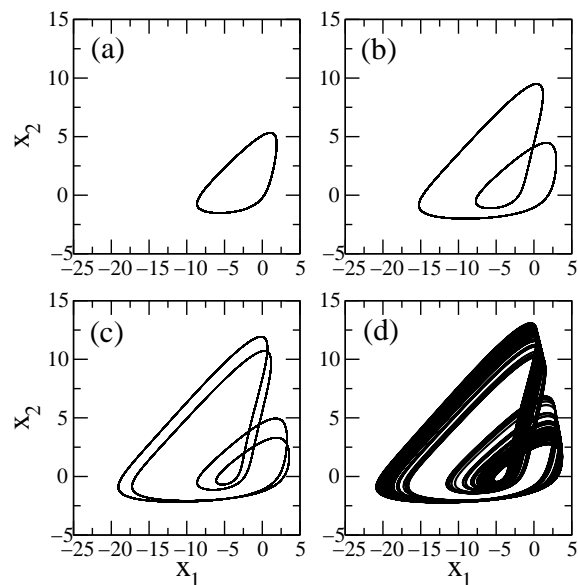
Na região de bifurcações ou periódica, as bifurcações estão associadas a um tipo de rota para o caos conhecida como duplicação de período ou rota de Feigenbaum. Mitchell Feigenbaum percebeu que as razões das distâncias dos parâmetros entre duas bifurcações de período sucessivas se aproximam de uma constante à medida em que o período tende ao infinito [21].

Ao trabalharmos com sistemas dinâmicos, estamos interessados em analisar para qual estado se dará a convergência para tempos longos de acordo com o ponto inicial da órbita. Para tanto, constrói-se um diagrama de bifurcação, adotando-se um conjunto de pontos como ponto inicial, realizando com cada um deles inúmeras iterações do fluxo, desprezando os primeiros pontos obtidos (transiente) e plotando-se os demais, denominados pontos estacionários. O diagrama de bifurcação é capaz de mostrar para onde os pontos do conjunto escolhido convergem, seja para ponto fixo, para pontos periódicos ou mesmo para um atrator caótico.

O diagrama de bifurcações mostra como os pontos fixos estáveis do sistema dinâmico (3.40) mudam com as variações de um ou mais parâmetros do sistema [86]. O termo bifurcação é genérico, sendo que podemos considerar que uma bifurcação ocorre quando o ponto fixo altera sua estabilidade ou instabilidade devido à variação de um parâmetro do sistema [57]. O fenômeno descrito pode ocorrer para os sistemas de tempo contínuo (equações diferenciais), admitindo que ocorram bifurcações com duplicação de período (flip) e em particular caos, um sistema de tempo contínuo deve ser pelo menos de terceira ordem [20, 22], uma vez que as trajetórias não se interceptam num sistema de tempo contínuo descrito por equações diferenciais ordinárias (EDOs).

Deste modo, para o sistema de Equações (3.40) do oscilador Colpitts, fixamos os valores de alguns parâmetros conforme [19, 24], onde o divisor de tensão capacitivo é $k = 0,5$, o ganho de corrente é $\alpha_F = 0,996$, a resistência elétrica é $R = 80\Omega$, as capacitâncias tem valores iguais a $C_1 = C_2 = 1\mu F$, a indutância utilizada é $L = 18,2\mu H$, a tensão elétrica é $V_T = 27mV$ e o fator de qualidade de ressonância da rede $Q = 1,77$. Variando os valores da corrente elétrica I_0 , obtemos diferentes valores para o ganho da malha g^* através da Equação (3.39), conduzindo o sistema para uma série de bifurcações com duplicação de período, que resultarão no comportamento aperiódico, ou seja, no comportamento caótico, como mostrado na Figura 3.12.

Figura 3.12: Cascata de Feigenbaum para o sistema de Equações (3.40) com ciclo quase-sinusoidal onde (a) órbita de período 1 com $I_0 = 0,85mA$ e $g^* = 1,9674$; (b) órbita de período 2 com $I_0 = 1,05mA$ e $g^* = 2,4305$; (c) órbita de período 4 com $I_0 = 1,16mA$ e $g^* = 2,6853$; (d) atrator caótico com $I_0 = 1,21mA$ e $g^* = 2,8002$.



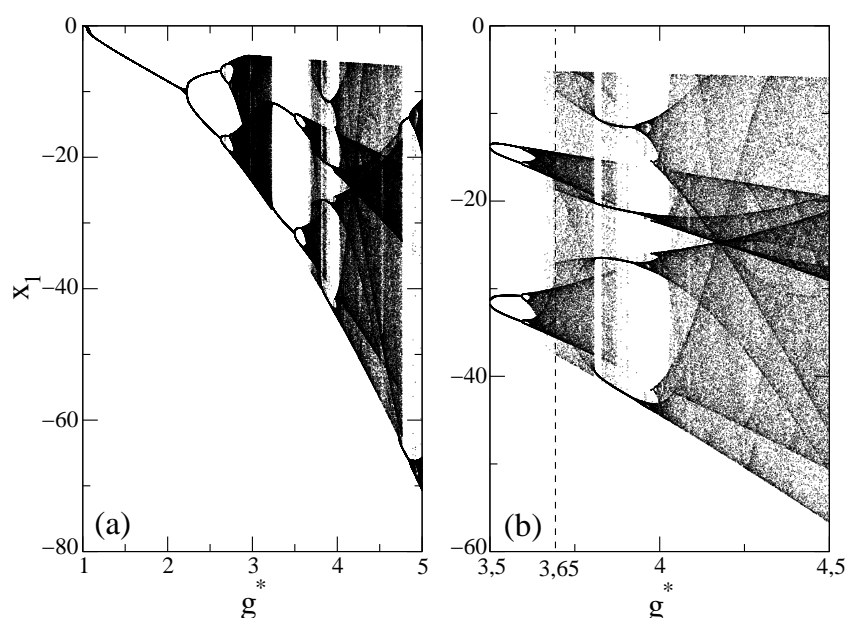
FONTE: O autor.

Na Figura 3.12 é visível: (a) período-1, (b) período-2, (c) oscilação de período-4 e em (d) temos o atrator caótico. Estas órbitas surgem apartir destas bifurcações e são geometricamente diferentes umas das outras, podendo ser caracterizadas pelo número de voltas que a trajetória exhibe quando se encontra na região de corte, ou equivalentemente, pelo número máximo de órbitas da variável de estado x_3 quando $I_E = 0$ [82]. Por exemplo, a Figura 3.12(b) mostra um período 2 que é caracterizado por duas voltas na região de corte.

Do mesmo modo, na Figura 3.12(c) temos uma duplicação de período 4, caracterizada por quatro voltas na região de corte e assim por diante até o sistema apresentar caos, Figura 3.12(d). Estas órbitas geradas por estas bifurcações exibem soluções com características geométricas semelhantes de onde foram originadas, e estas por sua vez, conduzem a cascata de duplicação de período de Feigenbaum. Deste modo, podem ser consideradas como parte da mesma família de soluções.

Na Figura 3.13 o diagrama de bifurcação para a variável de estado x_1 apresenta informações úteis para identificar a influência do parâmetro g^* na resposta do sistema para as Equações (3.40) do oscilador Colpitts.

Figura 3.13: (a) Diagrama de bifurcações para o oscilador Colpitts; (b) janelas de periodicidade.



FONTE: O autor.

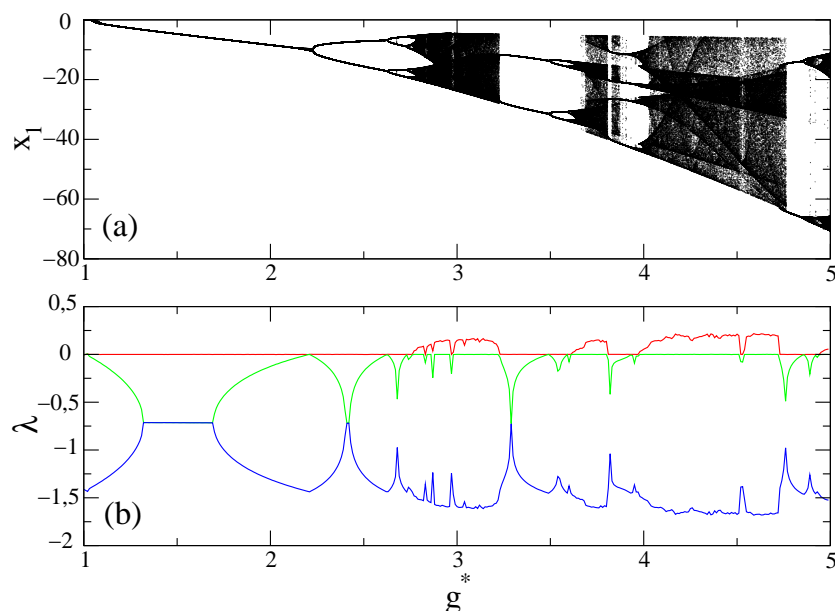
O diagrama de bifurcação apresenta a distribuição das respostas a partir da variação do parâmetro g^* . Desta forma, é possível termos uma visão global sobre os efeitos da variação deste parâmetro na resposta. Mantendo os valores fixos do fator de qualidade de ressonância da rede $Q = 1,77$, da tensão do divisor capacitivo $k = 0,5$ e do ganho de corrente do transistor $\alpha_F = 0,996$, podemos observar que, aumentando o valor do ganho da malha g^* , a solução do sistema passa por várias bifurcações com cascata de duplicação de período até o comportamento caótico. Nesta forma de bifurcação o ponto fixo que era

estável antes da bifurcação torna-se instável e surgem dois pontos fixos estáveis. Podem ser observados também as inúmeras janelas de periodicidade da região ampliada na Figura 3.13(b) conforme o ganho da malha g^* vai aumentando.

O cenário de bifurcações observado não pode ser explicado apenas por uma sequência de duplicação de períodos, na Figura 3.13(b) fica evidente que a cascata de duplicação de período clássica é interrompida por um súbito salto para o comportamento caótico em $g^* = 3,65$ representada por uma linha pontilhada. Essa mudança súbita na dinâmica caótica, chamada de crise, ocorre quando temos a colisão entre um atrator caótico e um ponto fixo ou uma órbita periódica instável [87]. Tais mudanças no parâmetro, correspondem ao aparecimento ou desaparecimento de atrator caótico, ou a uma variação descontínua no seu tamanho. Depois da crise, acontece uma mudança súbita da órbita caótica e ela pode se tornar uma órbita periódica, pode aumentar seu tamanho, ou ainda divergir para infinito.

A Figura 3.14(a) traz o diagrama de bifurcações para o sistema de Equações (3.40) do oscilador Colpitts, associado com seu expoente de Lyapunov característico na Figura 3.14(b) já discutido na seção 2.2.2.

Figura 3.14: (a) Diagrama de bifurcações; (b) expoente de Lyapunov.



FONTE: O autor.

Na Figura 3.14(b) temos três expoentes (λ) plotados nas cores vermelho, verde e azul, porque o sistema de Equações (3.40) é um sistema com três equações diferenciais, onde os valores negativos do expoente de Lyapunov λ caracterizam um comportamento convergente, periódico ou de ponto fixo, em que as trajetórias da evolução temporal do sistema que se iniciaram em estados próximos tendem a se aproximar. Pontos com valores iguais a zero, indicam mudanças qualitativas de comportamento que são chamados pontos de bifurcação.

Por outro lado, valores positivos para o expoente de Lyapunov λ (curva em vermelho) indicam a ocorrência de caos, descrevendo a taxa de afastamento que ocorre com as trajetórias da evolução temporal desse sistema que se iniciaram de estados próximos. Quanto mais negativo é o expoente de Lyapunov, mais rápido a série converge para os valores finais. Logo o expoente de Lyapunov é um indicador de caos e também mede a velocidade com que duas órbitas arbitrariamente próximas se afastam ou se aproximam à medida em que o tempo passa [59].

4 *Acoplamento mestre-escravo e superpersistente*

Neste capítulo consideramos o oscilador Colpitts acoplado numa configuração mestre-escravo, buscando verificar a sincronização entre ambos e a sincronização caótica [26]. Ao adicionarmos um ruído no canal de comunicação entre os dois osciladores Colpitts podemos suprimir a sincronização caótica ou induzir o sistema para um transiente superpersistente [38].

4.1 Circuito elétrico acoplado

Nesta seção estudaremos o que ocorre quando acoplamos dois circuitos elétricos do oscilador Colpitts. Os circuitos elétricos são descritos por um sistema de equações diferenciais acopladas (espaço discreto, tempo e variável de estado contínuas), conforme a Tabela 2.1 da seção 2.3, através de um reostato com resistência variável R^* com constante de acoplamento ε , o qual possibilita a variação da resistência do circuito elétrico podendo, dessa forma, aumentar ou diminuir seu valor em função da necessidade de alteração da intensidade da corrente elétrica no circuito e também dissipar parte da energia.

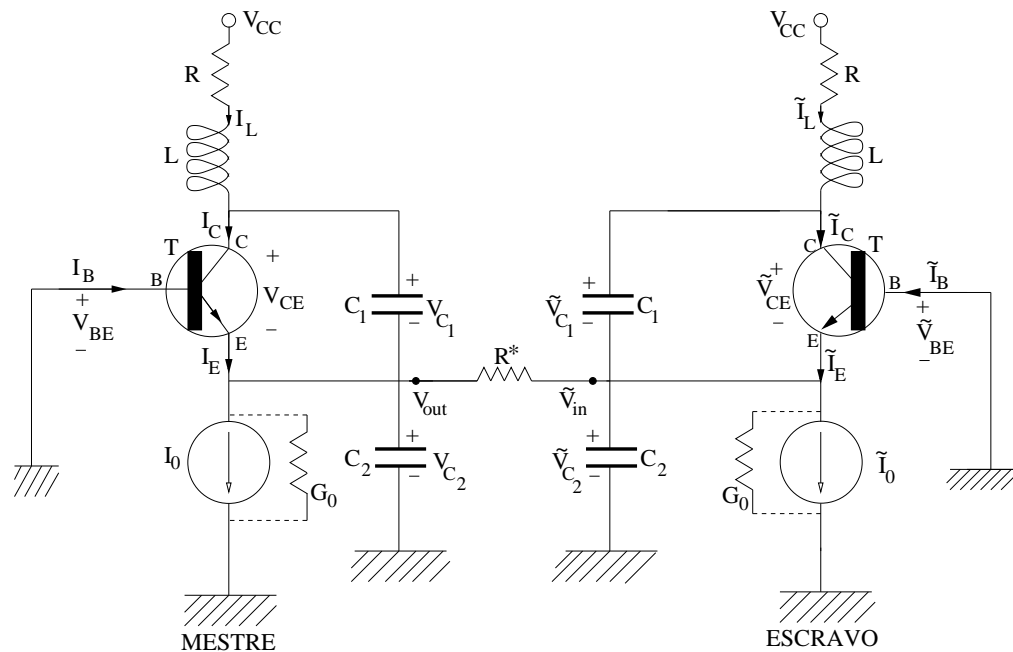
O circuito da Figura 4.1 é constituído de dois osciladores Colpitts numa configuração mestre-escravo. A conexão entre estes dois osciladores é obtida utilizando um reostato de resistência variável R^* com constante de acoplamento ε expresso por

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{L}{C_1}} R^{*-1}. \quad (4.1)$$

Cada oscilador tem um único transistor bipolar T , que é polarizado na sua região ativa

através da utilização da tensão no primeiro capacitor V_{C_1} , tensão no segundo capacitor V_{C_2} e da resistência R . A rede de realimentação consiste de um indutor L , e de um par de capacitores C_1 e C_2 . Variando a fonte de corrente I_0 o valor do ganho da malha g^* é afetado na mesma proporção, conforme a Equação (3.39).

Figura 4.1: Esquema de um par de osciladores Colpitts acoplados numa configuração mestre-escravo.



FONTE: O autor.

A configuração do circuito baseia-se no mecanismo mestre-escravo [29], cuja característica principal é que o sinal (ou dados) de acoplamento é unidirecional, ou seja, o sinal é transmitido a partir do sistema mestre (emissor) para o sistema escravo (receptor), este por sua vez recupera todas as trajetórias dos estados desconhecidos do mestre [88]. Deste modo a terminologia transmissor-receptor também pode ser empregada. Na configuração mestre-escravo, o oscilador mestre é usado para aceitar a entrada dos dados. Os valores de entrada são inseridos no oscilador mestre, e então transferidos para o oscilador escravo.

Do mesmo modo que foi feito na seção 3.2 conjunto de Equações (3.11) para um único oscilador Colpitts, obtemos as equações de estado numa configuração mestre-escravo unidirecional [89, 90] para a Figura 4.1 da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt'} = -\alpha_F n(-V_{C_2}) + I_L, \\ C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt'} = (1 - \alpha_F) n(-V_{C_2}) - G_0 V_{C_2} + I_L - I_0, \\ L \frac{dI_L}{dt'} = -V_{C_1} - V_{C_2} - RI_L + V_{CC}, \\ C_1 \frac{d\tilde{V}_{C_1}}{dt'} = -\alpha_F n(-\tilde{V}_{C_2}) + \tilde{I}_L, \\ C_2 \frac{d\tilde{V}_{C_2}}{dt'} = (1 - \alpha_F) n(-\tilde{V}_{C_2}) + \tilde{I}_L - I_0 - G_0(2\tilde{V}_{C_2} + V_{C_2}), \\ L \frac{d\tilde{I}_L}{dt'} = -\tilde{V}_{C_1} - \tilde{V}_{C_2} - R\tilde{I}_L + V_{CC}, \end{array} \right. \quad (4.2)$$

onde as tensões V_{C_1} e V_{C_2} são as variáveis de estado através dos capacitores C_1 e C_2 respectivamente, I_L é a corrente no indutor L , G_0 é a condutância, t' é o tempo expresso como $t = t'\omega_0$, V_{CC} é a voltagem fornecida ao circuito por uma fonte de corrente I_0 , $n()$ é a função característica que fornece os pontos de condução do resistor não-linear R_E e pode ser expressa como $I_E = n(V_{C_2}) = n(-V_{BE})$ e α_F é o ganho de corrente do transistor numa configuração base comum (CB) [24]. Os termos indicados com o símbolo ($\tilde{}$) estão associados aos parâmetros no circuito escravo para diferenciar dos parâmetros utilizados no circuito mestre.

Introduzindo um conjunto de variáveis de estado dimensionais $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ e fazendo o ponto de equilíbrio do sistema de Equações (4.2) como a origem do novo sistema de coordenadas, normalizamos este sistema do mesmo modo que normalizamos o sistema de Equações (3.11), utilizando as Equações (3.25), (3.33), (3.35), (3.39) e (4.1), considerando uma fonte de corrente de polarização ideal, onde a condutância G_0 é muito pequena ($Q_0 = 0$) teremos o sistema de equações normalizado numa configuração mestre-escravo unidirecional da Figura 4.1 para que a derivada temporal de x_5 dependa das variáveis de ambos os circuitos, da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = \frac{g^*}{Q(1-k)}[-\alpha_F n(x_2) + x_3], \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{g^*}{Qk}[(1-\alpha_F)n(x_2) + x_3], \\ \frac{dx_3}{dt} = -\frac{Qk(1-k)}{g^*}[x_1 + x_2] - \frac{1}{Q}x_3, \\ \frac{dx_4}{dt} = \frac{g^*}{Q(1-k)}[-\alpha_F n(x_5) + x_6], \\ \frac{dx_5}{dt} = \frac{g^*}{Qk}[(1-\alpha_F)n(x_5) + x_6] + \varepsilon[x_2 - x_5], \\ \frac{dx_6}{dt} = -\frac{Qk(1-k)}{g^*}[x_4 + x_5] - \frac{1}{Q}x_6, \end{array} \right. \quad (4.3)$$

em que x_1 , x_2 e x_3 pertencem ao circuito mestre, enquanto que x_4 , x_5 e x_6 pertencem ao circuito escravo, os termos não-lineares $n(x_2)$ e $n(x_5)$ são expressos por $n(x_2) = e^{-x_2} - 1$ e $n(x_5) = e^{-x_5} - 1$ respectivamente, o fator de qualidade de ressonância da rede é $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$, k é o divisor de tensão capacitivo dado por $k = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$, o ganho da malha é dado por $g^* = \frac{I_0 L}{V_T R(C_1 + C_2)}$ e ε é a constante de acoplamento dos circuitos, dada pela Equação (4.1).

4.2 Sincronização caótica

Ao acoplarmos circuitos elétricos estamos interessados na sincronização dos dados. Em sistemas dinâmicos acoplados a sincronização que pode ocorrer, é um fenômeno que surge devido ao fato de se colocar uma das variáveis de um sistema como função de todos os demais sistemas associados [91]. Segundo Pikovsky [92] a sincronização é um ajuste do ritmo entre objetos que oscilam, estando acoplados através de uma fraca interação entre eles. Por objetos que oscilam entende-se quaisquer sistemas cujas oscilações são auto-sustentáveis, ou seja, são resultantes de sua própria energia interna.

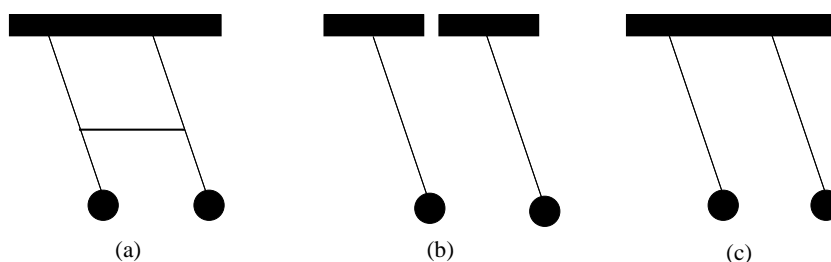
O fenômeno da sincronização foi descoberto em 1665 pelo físico holandês Chris-

tiaan Huygens. Ele observou que dois relógios de pêndulos compartilhando o mesmo suporte passavam a exibir um comportamento comum após um certo tempo, isto é, suas oscilações tornavam-se coincidentes, sincronizando suas fases depois de algum tempo, mesmo depois de perturbados.

Isso acontece, por exemplo, no clássico experimento de dois pêndulos que possuem a mesma base de sustentação e conectados por uma haste rígida, como mostra a Figura 4.2(a). Neste caso, o movimento dos pêndulos é limitado devido estarem conectados pela haste rígida que irá impor restrição ao movimento, assim os pêndulos estão parados ou se movem juntos. Trata-se portanto de um único sistema, cujos componentes não podem ser decompostos. Na Figura 4.2(b) os pêndulos estão suspensos por bases isoladas e o movimento dos pêndulos não é mais restrito, havendo a possibilidade dos pêndulos exibirem o mesmo comportamento, não ocorrendo interação entre eles. Assim, qualquer alteração no movimento de um dos pêndulos não será sentida pelo outro pêndulo. Portanto, ambas as situações descritas não podem representar o fenômeno de sincronização, uma vez que não ocorre interação entre os pêndulos.

Por fim, na Figura 4.2(c) temos dois pêndulos que compartilham a mesma base de sustentação e dependendo da rigidez da haste, qualquer alteração do movimento pode afetar o movimento do outro. Além disso, a interação entre eles não inibe a dinâmica individual de cada pêndulo. Assim, este é um exemplo de interação fraca que resultará em sincronismo.

Figura 4.2: Sistema de dois pêndulos: (a) pêndulos conectados por uma haste, (b) pêndulos suspensos por suportes isolados, (c) pêndulos compartilhando o mesmo suporte de sustentação.



FONTE: O autor.

Deste modo, para que dois sistemas estejam sincronizados, eles devem exibir órbitas iguais a medida que o tempo evolui. Diferentemente do sincronismo de fase, alguns

sistemas podem apresentar não só período e frequências idênticas, como também a mesma amplitude (intensidade). Os sistemas que obedecem essa forma de sincronismo apresentam sincronização completa, idêntica ou convencional [93].

Ao realizarmos processos de ajuste entre dois ou mais sistemas caóticos para que surja entre eles um comportamento comum devido ao acoplamento entre eles ou a um forçamento externo [93], estamos trabalhando com a sincronização de caos. A sincronização é um importante instrumento no estudo de ritmos sincronizados que ocorrem em sistemas biológicos [94], tecnológicos [95], fisiológicos [94], circuitos eletrônicos [96], sistemas de comunicação [33], entre outros [97].

Em um sistema de comunicação caótica, os sinais caóticos são gerados a partir de N sistemas dinâmicos ou a partir de um sistema com n parâmetros diferentes. A detecção do sinal pode assumir uma forma coerente ou não-coerente. Na primeira forma, um receptor (neste caso, o circuito escravo) é utilizado para reproduzir os mesmos sinais caóticos enviados pelo transmissor (circuito mestre) através do processo de sincronização de caos, de modo que as trajetórias geradas por um dos circuitos convergem para os mesmos valores do outro circuito, permanecendo no mesmo valor da variável de estado com o passar do tempo.

Existem vários tipos de sincronização entre circuitos ou osciladores. Supondo dois circuitos acoplados em que o primeiro é representado pelas funções $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$, e o segundo por $x_4(t)$, $x_5(t)$ e $x_6(t)$, pode-se ter as seguintes formas de sincronização: completa, com atraso, de fase, generalizada e de frequência. A sincronização completa, entre circuitos, ocorre quando temos igualdade entre as variáveis, ou seja, $x_1(t) = x_4(t)$, $x_2(t) = x_5(t)$ e $x_3(t) = x_6(t)$, enquanto a dinâmica no tempo permanece caótica. Este tipo de sincronização ocorre quando os circuitos são idênticos e com forte interação.

Caso o acoplamento não seja tão forte, isto é, quando o parâmetro de acoplamento não é grande o suficiente para levar a uma sincronização completa, por exemplo, e eles não são idênticos, também é possível observar a sincronização com atraso, definida em relação a uma variável atrasada no tempo, ou seja, $x_1(t) \approx x_4(t - \tau)$, $x_2(t) \approx x_5(t - \tau)$ e $x_3(t) \approx x_6(t - \tau)$.

Outra forma de sincronização entre circuitos idênticos é a sincronização de fase que

ocorre devido a uma fraca interação entre os osciladores caóticos. Neste tipo de sincronização as fases dos osciladores caóticos se mantêm correlacionadas enquanto as amplitudes permanecem caóticas [98]. De forma isolada, a fase não apresenta novas informações sobre o sistema, mas sua vantagem torna-se evidente quando é considerada a diferença entre as fases dos osciladores acoplados. Se a diferença de fase ao longo do tempo variar em torno de um valor constante menor que 2π , os sistemas se encontram sincronizados em fase. Sendo assim, a estimação da fase de osciladores caóticos é fundamental para se identificar a sincronização de fase entre osciladores caóticos. Dois osciladores que apresentem sincronização de fase podem não apresentar sincronização completa, porém o inverso é sempre verdadeiro [99].

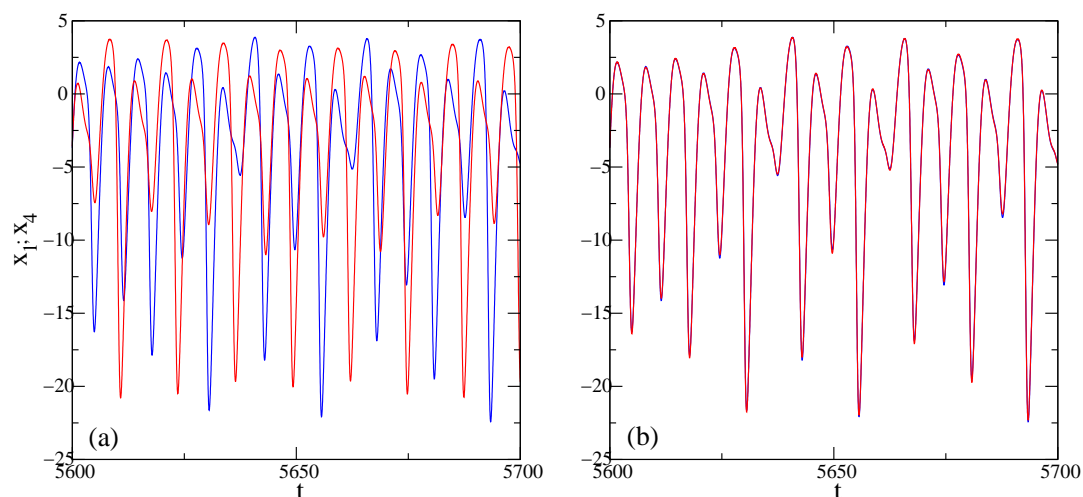
Quando existir uma diferença essencial entre os osciladores acoplados, acredita-se não existir nenhuma variedade no espaço de fase atraindo as trajetórias do sistema, porém sistemas com estas características podem sincronizar, a qual leva o nome de sincronização generalizada. Existe ainda entre sistemas caóticos a sincronização de frequências, que ocorre quando as frequências são iguais, ou seja, $\Omega_1 = \Omega_2$. Todas estas formas de sincronização mencionadas acima são relacionadas a sistemas que possuem comportamento caótico.

Neste trabalho estamos interessados na sincronização completa entre os dois osciladores Colpitts na configuração mestre-escravo, deste modo para os sistema de Equações (4.3), verificamos a sincronização entre os circuitos mestre-escravo em função do parâmetro de acoplamento ε , plotando na Figura 4.3 as variáveis de estado $(x_1; x_4)$ versus o tempo t para dois valores da constante de acoplamento ε , onde na Figura 4.3, as variáveis de estado x_1 e x_4 correspondem às cores azul e vermelho, respectivamente. Na Figura 4.3, foi utilizado os seguintes valores: divisor de tensão capacitivo $k = 0,5$, ganho de corrente do transistor $\alpha_F = 0,996$, resistência elétrica $R = 80\Omega$, capacitâncias elétricas $C_1 = C_2 = 1\mu F$, indutância elétrica $L = 18,2\mu H$, tensão elétrica $V_T = 27\mu V$, resistência elétrica do reostato $R^* = 1\Omega$, fator de qualidade de ressonância da rede $Q = 1,77$ e utilizando um valor caótico para o ganho da malha como sendo $g^* = 2,896$ obtido da Figura 3.13(a).

Com estes valores, pode-se notar na Figura 4.3(a) que com uma constante de acoplamento $\varepsilon = 0,05$ os circuitos não sincronizam, ou seja, as curvas das variáveis de estado x_1 (curva azul) e x_4 (curva vermelha) são diferentes com o passar do tempo. Já

quando a constante de acoplamento é $\varepsilon = 0,1$ os circuitos sincronizam, conforme a Figura 4.3(b), havendo coincidência nas curvas azul e vermelha das variáveis de estado x_1 e x_4 , respectivamente.

Figura 4.3: Sincronização dos circuitos mestre-escravo, plotando variável de estado versus tempo para os seguintes parâmetros de acoplamento: (a) $\varepsilon = 0,05$; (b) $\varepsilon = 0,1$.



FONTE: O autor.

Como a sincronização caótica ocorre quando as variáveis dinâmicas que definem o estado apresentam os mesmos valores depois de um tempo transiente, é evidente que o parâmetro de acoplamento ε influencia o sincronismo entre os circuitos mestre e escravo do oscilador Colpitts. Assim uma maneira de verificar se ocorre ou não a sincronização é determinar o erro médio, ou diferença média, entre as variáveis de estado fornecendo um diagnóstico numérico para o sistema,

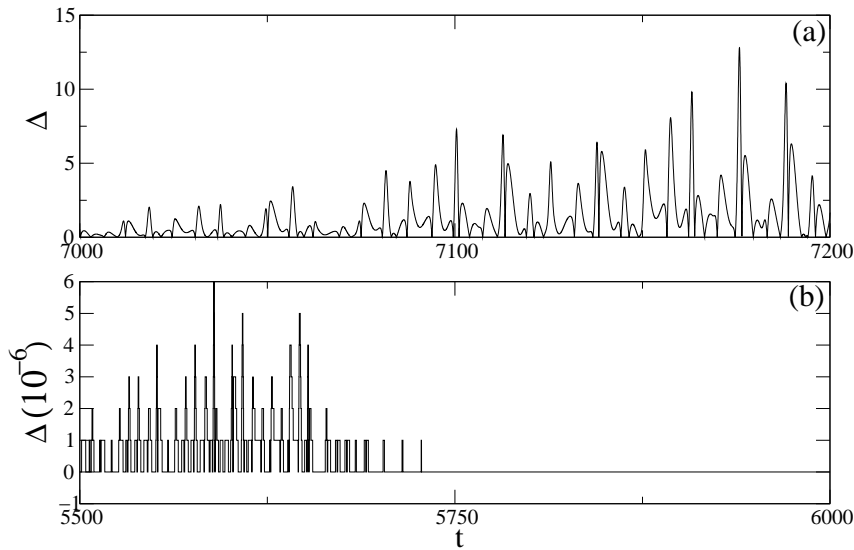
$$\Delta = |x_1 - x_4| . \quad (4.4)$$

A Figura 4.4 mostra a evolução temporal de Δ em duas situações distintas: (a) quando não houver nenhuma sincronização entre os osciladores Colpitts e (b) o caso em que ocorre a sincronização caótica entre os osciladores. Quando os osciladores estão completamente sincronizados, temos $\Delta = 0$.

Na Figura 4.4(a) para $\varepsilon = 0,05$ os circuitos mestre e escravo não sincronizam, uma vez que o diagnóstico de sincronização Δ fica oscilando com o passar do tempo não

tendendo a zero. Por outro lado, na Figura 4.4(b) para $\varepsilon = 0,089$ os circuitos mestre e escravo entram em sincronismo completo, sendo que o parâmetro Δ vai a zero com o passar do tempo para valores de Δ bem pequenos em comparação com a escala de valores de Δ na Figura 4.4(a).

Figura 4.4: Evolução temporal do erro de sincronização Δ considerando: (a) $\varepsilon = 0,05$ e (b) $\varepsilon = 0,089$.



FONTE: O autor.

Deste modo, existe uma dependência do erro de sincronização em relação aos parâmetros: ganho da malha g^* e intensidade de acoplamento ε . A Figura 4.5 exibe esta dependência, mostrando duas regiões distintas, onde temos uma região com sincronização caótica (região verde) e outra com comportamento não sincronizado (região branca). Para tanto, utilizamos o erro da média temporal, da forma:

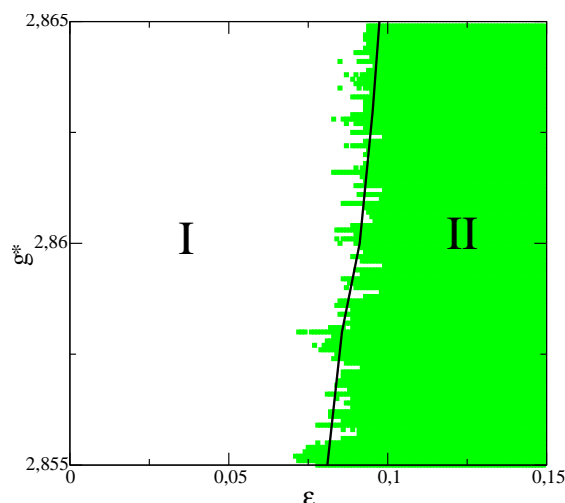
$$\bar{\Delta} = \frac{1}{t_2 - t_1} \sum_{t_1}^{t_2} \Delta(t), \quad (4.5)$$

onde $t_2 - t_1$ é a janela temporal para as medições. A sincronização caótica fica caracterizada para $\bar{\Delta} < 10^{-4}$. Consideramos $t_1 = 5000$ e $t_2 = 10000$, mas resultados semelhantes foram obtidos quando aumentamos o valor de t_1 para 18000 e o valor de t_2 para 20000.

Para verificar a estabilidade local de sincronização, calculamos os espectros dos expoentes de Lyapunov das variedades de sincronização de suas direções transversais. Obte-

mos os espectros considerando as mesmas condições iniciais para ambos os circuitos, ou seja, $x_1 = x_4 = 0,02$, $x_2 = x_5 = 10^{-4}$ e $x_3 = x_6 = 10^{-4}$. Estamos interessados nos dois maiores expoentes de Lyapunov. Quando o expoente máximo é positivo e o segundo maior for negativo, o sistema apresenta sincronização caótica [100]. Como resultado, a variedade de sincronização é localmente estável, uma vez que este expoente representa o expoente negativo da direção transversal. Conseqüentemente, os circuitos podem sincronizar. Aplicando esta condição obtemos a linha preta, mostrado na Figura 4.5, separando as duas regiões, ocorrendo estabilidade local de sincronização na região II.

Figura 4.5: Domínios sincronizados (região verde) no espaço de parâmetros no plano $g^* \times \varepsilon$. A linha preta separa as regiões com e sem estabilidade local de sincronização, obtida através dos expoentes de Lyapunov.



FONTE: O autor.

Podemos ver na Figura 4.5, que o limite entre as duas regiões tem um padrão irregular, onde a região verde é obtida com o erro da média temporal. Por este motivo, a sincronização caótica deve ser analisada de acordo com o tempo transiente para diferentes condições iniciais. Isto sugere a existência de um limite para a bacia emaranhada do atrator sincronizado [101]. Conseqüentemente, o tempo para atingir o estado sincronizado depende fortemente das condições iniciais, algumas delas responsável por transientes muito longos, conforme veremos na próxima seção.

4.3 Transiente caótico

Sistemas dinâmicos não-lineares podem mostrar movimento caótico determinista não só como um comportamento assintótico de longo prazo, mas também como um estado transiente antes de chegar a um atrator não caótico ou caótico [102]. Em tal caso, as variáveis dinâmicas do sistema comportam-se caoticamente por uma quantidade finita de tempo antes de se fixar a um estado final [103]. Este caos transiente surge pela existência de um conjunto caótico não atrativo no espaço de fase [104], de tal forma que o sistema passa por uma crise com o atrator caótico colidindo no limite da bacia de atração que vai separá-lo em outro atrator coexistente. Após a crise, o atrator caótico é destruído, transformando-se numa sela caótica não atrativa. Dinamicamente quase todas as trajetórias a partir de condições iniciais aleatórias caminham para este conjunto caótico, permanecendo durante um período de tempo em sua vizinhança, exibindo movimento caótico. Na sequência, a trajetória abandona a sela caótica e vai assintoticamente se estabelecer em outro atrator, que em geral pode ser uma órbita periódica ou quase periódica.

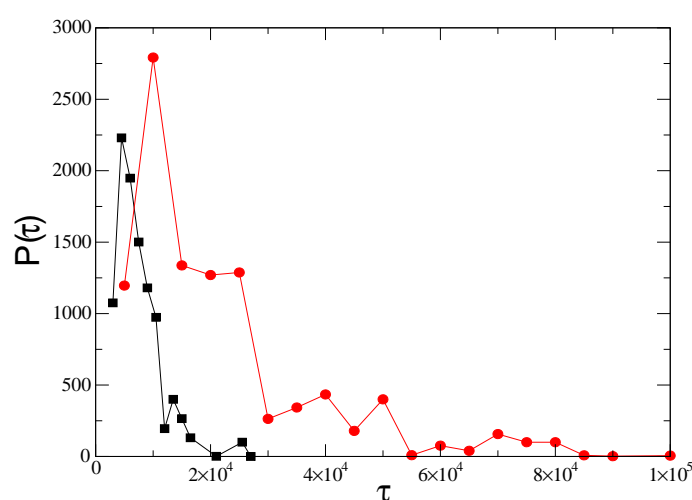
Conforme o tipo de atrator onde um conjunto caótico não atrativo coexiste, podemos distinguir dois tipos de transiente caótico. O primeiro tipo é para o caso em que o atrator que coexiste é simples, por exemplo, um atrator periódico. Enquanto o comportamento assintótico do sistema é relativamente simples, os transientes são caóticos. Transiente caótico é proveniente de situações onde exista um atrator no infinito e em sistemas Hamiltonianos abertos onde os atratores são substituídos por diferentes rotas de saída [42].

O segundo tipo ocorre quando um conjunto caótico não atrativo coexiste com um atrator caótico. Neste caso, existem duas formas distintas de comportamento caótico. Um sinal do sistema exhibe tipicamente uma forma de comportamento caótico, que é devido ao conjunto não atrativo, num intervalo de tempo, mudando-o para outra forma de comportamento ou assintótico. Em uma situação comum, o movimento determinado pelo conjunto não atrativo é mais caótico devido ao atrator caótico. Deste modo, concentrando-se nas propriedades assintóticas do sistema perdemos a parte caótica dominante das dinâmicas complexas que contêm informações importantes sobre o sistema dinâmicos subjacente.

Assim, estamos interessados no intervalo de tempo em que ocorre a mudança no comportamento do sistema. O tempo transiente τ da trajetória na proximidade da sela

caótica é definido pelo número $P(\tau)$ de trajetórias que ainda apresentam movimento caótico neste tempo t , começando em $t = 0$ com P_0 condições iniciais diferentes. O histograma do tempo transiente τ para um conjunto de condições iniciais é mostrado na Figura 4.6, onde os círculos vermelhos correspondem à $\varepsilon = 0,09$ e os quadrados pretos correspondem à $\varepsilon = 0,086$. Este histograma mostra o número $P(\tau)$ de trajetórias que ainda exibem movimento caótico no tempo τ .

Figura 4.6: Histograma dos intervalos de tempo transiente para um total de 10^4 diferentes condições iniciais de x_2 e x_5 no intervalo de 0 à 0,001, onde consideramos $g = 2,863$, (a) $\varepsilon = 0,086$ (círculos vermelhos) e (b) $\varepsilon = 0,09$ (quadrados pretos).



FONTE: O autor.

A distribuição estatística para o tamanho do transiente foi obtido por meio de 10^4 condições iniciais diferentes de x_2 e x_5 , mostrando que pequenos transientes são mais comuns quando o valor da força de acoplamento ε aumenta. Portanto, para alguns valores do ganho da malha g^* e da intensidade de acoplamento ε , em torno da região de fronteira na área verde da Figura 4.5, os circuitos podem ou não apresentar grandes transientes dependendo das condições iniciais.

Transientes caóticos em sistemas dinâmicos de baixa dimensão são tipicamente caracterizados por uma lei de escala algébrica [43, 105], através do transiente médio τ_M com alguma variação do parâmetro. Especificamente, seja p um parâmetro do sistema e se ocorre uma crise o valor do parâmetro p é aumentado para um valor crítico p_c . Ocorre assim, o transiente caótico para $p > p_c$. O transiente caótico médio τ_M em termos da

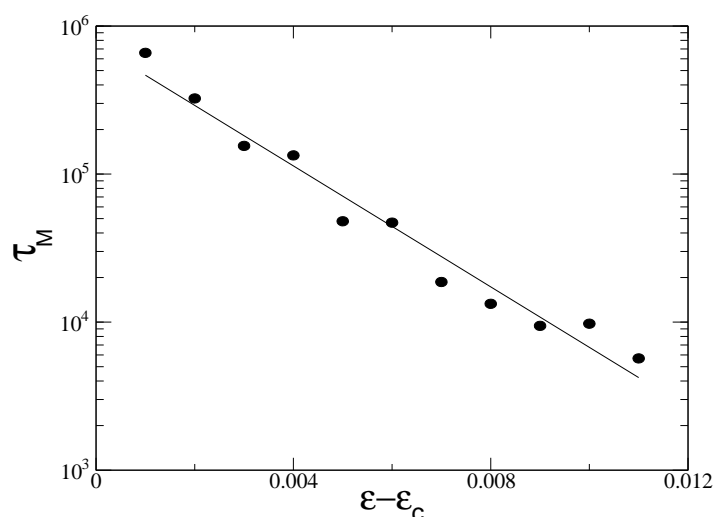
variação deste parâmetro p , é expresso na lei de escala de potência como $\tau \sim (p - p_c)^{-\gamma}$, onde $\gamma > 0$ é o expoente da escala algébrica e neste caso temos o supertransiente para sistemas de alta dimensão. Existe, contudo, em sistemas de baixa dimensão, uma classe distinta de transiente caótico chamado transiente superpersistente [105, 106], caracterizada pela seguinte lei de escala exponencial para o seu transiente médio

$$\tau_M \sim \exp[\beta(p - p_c)^{-\gamma}], \quad (4.6)$$

onde β e γ são constantes positivas, p_c é o valor do parâmetro crítico e o transiente ocorre para $p > p_c$. Se $p \rightarrow p_c$ o tempo transiente se comporta como $e^{+\infty}$, sendo chamado de transiente superpersistente. A relação de escala mostra que como p se aproxima de p_c , o tempo transiente é superior ao transiente caótico regular caracterizado por uma lei de escala algébrica. Devido à lei de escala, o atrator assintótico do sistema é praticamente não observável para $p \geq p_c$.

Na Figura 4.7 temos o dimensionamento do tempo transiente médio τ_M pela variação da força de acoplamento $\varepsilon - \varepsilon_c$, onde a função ajustada pelo método dos mínimos quadrados é plotada e exibe uma distribuição exponencial, quando consideramos a força de acoplamento ε como parâmetro, indicando assim um transiente superpersistente.

Figura 4.7: Dimensionamento do transiente superpersistente pela variação da força de acoplamento $g = 2,863$ e $\varepsilon_c = 0,086$. Cada ponto representa a média de mais de 100 diferentes condições iniciais de x_2 e x_5 . A linha sólida é o ajuste dos mínimos quadrados com declividade $-470,31$.



FONTE: O autor.

4.4 O efeito do ruído

Quando realizamos o acoplamento entre osciladores Colpitts estávamos interessados na sincronização do sinal ou informação que era enviada do circuito mestre para o circuito escravo. Considera-se como sinal a informação útil para o circuito, e qualquer informação indesejada, inútil, ou nociva, introduzida involuntariamente ou voluntariamente no sistema é considerada ruído. Ruídos são perturbações elétrico/magnéticas que deterioram os sinais que desejamos transmitir, receber ou tratar no nosso circuito. Um ruído, geralmente, é um sinal aleatório e pode ser classificado pela frequência em que atua e pela sua origem.

Entre os vários tipos de ruído, podemos citar [107]: (a) o ruído térmico ou de Johnson-Nyquist que é gerado devido à agitação térmica dos átomos. Todo componente eletrônico gera ruído entre seus terminais devido à agitação térmica dos átomos e quanto maior a temperatura, maior será o ruído Johnson; (b) ruído “*shot*” que é causado pelo fluxo finito de partículas (elétrons ou fótons). Como o elétron possui carga discreta, o fluxo de elétrons possui carga discreta e a circulação dos mesmos gera uma flutuação do campo elétrico e por conseqüência uma flutuação da corrente elétrica. Tendo em vista que em um circuito eletrônico sempre haverá fluxo de elétrons durante seu funcionamento, podemos dizer que é impossível nos livrarmos dele; (c) ruído rosa, “*Ficker*” ou $1/f$, este tipo de ruído ocorre na maioria dos dispositivos eletrônicos e sua potência cai cerca de $3db$ por oitava. Em frequências altas, este ruído nunca é o dominante, devido a atenuação da potência. Várias são as causas do ruído rosa, entre elas podemos citar a mudança do valor das resistências dos componentes; (d) ruído branco é o sinal que possui componentes de todas as frequências do espectro eletromagnético, possuindo a mesma quantidade de energia para toda a faixa de frequências. O nome branco dado ao ruído deve-se a uma analogia com o espectro de cores. Pode-se pensar no ruído branco como a reprodução de todos os tons ao mesmo tempo, ou seja, um som que se repete a uma determinada frequência.

O ruído está sempre presente, em qualquer transmissão de sinal, já que majoritariamente o ruído está presente na entrada do receptor, ou seja, essa distorção no sinal é um ruído térmico produzido pela passagem dos elétrons em todos os dispositivos dissipadores, como componentes eletrônicos e amplificadores presentes no receptor. O ruído

térmico é um ruído branco gaussiano, cuja densidade espectral de potência é independente da frequência, portanto tem intensidade igual em todas as frequências.

Na Figura 4.1 iremos analisar a sincronização caótica adicionando um ruído no canal de conexão entre os circuitos mestre-escravo [108]. Este canal construído é modelado como um canal AWGN [109], do inglês “*Additive White Gaussian Noise*” ou canal com ruído aditivo branco gaussiano, que é um canal analógico e um dos modelos matemáticos mais simples de canal de comunicação, que modela o efeito do ruído térmico, sempre presente em qualquer sistema de comunicação. Assim, no canal de comunicação entre os circuitos mestre e escravo, adicionamos uma perturbação estocástica na variável de estado $x_5(t)$ do sistema de Equações (4.3) da forma:

$$\frac{dx_5}{dt} = \frac{g}{Qk} [(1 - \alpha_F)n(x_5) + x_6] + \varepsilon[x_2 - x_5] + Ar(t), \quad (4.7)$$

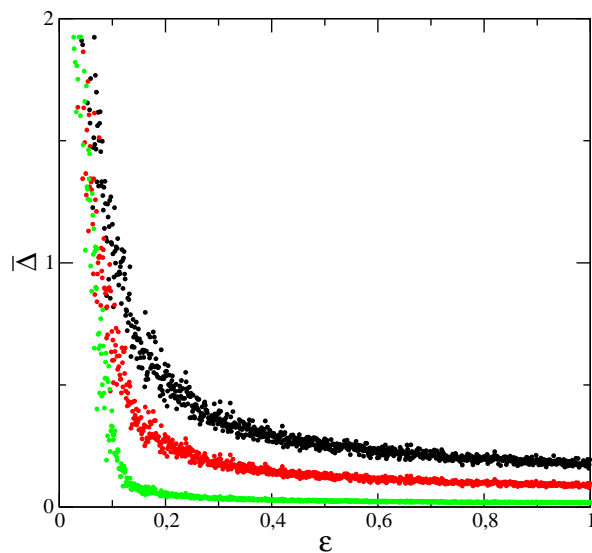
onde A representa o nível da perturbação estocástica e $r(t)$ é uma variável pseudo-aleatória. Consideramos um gerador de números aleatórios que retorna a uma distribuição normal com média zero e desvio padrão um.

Uma maneira para darmos algum discernimento sobre o efeito do ruído no acoplamento é analisarmos o erro de sincronização em função da força de acoplamento ε . Na Figura 4.8, plotamos o erro da média temporal de sincronização versus a força de acoplamento para três valores do nível de ruído. Quando o nível do ruído no canal é pequeno (círculos verdes) o valor do erro da média temporal diminui rapidamente quando a força de acoplamento ε aumenta. No entanto, aumentar o nível da perturbação A (círculos vermelhos e pretos) faz com que o valor do erro da média temporal apresenta grandes valores para todas as forças de acoplamento, indicando que a sincronização é suprimida.

O tamanho da região sincronizada mostrado na Figura 4.5 muda com o nível de ruído. Na Figura 4.9 consideramos os mesmos parâmetros utilizados na Figura 4.5, mas acrescentamos um ruído com o valor da perturbação sendo $A = 3 \times 10^{-5}$. Neste caso, podemos ver que a região sincronizada só aparece para valores maiores da força de acoplamento ε . Semelhante à Figura 4.5, o limite da estrutura entre o comportamento sincronizado e não sincronizado é uma consequência da existência de transientes superpersistentes. Assim, obtemos a região sincronizada, pela Equação (4.5), onde utilizamos o erro da média

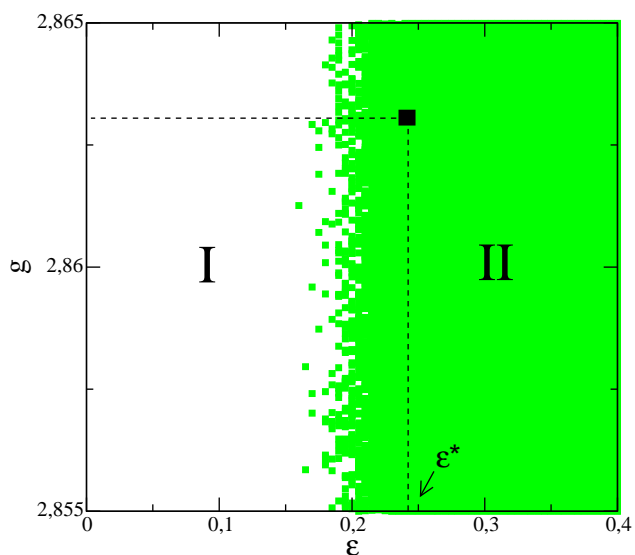
temporal de sincronização igual a $\bar{\Delta} < 10^{-4}$ para $t_1 = 1000$ e $t_2 = 20000$.

Figura 4.8: Erro da média temporal de sincronização versus força de acoplamento para $g^* = 2,863$, $A = 0,1$ (círculos verdes), $A = 0,5$ (círculos vermelhos) e $A = 1,0$ (círculos pretos). Esses três casos tem exatamente a mesma condição inicial.



FONTE: O autor.

Figura 4.9: Domínios sincronizados (região verde) considerando os mesmos parâmetros utilizados na Figura 4.5 e com a adição de um pequeno ruído $A = 3 \times 10^{-5}$.



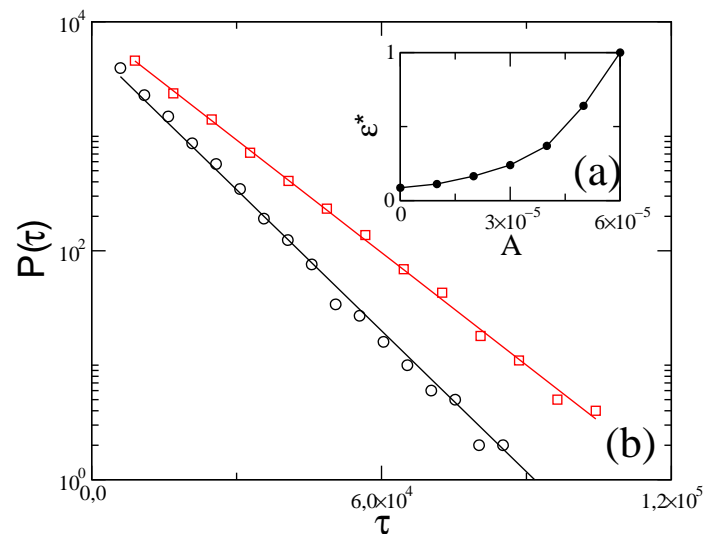
FONTE: O autor.

Verificamos que o caso com transiente superpersistente não apresenta robustez

ao ruído, isto é, um pequeno ruído é suficiente para suprimir o transiente persistente. Comparando a Figura 4.9 (com ruído) com a Figura 4.5 (sem ruído) é possível observar que, devido ao efeito do ruído é necessário um valor grande de ε para o sistema ficar sincronizado.

Assim, para analisarmos o efeito do ruído sobre a região sincronizada fixamos o valor do ganho da malha g^* e variamos a amplitude do ruído A para obtermos ε^* conforme a Figura 4.10(a), onde o transiente médio τ_M é aproximadamente 10^4 . A Figura 4.10(b) mostra o histograma do tempo transiente para $g = 2,863$, $\varepsilon = 1$, $A = 5 \times 10^{-5}$ (círculos negros) e $A = 6 \times 10^{-5}$ (quadrados vermelhos), demonstrando deste modo, que o ruído induz transientes mais longos. Para $A \leq 4 \times 10^{-5}$ os valores dos transientes ficam em torno de 10^3 . Além disso, para $A \geq 7 \times 10^{-5}$ o ruído pode suprimir a sincronização caótica.

Figura 4.10: (a) ε^* versus A , onde os círculos pretos correspondem a $\tau_M \approx 10^4$. (b) Histograma do tempo transiente considerando $g = 2,863$, $\varepsilon = 1$, $A = 5 \times 10^{-5}$ (círculos negros) e $A = 6 \times 10^{-5}$ (quadrados vermelhos).



FONTE: O autor.

Deste modo, a supressão do transiente médio τ_M aumenta rapidamente quando a amplitude do ruído aumenta, de acordo com a relação exponencial $\tau_M \sim \phi \exp(\varphi A)$, onde ϕ e φ são constantes positivas.

5 *Memórias no oscilador Colpitts*

Neste capítulo, analisaremos a formação de memórias de curta duração em um sistema dinâmico com muitos graus de liberdade, considerando primeiramente uma rede de mapas acoplados [23] com conexões aleatórias [45] e posteriormente a formação dessas memórias numa rede de osciladores Colpitts [26]. De forma geral o sistema é descrito por uma equação de difusão discretizada o qual armazena memórias, podendo ser comparado com uma rede neural [10]. É um sistema dinâmico com parâmetros ajustáveis, o qual armazena padrões que minimizam a energia funcional do sistema.

5.1 Formação de Memórias

A possibilidade da formação de memórias de curta duração foi estudada por Coppersmith [44] para explicar o experimento de uma onda de densidade de carga (ODC) em cerâmicas semicondutoras do trisseleneto de nióbio $NbSe_3$. Neste experimento, a memória codificada manifesta-se como a sincronização da resposta a um trem de pulsos elétricos periódicos tal que V/I ($V =$ voltagem, $I =$ corrente da onda de densidade de carga, proporcional a velocidade da onda de densidade de carga v) diminui quando cada pulso cessa [110]. A onda de densidade de carga “recorda” a duração do pulso ajustando a resposta para estar sincronizada com o pulso. Coppersmith propôs o efeito das memórias de curta duração como assinaturas aos processos que ocorrem em muitos sistemas dinâmicos e estudou a resposta da cerâmica semicondutora quando sujeita a pulsos elétricos. A resposta do sistema (o padrão formado), é tal que minimiza a energia funcional do sistema.

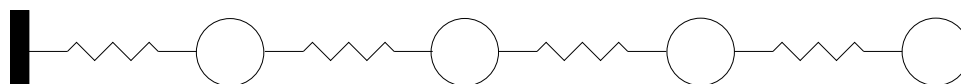
Para formação de memórias de curta duração foi proposto uma rede de mapas acoplados com pulsos periódicos. A rede recebe uma sequência de pulsos durante um espaço

de tempo e posteriormente perde quase toda a informação quando a perturbação externa é desligada. Deste modo, o sistema é deterministicamente forçado para um ponto fixo, e uma vez que este ponto fixo é atingido, não é mais possível recuperar as memórias de curta duração. Logo, é possível manter as memórias transientes adicionando um ruído ao sistema, já que múltiplas memórias são observadas em amostras da cerâmica semicondutora de $NbSe_3$, quando é feito um arranjo que induz ruído ao experimento [44].

Uma cadeia de partículas conectadas com seus vizinhos por molas elásticas e submetida a impulsos periódicos pode ser descrita matematicamente por uma rede de mapas acoplados [40, 63], onde o tempo e o espaço são variáveis discretas e a variável de estado é contínua, onde cada sítio da rede influencia e é influenciado por outro(s) sítio(s) da rede, conforme a Tabela 2.1. A rede de mapas acoplados é composta basicamente de uma dinâmica local, que passa por uma evolução temporal discreta, interagindo com seus vizinhos através de um certo tipo de acoplamento. A variável de estado pode ser interpretada como a posição de cada partícula dentro de um poço de potencial profundo em relação ao seu valor de equilíbrio. O acoplamento é dado pela força de Hooke, gerado pelas molas que conectam as partículas vizinhas mais próximas, sendo também responsável pelo processo dinâmico linear em cada posição discreta.

Para obter o modelo matemático do sistema, Coppersmith em seu trabalho [111], modelou as densidades de cargas conforme a Figura 5.1. O modelo consiste de N partículas, de massa m , acopladas por molas de constante elástica K , sujeitas a um potencial senoidal e impulsionado por uma força periódica temporal $E(t)$ de onda quadrada. A Figura 5.1 mostra uma cadeia de partículas acopladas por molas lineares, com uma extremidade fixa e a outra extremidade submetida a uma sequência de impulsos periódicos.

Figura 5.1: Partículas acopladas com seus vizinhos através de molas elásticas.



FONTE: O autor.

A equação que descreve esse movimento é

$$m\ddot{x}^{(i)} = -\gamma\dot{x}^{(i)} + K[x^{(i+1)} - 2x^{(i)} + x^{(i-1)}] - A \sin[2\pi x^{(i)}] + E, \quad (5.1)$$

com $i = 1, 2, \dots, N$, onde $x^{(i)}$ é a posição da partícula, γ é a constante de amortecimento e A a amplitude do potencial. Para o caso estático ($m = \gamma = E = 0$), a Equação (5.1) é o modelo Frenkel-Kontorova. Quando o amortecimento é forte, o acoplamento é fraco e o campo é alto ($\gamma \gg m, E > A \gg K$) aproximamos a Equação (5.1) pelo mapeamento

$$z_n^{(i)} = x_n^{(i)} + K[x_n^{(i+1)} - 2x_n^{(i)} + x_n^{(i-1)}] + F, \quad (5.2)$$

onde o tempo n é discreto ($n = 0, 1, 2, \dots$), F é a força periódica externa e se $K = 0$ as equações desacoplam.

O mapa utilizado por Coppersmith [112] analisando a Equação (5.2) consiste de dois passos. O primeiro passo imita o comportamento do sistema durante o pulso

$$z_n^{(i)} \equiv x_n^{(i)} + K[x_n^{(i+1)} - 2x_n^{(i)} + x_n^{(i-1)}] + F, \quad (5.3)$$

onde $x_n^{(i)}$ e $z_n^{(i)}$ são as posições da partículas pouco antes do enésimo pulso que está ligado seja desligado [113]. O segundo passo, imita o efeito quando o pulso é desligado e as partículas tendem a cair em um mínimo potencial, ou seja,

$$x_{n+1}^{(i)} = \text{nint}[z_n^{(i)}], \quad (5.4)$$

onde $\text{nint}(x)$ é uma função que arredonda para o inteiro mais próximo de x e é expressa como $\text{nint}(x) = \text{int}(x + 0.5)$ com int sendo a parte inteira de x .

Tomamos que F pode ser um inteiro [110] e reescrevemos as equações (5.3) e (5.4) como

$$x_{n+1}^{(i)} = x_n^{(i)} + \text{nint}\left\{K\left[x_n^{(i+1)} - 2x_n^{(i)} + x_n^{(i-1)}\right] + F\right\}. \quad (5.5)$$

A rede de mapas acoplados correspondente é dada por [44, 110], da forma

$$x_{n+1}^{(i)} = x_n^{(i)} + \text{int}\left\{K\left[x_n^{(i+1)} - 2x_n^{(i)} + x_n^{(i-1)}\right] - (1 + A_n)\right\}, \quad (5.6)$$

onde i é o índice referente as posições dos mapas na rede ($i = 1, 2, \dots, N$), N é o tamanho do sistema, K é o parâmetro de acoplamento entre os mapas, a força periódica externa F é denotada por $(1 + A_n)$, x é a variável de estado que pode representar a posição, a fase ou outra propriedade física do sistema. A função $\text{int}(x)$ surge na equação, pois a cada final

de pulso as partículas estão em um potencial mínimo que com o decorrer das iterações formará um padrão na rede (padrão das memórias).

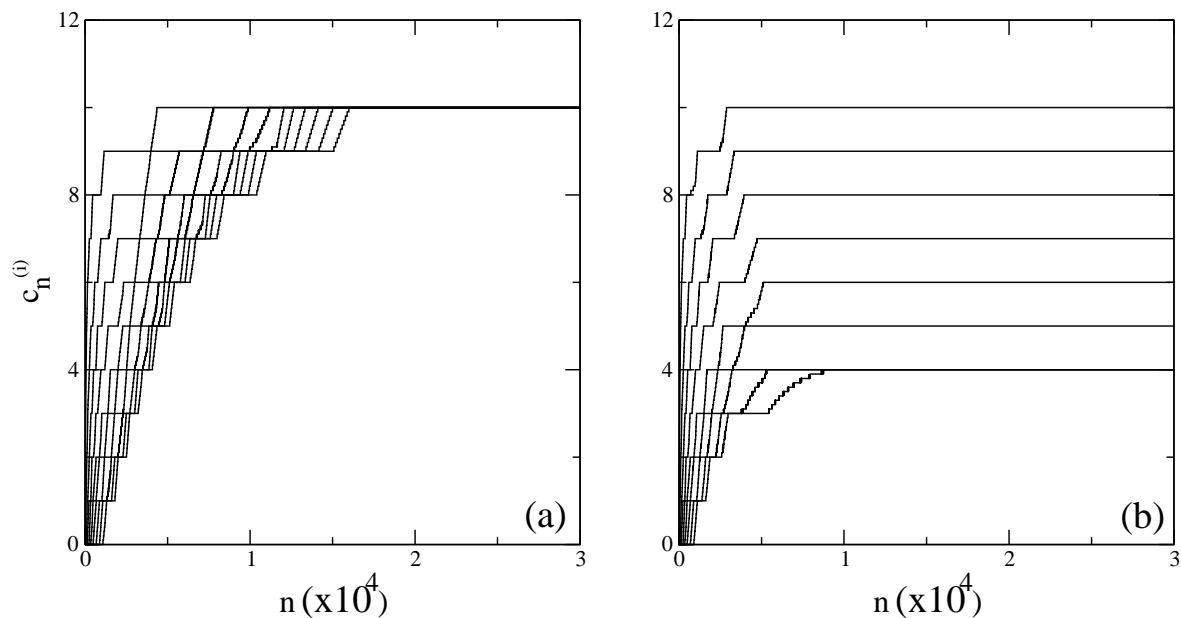
A Equação (5.6) descreve a dinâmica das posições de N partículas em um poço de potencial periódico, com as partículas vizinhas acopladas por molas de constante elástica $K < 1$ e todas estas partículas estão na presença de um forçamento periódico externo da forma $(1 + A_n)$. Para observarmos a formação das memórias utilizaremos a variável de curvatura $c_n^{(i)}$, que é a segunda derivada da variável de estado, expressa por:

$$c_n^{(i)} = K \left[x_n^{(i+1)} - 2x_n^{(i)} + x_n^{(i-1)} \right], \quad (5.7)$$

sendo que podemos verificar que a rede apresenta um padrão, ou memória, quando $c_n^{(i)}$ torna-se constante em uma determinada região.

Das Equações (5.6) e (5.7), podemos verificar a formação das memórias permanentes (valores finais das variáveis de curvatura e valores transientes) e das memórias de curta-duração na Figura 5.2, para 10 mapas acoplados localmente em uma rede unidimensional com uma extremidade fixa $x_n^{(0)} = 0$ e outra livre $x_n^{(N+1)} = x_n^{(N)}$.

Figura 5.2: $c_n^{(i)}$ x n . O tamanho da rede é $N = 10$, com $K = 0,01$. (a) $A_n = 9$ para n ímpar e $A_n = 10$ para n par. (b) $A_n = 10$ para qualquer n e $r = 10^{-8}$.



FONTE: O autor.

Para molas lineares toda sequência de entradas é recuperada durante um período transiente de tempo e apenas algumas entradas são memorizadas para períodos de tempo maiores, a dinâmica do mapa isolado é expresso como $f(x) = x$ na Equação (5.6) e pode ser visualizado na Figura 5.2(a). Esta limitação pode ser contornada utilizando molas ligeiramente não-lineares, ou seja, na rede de mapas acoplados, dada pela Equação (5.6), precisamos modificar a variável de estado $x_n^{(i)}$ pela função $f(x) = x + rx^2$ com um pequeno parâmetro r que controla a não-linearidade do sistema [114], conforme a Figura 5.2(b). Neste caso, múltiplas memórias podem ser codificados por longos períodos de tempo. Um efeito semelhante foi obtido usando cadeias de molas lineares na presença de pequenos ruídos [115].

Aplicando pulsos A_n em ciclos que se repetem com valores 9 e 10 ($A_1 = 9, A_2 = 10, A_3 = 9, A_4 = 10, \dots$), verifica-se que os sítios da rede, após um determinado número de iterações, armazenam certos níveis de memória. Elas são provenientes dos pulsos, que ocasionam na variável de curvatura $c_n^{(i)}$, com o decorrer das iterações, valores constantes. Na Figura 5.2(a), para valores de $c_n^{(i)} = 1$ a $c_n^{(i)} = 9$ temos memórias transientes, enquanto que para o valor de $c_n^{(i)} = 10$ temos uma memória permanente. As memórias transientes são formadas durante um número determinado de iterações e posteriormente perde-se toda a sua informação, não podendo ser mais recuperada. À medida que o tempo (n) evolui, a variável de curvatura é forçada para um ponto fixo, onde ficará enquanto o pulso periódico estiver agindo sobre o sistema [115].

Para compreender como as memórias formam-se, necessitamos olhar para Figura 5.2(a). Inicialmente, cada pulso A_n causa um incremento de mesmo valor para cada sítio $x_n^{(i)}$, menos para o mapa acoplado na extremidade fixa ($x_n^{(0)} = 0$), onde este começa apresentar um aumento da variável de curvatura $c_n^{(i)}$. Com o passar das iterações a variável de curvatura aumenta cada vez mais até que o acoplamento entre o primeiro sítio e a extremidade fixa torna-se grande o bastante para manter o valor da variável de curvatura constante sobre a aplicação de $A_1 = 9$. Depois de algumas iterações o acoplamento não é mais suficiente para mudar a ação do forçamento ($A_2 = 10$), gerando um aumento da variável de curvatura até a memória permanente. Isso ocorre para o $c_n^{(2)}$, $c_n^{(3)}$ e para os outros $c_n^{(i)}$. Deste modo a variável de curvatura estende-se para todos os valores inteiros dos $c_n^{(i)}$, e ao final de um longo tempo, ocorre uma saturação [44, 114], ou seja, $c_n^{(i)} = 10$.

Alterando certas características da rede podemos observar na Figura 5.2(b) a formação de diferentes padrões de memórias em uma rede de mapas acoplados. Para $r = 0$, o mapa isolado apresenta um contínuo de pontos fixos estáveis, com a inserção do termo não-linear $r = 10^{-8}$ a variável de estado varia de forma não-linear, dependendo do parâmetro r . No gráfico do mapa isolado de x versus $f(x)$, pode ser observado que o mapa fica muito próximo da reta $f(x) = x$. Esta pequena variação $x_n^{(i)}$ no mapa isolado, quando acoplado, faz surgir memórias isoladas e grupos de memórias com valores diferentes. A Figura 5.2(b) mostra sítios com memórias diferentes para a realização do acoplamento com o mapa fracamente não-linear ($r = 10^{-8}$). Apesar do termo não-linear ser pequeno os valores das variáveis de estado são da ordem de 10^4 , então o termo não-linear, embora pequeno é muito importante para a dinâmica do sistema.

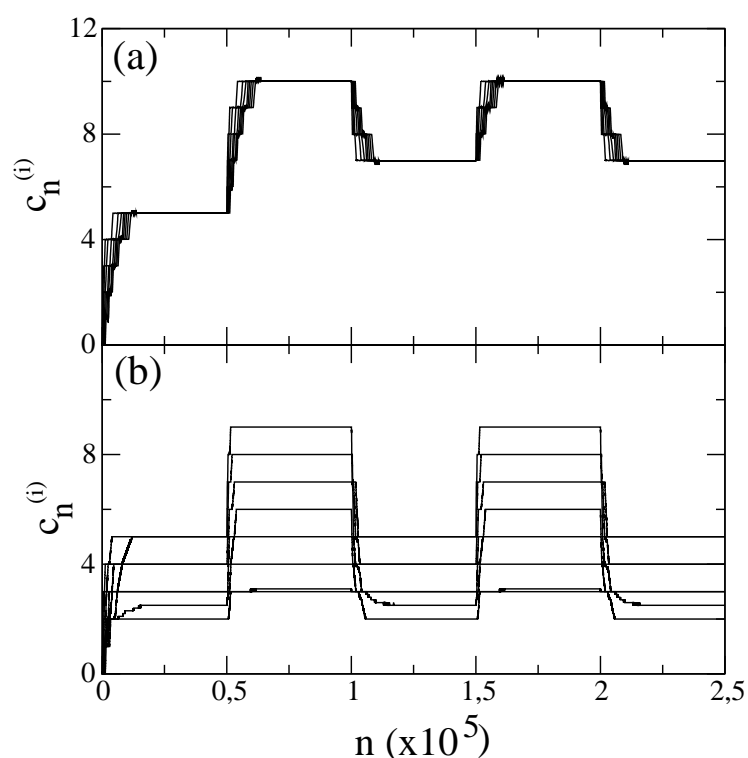
Com a presença do termo não-linear r as variáveis de estado tendem a sincronizar em amplitude, pois começam a apresentar o mesmo valor da variável de estado, e a medida em que aumentamos o termo que controla a não linearidade do sistema ($r > 10^{-8}$), as variáveis de estado sincronizam cada vez mais. Assim as variáveis de curvatura tendem a se anularem pois os valores de $x_n^{(i)}$ encontram-se cada vez mais próximos [115] e podemos obter diferentes padrões alterando o forçamento do sistema, pois o valor final da variável de curvatura depende do forçamento.

Para uma sequência de entradas com amplitudes alternando entre $A_n = 5$ e $A_n = 10$, em intervalos constantes de tempo com duração de $0,5 \times 10^5$, a evolução temporal das variáveis de curvatura para todos os locais da rede está representada na Figura 5.3. Na Figura 5.3(a) temos o mapa linear $f(x) = x$, o qual exibe um único valor memorizado e permanente, que é igual a A_n ou $2 + A_n$. A ocorrência de memórias permanentes nas variáveis de curvatura $c_n^{(i)}$, é uma consequência do mapa exibir um ponto fixo na dinâmica da rede de mapas acoplados. Da Equação (5.6), a condição para termos um ponto fixo x^* implica na existência de termos um único valor memorizado c^* da variável de curvatura dado por $\text{int}(c^* - 1 - A_n) = 0$. Deste modo, $-1 < c^* - 1 - A_n < 1$, fornece duas desigualdades para satisfazer o valor memorizado, ou seja, $c^* < 2 + A_n$ ou $c^* > A_n$.

Na Figura 5.3(a), foi aplicado um pulso $A_n = 5$ durante os primeiros $0,5 \times 10^5$ instantes de tempo e a variável de curvatura aumenta de zero para $c^* = 5$. Durante os próximo $0,5 \times 10^5$ instantes de tempo a amplitude muda para $A_n = 10$ e a variável de cur-

vatura aumenta para corresponder este valor. Entretanto, durante os próximos $0,5 \times 10^5$ instantes de tempo a amplitude muda novamente para 5 e a variável de curvatura diminui para se estabelecer em $c^* = 7$, como previsto. Para uma sequência de entradas, quando um termo não-linear r é adicionado no mapa da Equação (5.6), múltiplas memórias estacionárias aparecem conforme a Figura 5.3(b), as quais representam soluções estacionárias do sistema dinâmico [114].

Figura 5.3: $c_n^{(i)}$ x n . O tamanho da rede é $N = 10$, com $K = 0,01$. A amplitude do forçamento muda de $A_n = 5$ para $A_n = 10$ em intervalos regulares de tempo. (a) $r = 0$ e (b) $r = 10^{-8}$.



FONTE: O autor.

Estes padrões memorizados observados em redes puramente regulares também são possíveis quando conexões aleatórias [45] são adicionadas à rede, com algumas vantagens em relação às redes regulares, conforme discutiremos na próxima seção.

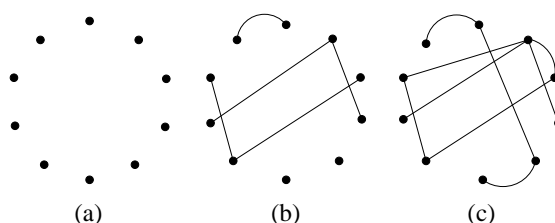
5.2 Memórias em uma rede com conexões aleatórias

A formação de memórias de curta duração, foi descrita primeiramente em sistemas de massa-mola super amortecidas, porém elas ocorrem em outros sistemas, como os circuitos de acoplamento indutivo [116] e em redes com conexões não-locais onde as partículas interagem com todas as outras partículas, sendo que esta interação decai com a distância da rede, seguindo uma lei de potência [117]. Rede é uma noção simples, abstrata e intuitiva, usada para representar a ideia de alguma espécie de relação entre os objetos. As redes são úteis para representar várias estruturas que aparecem na prática, como exemplo, estruturação de dados, resolução e modelagem de problemas, abstração de problemas computacionais, dentre outros.

Os primeiros estudos sobre redes e suas propriedades foram dos matemáticos húngaros Paul Erdős e Alfred Rényi [12, 14, 118], destacando-se os trabalhos sobre redes aleatórias com conexões distribuídas aleatoriamente. Analisando a formação das redes sociais, eles demonstraram que bastava uma conexão entre cada um dos convidados de uma festa, para que todos estivessem conectados ao final dela e quanto mais ligações eram adicionadas, maior a probabilidade de serem gerados agrupamentos, ou seja, grupos de nós mais conectados. Portanto, uma festa poderia ser um agrupamento de pessoas que de tempos em tempos estabeleciam relações com outros grupos.

Na teoria das redes aleatórias de Erdős e Rényi [119], parte-se de um número previamente dado de nós e em seguida eles são conectados. Mais exatamente, parte-se de N nós e nenhuma conexão, e em seguida conecta-se aleatoriamente com probabilidade P cada par de nós, conforme a Figura 5.4.

Figura 5.4: Construção de grafos aleatórios com 10 vértices e conectando-os com probabilidade (a) $P = 0$, (b) $P \approx 0,1$ e (c) $P = 0,2$.



FONTE: O autor.

Essa probabilidade pode ser calculada como a fração entre as conexões atuais N_1 e a totalidade das conexões possíveis N_T , ou seja,

$$P = \frac{N_1}{N_T} = \frac{2N_1}{N(N-1)}. \quad (5.8)$$

Num grafo aleatório cada nó i possui um determinado número de conexões z_i . O número médio de conexões por sítio ou a conectividade média $\langle z \rangle$ da rede, é dada por

$$\langle z \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i = \frac{1}{N} 2 \frac{P[N(N-1)]}{2} = P(N-1) \approx PN, \quad (5.9)$$

onde a aproximação final é válida para N muito grande, ou seja, $N \rightarrow \infty$.

Erdős e Rényi acreditavam que a conexão entre esses nós era aleatória, no sentido de que esses nós se agregavam aleatoriamente, concluindo que todos os nós de uma determinada rede, deveriam ter mais ou menos a mesma quantidade de conexões ou igualdade nas chances de receber novas ligações, constituindo-se, assim, como redes igualitárias [14]. Logo, quanto mais complexa era a rede analisada, maiores as chances dela ser aleatória.

Nos últimos anos, modelos de redes de mundo pequeno [120, 121] e modelos de redes sem escala [122, 123] vêm sendo empregados como estruturas que melhor representam inúmeras características das redes complexas encontradas. Modelos de redes de mundo pequeno privilegiam a representação da distância média e do coeficiente de agregação de redes complexas, enquanto os modelos de redes sem escala enfatizam à representação da distribuição de conexões baseando-se em redes que apresentam crescimento [122], ou seja, redes em que o número de elementos, ou nós, cresce com o tempo. Por outro lado, modelos de rede mundo pequeno, representam adequadamente uma série de redes complexas que se observam [120], e podem ser construídas a partir de redes regulares, não requerendo o crescimento da rede.

O conceito de mundo pequeno refere-se ao fato de que a distância média entre os sítios da rede é pequena (semelhante ao encontrado em redes aleatórias), onde dois sítios quaisquer, estão separados por uma distância relativamente pequena, apesar do grande tamanho das redes e apresenta um alto coeficiente de agregação (semelhante ao encontrado em redes regulares). Em geral, associa-se às redes de mundo pequeno um grande número de elementos e um número pequeno de conexões por nó.

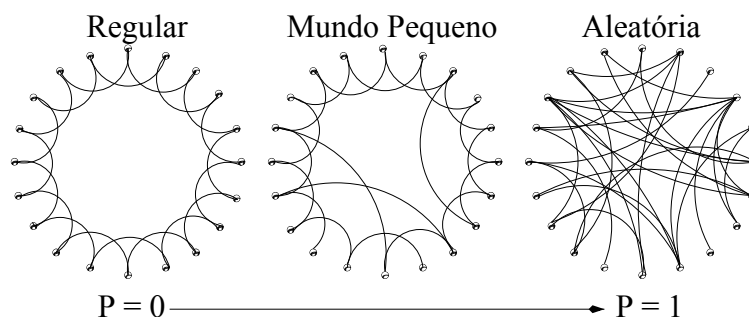
Analisando as redes sociais como interdependentes umas das outras, é aceitável perceber que todas as pessoas estariam interligadas umas às outras em algum nível. O exemplo mais notório do conceito de mundo pequeno é o trabalho da década de 60 do sociólogo Stanley Milgram [124]. Milgram observou os graus de separação entre as pessoas [14, 118], entregou uma mensagem a várias pessoas escolhidas aleatoriamente nos Estados Unidos e determinou que cada mensagem chegasse a um destinatário, também escolhido aleatoriamente. As pessoas deviam entregar a mensagem a um conhecido que tivesse mais chances de fazê-la chegar ao destinatário.

Neste trabalho Milgram concluiu que a distância média entre duas pessoas escolhidas aleatoriamente nos Estados Unidos era de seis pessoas, ou seja, em média a mensagem passava por seis pessoas entre a pessoa inicial e o destinatário. Devido à forma do experimento de Milgram, pode-se dizer que o número seis não é provavelmente um valor preciso. O experimento certamente contém muitas fontes possíveis de erro. Entretanto, o resultado geral de que duas pessoas escolhidas aleatoriamente podem ser conectadas por uma cadeia curta de conhecidos tem sido verificado, sendo bastante aceito e referido como efeito de *mundo pequeno* [125].

A partir do experimento de Milgram, Watts e Strogatz [120] descobriram que as redes sociais apresentavam padrões altamente conectados, tendendo a formar pequenas quantidades de conexões entre cada indivíduo, pois cada um de nós tem conhecidos e amigos em vários lugares do mundo, que por sua vez, têm outros conhecidos e amigos. Em grande escala, essas conexões mostram a existência de poucos graus de separação entre os indivíduos no planeta. Além disso, Watts e Strogatz mostraram que bastavam poucas conexões entre vários agrupamentos para formar um mundo pequeno numa grande rede, transformando a própria rede num grande agrupamento [118].

Watts e Strogatz criaram um modelo semelhante ao de Erdős e Rényi, onde as conexões eram estabelecidas entre as pessoas mais próximas e algumas conexões estabelecidas de modo aleatório entre alguns nós, transformando a rede num mundo pequeno [12]. Eles sugeriram uma rede unidimensional com condições de contorno periódicas, como mostra a Figura 5.5, onde ocorre uma reconexão aleatória, com uma probabilidade P .

Figura 5.5: Modelo de mundo pequeno para $z = 4$ e $N = 20$. A rede passa de uma estrutura regular para uma estrutura aleatória com o aumento da probabilidade P .

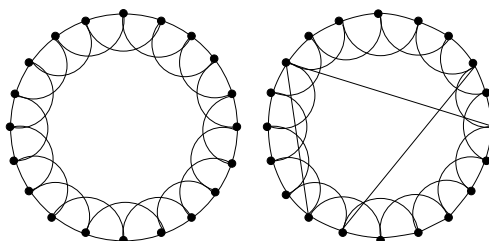


FONTE: Adaptada de Watts e Strogatz [120].

Se o valor da probabilidade P for zero, $P = 0$, a rede não ganha nenhuma conexão de longo alcance e permanece como uma rede regular. Se $P = 1$, as conexões de curto alcance são substituídas por conexões de longo alcance e a rede aproxima-se de uma rede aleatória. Para $0 < P < 1$, tem-se uma fração P de conexões de longo alcance e a estrutura da rede é um meio termo entre uma rede regular e uma rede aleatória. O processo de criação de uma rede de mundo pequeno a partir de uma rede regular não altera o número total de conexões nem a conectividade média da rede, uma vez que o processo de religação altera apenas o sítio final da conexão.

O modelo de Watts-Strogatz pode sofrer variações, uma destas variações foi proposta por Newman-Watts [46] conforme a Figura 5.6, onde conexões entre nós escolhidos aleatoriamente foram adicionados à rede regular sem que as conexões existentes fossem retiradas.

Figura 5.6: Rede regular e uma rede Newman-Watts produzida a partir dela.



FONTE: Adaptada de Newman e Watts [46].

No modelo de Newman-Watts [46] nem o número de conexões por nó e nem

o número total de conexões permanecem os mesmos na rede original. Deste modo, não ocasionam o aparecimento de porções de rede separadas do restante. No modelo de Watts-Strogatz é preservado o número de conexões original da rede, enquanto que no modelo de Newman-Watts a rede criada apresenta um número maior de conexões. Para valores suficientemente pequenos de P e grandes valores de N o modelo de Newman-Watts é equivalente ao modelo de Watts-Strogatz.

Seguindo o modelo de Newman-Watts, onde conexões aleatórias são adicionadas à rede regular sem que as conexões existentes fossem retiradas, buscamos verificar a existência de memórias de curta duração em redes com conexões regulares e aleatórias [45]. Partimos de mapas localmente acoplados inserindo na Equação (5.6) conexões aleatórias $\mathcal{M}^{(i)}$ para a construção do modelo, assim

$$x_{n+1}^{(i)} = x_n^{(i)} + \text{int} \left\{ K \left[x_n^{(i+1)} - 2x_n^{(i)} + x_n^{(i-1)} + \mathcal{M}^{(i)} \right] - (1 + A_n) \right\}, \quad (5.10)$$

onde o tempo n é discreto ($n = 0, 1, 2, \dots$), i é o índice referente as posições dos mapas na rede ($i = 1, 2, \dots, N$), N é o tamanho do sistema, K é o parâmetro de acoplamento entre os mapas, x é a variável de estado, $\text{int}(x)$ uma função descontínua que retorna o maior inteiro igual ou menor do que x e $f(x) = x + rx^2$ é o mapa característico de cada sítio com $r > 0$ controlando a não-linearidade do sistema.

Para observarmos a formação de memórias com conexões aleatórias, utilizaremos a variável de curvatura $c_n^{(i)}$ da Equação (5.7), agora definida pela relação

$$c_n^{(i)} = K \left[x_n^{(i+1)} - 2x_n^{(i)} + x_n^{(i-1)} + \mathcal{M}^{(i)} \right], \quad (5.11)$$

onde as conexões aleatórias $\mathcal{M}^{(i)}$ são dadas por

$$\mathcal{M}^{(i)} = \sum_j \left\{ \left[x_n^{(j)} - x_n^{(i)} \right] I_{ij} \right\}, \quad (5.12)$$

sendo j o índice dos sítios escolhidos aleatoriamente, onde $j \neq i$, $j \neq i + 1$ e $j \neq i - 1$. Os termos aleatórios ou de conexões não-locais são representados pelos elementos da matriz conectividade simétrica I_{ij} . Estes elementos da matriz são 1 e 0, que nos dizem se os sítios $x^{(i)}$ e $x^{(j)}$ estão ($I_{ij} = 1$) ou não ($I_{ij} = 0$) conectados. Para uma rede com $N = 10$ temos a seguinte matriz de conexão

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nesta matriz de conexão os elementos da última coluna e da última linha são sempre nulos porque o sítio i está conectado apenas com o $(n - 1)$ sítio (penúltimo sítio), representando assim o sítio que está na extremidade livre. Os elementos da diagonal principal da matriz de conexão são nulos porque o sítio não se conecta com ele mesmo, e os elementos da diagonal inferior e superior da matriz são sempre nulos pois expressam as conexões locais e esta matriz de conexão representa as conexões não-locais. Esta matriz de conexão é simétrica onde a conexão que vai do sítio i para o sítio j é a mesma que vai no sentido contrário, por exemplo, os elementos $a_{35} = a_{53} = 1$, significam que os sítios 3 e 5 estão conectados e os elementos $a_{49} = a_{94} = 0$, significam que os sítios 4 e 9 não estão conectados.

Como a matriz de conexão é simétrica $I_{ij} = I_{ji}$, os elementos não nulos são escolhidos aleatoriamente de acordo com uma probabilidade uniforme P , a qual acaba sendo a relação entre o número de conexões não-locais N_1 e o número total de conexões $N_T = (N^2 - 3N + 2)/2$, excluindo auto-interações e as interações com os vizinhos mais próximos. Foi utilizado um gerador de números aleatórios com probabilidade uniforme o qual fornece números pseudo-aleatórios, ou seja, $0 \leq r_n \leq 1$. Na sequência é escolhido o número de atalhos aleatórios N_1 e obtém-se a posição (i, j) do primeiro elemento não-nulo da matriz, para isso, toma-se que i é o número inteiro mais próximo menor ou igual a $r_n N_1$ e para o sítio j é usado o mesmo procedimento. No entanto, se $j = i$ ou $i \pm 1$, descarta-se esta rotina e repete o procedimento até que todos os elementos N_1 não nulos da matriz

sejam escolhidos.

Quando uma rede armazena múltiplas memórias permanentes, cada uma delas caracterizada por um determinado valor para a variável de curvatura $c_n^{(i)}$, a quantidade que descreve este efeito é o valor da variável de curvatura média da rede c_L , bem como o desvio padrão da rede em relação à média, σ_L . As médias são tomadas para toda a rede e também pelo uso de diferentes configurações iniciais da matriz de adjacência. Quando a rede apresenta uma memória permanente, a variável de curvatura média c_L é igual à entrada externa A_n , sem qualquer desvio, ou seja, $\sigma_L = 0$. Quando múltiplas memórias surgem no sistema, a variável de curvatura média c_L assume um valor menor que A_n e com variação positiva $\sigma_L > 0$.

Para a formação de memórias com conexões aleatórias e parâmetro de não linearidade diferente de zero, utilizamos a variável de curvatura média da rede c_L , para analisarmos se as conexões exibem uma memória permanente ($c_L = A_n$) ou múltiplas memórias ($c_L < A_n$), utilizamos

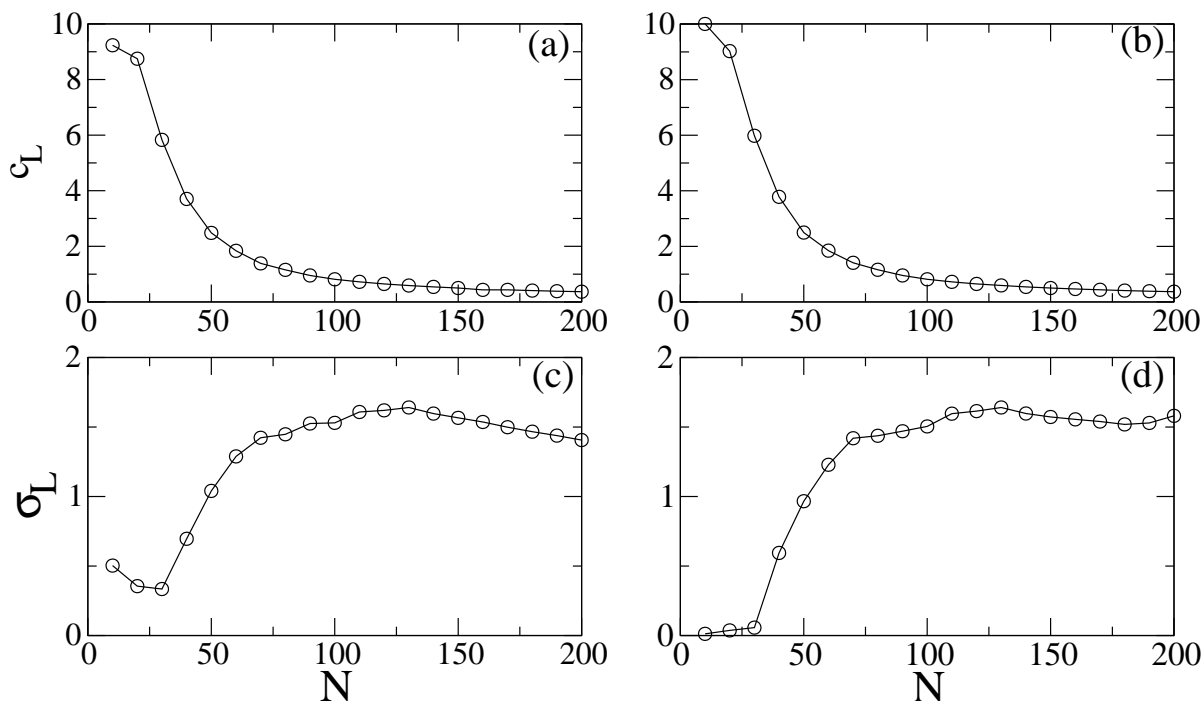
$$c_L = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \overline{c_n^{(j)}}. \quad (5.13)$$

Também analisamos o desvio padrão da rede (σ_L) em relação a média, para verificarmos se existe ou não apenas uma memória. Quando $c_L = A_n$ não existem múltiplas memórias e se $\sigma_L \neq 0$ teremos a ocorrência de múltiplas memórias,

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\overline{c_n^{(j)}} \right)^2 - c_L^2}. \quad (5.14)$$

A influência do tamanho da rede N na variável de curvatura média da rede c_L dada pela Equação (5.13) e no desvio padrão da rede σ_L expresso pela Equação (5.14) é mostrado na Figura 5.7. O valor de c_L diminui e σ_L aumenta em relação a N para valores fixos de A_n , K e r para uma probabilidade P pequena [Figuras 5.7(a) e 5.7(c)] e para uma probabilidade P maior [Figuras 5.7(b) e 5.7(d)], sem diferenças essenciais. Em ambos os casos, vemos que o aumento no tamanho da rede tem um efeito prejudicial sobre o processo de formação da memória, uma vez que as variáveis curvatura tem pequenos valores com pequena dispersão, tornando o processo não viável para aplicações práticas.

Figura 5.7: Variável de curvatura média em função do tamanho de rede N para (a) $P = 0,1$ e (b) $P = 0,7$. (c) e (d) são os desvios padrão correspondentes à (a) e (b), respectivamente. Outros parâmetros são $A_n = 10$, $K = 0,01$ e $r = 3,5 \times 10^{-9}$.



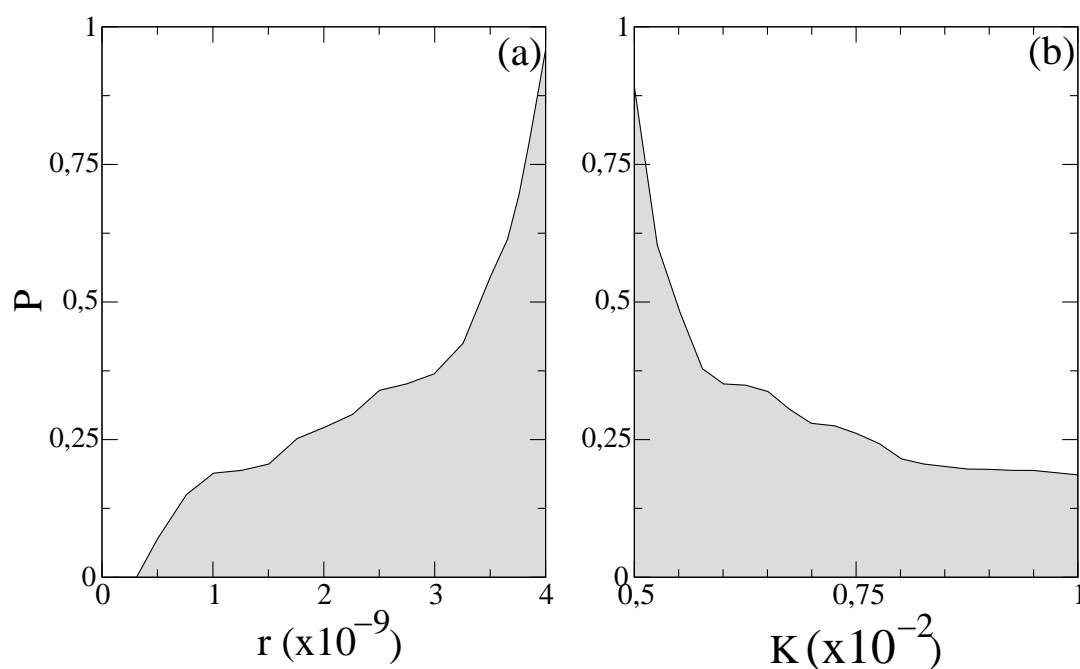
FONTE: O autor.

Podemos também analisar a probabilidade P de termos memórias com conexões aleatórias indo para o valor da memória permanente ($c_L = A_n$) em função do parâmetro de não linearidade r do sistema. Na região branca da Figura 5.8(a) para valores de P e r temos uma memória permanente ($c_L = 10$), não havendo múltiplas memórias. Quando $r < 3 \times 10^{-10}$ a rede apresenta a formação de uma memória permanente em $P = 0$. Para $r > 3 \times 10^{-10}$ surgem múltiplas memórias permanentes (região cinza), e inserindo conexões aleatórias é possível obter apenas uma memória permanente no intervalo $3 \times 10^{-10} < r < 4 \times 10^{-9}$. Logo com o aumento do parâmetro de não-linearidade do sistema r , necessita-se de um número maior de conexões aleatórias para que a rede apresente uma memória permanente.

Na Figura 5.8(b), analisando a probabilidade P de termos memórias com conexões aleatórias indo para o valor de memória permanente em função da constante elástica da mola K , vemos que acima da curva (região branca) ocorre a formação de uma memória

permanente ($c_L = 10$) e para valores abaixo da curva (região cinza) temos a formação de múltiplas memórias permanentes. Logo com o aumento da constante de acoplamento K , necessita-se de um número menor de conexões aleatórias para que a rede apresente apenas uma memória permanente. Além disso, em ambas as figuras, com o aumento da probabilidade P existem intervalos para os quais existe apenas uma memória permanente. Para o caso limite de $P = 1$, ocorrem inúmeras ligações e a rede não exibe todas as múltiplas memórias. Deste modo, estas ligações inseridas aleatoriamente, agem como inibidores na formação das memórias de curta duração.

Figura 5.8: Plano de parâmetros para a rede: as regiões brancas correspondem somente a uma memória permanente e as regiões em cinza correspondem a formação de múltiplas memórias. (a) $P \times r$ com $K = 0,01$. (b) $P \times K$ com $r = 10^{-9}$. Outros parâmetros são $A_n = 10$ e $N = 10$.



FONTE: O autor.

5.3 Memórias em uma rede de osciladores Colpitts

Nesta seção, estudaremos a formação de memórias de curta duração em osciladores Colpitts [26], o qual já foi discutido no capítulo 3 e com mais detalhes na seção 3.2. Uma rede de osciladores Colpitts são descritos por uma cadeia de osciladores acoplados, conforme

a Tabela 2.1, apresentam espaço discreto, tempo e variável de estado contínuas, uma vez que cada equação diferencial é dita como uma posição do sistema. Nas seções anteriores 5.1 e 5.2 a formação de memórias ocorreu através de redes de mapas acoplados, que são modelos mais simples em comparação com os modelos gerados por equações diferenciais, pois em redes de mapas acoplados o tempo é discreto. Começaremos pelo estudo de N osciladores Colpitts acoplados através de fios com resistência variável R^* . Analisaremos a formação dos padrões de memórias neste sistema e o comportamento dos padrões de memórias com o tamanho da rede.

Do mesmo modo que foi feito na seção 3.2, para o conjunto de Equações (3.11) para um único oscilador Colpitts, obtemos as equações de estado para N osciladores Colpitts acoplados, da forma:

$$\begin{cases} \frac{dx_1^{(i)}}{dt} = \frac{g^*}{Q(1-k)}[-\alpha_F n(x_2^{(i)}) + x_3^{(i)}], \\ \frac{dx_2^{(i)}}{dt} = \frac{g^*}{Qk}[(1 - \alpha_F)n(x_2^{(i)}) + x_3^{(i)}] + \varepsilon A^{(i)} + V_{ext}, \\ \frac{dx_3^{(i)}}{dt} = -\frac{Qk(1-k)}{g^*}[x_1^{(i)} + x_2^{(i)}] - \frac{1}{Q}x_3^{(i)}, \end{cases} \quad (5.15)$$

onde i é o índice referente aos osciladores na rede ($i = 1, 2, \dots, N$), N é a quantidade de osciladores, $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$ e $x_3^{(i)}$ são as variáveis de estado adimensionais, V_{ext} é a perturbação externa constante, g^* é o ganho da malha, Q é o fator de qualidade de ressonância da rede, k é o divisor de tensão capacitivo, α_F é o ganho de corrente do transistor numa configuração base comum (CB), $n(\cdot)$ é a função característica não-linear que fornece os pontos de condução do resistor não-linear R_E da forma $n(x_2^{(i)}) = e^{-(x_2^{(i)})} - 1$, ε é a constante de acoplamento entre os circuitos dada pela Equação (4.1) e $A^{(i)}$ é o termo de acoplamento unidirecional expresso por

$$A^{(i)} = \sum_{j \in I^{(ij)}} (x_2^{(i)} + x_2^{(j)}) I^{(ij)}, \quad (5.16)$$

onde $I^{(ij)}$ é o conjunto de circuitos j conectados com os circuitos i . O circuito i tem as conexões com o circuito da esquerda $i - 1$, com o circuito da direita $i + 1$ e com conexões aleatórias com circuitos j escolhidos aleatoriamente, onde $j \neq i$, $j \neq i + 1$ e $j \neq i - 1$. Os

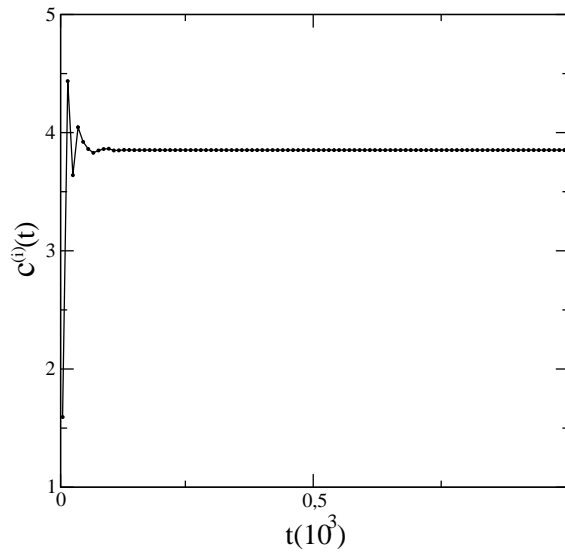
termos aleatórios ou de conexões não-locais são representados pelos elementos da matriz de conexões não simétricas $I^{(ij)}$. Estes elementos da matriz são 1 ou 0, que nos dizem se os osciladores $y^{(i)}$ e $y^{(j)}$ estão ($I^{(ij)} = 1$) ou não ($I^{(ij)} = 0$) conectados. Do mesmo modo que foi feito na seção 5.2, os elementos não-nulos da matriz de conexão são escolhidos aleatoriamente de acordo com uma probabilidade uniforme P , a qual acaba sendo a relação entre o número de conexões não-locais N_1 e o número total de conexões $N_T = (N^2 - 3N + 2)$, como o acoplamento é unidirecional elimina-se a divisão por 2 do número total de conexões.

Como foi feito nos trabalhos de Coppersmith, et. al [44] e Batista, et. al [114] numa rede de mapas acoplados, para observarmos a formação das memórias utilizando o modelo a tempo contínuo dado pela Equação (5.15), utilizaremos a variável de curvatura $c^{(i)}(t)$, a qual descreve a dinâmica dos osciladores Colpitts, da forma

$$c^{(i)}(t) = |x_{\max}^{(i+1)}(t) - 2x_{\max}^{(i)} + x_{\max}^{(i-1)}(t)|, \quad (5.17)$$

forneendo o módulo da diferença entre os máximos valores dos primeiros vizinhos e x_{\max} é definido como o máximo local, de modo que, $\dot{f}(x_{\max}) = 0$. A formação da memória ocorre quando a variável de curvatura apresenta um valor constante. Na Figura 5.9 calculamos a variável de curvatura para uma rede com 500 osciladores Colpitts acoplados.

Figura 5.9: $c^{(i)}(t) \times t$, com 500 osciladores Colpitts, $V_{ext} = 0$, $\varepsilon = 0$, $Q = 1,77$, $k = 0,5$, $\alpha_F = 0,996$ e $g^* = 2,0$.

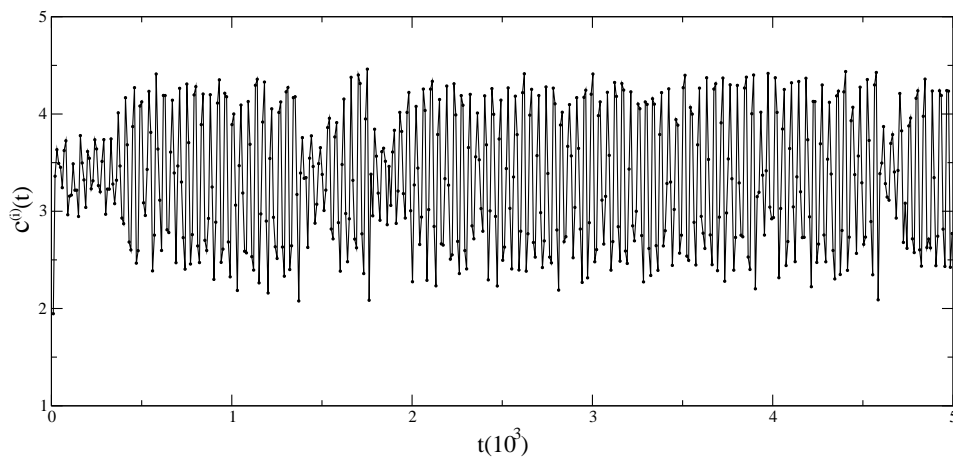


FONTE: O autor.

Podemos observar a formação das memórias dos osciladores Colpitts em função do tempo t , passado um certo transiente o valor de $c^{(i)}(t)$ se torna constante, uma vez que a perturbação externa e a constante de acoplamento são nulas. O resultado é o mesmo quando não temos conexões não-locais e quando adicionamos conexões não-locais, de modo que $0 < N_1 < 50$, devido ao fato que $\varepsilon = 0$. Os circuitos estão desacoplados $\varepsilon = 0$ e a variável de curvatura é diferente de zero $c^{(i)} > 0$. Isto ocorre porque as amplitudes de oscilação de $y^{(i)}$ são diferentes, devido as condições iniciais serem diferentes.

Quando considera-se a perturbação externa V_{ext} igual a 0,1 e a constante de acoplamento ε igual a 0,05 verifica-se oscilações nos valores da resposta das memórias, de modo que a variável de curvatura $c^{(i)}(t)$ oscila com o passar do tempo t , conforme a Figura 5.10. Mantendo nula a perturbação externa V_{ext} e aumentando a constante de acoplamento ε sem adicionar conexões não-locais ao sistema, o tempo t para formação da memória ($c^{(i)}(t) = \text{constante}$) diminui. Quando a constante de acoplamento ε é nula e perturbação externa V_{ext} é aumentada, novamente sem adicionarmos conexões não-locais ao sistema, o tempo t para formação da memória e a variável de curvatura $c^{(i)}(t)$ diminuem.

Figura 5.10: $c^{(i)}(t) \times t$, com 10 osciladores Colpitts, $V_{ext} = 0,1$ e $\varepsilon = 0,05$.

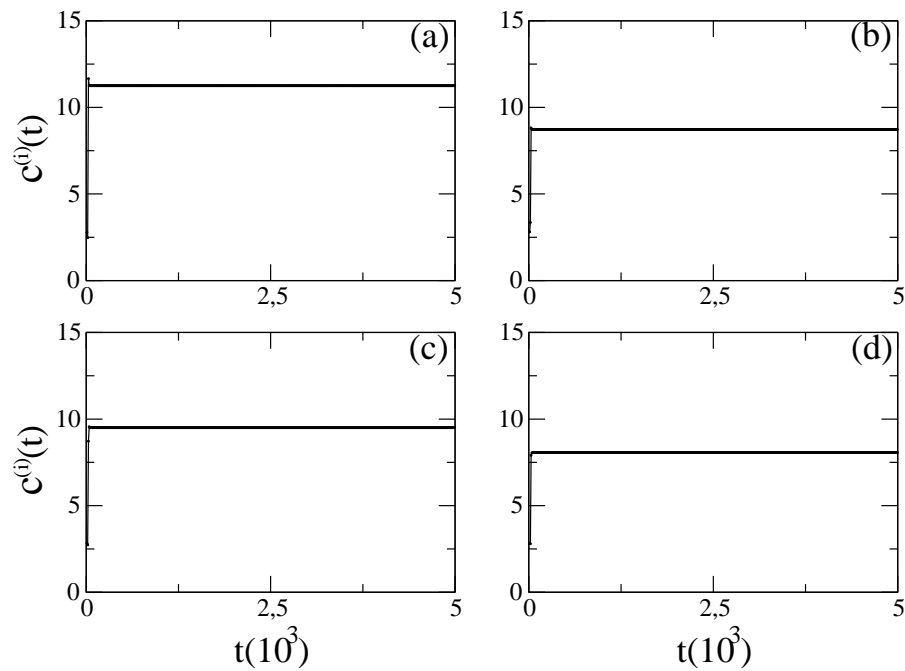


FONTE: O autor.

Na Figura 5.11, aumentando o número de conexões não-locais no sistema e consequentemente aumentando o tamanho da rede, utilizamos a perturbação externa como sendo $V_{ext} = 0,1$ e a constante de acoplamento igual a $\varepsilon = 0,1$. Na Figura 5.11(a) temos

$N = 10$ e 1 conexão não-local, na Figura 5.11(b) $N = 100$ e 10 conexões não-locais, na Figura 5.11(c) $N = 150$ e 15 conexões não-locais e na Figura 5.11(d) $N = 200$ com 20 conexões não-locais, sendo que em todos os casos o número de conexões não-locais é dez por cento do tamanho da rede. Conforme o tamanho da rede é aumentado o valor da média das memórias $c^{(i)}(t)$ diminui com o passar do tempo t .

Figura 5.11: $c^{(i)}(t) \times t$ com $\varepsilon = 0,1$ e $V_{ext} = 0,1$: (a) $N = 10$, (b) $N = 100$, (c) $N = 150$ e (d) $N = 200$.



FONTE: O autor.

Na Figura 5.12 analisamos quando o tamanho N da rede aumenta a variável de curvatura média da rede c_L dada pela equação

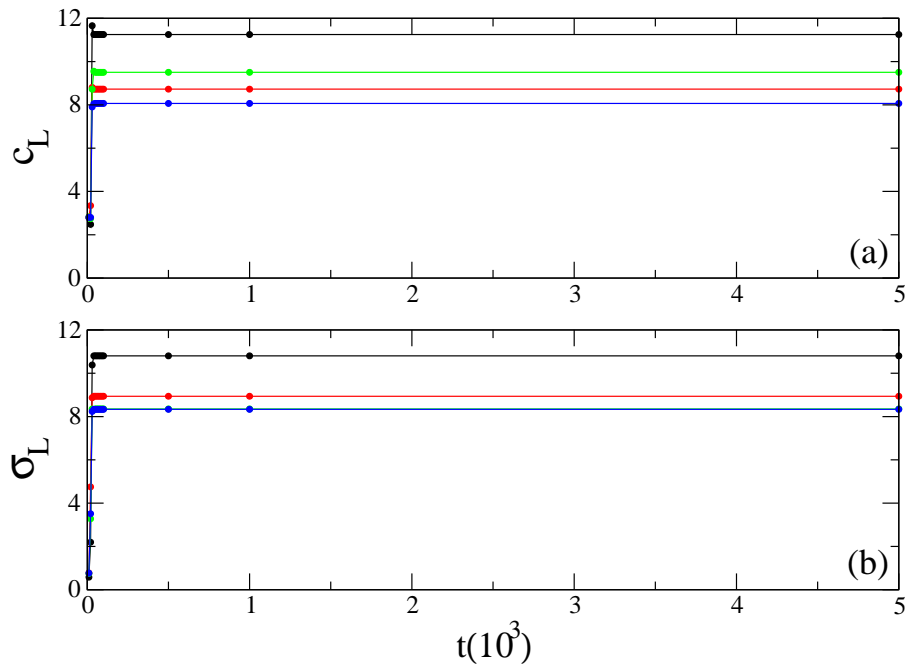
$$c_L = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \overline{c^{(j)}(t)}, \quad (5.18)$$

e o desvio padrão da rede σ_L em relação à média, da forma

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [\overline{c^{(j)}(t)}]^2 - c_L^2}. \quad (5.19)$$

Utilizamos a Equação (5.18) para calcular a variável de curvatura média da rede c_L na Figura 5.12(a) e a Equação (5.19) para obter o desvio padrão da rede σ_L em relação à média na Figura 5.12(b),

Figura 5.12: (a) $c_L \times t$ e (b) $\sigma_L \times t$. $\varepsilon = 0, 1$, $V_{ext} = 0, 1$, curva preta $N = 10$, curva vermelha $N = 100$, curva verde $N = 150$ e curva azul $N = 200$.



FONTE: O autor.

Quando a rede apresenta uma memória permanente, a variável de curvatura média c_L é igual a entrada externa e não ocorre desvio $\sigma_L = 0$. Aumentando o tamanho N da rede, o sistema continua apresentando múltiplas memórias, uma vez que o desvio padrão apresenta um valor positivo, $\sigma_L > 0$. Conforme o tempo t vai aumentando múltiplas memórias surgem no sistema, pois a variável de curvatura média da rede c_L e o desvio padrão σ_L diminuem com o aumento da rede e os circuitos acoplados passam a apresentar menos memórias porque alguns circuitos passam a oscilar com valores de amplitudes bem próximas, ou seja, de forma quase sincronizada. O valor do desvio padrão σ_L vai decrescendo conforme o tamanho da rede aumenta, ou seja, $\sigma_L^{N=10} > \sigma_L^{N=100} > \sigma_L^{N=150} > \sigma_L^{N=200}$.

6 *Conclusões*

O oscilador Colpitts tem um rico comportamento dinâmico quando os parâmetros do sistema são variados. Os comportamentos complexos estão relacionados a cascata de Feigenbaum no diagrama de bifurcações. A análise das bifurcações através dos expoentes de Lyapunov pode ser utilizada como uma ferramenta para verificar o comportamento caótico. Quando um dos expoente de Lyapunov é positivo temos o oscilador Colpitts exibindo comportamento caótico, que é o caso que estudamos.

Ao acoplarmos os osciladores Colpitts numa configuração mestre-escravo, verificamos alguns aspectos da sincronização caótica. Obteve-se um conjunto de parâmetros que podem conduzir os circuitos acoplados a um estado de sincronização completa ou não sincronização. Verificou-se a existência de transientes superpersistentes. Este transiente está localizado na fronteira dos domínios sincronizados no espaço de parâmetros do ganho da malha g^* versus a constante de acoplamento ε .

Ao inserir um ruído no canal de conexão entre o circuito mestre e o circuito escravo, verificou-se que o ruído age sobre o sistema de modo que a sincronização entre ambos pode ser obtida aumentando-se o valor da constante de acoplamento ε . Além disso, os transientes se tornam mais longos e caso o sistema tenha uma dependência exponencial entre a duração média do transiente com relação à distância ao ponto crítico fica caracterizado o transiente superpersistente. Deste modo, estes resultados permitem prever que existe um conjunto de parâmetros nos osciladores Colpitts acoplados, para observar os transientes superpersistentes que podem ser usados em experiências de laboratório. Os transientes persistentes descritos são semelhantes aos observados em sistemas dissipativos, e devem estar relacionados com a sela caótica dos sistemas acoplados.

Os sistemas dinâmicos com muitos graus de liberdade, quando submetidos a uma

perturbação externa, armazenam a informação por um certo transiente de tempo e podem devolvê-la novamente ao sistema, caracterizando assim uma memória de informação. Essa possibilidade foi explorada por Coppersmith, et. al [44] para explicar a formação de padrões de memórias em amostras do cristal trisseleneto de nióbio $NbSe_3$, onde neste caso a memória se manifestou como a sincronização da resposta quando pulsos elétricos periódicos foram aplicados.

As memórias de curta duração ecoam o sinal da perturbação periódica externa enquanto ela ainda é aplicada no sistema. As memórias são recuperadas através do cálculo da variável de curvatura. Para uma sequência periódica de pulsos de amplitude A_n , observamos que o tempo transiente para obtenção da memória permanente do sistema depende de certos parâmetros da rede de mapas acoplados. Para um parâmetro de não linearidade nulo ($r = 0$), o sistema exibe a formação de memórias ou padrões permanentes com o passar do tempo. Uma forma de alterarmos os padrões destas memórias é aumentarmos o forçamento externo exercido sobre o sistema e a inserção de um termo não-linear ($r > 0$), gerando assim a formação de múltiplas memórias permanentes.

A presença do termo não-linear na função que descreve o mapa modifica os valores das memórias finais, ocasionando o surgimento das memórias intermediárias devido ao fato que as variáveis de estado sincronizam em amplitude. Os sítios que sincronizam apresentam o valor da variável de curvatura nula, pois o valor da variável de curvatura está relacionado com a diferença entre os valores das variáveis de estado. A diminuição no valor final das variáveis de curvatura acarreta uma diminuição no tempo transiente devido a redução no número de iterações para que os sítios atinjam a memória permanente. Logo, este termo não-linear é importante, pois nesse sistema podemos armazenar informações mais complexas para aplicações em codificação de mensagens ou matrizes gráficas, devido a formação das múltiplas memórias.

Na sequência exploramos alguns aspectos da dinâmica espaço-temporal exibido pela rede de mapas acoplados na formação de memórias em rede do tipo mundo pequeno com conexões aleatórias não-locais obtidas a partir do processo de Newman-Watts, usando uma matriz de conexão com entradas escolhidas aleatoriamente com uma dada probabilidade uniforme P , afim de simular redes com um número variável de conexões por sítio e analisar a probabilidade de termos ou não múltiplas memórias em função dos parâmetros

da rede.

Com uma não linearidade baixa no mapa ocorre o aparecimento de múltiplas memórias. Neste caso estudamos a variável de curvatura média c_L e o desvio padrão σ_L em relação a média, e em ambos os casos, o aumento no tamanho da rede prejudica o processo de formação das memórias, pois os valores das variáveis de curvatura tem pouca dispersão. Obtivemos valores dos parâmetros de não linearidade r e de acoplamento K que exibem ou não múltiplas memórias em função da probabilidade das conexões aleatórias não-locais.

Deste modo, a existência de uma não linearidade é desejável embora não seja uma condição suficiente para o armazenamento de múltiplas memórias. No entanto, a presença de conexões aleatórias acaba inibindo este efeito, uma vez que a fração dos parâmetros para os quais existem múltiplas memórias diminuem com o aumento da probabilidade de conexões aleatórias. Os melhores resultados para a formação da memória são obtidos com redes relativamente pequenas ($N < 50$), em comparação com as grandes redes. Isso torna as redes com conexões regulares e aleatórias atraentes, pois são necessárias no armazenamento de pixels em matrizes gráficas e podem ser utilizadas, por exemplo, na compressão e armazenamento de imagens.

Além de verificarmos a formação de memórias de curta duração numa rede de mapas acoplados, estudamos a formação de memórias numa rede de osciladores Colpitts acoplados através de fios com resistência variável. O sistema apresenta a formação de memória permanente e, com uma pequena perturbação externa e uma pequena constante de acoplamento, verifica-se oscilações nos valores da resposta das memórias com o passar do tempo. Quando a perturbação externa é nula e o valor da constante de acoplamento é aumentada, ou quando aumentamos o valor da perturbação externa e deixamos nula a constante de acoplamento, verifica-se em ambos os casos, sem adicionarmos conexões não-locais, que o tempo para a formação da memória diminui.

Inserindo conexões aleatórias não-locais no sistema, juntamente com uma perturbação externa, verificamos a dependência da formação da memória permanente com o tamanho da rede, ou melhor, com a quantidade de osciladores Colpitts acoplados. Aumentando o tamanho da rede, conseqüentemente aumenta-se o número de conexões não-locais que serão inseridas, os valores da variável de curvatura diminuem com o passar do tempo.

Como o desvio padrão não é nulo fica evidenciado que múltiplas memórias surgem no sistema e conforme o tamanho da rede aumenta os circuitos acoplados apresentam uma quantidade menor de memória armazenada.

Como trabalho futuro pretende-se estudar circuitos elétricos de Colpitts acoplados aplicando o conceito de reservatório. Estudos recentes [126] mostram que ao invés de termos um sistema complexo com N circuitos acoplados, podemos utilizar um reservatório de informações [126–128]. Para isso, são inseridas nas equações diferenciais que compõem os circuitos elétricos um atraso. Esta nova arquitetura reduz o número da quantidade de elementos e circuitos para um sistema com equações diferenciais com atraso mostrando-se eficiente no processamento da informação [126]. Tarefas que são consideradas computacionalmente difíceis, tais como previsão de tempo, séries caóticas, reconhecimento da fala, entre outros, são realizadas com sucesso através do uso do reservatório “*reservoir*”.

Outro trabalho futuro é o desenvolvimento experimental de osciladores Colpitts acoplados para estudar o transiente nas simulações computacionais, bem como, implementar experimentalmente a formação de memórias.

Referências

- [1] ZHANG, H.; LIU, D.; WANG, Z. **Controlling Chaos: suppression, synchronization and chaotification**. Springer-Verlag, London, 2009.
- [2] CHUA, L. O. The genesis of Chua's circuit. **Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik**, v. 46, n. 4, p. 250-257, 1992.
- [3] RÖSSLER, O. E. An equation for continuous chaos. **Physics Letters A**, v. 5, p. 397-398, 1976.
- [4] NEWTON, I. **De Methodis Serierum et Fluxionum**. Editado por WHITESIDE, D. T.; Traduzido por COLSON, J. Cambridge University Press, 1736.
- [5] VIANA, R. L. **Introdução à dinâmica não-linear e caos**. Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná - UFPR, Curitiba, 2011.
- [6] POINCARÉ, H. J. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. **Acta Mathematica**, v. 13, p. 1-270, 1890.
- [7] MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**. 2ª edição. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2006.
- [8] MOURA, A. P. S.; LAI, Y. C.; AKIS, R.; BIRD, J. P.; FERRY, D. K. Tunneling e nonhyperbolicity in quantum dots. **Physical Review Letters**, v. 88, p. 1-4, 2002.
- [9] ARNEODO, A.; COULLET, P.; TRESSER, C. Occurrence of strange attractors in three-dimensional Volterra equations. **Physics Letters A**, v. 79, p. 259-263, 1980.
- [10] HOPFIELD, J. J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. **Proceedings of National Academy of Science, E.U.A.**, v. 79, p. 2554-2558, 1982.
- [11] ABRAHAM, E. R. The generation of plankton patchiness by turbulent stirring. **Nature**, v. 391, p. 577-580, 1998.
- [12] WATTS, D. J. **Small Worlds: the dynamics of networks between order and randomness**. Princeton Studies in Complexity, Princeton University Press, New Jersey, 1999.

- [13] KÁROLYI, G.; PENTÉK, A.; TOROCZKAI, Z.; TÉL, T.; GREBOGI, C. Chemical or biological activity in open chaotic flows. **Physical Review E**, v. 59, n. 5, p. 5468-5481, 1999.
- [14] BARABÁSI, A. L. **Linked: the new science of networks**. Perseus Publishing, 2002.
- [15] IZHIKEVICH, E. M. Neural excitability, spiking and bursting. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 10, p. 1171-1266, 2000.
- [16] MAY, R. M. **Theoretical Ecology: principles and applications**. Blackwell Scientific Publications, Oxford, 1976.
- [17] LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of Atmospheric Sciences**, v. 20, p. 130-141, 1963,
- [18] CHUA, L. O.; LIN, G. N. Canonical realization of Chua's circuit family. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, v. 37, n. 7, p. 885-902, 1990.
- [19] KENNEDY, M. P. Chaos in the Colpitts oscillator. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, v. 41, p. 771-774, 1994.
- [20] STROGATZ, S. H. **Nonlinear dynamics and chaos with applications to physics, biology, chemistry and engineering**. Perseus Books Publishing, New York, 1999.
- [21] ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **Chaos an introduction to dynamical systems**. Springer-Verlag, Inc, New York, 1997.
- [22] OTT, E. **Chaos in dynamical systems**. Cambridge University Press, E.U.A., 1993.
- [23] KANEKO, K. **Theory and applications of coupled map lattices**. 2nd Edition, John Wiley Sons, New York, 1993.
- [24] DE FEO, O.; MAGGIO, G. M. Bifurcations in the Colpitts oscillator: from theory to practice. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 13, n. 10, p. 2917-2934, 2003.
- [25] CRAFT, E. B. Airways communication service. **Bell System Technical Journal**, v. 7, n. 4, p. 797-807, 1928.
- [26] BONETTI, R. C.; BATISTA, A. M. Sincronização e memórias em osciladores Colpitts acoplados. **Revista Sodebras**, v. 9, n. 105, 2014.
- [27] UCHIDA, A.; KAWANO, M.; YOSHIMORI, S. Dual synchronization of chaos in Colpitts electronic oscillators and its applications for communications. **Physical Review E**, v. 68, n. 5, p. 056207, 2003.

- [28] FEKI, M. An adaptive chaos synchronization scheme applied to secure communication. **Chaos, Solitons and Fractals**, v. 18, p. 141-148, 2003.
- [29] PECORA, L. M.; CARROLL, T. L. Synchronization in chaotic systems. **Physical Review Letters**, v. 64, n. 8, p. 821-825, 1990.
- [30] CARROLL, T. L.; PECORA, L. M. Synchronizing chaotic circuits. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, v. 38, n. 4, p. 453-456, 1991.
- [31] SHANNON, C. E.; WEAVER, W. **The mathematical theory of communication**. 10^a edição, The University of Illinois Press, Illinois, 1964.
- [32] CUOMO, K. M.; OPPENHEIM, A. V. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications. **Physical Review Letters**, v. 71, n. 1, p. 65-68, 1993.
- [33] EISENCRAFT, M.; BATISTA, A. M. Discrete-time chaotic systems synchronization performance under additive noise. **Signal Processing**, v. 91, p. 2127-2131, 2011.
- [34] KENNEDY, M. P.; SETTI, G.; ROVATTI, R. **Chaotic electronics in telecommunications**. CRC Press Inc, Boca Raton, Flórida, E.U.A., 2000.
- [35] LAU, F. C. M.; TSE, C. K. **Chaos-based digital communication systems**. Springer, Berlin, 2003.
- [36] WILLIAMS, C. Chaotic communications over radio channels. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, v. 48, n. 12, p. 1394-1404, 2001.
- [37] ROZENBLIT, F.; COPELLI, M. Collective oscillations of excitable elements: order parameters, bistability and the role of stochasticity. **Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment**, v. 2011, p. 01012, 2011.
- [38] BONETTI, R. C.; SOUZA, S. L. T.; BATISTA, A. M.; SZEZECH, J. D. Jr.; CALDAS, I. L.; VIANA, R. L.; LOPES, S. R.; BAPTISTA, M. S. Super persistent transient in a master-slave configuration with Colpitts oscillators. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 47, 405101, 2014.
- [39] SAVI, M. A. **Dinâmica não-linear e caos**. E-papers Serviços Editoriais Ltda, Rio de Janeiro, 2006.
- [40] KANEKO, K. Supertransients, spatiotemporal intermittency and stability of fully developed spatiotemporal chaos. **Physics Letters A**, v. 149, p. 105-112, 1990.
- [41] WILLEBOORDSE, F. Selection of windows, attractors and self-similar patterns in a coupled map lattice. **Chaos, Solitons and Fractals**, v. 2, n. 6, p. 609-634, 1992.
- [42] LAI, Y. -C.; TÉL, T. **Transient chaos: complex dynamics on finite-time scales**. Springer, New York, 2010.

- [43] GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Fractal basin boundaries, long-lived chaotic transients, and unstable-unstable pair bifurcation. **Physical Review Letters**, v. 50, p. 935-938, 1983.
- [44] COPPERSMITH, S. N.; JONES, T. C.; KADANOFF, L. P.; LEVINE, A.; MCCARTEN, J. P.; NAGEL, S. R.; VENKATARAMANI, S. C.; WU, X. Self-organized short-time memories. **Physical Review Letters**, v. 78, n. 21, p. 3983-3986, 1997.
- [45] BONETTI, R. C.; BATISTA, C. A. S.; BATISTA, A. M.; PINTO, S. E. de S.; LOPES, S. R.; VIANA, R. L. Short-time memories in a network with randomly distributed connections. **Physical Review E**, v. 78, p. 037102-1 - 037102-4, 2008.
- [46] NEWMAN, M. E.; WATTS, D. J. Scaling and percolation in the small-world network model. **Physical Review E**, v. 60, n. 6, p. 7332-7342, 1999.
- [47] COURANT, R.; HILBERT, D. **Methods of mathematical physics**. v. 1, Wiley-VCH Verlag, Weinheim, 2004.
- [48] FEIGENBAUM, M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. **Journal of Statistical Physics**, v. 19, p. 25-52, 1978.
- [49] HÉNON, M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. **Communications in Mathematical Physics**, v. 50, n. 1, p. 69-77, 1976.
- [50] MALTHUS, T. **Ensaio sobre o princípio da população**. Editora Mira-Sintra, Publicações Europa-América, 1798.
- [51] GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. **Nonlinear oscillations dynamical systems and bifurcations of vectors fields**. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [52] MANDELBROT, B. **The fractal geometry of nature**. W. H. Freeman, San Francisco, 1982.
- [53] LYAPUNOV, A. M. **Stability of Motion**. Academic Press, New York, 1966.
- [54] LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. **Regular and stochastic motion**. Springer-Verlag, Berkeley, 1983.
- [55] SAVI, M. A.; PACHECO, P. M. C. L. Chaos and hyperchaos in shape memory systems. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 12, n. 3, p. 645-657, 2002.
- [56] GREBOGI, C.; OTT, E.; PELIKAN, S.; YORKE, A. Strange attractors that are not chaotic. **Physica D**, v. 13, p. 261-268, 1984.
- [57] WIGGINS, S. **Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos**. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 1990.

- [58] BENETTIN, G.; GALGANI, L.; GIORGILLI, A.; STRELCYN, J. M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory. Part 2: Numerical application. **Meccanica**, v. 15, p. 9–30, 1980.
- [59] WOLF, A.; SWIFT, J. B.; SWINNEY, H. L.; VASTANO, J. A. Determining Lyapunov exponents from a time series. **Physica D**, v. 16, p. 285-317, 1985.
- [60] RUELLE, D.; TAKENS, F. On the nature of turbulence. **Communications in Mathematical Physics**, v. 20, n. 3, p. 167-192, 1971.
- [61] ANDERSON, P. W. Absence of diffusion in certain random lattices. **Physical Review**, v. 109, n. 5, p. 1492–1505, 1958.
- [62] NASCIMENTO, M. A.; GALLAS, J. A. C.; VARELA, H. Self-organized distribution of periodicity and chaos in an electrochemical oscillator. **Physical Chemistry Chemical Physics**, v. 13, p. 441-446, 2011.
- [63] KANEKO, K. **Collapse of tori and genesis of chaos in dissipative systems**. Ph. D. Thesis, (uma versão foi publicada pela editora World Scientific, Singapore, 1886), p. 222, 1983.
- [64] HASSARD, B. D.; KAZZARINOFF, N. D.; WAN, Y. H. **Theory and Application of Hopf Bifurcation**. Cambridge University Press, New York, 1981.
- [65] BASSO, M.; GENESIO, R.; TESI, A. A frequency method for predicting limit cycle bifurcations. **Nonlinear Dynamics**, v. 13, p. 339-360, 1997.
- [66] CHUA, L. O.; KOMURO, M.; MATSUMOTO, T. The double scroll family. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, v. 33, p. 1073-1118, 1986.
- [67] SEDRA, S.; SMITH, K. **Microelectronic Circuits**. Oxford University Press, New York, 4th edition, 1998.
- [68] RAZAVI, B. **RF Microelectronics**. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, v. 07458, 1998.
- [69] STONE, E. W. **Elements of Radiotelegraphy**. D. Van Nostrand Company, New York, 1919.
- [70] BRITAIN, J. E. Edwin H. Colpitts: A pioneer in communications engineering. **Proceedings of the IEEE**, v. 85, n. 6, p. 1020-1021, 1997.
- [71] CHUA, L. O.; DESOER, C. A.; KUH, E. S. **Linear and Nonlinear Circuits**. McGraw-Hill, New York, 1987.
- [72] ROCHA, J. G. **MOSFETS e amplificadores operacionais**. Editora Netmove Comunicação Global Ltda, Porto, 2005.

- [73] MALVINO, A.; BATES, D. J. **Eletrônica: Diodos, Transistores e Amplificadores**. 7ed, AMGH Editora, Porto Alegre, 2007.
- [74] CHRISTIANSEN, D. **Electronics Engineers Handbook**. McGraw-Hill for IEEE Press, New York, NY, 1997.
- [75] SCHULER, C. **Eletrônica II**. McGraw-Hill, Porto Alegre, 2013.
- [76] MILLMAN, J.; GRABEL, A. **Microelectronics**. McGraw-Hill, Singapore, 2nd edition, 1988.
- [77] KANO, K. **Semiconductor devices**. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1998.
- [78] MALVINO, A. **Electronic Principles**. McGraw-Hill Education, India, 7th edition, 2007.
- [79] SCHULER, C. **Eletrônica I**. McGraw-Hill, Porto Alegre, 2013.
- [80] ELWAKIL, A. S.; KENNEDY, M. P. A family of Colpitts-like chaotic oscillators. **J. Franklin Institute**, v. 336, p. 687-700, 1999.
- [81] MAGGIO, G. M.; DE FEO, O.; KENNEDY, M. P. Application of bifurcation analysis to the design of a chaotic Colpitts oscillator. **Proc. Int. Conf. Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA)**, Crans-Montana, Switzerland, v. 3, p. 875-878, 1998.
- [82] DE FEO, O.; MAGGIO, G. M.; KENNEDY, M. P. The Colpitts oscillator: families of periodic solutions and their bifurcations. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 10, n. 5, p. 935-958, 2000.
- [83] TIPLER, P. A. **Física**. LTC, Rio de Janeiro, 4ª Edição, 2000.
- [84] RICKER, W. Stock and recruitment. **Journal of Fishing Resources Board of Canada**, v. 11, p. 559-623, 1954.
- [85] FEIGENBAUM, M. The universal metric properties of nonlinear transformations. **Journal of Statistical Physics**, v. 21, p. 669-706, 1979.
- [86] ROMEIRAS, F. J.; GREBOGI, C.; OTT, E.; DAYAWANSA, W. P. Controlling chaotic dynamical systems. **Physica D**, v. 58, p. 165-192, 1992.
- [87] GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Chaotic Attractors in Crisis. **Physical Review Letters**, v. 48, p. 1507-1510, 1982.
- [88] MATA-MACHUCA, J. L.; MARTÍNEZ-GUERRA, R. Asymptotic synchronization of the Colpitts oscillator. **Computers and Mathematics with Applications**, v. 63, p. 1072-1078, 2012.

- [89] SHI, Z.; RAN, L.; CHEN, K. Synchronizing chaotic Colpitts oscillators pair and Chua's circuits pair simultaneously using one scale signal. **International Conference on Communications, Circuits and Systems**, v. 2, n. 05, p. 1149-1153, 2005.
- [90] KENNEDY, M. P. On the relationship between the chaotic Colpitts oscillator and Chua oscillator. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, v. 42, n. 6, p. 376-380, 1995.
- [91] SANTOS, A. M. **Sincronização entre dois osciladores de Van der Pol acoplados**. Dissertação de Mestrado, UFPR, 2002.
- [92] PIKOVSKY, A.; ROSENBLUM, M.; KURTHS, J. **Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences**. Cambridge University Press, 2001.
- [93] BOCCALETTI, S.; KURTHS, J.; OSIPOV, G.; VALLADARES, D. L.; ZHOU, C. S. The synchronization of chaotic systems. **Physics Reports**, v. 366, n. 1-2, p. 1-101, 2002.
- [94] GLASS, L. Synchronization and rhythmic processes in physiology. **Nature**, v. 410, p. 277-284, 2001.
- [95] WU, L.; ZHU, S. Q. Multi-channel communication using chaotic synchronization of multi-mode lasers. **Physics Letters A**, v. 308, n. 2, p. 157-161, 2003.
- [96] HEAGY, J. F.; CARROLL, T. L.; PECORA, L. M. Synchronous chaos in coupled oscillator systems. **Physical Review E**, v. 50, n. 3, p. 1874-1885, 1994.
- [97] ZHENG, Z.; HU, G. Generalized synchronization versus phase synchronization. **Physical Review E**, v. 62, n. 6, p. 7882-7885, 2000.
- [98] ROSENBLUM, M. G.; PIKOVSKY, A. S.; KURTHS, J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. **Physical Review Letters**, v. 78, n. 22, p. 4193-4196, 1997.
- [99] SANTOS, A. M.; LOPES, S. R.; VIANA, R. L. Rhythm synchronization and chaotic modulation of coupled Van der Pool oscillators in a model for the heartbeat. **Physica A**, v. 338, n. 3-4, p. 335-355, 2004.
- [100] GADE, P. M.; CERDEIRA, H. A.; RAMASWAMY, R. Coupled maps on trees. **Physical Review E**, v. 52, p. 2478-2485, 1995.
- [101] CAMARGO, S.; VIANA, R. L.; ANTENEODO, C. Intermingled basins in coupled Lorenz systems. **Physical Review E**, v. 85, p. 036207, 2012.
- [102] GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Crises, sudden changes in chaotic attractors and chaotic transients. **Physica D**, v. 7, p. 181-200, 1983.

- [103] ZHU, L.; RAGHU, A.; LAI, Y. -C. Experimental observation of super persistent chaotic transients. **Physical Review Letters**, v. 86, n. 18, p. 4017-4020, 2001.
- [104] BRAUN, R.; FEUDEL, F. Supertransient chaos in the two-dimensional complex Ginzburg-Landau equation. **Physical Review E**, v. 53, n. 6, p. 6562-6565, 1996.
- [105] GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Super persistent chaotic transients. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, v. 5, n. 03, p. 341-372, 1985.
- [106] ANDRADE, V.; LAI, Y. -C. Super persistent chaotic transients in physical systems: effect of noise on phase synchronization of coupled chaotic oscillators. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 11, n. 10, p. 2607-2619, 2001.
- [107] OTT, H. W. **Electromagnetic Compatibility Engineering**. John Wiley Sons, New Jersey, 2009.
- [108] HONG, S.; SHI, Z.; WANG, L.; GU, Y.; CHEN, K. Adaptive regularized particle filter for synchronization of chaotic Colpitts circuits in an AWGN channel. **Circuits Systems and Signal Processing**, v. 32, p. 825-841, 2013.
- [109] SHI, S.; HONG, S.; CHEN, K. Experimental study on tracking the state of analog Chua's circuit with particle filter for chaos synchronization. **Physics Letters A**, v. 372, p. 5575-5580, 2008.
- [110] COPPERSMITH, S. N.; LITTLEWOOD, P. B. Pulse-duration memory effect and deformable charge-density waves. **Physical Review B**, v. 36, n. 1, p. 311-317, 1987.
- [111] TANG, C.; WIESENFELD, K.; BAK, P.; COPPERSMITH, S. N.; LITTLEWOOD, P. Phase organization. **Physical Review Letters**, v. 58, p. 1161-1164, 1987.
- [112] COPPERSMITH, S. N. Overdamped Frenkel-Kontorova model with randomness as a dynamical system: mode locking and derivation of discrete maps. **Physical Review A**, v. 36, p. 3375-3382, 1987.
- [113] COPPERSMITH, S. N. Nonlinear dynamics of sliding charge density waves. **Physica D**, v. 51, pg. 131-137, 1991.
- [114] BATISTA, A. M.; VIANA, R. L.; LOPES, S. R. Multiple short-time memories in coupled weakly nonlinear map lattices. **Physical Review E**, v. 61, n. 5, p. 5990-5993, 2000.
- [115] PONTES, J. A. C.; BATISTA, A. M.; VIANA, R. L.; LOPES, S. R. Short-term memories with a stochastic perturbation. **Chaos, Solitons and Fractals**, v. 23, p. 1689-1694, 2005.
- [116] BATISTA, A. M.; VIANA, R. L. Short-term memories in lattices of inductively coupled AC-driven circuits. **Physica A**, v. 303, p. 410-420, 2002.

- [117] PONTES, J. C. A.; BATISTA, A. M.; VIANA, R. L.; LOPES, S. R. Self-organized memories in coupled map lattices. **Physica A**, v. 368, p. 387-398, 2006.
- [118] BUCHANAN, M. **Nexus: small worlds and the groundbreaking theory of networks**. W. W. Norton e Company, New York, 2002.
- [119] ERDÖS, P.; RÉNYI, A. On random graphs. **I. Publ. Math.**, v. 6, p. 290-297, 1959.
- [120] WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Collective dynamics of small-world networks. **Nature**, v. 393, p. 440-442, 1998.
- [121] STROGATZ, S. H. Exploring complex networks. **Nature**, v. 410, p. 268-276, 2001.
- [122] ALBERT, R.; BARABÁSI, A. L. Statistical mechanics of complex networks. **Reviews of Modern Physics**, v. 74, p. 47-96, 2002.
- [123] BARABÁSI, A. L.; BONABEAU, E. Scale-free networks. **Scientific American**, may, p. 50-59, 2003.
- [124] MILGRAM, S. The small-world problem. **Psychology Today**, v. 2, p. 61-67, 1967.
- [125] NEWMAN, M. E. Models of the small-world. **Journal of Statistical Physics**, v. 101, n. 3, p. 1-23, 2000.
- [126] APPELTANT, L.; SORIANO, M. C.; VAN DER SANDLE, G.; DANCKAERT, J.; MASSAR, S.; DAMBRE, J.; SCHRAUWEN, B.; MIRASSO, C. R.; FISCHER, I. Information processing using a single dynamical node as complex system. **Nature Communications**, v. 10.1038, p. 1476, 2011.
- [127] MAASS, W.; NATSCHLÄGER, T.; MARKRAM, H. Real-time computing without stable states: a new framework for neural computation based on perturbations. **Neural Computation**, v. 14, p. 2531-2560, 2002.
- [128] VERSTRAETEN, D.; SCHRAUWEN, B.; D'HAENE, M.; STROOBANDT, D. An experimental unification of reservoir computing methods. **Neural Networks**, v. 20, p. 391-403, 2007.